

- (p) Homeom.: $f : [a, b] \rightarrow [c, d]: f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c, g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}: g(x) = \frac{x}{1-|x|}$ in $h : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1): h(x) = \frac{x}{1+|x|}$
- f je homeomorfizem $\iff f$ zvezna odprta bijekcija $\iff f$ zvezna zaprta bijekcija $\iff f$ zvezna in f^{-1} zvezna
- (D) Prostor X zadošča prvemu aksiomu števности (je 1-števen), če ima vsaka točka X kako števno bazo okolice.
- (D) Prostor zadošča drugemu aksiomu števности (je 2-števen), če \exists kaka števna baza za njegovo topologijo.
- (D) Prostor je separabilen, če premore kako povsod gosto podmnožico, ki je števna.
- (D) Podmnožica A je povsod gosta v X , če seka vsako odprto množico X (tako kot \mathbb{Q} v \mathbb{R}), ali ekvivalentno, če je $\bar{A} = X$.
- (I) prostor Y Hausdorffov. (1) Vsaka končna podmnožica Y je zaprta. Točke so zaprte. (2) Točka y je stekališče množice $A \subseteq Y$ natanko takrat, ko vsaka okolica y vsebuje neskončno točk iz A . (3) Zaporedje v Y ima največ eno limito. (4) Množica točk ujemanja $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$ je zaprta v X za poljubni preslikavi $f, g : X \rightarrow Y$. (5) Če se preslikavi $f, g : X \rightarrow Y$ ujemata na neki gosti podmnožici X , potem je $f = g$. (6) Graf preslikave $f : X \rightarrow Y$ je azprt podprostor produkta $X \times Y$.
- (D) Aksiomi ločljivosti: Naj bo (X, \mathcal{T}) topološki prostor. X je:
 - T_0 : Za različni točki $x, x' \in X$ obstaja okolica ene izmed točki x, x' , ki jo loči od druge točke.
 - T_1 : Za različni točki $x, x' \in X$ obstaja okolica točke x , ki jo loči od x' in obenem obstaja okolica točke x' , ki jo loči od x .
 - T_2 : Za različni točki $x, x' \in X$ obstajata okolici, ki ostro ločita x in x' .
 - T_3 : Za točki $x \in X$ in zaprto množico $A \subseteq X$, ki ne vsebuje x , obstajata okolici, ki ostro ločita x in A .
 - T_4 : Za disjunktne zaprte množici $A, B \subseteq X$ obstajata okolici, ki ostro ločita A in B .
- (T) Prostor X ima lastnost T_3 natanko takrat, ko za vsak $x \in X$ in vsako odprto okolico U za $x \ni$ taka odprta množica V , da velja $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$.

Prostor X je nepovezan

\iff Prostor X je disjunktna unija dveh nepraznih zaprtih podmnožic

$\iff \forall X \ni$ prava neprazna pomnožica, ki je hkrati odprta in zaprta

$\iff \exists$ surjektivna preslikava $f : X \rightarrow \{0, 1\}$

(I) X kompakten, Y pa Hausdorffov prostor:

Vsaka preslikava $f : X \rightarrow Y$ je zaprta.

Vsaka injektivna preslikava $f : X \rightarrow Y$ je vložitev.

Vsaka bijektivna preslikava $f : X \rightarrow Y$ je homeomorfizem.

- (I) (Urissonova lema) Hausdorffov prostor X je normalen natanko takrat, ko za poljubni disjunktne neprazni zaprti podmnožici $A, B \subseteq X \ni$ preslikava $f : (X, A, B) \rightarrow (I, 0, 1)$.

