

# 1 STOP

- (p) Homeom.:  $f : [a, b] \rightarrow [c, d]: f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c, g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}: g(x) = \frac{x}{1-|x|}$  in  $h : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1): h(x) = \frac{x}{1+|x|}$
- (D) Prostor  $X$  zadošča prvemu aksiomu števnosti (je 1-števen), če ima vsaka točka  $X$  kako števno bazo okolice.
- (D) Prostor zadošča drugemu aksiomu števnosti (je 2-števen), če  $\exists$  kaka števna baza za njegovo topologijo.
- (I) Metričnost  $\implies$  (2-števnost  $\iff \exists$  števna povsod gosta podmnožica)
- (D) Podmnožica  $A$  je povsod gosta v  $X$ , če seka vsako odprto množico  $X$  (tako kot  $\mathbb{Q}$  v  $\mathbb{R}$ ), ali ekvivalentno, če je  $\bar{A} = X$ .
- (D) Prostor je separabilen, če premore kako povsod gosto podmnožico, ki je števna.
- (I) Če je prostor 2-števen, je tudi separabilen in 1-števen (obrat ne velja).
- (O) V metričnih prostorih je 2-števnost ekvivalentna separabilnosti.
- (I) prostor  $Y$  Hausdorffov. (1) Vsaka končna podmnožica  $Y$  je zaprta. Točke so zaprte. (2) Točka  $y$  je stekališče množice  $A \subseteq Y$  natanko takrat, ko vsaka okolica  $y$  vsebuje neskončno točk iz  $A$ . (3) Zaporedje v  $Y$  ima največ eno limito. (4) Množica točk ujemanja  $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$  je zaprta v  $X$  za poljubni preslikavi  $f, g : X \rightarrow Y$ . (5) Če se preslikavi  $f, g : X \rightarrow Y$  ujemata na neki gosti podmnožici  $X$ , potem je  $f = g$ . (6) Graf preslikave  $f : X \rightarrow Y$  je azprt podprostor produkta  $X \times Y$ .
- (D) Aksiomi ločljivosti: Naj bo  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor.  $X$  je:
  - $T_0$ : Za različni točki  $x, x' \in X$  obstaja okolica ene izmed točki  $x, x'$ , ki jo loči od druge točke.
  - $T_1$ : Za različni točki  $x, x' \in X$  obstaja okolica točke  $x$ , ki jo loči od  $x'$  in obenem obstaja okolica točke  $x'$ , ki jo loči od  $x$ .
  - $T_2$ : Za različni točki  $x, x' \in X$  obstajata okolici, ki ostro ločita  $x$  in  $x'$ .
  - $T_3$ : Za točki  $x \in X$  in zaprto množico  $A \subseteq X$ , ki ne vsebuje  $x$ , obstajata okolici, ki ostro ločita  $x$  in  $A$ .
  - $T_4$ : Za disjunktni zaprti množici  $A, B \subseteq X$  obstajata okolici, ki ostro ločita  $A$  in  $B$ .
- (O) Fréchetova lastnost:  $T_1$ ; Hausdorffova lastnost:  $T_2$ ; regularnost:  $T_0$  in  $T_3$ ; normalnost:  $T_1$  in  $T_4$ .
- (T) Prostor  $X$  ima lastnost  $T_3$  natanko takrat, ko za vsak  $x \in X$  in vsako odprto okolico  $U$  za  $x$   $\exists$  taka odprta množica  $V$ , da velja  $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ .
- (I) Prostor, ki je regularen in 2-števen, je normalen.
- (T) Ekvivalentno je: (1) Prostor  $X$  je nepovezan. (2) Prostor  $X$  je disjunktna unija dveh nepraznih zaprtih podmnožic. (3) V prostoru  $X$   $\exists$  prava neprazna podmnožica, ki je hkrati odprta in zaprta. (4)  $\exists$  surjektivna preslikava  $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ .
- (I)  $X$  kompakten,  $Y$  pa Hausdorffov prostor. (1) Vsaka preslikava  $f : X \rightarrow Y$  je zaprta. (2) Vsaka injektivna preslikava  $f : X \rightarrow Y$  je vložitev. (3) Vsaka bijektivna preslikava  $f : X \rightarrow Y$  je homeomorfizem.
- (I) (Urissonova lema) Hausdorffov prostor  $X$  je normalen natanko takrat, ko za poljubni disjunktni neprazni zaprti podmnožici  $A, B \subseteq X$   $\exists$  preslikava  $f : (X, A, B) \rightarrow (I, 0, 1)$ .

