

✓ 4.3

zámek prebranj

$$X \cong Y$$

Tridat  $X/\sim_x \cong Y/\sim_y$  ( $\sim_y$  in  $\sim_x$  sta  
vklajeni:  $(y_1 \sim y_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) \sim f^{-1}(y_2))$ )

Dleč

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow q_x & & \downarrow q_y \\ X/\sim_x & \xrightarrow{F} & Y/\sim_y \end{array}$$

homeomorfizem  
kvocienta preslika  
grof kvocienta

Definicija: A slike obov ravel v  $X$  v

obv. ravel v  $Y$

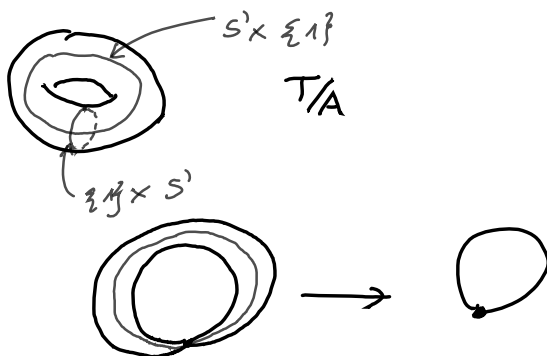
Torej grof ravel: iste identifikacije  
kot  $q_x$

$\Rightarrow$  grof inducira homeomorfizem  $F: X/\sim_x \rightarrow Y/\sim_y$

Primer:

Naj bo  $1 \in S^1 \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}^2$

$A = S^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times S^1 \subseteq S^1 \times S^1 = T$  torus



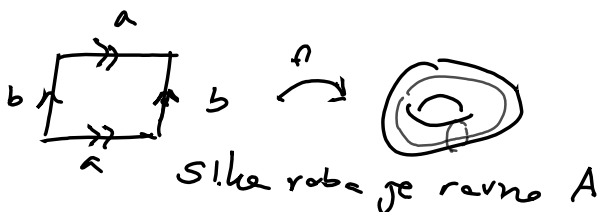
Najbrž je kvocient  $S^2$

Ideja: torus prerežemo vzdolž  $A$ , da dobimo kvadrat z identifikacijami na robu

$$X = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$f: X \rightarrow S^1 \times S^1$$

$$f(x, y) = (\underbrace{\cos 2\pi x, \sin 2\pi x}_{e^{i2\pi x}}, \underbrace{\cos 2\pi y, \sin 2\pi y}_{e^{i2\pi y}})$$



$$B := f^{-1}(A) = \partial I^2 \dots \text{rob kvadrata}$$

če nadaljujemo tako da  $A$  stisnemo v točko to ustrezajo identifikacijam na kvadratu, ki celotni rob stisnemo v točko

$$I^2 \xrightarrow{p} I^2/B \text{ kvocientna projekcija}$$

$$\text{vemo da } \boxed{I^2} \cong \mathbb{B}^2$$

$$B = \partial I^2 \quad \partial^1 = \partial \mathbb{B}^2$$

$$\downarrow p \quad \downarrow \downarrow$$

$$I^2/B \cong \mathbb{B}^2/S^1 \cong S^2$$

$$\Rightarrow S^2 \cong T/A$$

Deljivost topoloških lastnosti

Def: topološka lastnost  $\mathcal{L}$  je deljiva,  
če za  $\forall X \in \mathcal{L}, \forall \sim$  ekv. rel.  $X/\sim \in \mathcal{L}$

Ekvivalentno:  $\mathcal{L}$  je deljiva, če se ohranja  
pri kvocienčnih preslikavah

Trditve:

1) Deljive so naslednje lastnosti

- kompaktnost, povezanost (s patni), lokalna povezanost (s patni), separabilnost, diskretnost, trivialnost

2) Nedeljive so:

- lokalna kompaktnost, 1- in 2-števnost, separabilne lastnosti, metričnost, popolna nepovezanost

Dokaz:

komp., pov. in sep. se ohranja z veznosjo

lokalna povezanost s patni.

lok. povezan  $\Leftrightarrow$  komponente vsake odprte množice so odprte

$$X, \sim \quad \forall \emptyset \neq U \subseteq X, \sim$$

$$V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \quad V_\lambda \text{ so komponente za povezanost}$$

$V_\lambda$  so odprte

$$g: X \rightarrow Y \quad \text{kont.}$$

$$g^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} g^{-1}(V_\lambda) \text{ je odprta v } X$$

