1. (p) Homeom.: $f:[a,b]\to[c,d]$: $f(x)=\frac{d-c}{b-a}(x-a)+c$, $g:(-1,1)\to\mathbb{R}$: $g(x)=\frac{x}{1-|x|}$ in $h:\mathbb{R}\to(-1,1)$: $h(x)=\frac{x}{1+|x|}$
2. (D) Prostor $X$ zadošča prvemu aksiomu števnosti (je 1-števen), če ima vsaka točka $X$ kako števno bazo okolic.
3. (D) Prostor zadošča drugemu aksiomu števnosti (je 2-števen), če $\exists$ kaka števna baza za njegovo topologijo.
4. (I) Metrični prostor $(X,d)$ je 2-števen natanko takrat, ko v njem $\exists$ števna povsod gosta podmnožica.
5. (D) Podmnožica $A$ je povsod gosta v $X$, če seka vsako odprto množico $X$ (tako kot $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$), ali ekvivalentno, če je $\overline{A}=X$.
6. (D) Prostor je separabilen, če premore kako povsod gosto podmnožico, ki je števna.
7. (I) Če je prostor 2-števen, je tudi separabilen in 1-števen (obrat ne velja).
8. (O) V metričnih prostorih je 2-števnost ekvivalentna separabilnosti.
9. (I) prostor $Y$ Hausdorffov. (1) Vsaka končna podmnožica $Y$ je zaprta. Točke so zaprte. (2) Točka $y$ je stekališče množice $A\subseteq Y$ natanko takrat, ko vsaka okolica $y$ vsebuje neskončno točk iz $A$. (3) Zaporedje v $Y$ ima največ eno limito. (4) Množica točk ujemanja $\{x\in X|f(x)=g(x)\}$ je zaprta v $X$ za poljubni preslikavi $f,g:X\to Y$. (5) Če se preslikavi $f,g:X\to Y$ ujemata na neki gosti podmnožici $X$, potem je $f=g$. (6) Graf preslikave $f:X\to Y$ je azprt podprostor produkta $X\times Y$.
10. (D) Aksiomi ločljivosti: Naj bo $(X,\mathcal{T})$ topološki prostor. $X$ je:
    - $T_0$: Za različni točki $x,x'\in X$ obstaja okolica ene izmed točki $x,x'$, ki jo loči od druge točke.
    - $T_1$: Za različni točki $x,x'\in X$ obstaja okolica točke $x$, ki jo loči od $x'$ in obenem obstaja okolica točke $x'$, ki jo loči od $x$.
    - $T_2$: Za različni točki $x,x'\in X$ obstajata okolici, ki ostro ločita $x$ in $x'$.
    - $T_3$: Za točki $x\in X$ in zaprto množico $A\subseteq X$, ki ne vsebuje $x$, obstajata okolici, ki ostro ločita $x$ in $A$.
    - $T_4$: Za disjunktni zaprti množici $A,B\subseteq X$ obstajata okolici, ki ostro ločita $A$ in $B$.
11. (O) Fréchetova lastnost: $T_1$; Hausdorffova lastnost: $T_2$; regularnost: $T_0$ in $T_3$; normalnost: $T_1$ in $T_4$.
12. (T) Prostor $X$ ima lastnost $T_3$ natanko takrat, ko za vsak $x\in X$ in vsako odprto okolico $U$ za $x$ $\exists$ taka odprta množica $V$, da velja $x\in V\subseteq\overline{V}\subseteq U$.
13. (I) Prostor, ki je regularen in 2-števen, je normalen.
14. (T) Ekvivalentno je: (1) Prostor $X$ je nepovezan. (2) Prostor $X$ je disjunktna unija dveh nepraznih zaprtih podmnožic. (3) V prostoru $X$ $\exists$ prava neprazna pomnožica, ki je hkrati odprta in zaprta. (4) $\exists$ surjektivna preslikava $f:X\to\{0,1\}$.
15. (I) $X$ kompakten, $Y$ pa Hausdorffov prostor. (1) Vsaka preslikava $f:X\to Y$ je zaprta. (2) Vsaka injektivna preslikava $f:X\to Y$ je vložitev. (3) Vsaka bijektivna preslikava $f:X\to Y$ je homeomorfizem.
16. (I) (Urisonova lema) Hausdorffov prostor $X$ je normalen natanko takrat, ko za poljubni disjunktni neprazni zaprti podmnožici $A,B\subseteq X$ $\exists$ preslikava $f:(X,A,B)\to(I,0,1)$.
