1. (p) Homeom.: $f:[a,b]\to[c,d]$: $f(x)=\frac{d-c}{b-a}(x-a)+c$, $g:(-1,1)\to\mathbb{R}$: $g(x)=\frac{x}{1-|x|}$ in $h:\mathbb{R}\to(-1,1)$: $h(x)=\frac{x}{1+|x|}$
2. (D) Prostor X zadošča prvemu aksiomu števnosti (je 1-števen), če ima vsaka točka X kako števno bazo okolic.
3. (D) Prostor zadošča drugemu aksiomu števnosti (je 2-števen), če $\exists$ kaka števna baza za njegovo topologijo.
4. (D) Prostor je separabilen, če premore kako povsod gosto podmnožico, ki je števna.
5. (D) Podmnožica A je povsod gosta v X, če seka vsako odprto množico X (tako kot $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$), ali ekvivalentno, če je $\overline{A}=X$.
6. (I) prostor Y Hausdorffov. (1) Vsaka končna podmnožica Y je zaprta. Točke so zaprte. (2) Točka y je stekališče množice $A\subseteq Y$ natanko takrat, ko vsaka okolica y vsebuje neskončno točk iz A. (3) Zaporedje v Y ima največ eno limito. (4) Množica točk ujemanja $\{x\in X|f(x)=g(x)\}$ je zaprta v X za poljubni preslikavi $f,g:X\to Y$. (5) Če se preslikavi $f,g:X\to Y$ ujemata na neki gosti podmnožici X, potem je $f=g$. (6) Graf preslikave $f:X\to Y$ je azprt podprostor produkta $X\times Y$.
7. (D) Aksiomi ločljivosti: Naj bo $(X,\mathcal{T})$ topološki prostor. X je:
   - T_0: Za različni točki $x,x'\in X$ obstaja okolica ene izmed točki x,x', ki jo loči od druge točke.
   - T_1: Za različni točki $x,x'\in X$ obstaja okolica točke x, ki jo loči od x' in obenem obstaja okolica točke x', ki jo loči od x.
   - T_2: Za različni točki $x,x'\in X$ obstajata okolici, ki ostro ločita x in x'.
   - T_3: Za točki $x\in X$ in zaprto množico $A\subseteq X$, ki ne vsebuje x, obstajata okolici, ki ostro ločita x in A.
   - T_4: Za disjunktni zaprti množici $A,B\subseteq X$ obstajata okolici, ki ostro ločita A in B.
8. (T) Prostor X ima lastnost T_3 natanko takrat, ko za vsak $x\in X$ in vsako odprto okolico U za x $\exists$ taka odprta množica V, da velja $x\in V\subseteq\overline{V}\subseteq U$.

Prostor X je nepovezan
$\iff$ Prostor X je disjunktna unija dveh nepraznih zaprtih podmnožic
$\iff$ V X $\exists$ prava neprazna pomnožica, ki je hkrati odprta in zaprta
$\iff$ $\exists$ surjektivna preslikava $f:X\to\{0,1\}$

(I) X kompakten, Y pa Hausdorffov prostor:
Vsaka preslikava $f:X\to Y$ je zaprta.
Vsaka injektivna preslikava $f:X\to Y$ je vložitev.
Vsaka bijektivna preslikava $f:X\to Y$ je homeomorfizem.

(I) Metričnost $\implies$ (2-števnost $\iff$ seperabilnost
(I) 2-števnost $\implies$ seperabilnost in 1-števnost
regularnost + 2-števnost $\implies$ normalnost
normalnost + 2-števnnost $\implies$ metrizabilnost
2-števnost $\implies$ (regularnost $\iff$ metrizabilnost)
kompaktnost + T2 $\implies$ normalnost
lokalna kompaktnost + T_2 $\implies$ regularnost

9. (I) (Urisonova lema) Hausdorffov prostor X je normalen natanko takrat, ko za poljubni disjunktni neprazni zaprti podmnožici $A,B\subseteq X$ $\exists$ preslikava $f:(X,A,B)\to(I,0,1)$.
10. X lokalno povezan $\iff$ komponente vsake odprte okolice so odprte v X
11. Komponente za povezanost so zaprte, nenujno odprte