- X lokalno povezan \iff komponente vsake odprte okolice so odprte v X

- Komponente za povezanost so zaprte, nenujno odprte

Lastnost	dedna	prod.	delj.	se ohranja pri
T_1 (Fréchet)	✓	✓	✗	
T_2 (Hausdorff)	✓	✓	✗	zaprte bijekcije
T_3	✓	✓	✗	
T_4			✗	
1-števnost	✓	števno	✗	
2-števnost	✓	števno	✗	odp. zvezne sur.
separabilnost	odprto	števno	✓	zvezna
regularnost (T_3, T_0)	✓	✓		
normalnost (T_4, T_1)	zaprto			zap. zvezne sur.
absolutni ekstenzor		✓		

metričnost \implies (2-števnost \iff separabilnost)

2-števnost \implies separabilnost in 1-števnost

regularnost + 2-števnost \implies normalnost

normalnost + 2-števnost \implies metrizabilnost

metrizabilnost \implies normalnost

2-števnost + regularnost \iff metrizabilnost

kompaktnost + $T_2 \implies$ normalnost

lokalna kompaktnost + $T_2 \implies$ regularnost

Lastnost	dedna	prod	delj.	se ohranja pri
diskretnost	✓	končno	✓	
metrizabilnost	✓	števno	✗	
kompaktnost	zaprto	✓	✓	zvezne
lok. kompaktnost		✓	✗	odp. zvezne
povezanost		✓	✓	zvezne
lok. povezanost		✓	✓	odp./zap. zv.
pov. s potmi		✓	✓	zvezne
lok. pov. s potmi		končno	✓	odp./zap. zv.
popolna nepov.		končno	✗	

- Kvocientna množica:** X topološki prostor in \sim ekvivalenčna relacija na X . Kvocientna množica X/\sim je množica vseh ekvivalenčnih razredov v X glede na \sim , opremljena z najmočnejšo topologijo, tj. topologijo τ na X/\sim , za katero velja: $V \in \tau \iff p^{-1}(V) \subseteq X$ je odprta za vsako $V \subseteq X/\sim$, kjer je $p : X \rightarrow X/\sim$ kvocientna projekcija.
- Kvocientna projekcija:** X topološki prostor in \sim ekvivalenčna relacija na X . Kvocientna projekcija $q : X \rightarrow X/\sim$ je preslikava, ki vsakemu elementu x priredi njegov ekvivalenčni razred $[x]$.
- Za podmnožico A prostora X je kvocientna projekcija $q(A)$ odprta/zaprta v kvocientnem prostoru X/\sim natanko tedaj, ko je **nasičenje** $A q^*(q_*(A))$, odprto/zaprto v originalnem prostoru X .
- $f : X \rightarrow Y$ preslikava, \sim ekvivalenčna relacija na X . Če je preslikava f konstantna na ekvivalenčnih razredih, je njena **inducirana preslikava** $f_\sim : X/\sim \rightarrow Y, f_\sim([x]) = f(x)$, kjer je $[x]$ ekvivalenčni razred elementa x glede na \sim .
- $f = \bar{f} \circ q$, preverimo: f dela prave identifikacije: $x \sim y \iff f(x) = f(y)$, zvezna, surjektivna, kvocientna v ožjem smislu.
- Surjektivna preslikava $f : X \rightarrow Y$ je **kvocientna v ožjem smislu** \iff slika nasičene odprte podmnožice X v odprte podmnožice $Y \iff$ slika nasičene zaprte podmnožice X v zaprte podmnožice Y .
- $r : X \rightarrow Y$ in $s : Y \rightarrow X$ zvetni, za kateri velja $r \circ s = Id_Y$ (" r je retrakcija, s je prerez"). Tedaj je r kvocientna in s vložitev.
- $f : X \rightarrow Y$ zvezna preslikava in $(K_i \subseteq X)_{i \in I}$ pokritje X s kompaktnimi podprostori. Privzemimo, da je družina $(f_*(K_i))_{i \in I}$ lokalno končna v Y in da je Y Hausdorffov. Tedaj je f zaprta. Posledično, če je f dodatno še surjektivna, je kvocientna.
- $f : X \rightarrow Y$ zvezna preslikava, Y Hausdorffov in $K \subseteq X$ kompaktna, za katerega velja $f_*(K) = Y$. Tedaj je f kvocientna.
- Konveksna kombinacija:** daljico AB slikamo v daljico $CD : (1-t)A + tB \mapsto (1-t)C + tD$.
- $I := [0, 1], X = I^2, (0, y) \sim (1, y), (x, 0) \sim (x, 1)$. $X/\sim \approx S^1 \times S^1$. Preslikava: $f : I \times I \rightarrow S^1 \times S^1, (x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$
- Model **Möbiusovega traku** znotraj polnega torusa: $f : [0, 1] \times [-1, 1] \rightarrow S^1 \times B^2, f(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{\pi i x} y)$
- Top grupa** G je grupa in top. pr., množenje $m : G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto ab$ in invertiranje $inv : G \rightarrow G, a \mapsto a^{-1}$ sta zvezni.
- Leva translacija** $L_a : G \rightarrow G, g \mapsto ag$ in **desna translacija** sta homeomorfizma.
- Topološka grupa je **homogen prostor**, tj. $\forall a, b \in G \ni$ homeo $h : G \rightarrow G, a \mapsto b$.
- Delovanje** G na X je zv. preslikava $\varphi : G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g \cdot x$, za katero velja $\varphi(e, x) = e \cdot x = x, h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x$.
- Ekv. relacija glede na delovanje: $x \sim y \iff \exists g \in G : y = g \cdot x$, **Stabilizator** elementa x je $G_x = \{g \in G | g \cdot x = x\}$
- Orbita** elementa x je $G \cdot x = \{g \cdot x | g \in G\} = [x]$, **Prostor orbit** je kvoc. prostor X/G pri tej relaciji.
- Če top. grupa G deluje na top. prostoru X , potem je kvoc. projekcija $q : X \rightarrow X/G$ odprta.
- Za top. grupo G velja: (a) Množica $A \subseteq G$ je okolica točke $a \in G$ natanko tedaj, ko je $ba^{-1}A$ okolica točke $b \in G$. (b) Če je