P- preobrazba je  $X$  lok. po.  $\Rightarrow$  to

$\Rightarrow$  komponente  $g^{-1}(U)$  so odprte v  $X$

Naj bo  $W$  poljubna komponenta  $g^{-1}(U)$

Ker je  $V$  povezana in  $g$  vezan  $\Rightarrow$

$$g(W) \subseteq V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$$

$$\text{t.j. } g(W) \subseteq V_\lambda \text{ za nek } \lambda \in \Lambda$$

$$\Rightarrow W \subseteq g^{-1}(V_\lambda)$$

$\Rightarrow g^{-1}(V_\lambda)$  je ena komponent

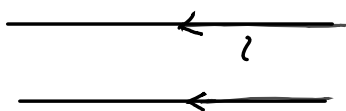
za povezanost  $\Rightarrow g^{-1}(V_\lambda)$  je

odprta  $\Leftrightarrow V_\lambda$  so odprte

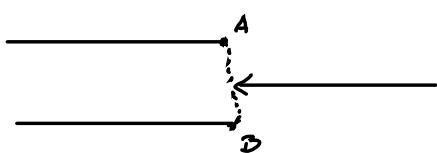


2) separabilne lastnosti:

$$T_2: X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$$



Relacija  $\sim (x, 0) \sim (x, 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$



$A$  in  $B$  nimata več disjunktnih delov

1-števnost

$$X = [0, 1] \times \mathbb{N} \quad A = \{0\} \times \mathbb{N}$$



$$X/A = \text{point} \quad X/A \text{ ni enaštevan}$$

Dokaz s protislovesni:

Recimo da jo ima

$$a = g(A) = g(\{0, n\}), \quad n \in \mathbb{N}$$

Recimo da jo

$\forall$   $U$  odprta  $\Rightarrow$  ni



Trditelj:  $X$  top. pr.  $\leadsto$  ekv. relacija na  $X$

$X/\sim \in T_1 \Leftrightarrow$  ekvivalenčni razredi v  $X$   
so zaprti

Dokaz:

$X/\sim \in T_1 \Leftrightarrow$  točke v  $X/\sim$  so zapte

$$\Leftrightarrow g^{-1}(t_0) \underset{\text{vz}}{\subseteq} X$$

## 1.3 Topolaské grupe in delovanje

Def: Topolaska grupa je grupa  $G$ , ki je opremljena s topologijo, glede na katero sta množenje

$$m: G \times G \rightarrow G$$

$$(g, h) \mapsto gh$$

in invertiranje

$$\text{inv}: G \rightarrow G$$

$$g \mapsto g^{-1}$$

zem:

Opomba: Poznamo že primer topolaste algebre

$$(C(X), \tau_{co})$$

Ki bomo večinoma delali mod  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

ki so topolasti obsegi, obstajajo še drugi npr. končni obsegi:  $(\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_p)$  ki jih običajna opremimo z diskretno topologijo  $p$ -adichne, ki so nepolnitet  $\mathbb{Q}$  v  $p$ -adichni metriki

$$\frac{m}{n} = p^k \frac{m_1}{n_1} \quad m_1, n_1 \text{ tuja } p \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left\| \frac{m}{n} \right\|_p = p^{-k}$$

## Primeri

1)  $G$  poljubna grupa opremljena z diskretno topologijo je tudi grupa

2)  $G$  top. grupa  $H \leq G \Rightarrow$   
 $H$  z inducirano topologijo je tudi top. grupa

3)  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{C}, +)$ ,  $(\mathbb{H}, +)$  so top. grupe

$(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ,  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ ,  $(\mathbb{H}^*, \cdot)$  so tudi top. grupe



norma je **multiplikativna** ko:

$$\mu, \lambda \in \mathbb{F} \quad \|\mu\lambda\| = \|\mu\| \cdot \|\lambda\|$$

Posebej sledi, da so enotske sfere  
zaprte za množenje

$(S^0, \cdot)$   $(S^1, \cdot)$   $(S^3, \cdot)$  so topološke  
grupe  
"  $\{\pm 1\}$

kaj pa  $S^2$ ? Ne!

