МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені Тараса Шевченка
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
Кафедра програмних систем і технологій

Дисципліна
«Ймовірнісні основи програмної інженерії»

Лабораторна робота № 5
«Класичний та статистичний методи визначення ймовірності та обчислення»

Виконала:	Саніна В.О.	**Перевірив**:	Марцафей А.С.
Група	ІПЗ-21	Дата перевірки	
Форма навчання	денна	Оцінка	
Спеціальність	121		

2022

Тема: дискретні розподіли ймовірностей

Мета: навчитись використовувати на практиці набуті знання про центральні тенденції та міри.

Завдання:

1. Аналітичним шляхом розв'язати вказані задачі.
1. Ймовірність знаходження в кожному прибулому потязі вагонів на дане призначення 0,2. Визначити ймовірність того, що в трьох із п'яти потягів, які прибувають протягом однієї години, будуть вагони на дане призначення.
2. Знайти ймовірність того, що в п'яти незалежних випробуваннях подія А відбудеться: а) рівно 4 рази; б) не менше 4 разів, якщо в кожному випробуванні ймовірність появи події становить 0,8.
3. На кондитерській фабриці 20% всіх цукерок складають льодяники. Знайти ймовірність того, що серед 400 вибраних навмання цукерок буде рівно 80 льодяників.
4. На автомобільному заводі у звичному режимі роботи з конвеєра сходить 100000 автомобілів. Ймовірність бракованого автомобіля дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що з конвеєра зійшло 5 бракованих автомобілів.
5. Ймовірність того, що пара взуття, яка взята навмання з виготовленої партії виявиться вищого ґатунку дорівнює 0,4. Чому дорівнює ймовірність того, що серед 600 пар, які поступили на контроль, виявиться від 228 до 252 пар взуття вищого ґатунку?
6. Банк обслуговує 100 клієнтів, від кожного з яких може надійти вимога на проведення фінансової операції на наступний день з ймовірністю 0,4. Знайти найімовірніше число вимог клієнтів кожного дня, та його ймовірність.
7. Завод випускає в середньому 4% нестандартних виробів. Яка ймовірність того, що число нестандартних виробів у партії з 4000 штук не більше 170?.
8. Яка ймовірність того, що при 10000 незалежних киданнях монети герб випаде 5000 разів?
9. Фірма відправила на базу 1000 якісних виробів. Ймовірність того, що вироби в дорозі пошкодяться дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що на базу прибуде 5 пошкоджених виробів.
10. Нехай ймовірність того, що грошовий приймальник автомату при опусканні монети скидає неправильно дорівнює 0,03. Знайти найімовірніше число випадків правильної роботи автомату, якщо буде кинуто 150 монет.

Математична модель:

Формула сполучення:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(m-k)!}$$

Бернуллі: $P_n = C_n^m * p^m * q^{n-m}$

m – кількість разів, коли відбудеться подія

n – загальна кількість експериментів,

p – ймовірність появи випадкової події,

q = p – 1 – ймовірність не появи випадкової події

Локальна теорема Муавра-Лапласа: $p_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_m)$

$\varphi(x_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}$

m – кількість разів, коли відбудеться подія

n – загальна кількість експериментів,

p – ймовірність появи випадкової події,

q = p – 1 – ймовірність не появи випадкової події

Теорема Пуассона: $\lambda = np$

$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

m – кількість разів, коли відбудеться подія

n – загальна кількість експериментів,

p – ймовірність появи випадкової події,

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа: $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$

$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$

$\Phi(x) = \frac{1^x}{\sqrt{2\pi}} \int_0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$P_n = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$

Ф(-x) = -Ф(x);

Якщо x > 5 Ф(x) ≈ 0,5;

Якщо x < -5 Ф(x) ≈-0,5

n – загальна кількість експериментів,

p – ймовірність появи випадкової події,

q = p – 1 – ймовірність не появи випадкової події

m1 та m2 – межі кількостей появи події

Аналітичний розв’язок:

(5) 1. ймовірність – 0,2
в 3 з 5 вагони – ?