- $H \leq G$ podgrupa in okolica enote v G , je H odprta in zaprta v G . (c) Če je C komponenta za povezanost, ki vsebuje enoto G , je C zaprta edinka v G . (d) Za G so lastnosti T_0, T_1, T_2 ekvivalentne.
21. **Stožec** nad X je $CX = X \times [0, 1]/X \times \{1\}$, **Suspensija** nad X je $\Sigma X = X \times [-1, 1]/\{X \times \{-1\}, X \times \{1\}\}$.
22. **Zlepek**: X, Y top. prostora, $A \subseteq X, f: A \rightarrow Y$ zvezna. $X \cup_f Y = (X + Y)/a \sim f(a) \forall a \in A$.
23. **Normalnost zlepkov**: X, Y normalna, $A^{\text{zap}} \subseteq X, f: A \rightarrow Y$ zv. \Rightarrow zlepek $X \cup_f Y$ normalen.
24. $A^{\text{zap}} \subseteq X, f: A \rightarrow Y$ zap vložitev. $Z = X \cup_f Y \Rightarrow$ (1) X, Y 2-števna $\Rightarrow Z$ 2-števen, (2) X, Y regularna $\Rightarrow Z$ regularen.
25. $q \circ \text{in}_1: X \rightarrow X \cup_f Y$ v splošnem ni vložitev, ampak $q \circ \text{in}_2: Y \rightarrow X \cup_f Y$ je vložitev.
26. Injekcije so zvezne, odprte in zaprte vložitve v vsoto.
27. Dogovor: za X/\emptyset dobimo X s še eno točko, tj. podprostor A se v kvocientu vedno nadomesti z eno točko.
-
- $A \subseteq X, r: X \rightarrow A$ zvezna, je **retrakcija**, če $r|_A = \text{id}_A$, A je **retrakt** X , če \exists retrakcija če $X \in T_2$, je retrakt zaprt
1. (T)Retrakt povezanega/kompaktnega prostora je povezan/kompakten, retrakt absolutnega ekstenzorja je absolutni ekstenzor
- (D) X ima **LNT**, če ima \forall zvezna preslikava $X \rightarrow X$ negibno točko X ima LNT, A retrakt $X \Rightarrow A$ ima LNT
2. (D) \mathcal{R} razed top. pr., Y top. pr., $Y \in AE(\mathcal{R})$, če za $\forall X \in \mathcal{R}, \forall A^{\text{zap}} \subseteq X, \forall f: A \rightarrow Y$ zv. $\exists F: X \rightarrow Y$ zv.: $F|_A = f$ (F razširitev f)
- \forall interval $\subseteq \mathbb{R}$ je $AE(\mathcal{N})$
 $\mathcal{R} \cap AE(\mathcal{R}) \subseteq AR(\mathcal{R})$

