两点边值问题的有限元算法

付小龙　李名　李小瑞
（中国矿业大学（北京）100083）

摘要：在两点边值问题的解法中，普通方法在计算过程中存在离散误差大，容易导致问题病态等诸多问题。有限元方法把边值问题化为变分问题，由变分方程后求解近似解；有限元方法能很好的解决求解区域复杂，边条件包含第二、第三类变条件问题等诸多优点。因此，研究两点边值问题的有限元算法具有很好的应用意义。

关键字：两点边值问题 有限元

一、引言

许多科学和工程问题可归结为常微分方程组的两点边值问题，研究此类问题的求解方法具有重要的理论和应用意义。在两点边值问题的解法中，普通方法在计算过程中存在离散误差大，容易导致问题病态等诸多问题。有限元方法把边值问题化为变分问题，得到近似变分方程，求解方程；有限元方法能很好的解决求解区域复杂，边条件含有第二、第三类变条件问题等诸多优点。

二、两点边值问题的有限元方法

考虑两点边值问题（P）

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(p(x)\dfrac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}\right)+q(x)u = f(x), a<x<b, \\ u(a)=0, \\ p(b)u^{'}(b)+\sigma u(b)=\beta, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $p(x)\geq p_0>0, q(x)\geq 0$，且 $p(x)\in \mathrm{C}^1(\bar{I}), q(x), f(x)\in C(\bar{I})$，$e_i$，常数 $\sigma\geq 0,\beta$ 为已知常数。

定义空间

$$J(u_h)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}u^{(i)\mathrm{T}}A^{(i)}u^{(i)}-\sum_{i=1}^{n}u^{(i)\mathrm{T}}b^{(i)}+\frac{1}{2}\sigma u_n^2-\beta u_n\,, \tag{2}$$

引入定义在 V 的二次泛函

$$J(v)=\int_a^b\{\frac{1}{2}[p(x)v^{'}(x)^2+q(x)v(x)^2]-f(x)v(x)\}\,\mathrm{d}\,x+\frac{1}{2}\sigma v(b)^2-\beta v(b) \tag{3}$$

其中的导函数为广义导数。

对区间 $\bar{I}$ 进行网格划分：

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把 $\overline{I}$ 分成 n 个相邻的小区域 $e_i = [x_{i-1}, x_i]$，称每个小区间 e_i 为单元，其长度 $h_i = x_i - x_{i-1}$。为了使计算过程标准化，我们通过一个放射变换

$$\xi = \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, x \in e_i$$

把单元 $e_i = [x_{i-1}, x_i]$ 变为 ξ 轴上的标准单元 $\hat{e} = [0,1]$. 标准单元 $\hat{e}$ 的长度为 1，而且两个端点为 $\xi = 0$ 和 $\xi = 1$，所以在 $\hat{e}$ 上作插值时表达式是十分简单的。定义两个线性函数

$$N_0(\xi) = 1 - \xi, \quad N_1(\xi) = \xi, \quad \xi \in [0,1]$$

则 $u_h(\xi)$ 在 $\hat{e}$ 上的表达式就是

$$u_h(\xi) = N_0(\xi)u_{i-1} + N_1(\xi)u_i$$

则有

$$J(u_h) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_1^{(i)}u_{i-1}^2 + 2a_2^{(i)}u_{i-1}u_i + a_3^{i}u_i^2) - \sum_{i=1}^{n}(b_1^{(i)}u_{i-1} + b_2^{(i)}u_i) + \frac{1}{2}\sigma u_n^2 - \beta u_n \tag{4}$$

其中

$$\begin{cases} a_1^{(i)} = \int_0^1 [p(x_{i-1} + h_i\xi)h_i^{-1} + q(x_{i-1} + h_i\xi)N_0(\xi)^2 h_i]\,\mathrm{d}\xi \\ a_2^{(i)} = \int_0^1 [-p(x_{i-1} + h_i\xi)h_i^{-1} + q(x_{i-1} + h_i\xi)N_0(\xi)N_1(\xi)h_i]\,\mathrm{d}\xi \\ a_3^{(i)} = \int_0^1 [p(x_{i-1} + h_i\xi)h_i^{-1} + q(x_{i-1} + h_i\xi)N_1(\xi)^2 h_i]\,\mathrm{d}\xi \\ b_1^{i} = \int_0^1 f(x_{i-1} + h_i\xi)N_0(\xi)h_i\,\mathrm{d}\xi \\ b_2^{i} = \int_0^1 f(x_{i-1} + h_i\xi)N_1(\xi)h_i\,\mathrm{d}\xi \end{cases} \tag{5}$$