17. (I) (Tietzejev razširitveni izrek) $A$ zaprt podprostor normalnega prostora $X$ in $J\subseteq\mathbb{R}$ poljuben interval. Tedaj vsako preslikavo $f:A\to J$ lahko razširimo do preslikave $F:X\to J$.

---

1. **Kvocientna množica:** $X$ topološki prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija na $X$. *Kvocientna množica* $X/\!\sim$ je množica vseh ekvivalenčnih razredov v $X$ glede na $\sim$, opremljena z najmočnejšo topologijo, tj. topologijo $\tau$ na $X/\!\sim$, za katero velja:
$$V\in\tau \iff p^{-1}(V)\subseteq X \text{ je odprta za vsako } V\subseteq X/\!\sim,$$
kjer je $p:X\to X/\!\sim$ kvocientna projekcija.
2. **Kvocientna projekcija:** $X$ topološki prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija na $X$. *Kvocientna projekcija* $q:X\to X/\!\sim$ je preslikava, ki vsakemu elementu $x$ priredi njegov ekvivalenčni razred $[x]$.
3. Za podmnožico $A$ prostora $X$ je kvocientna projekcija $q(A)$ odprta/zaprta v kvocientnem prostoru $X/\!\sim$ natanko tedaj, ko je nasičenje $A$, označeno z $q^{-1}(q(A))$, odprto/zaprto v originalnem prostoru $X$.
4. **Inducirana preslikava:** $f:X\to Y$ preslikava med topološkima prostoroma $X$ in $Y$, ter $\sim$ ekvivalenčna relacija na $X$. Če je preslikava $f$ konstantna na ekvivalenčnih razredih, je njena *inducirana preslikava* $f_\sim : X/\!\sim\,\to Y$, definirana kot $f_\sim([x])=f(x)$ za vsak $x\in X$, kjer je $[x]$ ekvivalenčni razred elementa $x$ glede na $\sim$.
5. $f=\bar{f}\circ q$, preverimo: $f$ dela prave identifikacije: $x\sim y\Leftrightarrow f(x)=f(y)$, zvezna, surjektivna, kvocientna v ožjem smislu.
6. Surjektivna preslikava $f:X\to Y$ je kvocientna v ožjem smislu $\Leftrightarrow$ slika nasičene odprte podmnožice $X$ v odprte podmnožice $Y$ $\Leftrightarrow$ slika nasičene zaprte podmnožice $X$ v zaprte podmnožice $Y$.
7. $r:X\to Y$ in $s:Y\to X$ zvezni preslikavi, za kateri velja $r\circ s=Id_Y$ ("$r$ je retrakcija, $s$ je prerez"). Tedaj je $r$ kvocientna in $s$ vložitev.
8. $f:X\to Y$ zvezna preslikava in $(K_i\subseteq X)_{i\in I}$ pokritje $X$ s kompaktnimi podprostori. Privzemimo, da je družina $(f_*(K_i))_{i\in I}$ lokalno končna v $Y$ in da je $Y$ Hausdorffov. Tedaj je f zaprta. Posledično, če je $f$ dodatno še surjektivna, je kvocientna.
9. $f:X\to Y$ zvezna preslikava, $Y$ Hausdorffov in $K\subseteq X$ kompakt, za katerega velja $f_*(K)=Y$. Tedaj je $f$ kvocientna.
10. **Konveksna kombinacija**: daljico $AB$ slikamo v daljico $CD:(1-t)A+tB\mapsto(1-t)C+tD$.
11. $I:=[0,1], X=I^2,(0,y)\sim(1,y),(x,0)\sim(x,1)$. $X/\sim\,\approx S^1\times S^1$. Preslikava: $f:I\times I\to S^1\times S^1,(x,y)\mapsto(e^{2\pi ix},e^{2\pi iy})$
12. Model **Möbiusovega traku** znotraj polnega torusa: $f:[0,1]\times[-1,1]\to S^1\times B^2, f(x,y)=(e^{2\pi ix},e^{\pi ix}y)$
13. **Deljive** top. lastnosti: kompaktnost, povezanost (s potmi), separabilnost, lok. povezanost (s potmi), diskretnost, trivialnost
14. **Nedeljive** top. lastnosti: ločljivostne, lok. kompaktnost, 1- in 2-števnost, metrizabilnost, popolna nepovezanost.
15. **Top grupa** $G$ je grupa in top. pr., množenje $m:G\times G\to G,(a,b)\mapsto ab$ in invertiranje $inv:G\to G, a\mapsto a^{-1}$ sta zvezni.