Lastnost	dedna	prod.	delj.	se ohranja pri
T_1 (Fréchet)	✓	✓	✗	
T_2 (Hausdorff)	✓	✓	✗	zaprte bijekcije
T_3	✓	✓	✗	
T_4			✗	
1-števnost	✓	števno	✗	
2-števnost	✓	števno	✗	odp. zvezne sur.
separabilnost	odprto	števno	✓	zvezna
regularnost (T_3,T_0)	✓	✓		
normalnost (T_4,T_1)	zaprto			zap. zvezne sur.
absolutni ekstenzor		✓		

Lastnost	dedna	prod	delj.	se ohranja pri
diskretnost	✓	končno	✓	
metrizabilnost	✓	števno	✗	
kompaktnost	zaprto	✓	✓	zvezne
lok. kompaktnost		✓	✗	odp. zvezne
povezanost		✓	✓	zvezne
lok. povezanost		✓	✓	odp./zap. zv.
pov. s potmi		✓	✓	zvezne
lok. pov. s potmi		končno	✓	odp./zap. zv.
popolna nepov.		končno	✗	

1. **Kvocientna množica:** X topološki prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X. *Kvocientna množica* $X/\!\sim$ je množica vseh ekvivalenčnih razredov v X glede na $\sim$, opremljena z najmočnejšo topologijo, tj. topologijo τ na $X/\!\sim$, za katero velja: $V\in\tau \iff p^{-1}(V)\subseteq X$ je odprta za vsako $V\subseteq X/\!\sim$, kjer je $p:X\to X/\!\sim$ kvocientna projekcija.
2. **Kvocientna projekcija:** X topološki prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X. *Kvocientna projekcija* $q:X\to X/\!\sim$ je preslikava, ki vsakemu elementu x priredi njegov ekvivalenčni razred $[x]$.
3. Za podmnožico A prostora X je kvocientna projekcija $q(A)$ odprta/zaprta v kvocientnem prostoru $X/\!\sim$ natanko tedaj, ko je **nasičenje** A $q^*(q_*(A))$, odprto/zaprto v originalnem prostoru X.
4. $f:X\to Y$ preslikava, $\sim$ ekvivalenčna relacija na X. Če je preslikava f konstantna na ekvivalenčnih razredih, je njena **inducirana preslikava** $f_\sim:X/\!\sim\to Y$, $f_\sim([x])=f(x)$, kjer je $[x]$ ekvivalenčni razred elementa x glede na $\sim$.
5. $f=\bar{f}\circ q$, preverimo: f dela prave identifikacije: $x\sim y\Leftrightarrow f(x)=f(y)$, zvezna, surjektivna, kvocientna v ožjem smislu.
6. Surjektivna preslikava $f:X\to Y$ je **kvocientna v ožjem smislu** $\Leftrightarrow$ slika nasičene odprte podmnožice X v odprte podmnožice Y $\Leftrightarrow$ slika nasičene zaprte podmnožice X v zaprte podmnožice Y.
7. $r:X\to Y$ in $s:Y\to X$ zvetni, za kateri velja $r\circ s=Id_Y$ ("r je retrakcija, s je prerez"). Tedaj je r kvocientna in s vložitev.
8. $f:X\to Y$ zvezna preslikava in $(K_i\subseteq X)_{i\in I}$ pokritje X s kompaktnimi podprostori. Privzemimo, da je družina $(f_*(K_i))_{i\in I}$ lokalno končna v Y in da je Y Hausdorffov. Tedaj je f zaprta. Posledično, če je f dodatno še surjektivna, je kvocientna.
9. $f:X\to Y$ zvezna preslikava, Y Hausdorffov in $K\subseteq X$ kompakt, za katerega velja $f_*(K)=Y$. Tedaj je f kvocientna.
10. **Konveksna kombinacija**: daljico AB slikamo v daljico $CD:(1-t)A+tB\mapsto(1-t)C+tD$.
11. $I:=[0,1],X=I^2,(0,y)\sim(1,y),(x,0)\sim(x,1)$. $X/\sim\;\approx S^1\times S^1$. Preslikava: $f:I\times I\to S^1\times S^1,(x,y)\mapsto(e^{2\pi ix},e^{2\pi iy})$
12. Model **Möbiusovega traku** znotraj polnega torusa: $f:[0,1]\times[-1,1]\to S^1\times B^2, f(x,y)=(e^{2\pi ix},e^{\pi ix}y)$
13. **Top grupa** G je grupa in top. pr., množenje $m:G\times G\to G,(a,b)\mapsto ab$ in invertiranje $inv:G\to G,a\mapsto a^{-1}$ sta zvezni.
14. **Leva translacija** $L_a:G\to G,g\mapsto ag$ in **desna translacija** sta homeomorfizma.
15. Topološka grupa je **homogen prostor**, tj. $\forall a,b\in G$ $\exists$ homeo $h:G\to G,a\mapsto b$.
16. **Delovanje** G na X je zv. preslikava $\varphi:G\times X\to X,(g,x)\mapsto g\cdot x$, za katero velja $\varphi(e,x)=e\cdot x=x, h\cdot(g\cdot x)=(hg)\cdot x$.
17. Ekv. relacija glede na delovanje: $x\sim y\Leftrightarrow\exists g\in G:y=g\cdot x$, **Stabilizator** elementa x je $G_x=\{g\in G|g\cdot x=x\}$
18. **Orbita** elementa x je $G\cdot x=\{g\cdot x|g\in G\}=[x]$, **Prostor orbit** je kvoc. prostor X/G pri tej relaciji.
19. Če top. grupa G deluje na top. prostoru X, potem je kvoc. projekcija $q:X\to X/G$ odprta.
20. Za top. grupo G velja: (a) Množica $A\subseteq G$ je okolica točke $a\in G$ natanko tedaj, ko je $ba^{-1}A$ okolica točke $b\in G$. (b) Če je $H\le G$ podgrupa in okolica enote v G, je H odprta in zaprta v G. (c) Če je C komponenta za povezanost, ki vsebuje enoto