Neglejši dokaz z uporabo algebrizirane  
topologije

5) Naj bodo  $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  grupe

Poten je  $\prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$  opremljena z operacijami:

po komponentah in produktno topologijo  
tudi topološka grupa

Npr:  $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C} \dots$  cantorjeva množica

6) Topološke grupe linearnih izomorfizmov

$F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$

$GL_n(F) = \{\text{lin. izomorf. } F^n \rightarrow F^n\}$

$$= \{A \in F^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$$

.... splošne linearne grupe

$$(A, B) \mapsto A \cdot B \quad \text{zveza}$$

$$A \mapsto A^{-1} \quad \text{kudi zveza}$$
$$= \frac{1}{\det A} \tilde{A}$$

Se veči: To je **Liejeva grupa** ..., gladka  
množica in operaciji sta gladki

Enako velja za vse standardne podgrupe:

$$SL_n(F) \dots \det = 1$$

nad  $\mathbb{R}$ :

$$O_n \dots \text{ortogonalna} \quad AA^T = I$$

$$SO_n \dots \text{specialna ortogonalna} \quad A^{-1} = A^T$$

nad  $\mathbb{C}$ :

$$U_n \dots \text{unitarna} \quad AA^H = I$$

$$SU_n \dots \text{specialna unitarna}$$

nad  $\mathbb{H}$

$$Sp_n \dots \text{symplektična grupa} \quad AA^H = 1$$

$$(\text{sred. } \det = 1)$$

Trditev: Naj bo  $G$  top. grupa  
 $a \in G$ .

leva (oz desna) translacija za  $a$  je

$$L_a: G \rightarrow G$$

$$g \mapsto ag$$

$$R_a: G \rightarrow G$$

$$g \mapsto ga$$

sta homeomorfizma

Dkz:

$$R_a: G \xrightarrow{\cong} G \times \{a\} \subset G \times G \xrightarrow{\pi} G$$

$$g \mapsto (g, a) = (ga) \mapsto ga$$

kompozicija zveznih je zveza ~~zveza~~

inverz:  $R_a^{-1}$

$$R_a^{-1}(R_a(g)) = R_a^{-1}(ga) = (ga)a^{-1} = g(aa^{-1}) = g$$

## Posledica

Top. grupa  $G$  je homogen prostor, tj. za

poljuben  $x, y \in G$ .  $\exists$  homeom.  $h: G \rightarrow G$ ,  $h(x) = y$

Dokaz:  $L_{yx^{-1}}$  ali  $R_{x^{-1}y}$

Dat:

Maj bo  $X$  top. prost. in  $G$  top. grupa

(levo) **delovanje** grupe  $G$  na prostor  $X$

je zveza preslikave  $p: G \times X \rightarrow X$

$$(g, x) \mapsto p(g, x) = g \cdot x$$

za katero velja:

$$\uparrow) ex = x \quad \forall x \in X$$

$$b \cdot (a \cdot x) = (ba) \cdot x \quad \forall x \in X, \forall a, b \in G$$

V tem primeru rečemo da je  $X$   $G$ -prostor

Opomba: kot v primeru grupe, delovanje določa translacijo ki je homeomorfizem prostora  $X$

$$L_a: X \rightarrow X$$

$$x \mapsto a \cdot x$$

Ampak v splošnem  $X$  ni homogen za delovanje grupe  $G$ :

za polj  $x \in X$  je

$$G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\} \text{ orbita točke } x \text{ in}$$

ta v splošnem ni ves  $X$

Tone; delovanje  $G$  na  $X$  določa dv. relacijo  
 na  $X$  za katera so ekvivalentni;  
 razredi orbite delovanja;

$$x \sim y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists g \in G, g \cdot x = y$$

$$[x] = \{ y \mid \exists g \in G, g \cdot x = y \}$$

Za poljubnem  $x \in X$  je  $G_x = \{ g \in G \mid g \cdot x = x \}$   
 stabilizatorska podgrupa elementa  $x$

Velja:  $G \cdot x \xrightarrow{\text{bij}} G/G_x$

Trditve:


Naj, top. grupa  $G$  deluje na top. prostor  $X$ .  
Potem je kvocienarna projekcija  $q: X \rightarrow X/G$   
v prostor orbit odprta

Dokaz:

Preveriti moramo da je nasicenje v  
odprte m.n. v  $X$  odprto v  $X$ :

$$U^{oor} \subseteq X$$

$$\begin{aligned} q^{-1}(q(U)) &= \bigcup_{x \in U} G \cdot x = \{ g \cdot x \mid g \in G, x \in U \} \\ &= \bigcup_{g \in G} \{ g \cdot x \mid x \in U \} = \bigcup_{g \in G} L_g(U) \end{aligned}$$

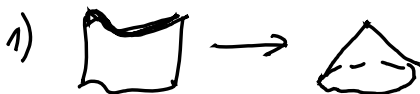
Ker je  $U^{oor}$  in  $L_g$  homeo. slike odpr. v. odr.  
za to je  $L_g(U)$  odprta, ~~ker~~ zato tudi  
unija het odprta 