Retrakt povezanega/kompaktnega prostora je povezan/kompakten
retrakt absolutnega ekstenzorja je absolutni ekstenzor

Če je X kontraktibilen
je povezan s potmi
3. (D) $f, g: X \rightarrow Y$ zv., **homotopija** od f do g je zv. preslikava $H: X \times I \rightarrow Y$ z $H(x, 0) = f(x)$ in $H(x, 1) = g(x)$
4. (D) Prostor X je **kontraktibilen**, če je id_X homotopna (\simeq) kakšni konst. preslikavi $X \rightarrow X$; homotopija = kontrakcija
- $A_n: \forall f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ zvezna ima negibno točko
 $C_n: S^{n-1}$ ni kontraktibilna
 $B_n: S^{n-1}$ ni retrakt B^n
 $D_n: D \subseteq \mathbb{R}^n$ topološki k -disk za $0 < k \leq n$, torej $D \approx B^k$. D ne deli \mathbb{R}^n
5. (I)(Jordan-Brouwer) $n \geq 2, S \subseteq \mathbb{R}^n$ top. $(n-1)$ -sfera, $(S \approx S^{n-1})$. Tedaj ima $\mathbb{R}^n \setminus S$ dve komponenti, eno omejeno in eno neomejeno, obe sta odprti v \mathbb{R}^n in povezani s potmi, S je meja obeh.
6. (I)(Schönfliesov) $S^1 \approx S \subseteq \mathbb{R}^2, V$ omejena komponenta $\mathbb{R}^2 \setminus S \Rightarrow Cl(V) \approx B^2$
7. (D) $S \approx S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ je **lokalno ploščata** v $x \in S$, če $\exists V: x \in V^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$ in \exists homeo $h: V \rightarrow W, W^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$, da je $h_*(S \cap V) = (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cap W$. S je **lokalno ploščata**, če je taka v vseh svojih točkah (vložitev je krotka ali S je podmnt); če v $x \in S, S$ ni lokalno ploščata, je x **divja točka**
8. (I)(Brouwer)(o odprti preslikavi) $U^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n, f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ zv., inj. $\Rightarrow f$ odp. preslikava ($\Rightarrow f_*(U)^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$)
9. (invarianca odp mn) $U, V \subseteq \mathbb{R}^n, U^{\text{odp}}, U \approx V \Rightarrow V^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$
10. Posledica: $A, B \subseteq \mathbb{R}^n, A \approx B \Rightarrow \text{Int}(A) \approx \text{Int}(B)$ in $\partial(A) \approx \partial(B)$
11. (D) topološka **mnogoterost** dimenzije $n \in \mathbb{N}$ (n -mnt) je T_2 , 2-števen topološki prostor M , v katerem ima vsaka točka odprto okolico homeo \mathbb{R}^n ali \mathbb{R}_+^n . Okolico V imenujemo **evklidska okolica**, home. $(h: V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \text{ ali } \mathbb{R}_+^n)$ imenujemo **karta** na M .
12. komponenta n -mnt je n -mnt (komponente so odprte, ker je mnt lok pov \Leftarrow lok evklidskost)
13. disj unija (največ) števno mnogo n -mnt je n -mnt
14. Rob mnt: M n -mnt, $\text{Int}(M)^{\text{odp}} \subseteq M \Rightarrow \partial M^{\text{zap}} \subseteq M$
15. (I)(o odprti preslikavi za mnt) M, N n -mnt, $V^{\text{odp}} \subseteq \text{int}(M), f: V \rightarrow N$ zv., inj. $\Rightarrow f$ odp in $f_*(V) \subseteq \text{int}(N)$
16. če je M kompaktna $\Rightarrow \partial M$ sklenjena (op: rob kompaktna ploskve je disjunktna unija krožnic)
- (I) M n -mnt, $\partial M \neq \emptyset \Rightarrow \partial M$ $(n-1)$ -mnt s praznim robom ($\partial(\partial M) = \emptyset$)
() ∂M ne deli M (M povezana $\Rightarrow M \setminus \partial M$ povezana)
(I) M m -mnt, N n -mnt $\Rightarrow M \times N$ je $(m+n)$ -mnt