G, je C zaprta edinka v G. (d) Za G so lastnosti T_0, T_1, T_2 ekvivalentne.

21. **Stožec** nad X je $CX = X \times [0,1]/X \times \{1\}$, **Suspenzija** nad X je $\Sigma X = X \times [-1,1]/\{X \times \{-1\}, X \times \{1\}\}$.
22. **Zlepek**: X, Y top. prostora, $A \subseteq X, f : A \to Y$ zvezna. $X \cup_f Y = (X+Y)/a \sim f(a) \forall a \in A$.
23. **Normalnost zlepkov**: X, Y normalna, $A^{\text{zap}} \subseteq X, f : A \to Y$ zv. $\Rightarrow$ zlepek $X \cup_f Y$ normalen.
24. $A^{\text{zap}} \subseteq X, f : A \to Y$ zap vložitev. $Z = X \cup_f Y \Rightarrow$ (1) X, Y 2-števna $\Rightarrow Z$ 2-števen, (2) X, Y regularna $\Rightarrow Z$ regularen.
25. $q \circ in_1 : X \to X \cup_f Y$ v splošnem ni vložitev, ampak $q \circ in_2 : Y \to X \cup_f Y$ je vložitev.
26. Injekcije so zvezne, odprte in zaprte vložitve v vsoto.
27. Dogovor: za $X/\emptyset$ dobimo X s še eno točko, tj. podprostor A se v kvocientu vedno nadomesti z eno točko.

$A \subseteq X, r : X \to A$ zvezna, je **retrakcija**, če $r|_A = id_A$, A je **retrakt** X, če $\exists$ retrakcija $\boxed{\text{če } X \in T_2 \text{, je retrakt zaprt}}$

1. (T)Retrakt povezanega/kompaktnega prostora je povezan/kompakten, retrakt absolutnega ekstenzorja je absolutni ekstenzor

(D) X ima **LNT**, če ima $\forall$ zvezna preslikava $X \to X$ negibno točko $\boxed{X \text{ ima LNT, } A \text{ retrakt } X \Rightarrow A \text{ ima LNT}}$

2. (D) $\mathcal{R}$ razed top. pr., Y top. pr., $Y \in AE(\mathcal{R})$, če za $\forall X \in \mathcal{R}, \forall A^{zap} \subseteq X, \forall f : A \to Y$ zv. $\exists F : X \to Y$ zv.: $F|_A = f$ (F razširitev f)