За ф. Бернуллі:

$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}2^3 \cdot (1-0{,}2)^{5-3} =$
$= 0{,}051$

2. 5 експериментів – ймов. 0,8

– рівно 4 рази $P(4) = C_5^4 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^1 = 0{,}41$

– не менше 4 разів: $P(4) + P(5) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 +$
$+ C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = C_5^4 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^1 + C_5^5 \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^5 = 0{,}738$

3. льодяники – 20%
з 400шт – 80

$\Rightarrow$ $n = 400$, $k = 80$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$

$P_{400}(80) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot \varphi(x)$

$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 0{,}3989$

$P_{400}(80) = \frac{1}{8} \cdot 0,3949 \approx 0,04936$

4. Звичайний режим - 100000 авто

ймовірність браку - 0,0001

ймовірність 5 браку - ?

$\lambda = np$, $\lambda = 100000 \cdot 0,0001 = 10$

$P_{10000}(5) = \frac{10^5}{5!} \cdot e^{-10} = 0,0378$

5. Ймовірність вищого ґатунку - 0,4

ймовірність, що серед 600 пар від 228 до 252

$n = 600$
$p = 0,4$
$q = 0,6$
$m_1 = 228$
$m_2 = 252$

$\Rightarrow$

$\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{228 - 600 \cdot 0,4}{\sqrt{600 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} = -1$

$\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{252 - 600 \cdot 0,4}{\sqrt{600 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} = 1$

$\Phi(-1) = -\Phi(1) = -0,3413$

$\Phi(1) = 0,3413$

$P = 0,3413 - (-0,3413) = 0,6826$

6. клієнтів - 100 $\quad$ Т $100 \cdot 0,4 = 40$

ймовірність - 0,4 $\quad$ Лапласа

$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = 4,8989$

$x = \frac{40 - (100 \cdot 0,4)}{4,8989} = 0$

$\varphi(x) = 0,3989$

$P = \frac{0,3989}{4,8989} = 0,0812$

7. Нестандартних виробів - 4%

У партії з 4000 штук не більше 170

$n = 4000$
$p = 0{,}04$
$q = 0{,}96$
$m_1 = 170$
$m_2 = 0$

$$\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{170 - 4000 \cdot 0{,}04}{\sqrt{4000 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96}} = 0{,}807$$

$$\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 4000 \cdot 0{,}04}{\sqrt{4000 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96}} = -12{,}910$$

$\Phi(x_2) = -0{,}5$

$\Phi(x_1) = \Phi(0{,}807) \approx 0{,}291$

$P_{4000}(0 \le m \le 170) = 0{,}291 + 0{,}5 = 0{,}791$

8. при 10.000 - герб 5000

$n = 10.000$
$m = 5.000$
$p = 0{,}5$
$q = 0{,}5$

$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$, $x = \frac{5000 - 10000 \cdot 0{,}5}{\sqrt{npq}} =$

$= \frac{5000 - 10000 \cdot 0{,}5}{\sqrt{10.000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = 0$

$\varphi(0) = 0{,}3989$

$P_{10000}(5000) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{0{,}3989}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = 0{,}007978$

9. Якісних виробів - 1000

ймовірність пошкодження = 0,002

ймовірність 5 пошк. - ?

$\lambda = nm = 1000 \cdot 0{,}002 = 2$

~~P_{100}~~ $P_{1000}(5) = \frac{2^5}{5!} \cdot e^{-2} = 0{,}0361$

10. ймов. неправильного = 0,03

всього 150 монет ⇒ найймовірн. число прав. роботи ⇒ $n = 150$, $p = 0{,}97$

$k_1 = 150 \cdot 0{,}97 - 0{,}03 = 145{,}47$

$k_2 = 150 \cdot 0{,}97 + 0{,}97 = 146{,}47$

$N = 146$

Псевдокод алгоритмів:

Формула сполучення:

result = факторіал n / факторіал k * факторіал різниці n та k

Формула пошуку інтеграла для інтегральної теорема Муавра-Лапласа:

вираз = експонента_у_степені(-x**2 / 2)
return інтеграл(вираз, (x, нижня межа інтеграла, верхня межа інтеграла))

Функція Бернуллі:

result= сполучення(кількість разів, коли відбудеться подія, загальна кількість експериментів)*(ймовірність появи випадкової події ** кількість разів, коли відбудеться подія)*(ймовірність не появи випадкової події **(загальна кількість експериментів - кількість разів, коли відбудеться подія))
return result