Lastnost	dedna	prod.	delj.	se ohranja pri	Lastnost	dedna	prod.	delj.	se ohranja pri
$T_1$ (Fréchet)	✓	✓	✗		diskretnost	✓	končno	✓	
$T_2$ (Hausdorff)	✓	✓	✗	zaprtje bijekcije	metrizabilnost	✓	števno	✗	
$T_3$	✓	✓	✗		kompaktnost	zaprto	✓	✓	zvezne
$T_4$			✗		lok. kompaktnost		✓	✗	odp. zvezne
1-števnost	✓	števno	✗		povezanost		✓	✓	zvezne
2-števnost	✓	števno	✗	odp. zvezne sur.	lok. povezanost		✓	✓	odp./zap. zv.
separabilnost	odprto	števno	✓	zvezna	pov. s potmi		✓	✓	zvezne
regularnost ( $T_3, T_0$ )	✓	✓			lok. pov. s potmi		končno	✓	odp./zap. zv.
normalnost ( $T_4, T_1$ )	zaprto			zap. zvezne sur.	popolna nepov.		končno	✗	

- Kvocientna množica:**  $X$  topološki prostor in  $\sim$  ekvivalenčna relacija na  $X$ . Kvocientna množica  $X/\sim$  je množica vseh ekvivalenčnih razredov v  $X$  glede na  $\sim$ , opremljena z najmočnejšo topologijo, tj. topologijo  $\tau$  na  $X/\sim$ , za katero velja:  $V \in \tau \iff p^{-1}(V) \subseteq X$  je odprta za vsako  $V \subseteq X/\sim$ , kjer je  $p : X \rightarrow X/\sim$  kvocientna projekcija.
- Kvocientna projekcija:**  $X$  topološki prostor in  $\sim$  ekvivalenčna relacija na  $X$ . Kvocientna projekcija  $q : X \rightarrow X/\sim$  je preslikava, ki vsakemu elementu  $x$  priredi njegov ekvivalenčni razred  $[x]$ .
- Za podmnožico  $A$  prostora  $X$  je kvocientna projekcija  $q(A)$  odprta/zaprta v kvocientnem prostoru  $X/\sim$  natanko tedaj, ko je nasičenje  $A$ , označeno z  $q^{-1}(q(A))$ , odprto/zaprto v originalnem prostoru  $X$ .
- Inducirana preslikava:**  $f : X \rightarrow Y$  preslikava med topološkima prostoroma  $X$  in  $Y$ , ter  $\sim$  ekvivalenčna relacija na  $X$ . Če je preslikava  $f$  konstantna na ekvivalenčnih razredih, je njena *inducirana preslikava*  $f_{\sim} : X/\sim \rightarrow Y$ , definirana kot  $f_{\sim}([x]) = f(x)$  za vsak  $x \in X$ , kjer je  $[x]$  ekvivalenčni razred elementa  $x$  glede na  $\sim$ .
- $f = f \circ q$ , preverimo:  $f$  dela prave identifikacije:  $x \sim y \iff f(x) = f(y)$ , zvezna, surjektivna, kvocientna v ožjem smislu.
- Surjektivna preslikava  $f : X \rightarrow Y$  je kvocientna v ožjem smislu  $\iff$  slika nasičene odprte podmnožice  $X$  v odprte podmnožice  $Y \iff$  slika nasičene zaprte podmnožice  $X$  v zaprte podmnožice  $Y$ .
- $r : X \rightarrow Y$  in  $s : Y \rightarrow X$  zvezni preslikavi, za kateri velja  $r \circ s = Id_Y$  ("r je retrakcija, s je prerez"). Tedaj je  $r$  kvocientna in  $s$  vložitev.
- $f : X \rightarrow Y$  zvezna preslikava in  $(K_i \subseteq X)_{i \in I}$  pokritje  $X$  s kompaktnimi podprostori. Privzemimo, da je družina  $(f_*(K_i))_{i \in I}$  lokalno končna v  $Y$  in da je  $Y$  Hausdorffov. Tedaj je  $f$  zaprta. Posledično, če je  $f$  dodatno še surjektivna, je kvocientna.
- $f : X \rightarrow Y$  zvezna preslikava,  $Y$  Hausdorffov in  $K \subseteq X$  kompaktna, za katerega velja  $f_*(K) = Y$ . Tedaj je  $f$  kvocientna.
- Konveksna kombinacija:** daljico  $AB$  slikamo v daljico  $CD : (1-t)A + tB \mapsto (1-t)C + tD$ .