$\boxed{\begin{array}{l} \forall \text{ interval} \subseteq \mathbb{R} \text{ je } AE(\mathcal{N}) \\ \mathcal{R} \cap AE(\mathcal{R}) \subseteq AR(\mathcal{R}) \end{array}}$ Retrakt povezanega/kompaktnega prostora je povezan/kompakten retrakt absolutnega ekstenzorja je absolutni ekstenzor $\boxed{\begin{array}{c} \text{Če je X kontraktibilen} \\ \text{je povezan s potmi} \end{array}}$

3. (D) $f, g : X \to Y$ zv., **homotopija** od f do g je zv. preslikava $H : X \times I \to Y$ z $H(x,0) = f(x)$ in $H(x,1) = g(x)$
4. (D) Prostor X je **kontraktibilen**, če je id_X homotopna ($\simeq$) kakšni konst. preslikavi $X \to X$; homotopija = kontrakcija

$$\boxed{\begin{array}{l} A_n : \forall f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n \text{ zvezna ima negibno točko} \\ C_n : S^{n-1} \text{ ni kontraktibilna} \\ B_n : S^{n-1} \text{ ni retrakt } B^n \\ D_n : D \subseteq \mathbb{R}^n \text{ topološki } k\text{-disk za } 0 < k \leq n \text{, torej } D \approx B^k. \ D \text{ ne deli } \mathbb{R}^n \end{array}}$$

5. (I)(Jordan-Brouwer) $n \geq 2$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ top. $(n-1)$-sfera, $(S \approx S^{n-1})$. Tedaj ima $\mathbb{R}^n \setminus S$ dve komponenti, eno omejeno in eno neomejeno, obe sta odprti v $\mathbb{R}^n$ in povezani s potmi, S je meja obeh.
6. (I)(Schönfliesov) $S^1 \approx S \subseteq \mathbb{R}^2$, V omejena komponenta $\mathbb{R}^2 \setminus S \Rightarrow Cl(V) \approx B^2$
7. (D) $S \approx S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ je **lokalno ploščata** v $x \in S$, če $\exists V : x \in V^{odp} \subseteq \mathbb{R}^n$ in $\exists$ homeo $h : V \to W$, $W^{odp} \subseteq \mathbb{R}^n$, da je $h_*(S \cap V) = (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cap W$. S je **lokalno ploščata**, če je taka v vseh svojih točkah (vložitev je krotka ali S je podmnt); če v $x \in S, S$ ni lokalno ploščata, je x **divja točka**
8. (I)(Brouwer)(o odprti preslikavi) $U^{odp} \subseteq \mathbb{R}^n, f : U \to \mathbb{R}^n$ zv., inj. $\Rightarrow f$ odp. preslikava ($\Rightarrow f_*(U)^{odp} \subseteq \mathbb{R}^n$)
9. (invarianca odp mn) $U, V \subseteq \mathbb{R}^n, U^{odp}, U \approx V \Rightarrow V^{odp} \subseteq \mathbb{R}^n$
10. Posledica: $A, B \subseteq \mathbb{R}^n, A \approx B \Rightarrow \text{Int}(A) \approx \text{Int}(B)$ in $\partial(A) \approx \partial(B)$
11. (D) topološka **mnogoterost** dimenzije $n \in \mathbb{N}$ (n-mnt) je T_2, 2-števen topološki prostor M, v katerem ima vsaka točka odprto okolico homeo $\mathbb{R}^n$ ali $\mathbb{R}^n_+$. Okolico V imenujemo **evklidska okolica**, home. ($h : V \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n$ ali $\mathbb{R}^n_+$) imenujemo **karta** na M.
12. komponenta n-mnt je n-mnt (komponente so odprte, ker je mnt lok pov $\Leftarrow$ lok evklidskost)
13. disj unija (največ) števno mnogo n-mnt je n-mnt
14. Rob mnt: M n-mnt, $\text{Int}(M)^{odp} \subseteq M \Rightarrow \partial M^{zap} \subseteq M$
15. (I)(o odprti preslikavi za mnt) M, N n-mnt, $V^{odp} \subseteq int(M), f : V \to N$ zv., inj. $\Rightarrow f$ odp in $f_*(V) \subseteq int(N)$
16. če je M kompaktna $\Rightarrow \partial M$ sklenjena (op: rob kompaktne ploskve je disjunktna unija krožnic)
    (I) M n-mnt, $\partial M \neq \emptyset \Rightarrow \partial M$ $(n-1)$-mnt s praznim robom $(\partial(\partial M) = \emptyset)$
    ( ) ∂M ne deli M (M povezana $\Rightarrow M \setminus \partial M$ povezana)
    (I) M m-mnt, N n-mnt $\Rightarrow M \times N$ je $(m+n)$-mnt