| Lastnost | dedna | prod. | delj. | se ohranja pri |
|---|---|---|---|---|
| $T_1$ (Fréchet) | ✓ | ✓ | ✗ | |
| $T_2$ (Hausdorff) | ✓ | ✓ | ✗ | zaprte bijekcije |
| $T_3$ | ✓ | ✓ | ✗ | |
| $T_4$ | | | ✗ | |
| 1-števnost | ✓ | števno | ✗ | |
| 2-števnost | ✓ | števno | ✗ | odp. zvezne sur. |
| separabilnost | odprto | števno | ✓ | zvezna |
| regularnost ($T_3,T_0$) | ✓ | ✓ | | |
| normalnost ($T_4,T_1$) | zaprto | | | zap. zvezne sur. |

| Lastnost | dedna | prod | delj. | se ohranja pri |
|---|---|---|---|---|
| diskretnost | ✓ | končno | ✓ | |
| metrizabilnost | ✓ | števno | ✗ | |
| kompaktnost | zaprto | ✓ | ✓ | zvezne |
| lok. kompaktnost | | ✓ | ✗ | odp. zvezne |
| povezanost | | ✓ | ✓ | zvezne |
| lok. povezanost | | ✓ | ✓ | odp./zap. zv. |
| pov. s potmi | | ✓ | ✓ | zvezne |
| lok. pov. s potmi | | končno | ✓ | odp./zap. zv. |
| popolna nepov. | | končno | ✗ | |

16. **Leva translacija** $L_a : G \to G, g \mapsto ag$ in **desna translacija** sta homeomorfizma.
17. Topološka grupa je **homogen prostor**, tj. $\forall a, b \in G\ \exists$ homeo $h : G \to G, a \mapsto b$.
18. **Delovanje** $G$ na $X$ je zv. preslikava $\varphi : G \times X \to X, (g, x) \mapsto g \cdot x$, za katero velja $\varphi(e, x) = e \cdot x = x, h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x$.
19. Ekv. relacija glede na delovanje: $x \sim y \Leftrightarrow \exists G \in G : y = g \cdot x$
20. **Orbita** elementa $x$ je $G \cdot x = \{g \cdot x | g \in G\} = [x]$
21. **Prostor orbit** je kvoc. prostor $X/G$ pri tej relaciji.
22. **Stabilizator** elementa $x$ je $G_x = \{g \in G | g \cdot x = x\}$
23. Če top. grupa $G$ deluje na top. prostoru $X$, potem je kvoc. projekcija $q : X \to X/G$ odprta.
24. Za top. grupo $G$ velja: (a) Množica $A \subseteq G$ je okolica točke $a \in G$ natanko tedaj, ko je $ba^{-1}A$ okolica točke $b \in G$. (b) Če je $H \leq G$ podgrupa in okolica enote v $G$, je $H$ odprta in zaprta v $G$. (c) Če je C komponenta za povezanost, ki vsebuje enoto $G$, je $C$ zaprta edinka v $G$. (d) Za $G$ so lastnosti $T_0, T_1, T_2$ ekvivalentne.
25. **Stožec** nad $X$ je $CX = X \times [0, 1]/X \times \{1\}$.
26. **Suspenzija** nad $X$ je $\Sigma X = X \times [-1, 1]/\{X \times \{-1\}, X \times \{1\}\}$.
27. **Zlepek**: $X, Y$ top. prostora, $A \subseteq X, f : A \to Y$ zvezna. $X \cup_f Y = (X + Y)/a \sim f(a) \forall a \in A$.
28. **Normalnost zlepkov**: $X, Y$ normalna, $A^{\text{zap}} \subseteq X, f : A \to Y$ zv. $\Rightarrow$ zlepek $X \cup_f Y$ normalen.
29. $A^{\text{zap}} \subseteq X, f : A \to Y$ zap vložitev. $Z = X \cup_f Y \Rightarrow$ (1) $X, Y$ 2-števna $\Rightarrow Z$ 2-števen, (2) $X, Y$ regularna $\Rightarrow Z$ regularen.
30. $q \circ in_1 : X \to X \cup_f Y$ v splošnem ni vložitev.
31. $q \circ in_2 : Y \to X \cup_f Y$ je vložitev.
32. Injekcije so zvezne, odprte in zaprte vložitve v vsoto.
33. Dogovor: za $X/\emptyset$ dobimo $X$ s še eno točko, tj. podprostor $A$ se v kvocientu vedno nadomesti z eno točko.
34. $A_n : \forall f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ zvezna ima negibno točko.