Функція локальної теореми Муавра-Лапласа:

X = (кількість разів, коли відбудеться подія - загальна кількість експериментів * ймовірність появи випадкової події)/(корінь (загальна кількість експериментів * ймовірність появи випадкової події * ймовірність не появи випадкової події))
F = (1/корінь(2*Pi)) * експонента_в_степені(X**2/2)
result = (1/ корінь(загальна кількість експериментів * ймовірність появи випадкової події * ймовірність не появи випадкової події)) * F
return result

Функція для теореми Пуассона:

L= загальна кількість експериментів * ймовірність появи випадкової події
Result = ((L**– кількість разів, коли відбудеться подія)/Факторіал(кількість разів, коли відбудеться подія)) * експонента_в_степені(-L)
return result

Функція для інтегральної теореми Муавра-Лапласа:

X1=(перша_межа_появи- загальна кількість експериментів* ймовірність появи випадкової події)/корінь(загальна кількість експериментів * ймовірність появи випадкової події * ймовірність не появи випадкової події
)

X2=(друга_межа_появи- загальна кількість експериментів* ймовірність появи випадкової події)/корінь(загальна кількість експериментів * ймовірність появи випадкової події * ймовірність не появи випадкової події
)

Якщо обидва X по модулю менше 5:

F1=float(інтеграл(X1)/корінь(2*Pi))
F2=float(інтеграл(X2)/ корінь (2* Pi))

```
    else:
        F2=float(integral(X1)/ корінь (2* Pi))
        F1=-0.5
    result= F2-F1
    return result

def Task1():
    ймовірність появи події=0.2
    ймовірність не появи події=1- ймовірність появи події
    кількість вдалих подій=3
    загальна кількість експериментів=5
Виклик функції Бернуллі(ймовірність появи події, ймовірність не появи події, кількість вдалих подій, загальна кількість експериментів)

def Task2():
    ймовірність появи події = 0.8
    ймовірність не появи події =1-p
    кількість вдалих подій =4
    загальна кількість експериментів =5
     res1 = Виклик функції Бернуллі(ймовірність появи події, ймовірність
не появи події, кількість вдалих подій, загальна кількість експериментів)
    res2 = res1 + Виклик функції Бернуллі(ймовірність появи події,
ймовірність не появи події, кількість вдалих подій, загальна кількість
експериментів + 1)

def Task3():
    загальна кількість експериментів =400
    кількість разів, коли відбудеться подія =80
    ймовірність появи випадкової події =0.2
     ймовірність не появи випадкової події=1- ймовірність появи
випадкової події
    Виклик функції на Локальну теорему Муавра-Лапласа (загальна
кількість експериментів, кількість разів, коли відбудеться подія,
ймовірність появи випадкової події, ймовірність не появи випадкової
події)

def Task4():
    загальна кількість експериментів =100000
    ймовірність появи випадкової події =0.0001
    кількість разів, коли відбудеться подія = 5
Виклик функції Пуассона(загальна кількість експериментів, ймовірність
появи випадкової події, кількість разів, коли відбудеться подія)
def Task5():
 загальна кількість експериментів =600
    ймовірність появи випадкової події =0.4
ймовірність не появи випадкової події =1- ймовірність появи випадкової події
    нижня межа кількостей появи події =228
```

верхня межа кількостей появи події =252
Виклик функції Інтегральної теореми Муавра-Лапласа(загальна кількість експериментів, ймовірність появи випадкової події, ймовірність не появи випадкової події, нижня межа кількостей появи події, верхня межа кількостей появи події)

def Task6():
кількість клієнтів=100
ймовірність_появи_події=0.4
ймовірність_не_появи_події =1- ймовірність_появи_події
результат= кількість клієнтів * ймовірність_появи_події
Виклик функції на Локальну теорему Муавра-Лапласа (загальна кількість експериментів, кількість разів, коли відбудеться подія, ймовірність появи випадкової події, ймовірність не появи випадкової події)