引入二维列向量

$$u^{(i)} = [u_{i-1}, u_i]^{\mathrm{T}}, \quad b^{(i)} = [b_1^{(i)}, b_2^{(i)}]^{\mathrm{T}} \text{和二维矩阵} A^{(i)} = \begin{bmatrix} a_1^{(i)} & a_2^{(i)} \\ a_2^{(i)} & a_3^{(i)} \end{bmatrix}$$

$A^{(i)}$（称之为单元 e_i 的刚度矩阵）和 $b^{(i)}$ 的元素都是在 e_i 上的积分。如果把 $A^{(i)}$ 扩充为只有 4 个非零元素的 $n+1$ 阶方阵

$$A^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & a_1^{(i)} & a_2^{(i)} & & \leftarrow & i-1\text{列} \\ & & a_2^{(i)} & a_3^{(i)} & & \leftarrow & i\text{列} \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & \uparrow & \uparrow & & 0 & \\ & & i-1\text{列} & i\text{列} & & & \end{bmatrix}$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$b^{(i)}$ 扩充为只有第 $i-1$ 和第 i 个分量非零的 $n+1$ 维列向量

$b^{(i)}=[0,\cdots,0,\mathrm{b}_1^{(i)},b_2^{(i)},0\cdots,0]^{\mathrm{T}}$，并且记 $u=[u_0,u_2,\cdots,u_{i-1},u_i,\cdots,u_{n-1},u_n]^{\mathrm{T}}$

则有 $Ku-f=0=\frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{n}A^{(i)})u-u^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{n}b^{(i)})+\frac{1}{2}\sigma u_n^2-\beta u_n$ 。(6)

经过对每个单元 $e_i(1\le i\le n)$ 的单元分析和总体合成的过程，我们就得到矩阵 A 和向量 b 。

在（6）试中，再把 $\frac{1}{2}\sigma u_n^2$ 和 $-\beta u_n$ 分别归入 $\frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}Au$ 和 $-u^{\mathrm{T}}b$，则 $J(u_h)=\frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}Ku-u^{\mathrm{T}}f$，

当泛函 J 在 $u_h\in V_h$ 达到极小值时必有

$$Ku-f=0$$

求解方程组，解出向量 u 就是边值问题的近似解。

三、 算例

算例如下：取 $u(x)=\sin\frac{\pi}{2}x,p=1,u''(x)=-\frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{2}x,q(x)=\frac{3}{4}\pi^2$. 则有两点边值问题如下：

$$\begin{cases}-\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{3}{4}\pi^2u=\pi^2\sin\frac{\pi}{2}x,0<x<1,\\ u(0)=0,\\ u'(1)=0,\end{cases}$$

利用 matlab 编程实现该算法，计算算例结果如图 1 所示：

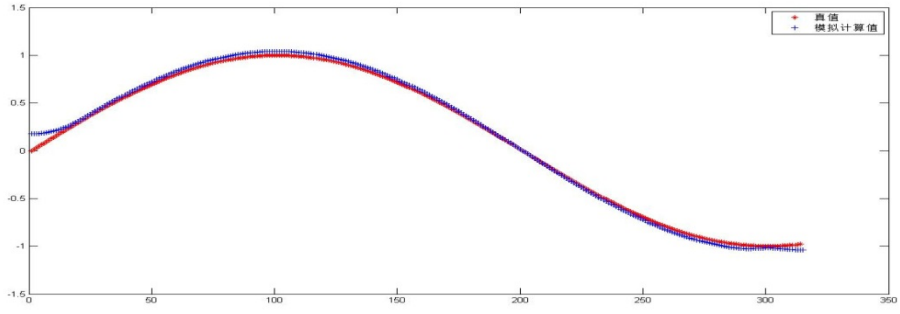

图 1 结果图

从图 1 可以直观看到有限元算法能很好的解决此类问题。

参考文献

1. 胡建伟，汤怀民．微分方程数值方法（第二版）[M].北京：科学出版社，2007．
2. 富明慧 ，张文志．两点边值问题的一种精细求解方法 [J]. 应用力学学报, 2010.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.   http://www.cnki.net