35. Retrakcija: $A \subseteq X, r : X \to A$ zvezna, je retrakcija, če $r|_A = id_A$, $A$ je retrakt $X$, če $\exists$ retrakcija.
36. Trditev: retrakt povezanega prostora je povezan, kompaktnega prostora kompakten, retrakt absolutnega ekstenzorja je absolutni ekstenzor; če $X \in T_2$, je retrakt zaprt.
37. $X$ ima LNT, $A$ retrakt $X \Rightarrow A$ ima LNT
38. Def: $\mathcal{R}$ raz. top. pr., $Y$ top. pr., $Y \in AE(\mathcal{R})$, če za $\forall X \in \mathcal{R}, \forall A^{zap} \subseteq X, \forall f : A \to Y$ zv. $\exists F : X \to Y$ zv.: $F|_A = f$ ($F$ razširitev $f$)
39. Lastnosti: $Y \in AE(R)$ je top. lastnost, produkt AE je AE, vsak interval $\subseteq \mathbb{R}$ je $AE(\mathcal{N})$, $\mathcal{R} \cap AE(\mathcal{R}) \subseteq AR(\mathcal{R})$
40. $B_n : S^{n-1}$ ni retrakt $B^n$
41. Def: $f, g : X \to Y$ zv., homotopija od $f$ do $g$ je zv. preslikava $H : X \times I \to Y$ z $H(x, 0) = f(x)$ in $H(x, 1) = g(x)$
42. Prostor X je kontraktibilen, če je $id_X$ homotopna ($\simeq$) kakšni konst. preslikavi $X \to X$; homotopija = kontrakcija
43. Če je X kontraktibilen, je povezan s potmi
44. $C_n : S^{n-1}$ ni kontraktibilna
45. (Jordan-Brouwer) $n \geq 2$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ top. $(n-1)$-sfera, $(S \approx S^{n-1})$. Tedaj ima $\mathbb{R}^n \setminus S$ dve komponenti, eno omejeno in eno neomejeno, obe sta odprti v $\mathbb{R}^n$ in povezani s potmi, $S$ je meja obeh.
46. $D_n : D \subseteq \mathbb{R}^n$ topološki $k$-disk za $0 < k \leq n$, torej $D \approx B^k$. $D$ ne deli $\mathbb{R}^n$
47. (Schönfliesov izrek) $S^1 \approx S \subseteq \mathbb{R}^2$, $V$ omejena komponenta $\mathbb{R}^2 \setminus S \Rightarrow Cl(V) \approx B^2$
48. Def: $S \approx S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ je lokalno ploščata v $x \in S$, če $\exists V : x \in V^{odp} \subseteq \mathbb{R}^n$ in $\exists$ homeo $h : V \to W$, $W^{odp} \subseteq \mathbb{R}^n$, da je $h_*(S \cap V) = (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cap W$. $S$ je lokalno ploščata, če je taka v vseh svojih točkah (vložitev je krotka ali $S$ je podmnt); če v $x \in S, S$ ni lokalno ploščata, je $x$ divja točka
49. (Brouwer)(o odprti preslikavi) $U^{odp} \subseteq \mathbb{R}^n, f : U \to \mathbb{R}^n$ zv., inj. $\Rightarrow f$ odp. preslikava ($\Rightarrow f_*(U)^{odp} \subseteq \mathbb{R}^n$)
50. (invarianca odp mn) $U, V \subseteq \mathbb{R}^n, U^{odp}, U \approx V \Rightarrow V^{odp} \subseteq \mathbb{R}^n$ Posledica: $A, B \subseteq \mathbb{R}^n, A \approx B \Rightarrow Int(A) \approx Int(B)$ in $Meja(A) \approx Meja(B)$
51. Def: topološka mnogoterost dimenzije $n \in \mathbb{N}$ ($n$-mnt) je $T_2$, 2-števen topološki prostor $M$, v katerem ima vsaka točka odprto okolico homeo $\mathbb{R}^n$ ali $\mathbb{R}^n_+$. Takšno okolico $V$ imenujemo evklidska okolica, pripadajoč homeo ($h : V \overset{\approx}{\to} \mathbb{R}^n$ ali $\mathbb{R}^n_+$) imenujemo karta na $M$.