$\text{Int}(M \times N) = \text{Int}(M) \times \text{Int}(N)$
 $\partial(M \times N) = \partial M \times N \cup M \times \partial N$
17. Zlepek mnt: (D) N n -mnt, L l -mnt; $L \cap \partial N = \partial L \Rightarrow L$ **prav vložena**
18. L **lokalno ploščata** ali **podmnt**, če je prav vložena in $\forall x \in L \exists$ evklidska okolica $V: x \in V \subseteq N$ in homeo $h: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ali \mathbb{R}_+^n , da je $h_*(L \cap V) = h_*(V) \cap (\{0\}^{n-l} \times \mathbb{R}^l)$
19. (I) N_1, N_2 n -mnt, $L_i \subseteq \partial N_i$ $(n-1)$ -mnt in ∂L_i lokalno ploščat v ∂N_i $h: L_1 \rightarrow L_2$ homeo \Rightarrow zlepek $N_1 \cup_h N_2 = N$ je n -mnt z robom, ki je zlepek $(\partial N_1 \setminus \text{Int}(L_1)) \cup_{h|_{\partial L_1}} (\partial N_2 \setminus \text{Int}(L_2))$ in $(N_1 \setminus L_1) \cup (N_2 \setminus L_2)$ je vložena v zlepek kot odprta podmnt.
20. N n -mnt, $L \subseteq N$ lokalno ploščata $(n-1)$ -podmnt \Rightarrow lahko N prerežemo vzdolž L
21. (D) M, N n -mnt, $D \subseteq \text{Int}(M), E \subseteq \text{Int}(N)$ topološka n -diska z lok ploščatima robovoma, izberimo homeo $h: \partial D \rightarrow \partial E$. **Povezana vsota** M in N je $M \# N = (M \setminus \text{Int}(D)) \cup_h (N \setminus \text{Int}(E))$ op: $M \# N$ je n -mnt
- (I)(homogenost mnt) M povezana n -mnt, $x, y \in \text{int}(M) \Rightarrow \exists$ homeo $h: M \rightarrow M, h(x) = y$

$\partial(M \# N) = \partial M + \partial N$
22. Eulerjeva karakteristika in orientabilnost sta topološki lastnosti. (Karakterizacija: orientabilnost, χ , št. robnih komponent)
23. **Eulerjeva karakteristika** $X: \chi(X) = \#(2\text{-celic}) - \#(1\text{-celic}) + \#(0\text{-celic})$
- $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ zap, $A, B \in AE(\mathcal{N})$:
 $|A \cap B| = 1 \Rightarrow A \cup B \in AE(\mathcal{N})$
 $A \cap B \in AE(\mathcal{N}) \Rightarrow A \cup B \in AE(\mathcal{N})$

$\chi(nT) = 2 - 2n$
 $\chi(nP) = 2 - n$
 $\chi(S^2) = \chi(0T) = 2$

$\chi(M) = 0$
 $\chi(A \# B) = \chi(A) + \chi(B) - 2$
 $\chi(X \cup \text{trak}) = \chi(X) - 1$

nT so orientabilni
 nP niso orientabilni
 $K \approx 2P$
24. X kompaktna mnt: $\partial X \neq \emptyset, i: \partial X \rightarrow X$ inkluzija \Rightarrow zlepek $X \cup_{\partial X} X := X \cup_i X$ kompaktna mnt brez roba (podvojitev mnogoterosti X)