def Task7():
загальна кількість експериментів =4000
ймовірність появи випадкової події =0.04
ймовірність не появи випадкової події =1- ймовірність появи випадкової події
нижня межа кількостей появи події =170
верхня межа кількостей появи події =0
Виклик функції Інтегральної теореми Муавра-Лапласа(загальна кількість експериментів, ймовірність появи випадкової події, ймовірність не появи випадкової події, нижня межа кількостей появи події, верхня межа кількостей появи події)

def Task8():
result= round(Local_Muavr_Laplas(n,k,p,q),5)
загальна кількість подій=10000
кількість подій=5000
ймовірність_появи_події=0.5
ймовірність_не_появи_події =1- ймовірність_появи_події
Виклик функції на Локальну теорему Муавра-Лапласа (загальна кількість експериментів, кількість разів, коли відбудеться подія, ймовірність появи випадкової події, ймовірність не появи випадкової події

def Task9():
m – кількість разів, коли відбудеться подія
n – загальна кількість експериментів,
p – ймовірність появи випадкової події,
загальна кількість експериментів =1000
ймовірність появи випадкової події =0.002
кількість разів, коли відбудеться подія =5
Виклик функції Пуассона(загальна кількість експериментів, ймовірність появи випадкової події, кількість разів, коли відбудеться подія)

```
def Task10():
    загальна кількість експериментів =150
    ймовірність не появи випадкової події=0.03
    ймовірність появи випадкової події =1- ймовірність не появи
випадкової події
    k1= загальна кількість експериментів * ймовірність появи випадкової
події - ймовірність не появи випадкової події
    k2= загальна кількість експериментів * ймовірність появи випадкової
події + ймовірність появи випадкової події
    Якщо (k1>k2):
        Тимчасова_змінна=k1
        k1=k2
        k2= Тимчасова_змінна
    result= цілий елемент між k1 та k2
```

Демонстрація роботи алгоритмів:

```
==================================================
Завдання 1
ймовірність того, що в трьох із п’яти потягів, які прибувають протягом однієї години, будуть вагони на
дане призначення
==========
0.051
==================================================
Завдання 2
Знайти ймовірність того, що в п’яти незалежних випробуваннях подія А відбудеться:
а)рівно 4 рази; б)не менше 4 разів
==========
0.41
0.738
==================================================
Завдання 3
ймовірність того, що серед 400 вибраних навмання цукерок буде рівно 80 льодяників
==========
0.04987
==================================================
Завдання 4
ймовірність того, що з конвеєра зійшло 5 бракованих автомобілів
==========
0.038
==================================================
Завдання 5
ймовірність того, що серед 600 пар, які поступили на контроль, виявиться від
228 до 252 пар взуття вищого ґатунку
==========
0.6827
==================================================
Завдання 6
найімовірніше число вимог клієнтів кожного дня, та його ймовірність
==========
1)40.0
2)0.081
==================================================
Завдання 7
ймовірність того, що число нестандартних виробів у партії з 4000 штук не більше 170
==========
0.79
==================================================
Завдання 8
ймовірність того, що при 10000 незалежних киданнях монети герб випаде 5000 разів
==========
0.00798
==================================================
Завдання 9
ймовірність того, що на базу прибуде 5 пошкоджених виробів
==========
0.036
==================================================
Завдання 10
найімовірніше число випадків правильної роботи автомату, якщо буде кинуто 150 монет
==========
146
==================================================
```

Висновок: Під час виконання лабораторної роботи, було розв’язано задачі на теорію ймовірності аналітичним та програмним кодом. Розроблено код для розв’язання задач формулою Бернуллі, локальною теоремою Муавра-Лапласа. Розроблено алгоритм розв’язання задач через теорему Пуассона та інтегральну теорему Муавра-Лапласа. Для задач 1-3 розв’язок аналітичним способом та розв’язання кодом співпадає. Для четвертої задачі похибка є незначною – у 0.0001, через різні округлення. Для п’ятої та сьомої задач відрізняється значення на декілька тисячних або сотих, в залежності від заданих значень, через відмінність табличних округлень та програмних. У 6 задачі результати співпадають. Для 8 задачі є незначна похибка через різні округлення мови python та аналітичного. Для задач 9 та 10 результати співпадають, значить, можна зробити висновок, що програмний розв’язок працює правильно.