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Int}(M \times N) = \text{Int}(M) \times \text{Int}(N) \\ \partial(M \times N) = \partial M \times N \cup M \times \partial N \end{array}}$$

17. Zlepek mnt: (D) N n-mnt, L l-mnt; $L \cap \partial N = \partial L \Rightarrow L$ **prav vložena**
18. L **lokalno ploščata** ali **podmnt**, če je prav vložena in $\forall x \in L \exists$ evklidska okolica $V : x \in V \subseteq N$ in homeo $h : V \to \mathbb{R}^n$ ali $\mathbb{R}^n_+$, da je $h_*(L \cap V) = h_*(V) \cap (\{0\}^{n-l} \times \mathbb{R}^l)$
19. (I) N_1, N_2 n-mnt, $L_i \subseteq \partial N_i$ $(n-1)$-mnt in ∂L_i lokalno ploščat v ∂N_i $h : L_1 \to L_2$ homeo $\Rightarrow$ zlepek $N_1 \cup_h N_2 = N$ je n-mnt z robom, ki je zlepek $(\partial N_1 \setminus \text{Int}(L_1)) \cup_{h|_{\partial L_1}} (\partial N_2 \setminus \text{Int}(L_2))$ in $(N_1 \setminus L_1) \cup (N_2 \setminus L_2)$ je vložena v zlepek kot odprta podmn.
20. N n-mnt, $L \subseteq N$ lokalno ploščata $(n-1)$-podmnt $\Rightarrow$ lahko N prerežemo vzdolž L
21. (D) M, N n-mnt, $D \subseteq \text{Int}(M), E \subseteq \text{Int}(N)$ topološka n-diska z lok ploščatima robovoma, izberimo homeo $h : \partial D \to \partial E$.**Povezana vsota** M in N je $M \# N = (M \setminus \text{Int}(D)) \cup_h (N \setminus \text{Int}(E))$ op: $M \# N$ je n-mnt
    (I)(homogenost mnt) M povezana n-mnt, $x, y \in int(M) \Rightarrow \exists$ homeo $h : M \to M, h(x) = y$ $\boxed{\partial(M \# N) = \partial M + \partial N}$
22. Eulerjeva karakteristika in orientabilnost sta topološki lastnosti. (Karakterizacija: orientabilnost, χ, št. robnih komponent)
23. **Eulerjeva karakteristika** X: $\chi(X) = \#(\text{2-celic}) - \#(\text{1-celic}) + \#(\text{0-celic})$

$$\begin{array}{l} A, B \subseteq \mathbb{R}^n \text{ zap, } A, B \in AE(\mathcal{N}): \\ \hline |A \cap B| = 1 \Rightarrow A \cup B \in AE(\mathcal{N}) \\ A \cap B \in AE(\mathcal{N}) \Rightarrow A \cup B \in AE(\mathcal{N}) \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{l} \chi(nT) = 2 - 2n \\ \chi(nP) = 2 - n \\ \chi(S^2) = \chi(0T) = 2 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{l} \chi(M) = 0 \\ \chi(A \# B) = \chi(A) + \chi(B) - 2 \\ \chi(X \cup trak) = \chi(X) - 1 \end{array}} \quad \begin{array}{l} nT \text{ so orientabilni} \\ nP \text{ niso orientabilni} \\ K \approx 2P \end{array}$$

24. X kompaktna mnt: $\partial X \neq \emptyset, i : \partial X \to X$ inkluzija $\Rightarrow$ zlepek $X \cup_{\partial X} X := X \cup_i X$ kompaktna mnt brez roba (podvojitev mnogoterosti X)