# 1.4 Konstrukcije kvocienata

1)  $X \text{ top. } 1'$

stažen nad  $X$ :  $CX := X \times I / \sim$   
 $\sim$  je relacija ekvivalencije

2) suspenzija  $X$ :  $\Sigma X := X \times [-1, 1] / \sim$   
 $\sim$  je relacija ekvivalencije



Trditveni:

$$CS^n = B^{n+1}$$

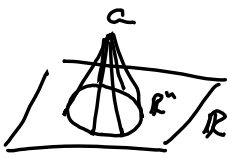
$$ZS^n = S^{n+1}$$

Opomba:

$$\text{za } X \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$1) \quad \mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\text{za poljuben } a \notin \mathbb{R}^{n+1} \times \{0\}$$



Definiramo linearni stožec nad  $X$  kot unijo vseh deljic

$$\{[a, x] \mid x \in X\}$$

Vse te deljice se paroma sekajo v točki  $a$

$L_a X \dots$  linearni stožec

$L_a X$  je kot mrežica enake  $CX$ .

topologije ima enake če je  $X$  kompakten

2) Simetrični produkt

$X$  top. prostor  $n \in \mathbb{N}$

$$X^n = X \times \dots \times X$$

simetrična grupa  $S_n$  deluje na  $X^n$  s

permutacijami: faktorijel in kvocient pri tem deluje je simetrični produkt

$$S^n X = X^n / S_n$$

Primer:

$$X = [0, 1] = I \quad n = 2$$

$$I^2 \quad \begin{matrix} (x,y) \\ (y,x) \end{matrix} \quad (x,y) \sim (y,x)$$

$$S^2 I \simeq \text{triangle}$$

3) Limite prostorov

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} X_4 \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\lim} (X_n, f_n) = \left( \coprod_{n=1}^{\infty} X_n \right) / \sim$$

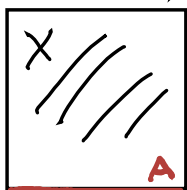
$$x_i \in X_i \quad x_j \in X_j$$

$$x_i \sim x_j, \text{ če } \exists k > i, j \text{ da je}$$

$$f_k \circ \dots \circ f_{i+1} \circ f_i(x_i) = f_k \circ \dots \circ f_j(x_j)$$

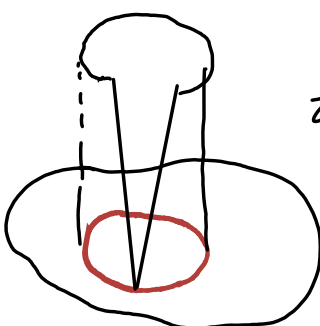
4) Zlepek

$$X, Y, \text{ top. pr } A \subseteq X; f: A \rightarrow Y$$



$$\text{Zlepek } X \text{ in } Y \text{ vsote } f \text{ je } X \cup_f Y = (X \sqcup Y) / \sim$$

$$\begin{matrix} a \sim f(a) \\ A \xrightarrow{f} Y \end{matrix}$$



Zlepek

Ekvivalenčni razredi:

$$[x] = \{x\} \quad x \in X - A$$

$$[y] = \{y\} \quad y \in Y - f(A)$$

$$[y] = f^*(\{y\}) \cup \{y\} \quad y \in f(A)$$



Primes

1)  $A \subseteq X$

$$y = \{x\}$$

$f: A \rightarrow Y$  konst. preslikova

$$X \cup_f Y \simeq X/A$$

2) Maj bo  $f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  homeo

$$B^n \cup_f B^n \simeq S^n$$

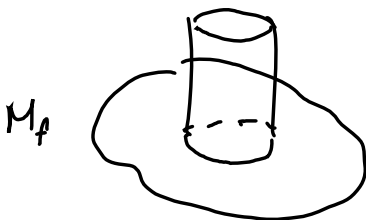
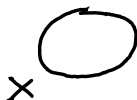


3) Maj bo  $f: X \rightarrow Y$  zveza

Preslikavn: cilindar je zlepek

$$M_f = X \times I \cup_f Y$$

$$f: X \times \{0\} \rightarrow Y$$



Izrek: (normalnost zlepek)