- $I := [0, 1], X = I^2, (0, y) \sim (1, y), (x, 0) \sim (x, 1)$ .  $X/\sim \approx S^1 \times S^1$ . Preslikava:  $f : I \times I \rightarrow S^1 \times S^1, (x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$
- Model Möbiusovega traku znotraj polnega torusa:  $f : [0, 1] \times [-1, 1] \rightarrow S^1 \times B^2, f(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{\pi i x} y)$   
lok. povezanost (s potmi), diskretnost, trivialnost  
metrizabilnost, popolna nepovezanost.
- Top grupa**  $G$  je grupa in top. pr., množenje  $m : G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto ab$  in invertiranje  $inv : G \rightarrow G, a \mapsto a^{-1}$  sta zvezni.
- Leva translacija**  $L_a : G \rightarrow G, g \mapsto ag$  in **desna translacija** sta homeomorfizma.
- Topološka grupa je **homogen prostor**, tj.  $\forall a, b \in G \exists$  homeo  $h : G \rightarrow G, a \mapsto b$ .
- Delovanje**  $G$  na  $X$  je zv. preslikava  $\varphi : G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g \cdot x$ , za katero velja  $\varphi(e, x) = e \cdot x = x, h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x$ .
- Ekv. relacija glede na delovanje:  $x \sim y \iff \exists g \in G : y = g \cdot x$

18. **Orbita** elementa  $x$  je  $G \cdot x = \{g \cdot x | g \in G\} = [x]$ , **Prostor orbit** je kvoc. prostor  $X/G$  pri tej relaciji.
19. **Stabilizator** elementa  $x$  je  $G_x = \{g \in G | g \cdot x = x\}$
20. Če top. grupa  $G$  deluje na top. prostoru  $X$ , potem je kvoc. projekcija  $q : X \rightarrow X/G$  odprta.
21. Za top. grupo  $G$  velja: (a) Množica  $A \subseteq G$  je okolica točke  $a \in G$  natanko tedaj, ko je  $ba^{-1}A$  okolica točke  $b \in G$ . (b) Če je  $H \leq G$  podgrupa in okolica enote v  $G$ , je  $H$  odprta in zaprta v  $G$ . (c) Če je  $C$  komponenta za povezanost, ki vsebuje enoto  $G$ , je  $C$  zaprta edinka v  $G$ . (d) Za  $G$  so lastnosti  $T_0, T_1, T_2$  ekvivalentne.
22. **Stožec** nad  $X$  je  $CX = X \times [0, 1]/X \times \{1\}$ , **Suspenzija** nad  $X$  je  $\Sigma X = X \times [-1, 1]/\{X \times \{-1\}, X \times \{1\}\}$ .
23. **Zlepek**:  $X, Y$  top. prostora,  $A \subseteq X, f : A \rightarrow Y$  zvezna.  $X \cup_f Y = (X + Y)/a \sim f(a) \forall a \in A$ .
24. **Normalnost zlepkov**:  $X, Y$  normalna,  $A^{\text{zap}} \subseteq X, f : A \rightarrow Y$  zv.  $\Rightarrow$  zlepek  $X \cup_f Y$  normalen.
25.  $A^{\text{zap}} \subseteq X, f : A \rightarrow Y$  zap vložitev.  $Z = X \cup_f Y \Rightarrow$  (1)  $X, Y$  2-števena  $\Rightarrow Z$  2-števen, (2)  $X, Y$  regularna  $\Rightarrow Z$  regularen.
26.  $q \circ \text{in}_1 : X \rightarrow X \cup_f Y$  v splošnem ni vložitev, ampak  $q \circ \text{in}_2 : Y \rightarrow X \cup_f Y$  je vložitev.
27. Injekcije so zvezne, odprte in zaprte vložitev v vsoto.
28. Dogovor: za  $X/\emptyset$  dobimo  $X$  s še eno točko, tj. podprostor  $A$  se v kvocientu vedno nadomesti z eno točko.
29. **Retrakcija**:  $A \subseteq X, r : X \rightarrow A$  zvezna, je retrakcija, če  $r|_A = \text{id}_A$ ,  $A$  je retrakt  $X$ , če  $\exists$  retrakcija.
- (T) Retrakt povezanega/kompaktnega prostora je povezan/kompakten, retrakt absolutnega ekstenzorja je absolutni ekstenzor;
  - če  $X \in T_2$ , je retrakt zaprt.