52. **1**. komponenta $n$-mnt je $n$-mnt (komponente so odprte, ker je mnt lok pov $\Leftarrow$ lok evklidskost)
    **2**. disj unija (največ) števno mnogo $n$-mnt je $n$-mnt
    **3**. Rob mnt: $M$ $n$-mnt, $int(M)^{odp} \subseteq M \Rightarrow \partial M^{zap} \subseteq M$
    **Izrek**: (o odprti preslikavi za mnt) $M$, $N$ $n$-mnt, $V^{odp} \subseteq int(M), f : V \to N$ zv., inj. $\Rightarrow f$ odp in $f_*(V) \subseteq int(N)$
    **Izrek**: $M$ $n$-mnt, $\partial M \neq \emptyset \Rightarrow \partial M$ $(n-1)$-mnt s praznim robom ($\partial(\partial M) = \emptyset$); če je $M$ kompaktna $\Rightarrow \partial M$ sklenjena (op: rob kompaktne ploskve je disjunktna unija krožnic) $\partial M$ ne deli $M$: $M$ povezana $\Rightarrow M \setminus \partial M$ povezana
    **4**. Produkt mnt:
    **Izrek**: $M$ $m$-mnt, $N$ $n$-mnt $\Rightarrow M \times N$ je $(m+n)$-mnt, $int(M \times N) = int(M) \times int(N), \partial(M \times N) = \partial M \times N \cup M \times \partial N$
    **5**. Zlepek mnt: Def: $N$ $n$-mnt, $L$ $l$-mnt; $L \cap \partial N = \partial L \Rightarrow L$ prav vložena | $L$ lokalno ploščata ali podmnt, če je prav vložena in $\forall x \in L \exists$ evklidska okolica $V : x \in V \subseteq N$ in homeo (karta) $h : V \to \mathbb{R}^n$ ali $\mathbb{R}^n_+$, da je $h_*(L \cap V) = h_*(V) \cap (\{0\}^{n-l} \times \mathbb{R}^l)$
    **Izrek** : $N_1, N_2$ $n$-mnt, $L_i \subseteq \partial N_i$ $(n-1)$-mnt in $\partial L_i$ lokalno ploščat v $\partial N_i$ $h : L_1 \to L_2$ homeo $\Rightarrow$ zlepek $N_1 \cup_h N_2 = N$ je n-mnt z robom, ki je zlepek $(\partial N_1 \setminus int(L_1)) \cup_{h|_{\partial L_1}} (\partial N_2 \setminus int(L_2))$ in $(N_1 \setminus L_1) \cup (N_2 \setminus L_2)$ je vložena v zlepek kot odprta podmn.
    **6**. Razrez mnt: $N$ $n$-mnt, $L \subseteq N$ lokalno ploščata $(n-1)$-podmnt $\Rightarrow$ lahko $N$ prerežemo vzdolž $L$
    **7**. Povezana vsota: Def: $M, N$ n-mnt, $D \subseteq int(M), E \subseteq int(N)$ topološka n-diska z lok ploščatima robovoma, izberimo homeo $h : \partial D \to \partial E$. Povezana vsota M in N je $M \# N = (M \setminus int(D)) \cup_h (N \setminus int(E))$ op: $M \# N$ je n-mnt
53. Izrek: (homogenost mnt) $M$ povezana $n$-mnt, $x, y \in int(M) \Rightarrow \exists$ homeo $h : M \to M, h(x) = y$
54. Eulerjeva karakteristika in orientabilnost sta topološki lastnosti.
55. Eulerjeva karakteristika $X$: $\chi(X) = \#(\text{2-celic}) - \#(\text{1-celic}) + \#(\text{0-celic})$
56. Karakterizacija: orientabilnost, $\chi$, št. robnih komponent, $\chi(A \# B) = \chi(A) + \chi(B) - 2, \chi(X \cup trak) = \chi(X) - 1$

$A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ zap, $A, B \in AE(\mathcal{N})$: $|A \cap B| = 1 \Rightarrow A \cup B \in AE(\mathcal{N})$
$A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ zap, $A, B \in AE(\mathcal{N})$: $A \cap B \in AE(\mathcal{N}) \Rightarrow A \cup B \in AE(\mathcal{N})$

$X$ kompaktna mnt: $\partial X \neq \emptyset, i : \partial X \to X$ inkluzija $\Rightarrow$ zlepek $X \cup_{\partial X} X := X \cup_i X$ kompaktna mnt brez roba (imenuje se podvojitev mnogoterosti X). $\chi(nT) = 2 - 2n$, $\chi(nP) = 2 - n$, $\chi(S^2) = \chi(0T) = 2, \chi(M) = 0, K \approx 2P$, $nT$ so orientabilni, $nP$ niso