  - (D)  $X$  ima **LNT** (lastnost negibne točke), če ima  $\forall$  zvezna preslikava  $X \rightarrow X$  negibno točko
  - $X$  ima LNT,  $A$  retrakt  $X \Rightarrow A$  ima LNT
  - (D)  $\mathcal{R}$  razred top. pr.,  $Y$  top. pr.,  $Y \in \text{AE}(\mathcal{R})$ , če za  $\forall X \in \mathcal{R}, \forall A^{\text{zap}} \subseteq X, \forall f : A \rightarrow Y$  zv.  $\exists F : X \rightarrow Y$  zv.:  $F|_A = f$  ( $F$  razširitev  $f$ )
  - Lastnosti:  $Y \in \text{AE}(\mathcal{R})$  je top. lastnost, produkt  $\text{AE}$  je  $\text{AE}$ , vsak interval  $\subseteq \mathbb{R}$  je  $\text{AE}(\mathcal{N})$ ,  $\mathcal{R} \cap \text{AE}(\mathcal{R}) \subseteq \text{AR}(\mathcal{R})$
  - (D)  $f, g : X \rightarrow Y$  zv., **homotopija** od  $f$  do  $g$  je zv. preslikava  $H : X \times I \rightarrow Y$  z  $H(x, 0) = f(x)$  in  $H(x, 1) = g(x)$
  - (D) Prostor  $X$  je **kontraktibilen**, če je  $\text{id}_X$  homotopna ( $\simeq$ ) kakšni konst. preslikavi  $X \rightarrow X$ ; homotopija = kontrakcija
  - Če je  $X$  kontraktibilen, je povezan s potmi
- $A_n : \forall f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$  zvezna ima negibno točko.
- $B_n : S^{n-1}$  ni retrakt  $B^n$
- $C_n : S^{n-1}$  ni kontraktibilna
- $D_n : D \subseteq \mathbb{R}^n$  topološki  $k$ -disk za  $0 < k \leq n$ , torej  $D \approx B^k$ .  $D$  ne deli  $\mathbb{R}^n$
- |  |  |
|--|--|
| $\chi(nT) = 2 - 2n$<br>$\chi(nP) = 2 - n$<br>$\chi(S^2) = \chi(0T) = 2$<br>$\chi(M) = 0$ | $nT$ so orientabilni<br>$nP$ niso orientabilni<br>$K \approx 2P$ |
|--|--|
10. (I)(Jordan-Brouwer)  $n \geq 2, S \subseteq \mathbb{R}^n$  top.  $(n-1)$ -sfera,  $(S \approx S^{n-1})$ . Tedaj ima  $\mathbb{R}^n \setminus S$  dve komponenti, eno omejeno in eno neomejeno, obe sta odprti v  $\mathbb{R}^n$  in povezani s potmi,  $S$  je meja obeh.
11. (I)(Schönfliesov)  $S^1 \approx S \subseteq \mathbb{R}^2, V$  omejena komponenta  $\mathbb{R}^2 \setminus S \Rightarrow \text{Cl}(V) \approx B^2$
12. (D)  $S \approx S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$  je **lokalno ploščata** v  $x \in S$ , če  $\exists V : x \in V^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $\exists$  homeo  $h : V \rightarrow W, W^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$ , da je  $h_*(S \cap V) = (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cap W$ .  $S$  je **lokalno ploščata**, če je taka v vseh svojih točkah (vložitev je krotka ali  $S$  je podmnt); če v  $x \in S, S$  ni lokalno ploščata, je  $x$  **divja točka**
13. (I)(Brouwer)(o odprti preslikavi)  $U^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n, f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  zv., inj.  $\Rightarrow f$  odp. preslikava ( $\Rightarrow f_*(U)^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$ )
14. (invarianca odp mn)  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n, U^{\text{odp}}, U \approx V \Rightarrow V^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$
15. Posledica:  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n, A \approx B \Rightarrow \text{Int}(A) \approx \text{Int}(B)$  in  $\text{Meja}(A) \approx \text{Meja}(B)$
16. (D) topološka **mnogoterost** dimenzije  $n \in \mathbb{N}$  ( $n$ -mnt) je  $T_2$ , 2-števen topološki prostor  $M$ , v katerem ima vsaka točka odprto okolico homeo  $\mathbb{R}^n$  ali  $\mathbb{R}_+^n$ . Okolico  $V$  imenujemo **evklidska okolica**, home.  $(h : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \text{ ali } \mathbb{R}_+^n)$  imenujemo **karta** na  $M$ .
- 17.
- 1. komponenta  $n$ -mnt je  $n$ -mnt (komponente so odprte, ker je mnt lok pov  $\Leftarrow$  lok evklidskost)
  - 2. disj unija (največ) števno mnogo  $n$ -mnt je  $n$ -mnt
  - 3. Rob mnt:  $M$   $n$ -mnt,  $\text{int}(M)^{\text{odp}} \subseteq M \Rightarrow \partial M^{\text{zap}} \subseteq M$
  - Izrek**: (o odprti preslikavi za mnt)  $M, N$   $n$ -mnt,  $V^{\text{odp}} \subseteq \text{int}(M), f : V \rightarrow N$  zv., inj.  $\Rightarrow f$  odp in  $f_*(V) \subseteq \text{int}(N)$
  - Izrek**:  $M$   $n$ -mnt,  $\partial M \neq \emptyset \Rightarrow \partial M$  ( $n-1$ )-mnt s praznim robom ( $\partial(\partial M) = \emptyset$ ); če je  $M$  kompaktna  $\Rightarrow \partial M$  sklenjena (op: rob kompaktne ploskve je disjunktna unija krožnic)  $\partial M$  ne deli  $M$ :  $M$  povezana  $\Rightarrow M \setminus \partial M$  povezana
  - Izrek**:  $M$   $m$ -mnt,  $N$   $n$ -mnt  $\Rightarrow M \times N$  je  $(m+n)$ -mnt,  $\text{int}(M \times N) = \text{int}(M) \times \text{int}(N), \partial(M \times N) = \partial M \times N \cup M \times \partial N$
  - 5. Zlepek mnt**: Def:  $N$   $n$ -mnt,  $L$   $l$ -mnt;  $L \cap \partial N = \partial L \Rightarrow L$  prav vložena |  $L$  lokalno ploščata ali podmnt, če je prav vložena in  $\forall x \in L \exists$  evklidska okolica  $V : x \in V \subseteq N$  in homeo (karta)  $h : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  ali  $\mathbb{R}_+^n$ , da je  $h_*(L \cap V) = h_*(V) \cap (\{0\}^{n-l} \times \mathbb{R}^l)$
  - Izrek**:  $N_1, N_2$   $n$ -mnt,  $L_i \subseteq \partial N_i$  ( $n-1$ )-mnt in  $\partial L_i$  lokalno ploščat v  $\partial N_i$   $h : L_1 \rightarrow L_2$  homeo  $\Rightarrow$  zlepek  $N_1 \cup_h N_2 = N$  je  $n$ -mnt z robom, ki je zlepek  $(\partial N_1 \setminus \text{int}(L_1)) \cup_{h|_{\partial L_1}} (\partial N_2 \setminus \text{int}(L_2))$  in  $(N_1 \setminus L_1) \cup (N_2 \setminus L_2)$  je vložena v zlepek kot odprta podmnt.
  - 6. Razrez mnt**:  $N$   $n$ -mnt,  $L \subseteq N$  lokalno ploščata ( $n-1$ )-podmnt  $\Rightarrow$  lahko  $N$  prerežemo vzdolž  $L$
  - 7. Povezana vsota**: Def:  $M, N$   $n$ -mnt,  $D \subseteq \text{int}(M), E \subseteq \text{int}(N)$  topološka  $n$ -diska z lok ploščatima robovoma, izberimo homeo  $h : \partial D \rightarrow \partial E$ . Povezana vsota  $M$  in  $N$  je  $M \# N = (M \setminus \text{int}(D)) \cup_h (N \setminus \text{int}(E))$  op:  $M \# N$  je  $n$ -mnt
18. (I)(homogenost mnt)  $M$  povezana  $n$ -mnt,  $x, y \in \text{int}(M) \Rightarrow \exists$  homeo  $h : M \rightarrow M, h(x) = y$
19. Eulerjeva karakteristika in orientabilnost sta topološki lastnosti.
20. **Eulerjeva karakteristika**  $X$ :  $\chi(X) = \#(2\text{-celic}) - \#(1\text{-celic}) + \#(0\text{-celic})$
21. Karakterizacija: orientabilnost,  $\chi$ , št. robnih komponent,  $\chi(A \# B) = \chi(A) + \chi(B) - 2, \chi(X \cup \text{trak}) = \chi(X) - 1$
- 22.
- $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  zap,  $A, B \in \text{AE}(\mathcal{N})$ :  $|A \cap B| = 1 \Rightarrow A \cup B \in \text{AE}(\mathcal{N})$
  - $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  zap,  $A, B \in \text{AE}(\mathcal{N})$ :  $A \cap B \in \text{AE}(\mathcal{N}) \Rightarrow A \cup B \in \text{AE}(\mathcal{N})$
  - $X$  kompaktna mnt:  $\partial X \neq \emptyset, i : \partial X \rightarrow X$  inkluzija  $\Rightarrow$  zlepek  $X \cup_{\partial X} X := X \cup_i X$  kompaktna mnt brez roba (imenuje se podvojitev mnogoterosti  $X$ )