$X, Y$  normalne prostora

$A \subseteq X$  zaprt  $f: A \rightarrow Y$  zveza

Potem je zlepek  $X \sqcup_f Y$  normalen

Dokaz:

normalnost:  $T_1 + T_2$

$g: X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$  kvocienčni proj

Netrivialni: elw. razredi so oblike

$$f^*(y) \cup \{x\}, y \in f_*(A)$$

$T_1$ : kvocienčni je  $T_1 \Leftrightarrow$  elw. razredi zaprti

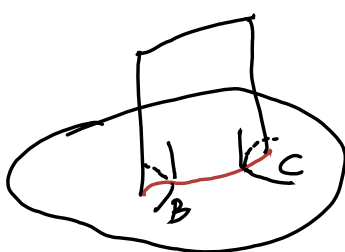
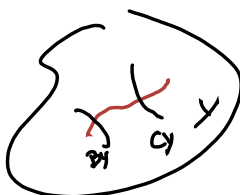
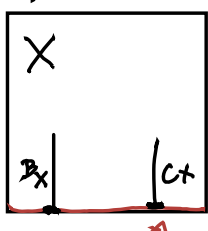
(ker sta  $X, Y$   $T_1$  so točke zapte)

ker je  $f$  zveza in so točke zapte je tudi  $f^*(\{y\})$  zaprt zato so vsi elw. razredi zaprti

$T_2$ : Urisanova kupa:

~~zveza~~  $T_2 \Leftrightarrow$  vsaj ena od  $X, Y$  množici iščena uvisanova funkcija

Naj bosta  $B, C \subseteq Z$  disjunktni, zaprta, neprazni:



$$\text{Naj bo } B_X := g^*(B) \cap X \quad C_X \text{ podobno} \\ B_Y := g^*(B) \cap Y \quad C_Y$$

$$\text{Te množice so zaprte} \quad B_X \cap C_X = \emptyset \\ B_Y \cap C_Y = \emptyset$$

ker je  $Y$   $T_2$  obstaja Urisanova funkcija  $f_Y: Y \rightarrow [0, 1]$

$$f_Y|_{B_Y} = 0 \quad f_Y|_{C_Y} = 1$$

Definirajmo  $\psi: D_X \cup C_X \cup A \rightarrow [0, 1]$

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in B_X \\ 1 & ; x \in C_X \\ f_Y(f(x)) & ; x \in A \end{cases}$$

$\psi$  je dobra definirana

Po tistemu istemu razdu lahko  $\psi$  razširimo do zveze

$f_X: X \rightarrow [0, 1]$  ki je uvisanova funkcija

Funkcij:  $f_X$  in  $f_Y$  pa skupaj določata

iskano uvisovano funkcijo na zlepek  $Z$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \overset{x}{\downarrow} \\ X \sqcup Y \end{array} & \xrightarrow{f_X \sqcup f_Y} & I = [0, 1] \\ \downarrow \varepsilon & \searrow \varphi & \\ Z = X \cup_f Y & & \end{array}$$

Če  $x \in X$   $y \in Y$  je  $x \sim y \Leftrightarrow y = f(x) \in f(A)$

$$f_X(x) = \psi(x) = f_Y(f(x)) = f_Y(y)$$

$\Rightarrow$  inducirana funkcija obstaja in ker sta

$f_X, f_Y$  zvezi je tudi inducirana zveza

$\Rightarrow \varphi$  je uvisovana saj je  $f_X|_B = 0$   $f_Y|_C = 1$

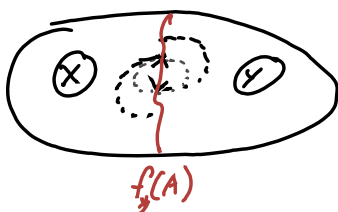
Trditvi:  $A^{\text{top}} \subseteq X$ ;  $f: A \rightarrow Y$

Označimo  $Z = X \cup_f Y$

1) če  $z \in X, Y$  z-števna je tudi  $z$  z-števna

2) če sta  $X, Y \in T_2$  je tudi  $Z \in T_2$

Dokaz



Naj bo  $B_X = \{U_n; n \in \mathbb{N}\}$  baza za  $X$

$B_Y = \{V_m; m \in \mathbb{N}\}$  baza za  $Y$

za poljubna  $n, m \in \mathbb{N}$  naj bo

$$W_{n,m} = (U_n \cap A) \cap f^*(V_m \cap f_*(A))$$

$W_{n,m} \neq \emptyset$  je ovedena odprta v  $A$  zato

$$\exists W_{n,m}^X \subseteq U_n \text{ in } W_{n,m}^X \cap A = W_{n,m}$$

$$\exists W_{n,m}^Y \subseteq V_m \text{ in } W_{n,m} \cap f^*(A) = f^*(W_{n,m}^Y) \text{ odprta v } f_*(A)$$

Naj bo

$$B = \{g(U_n); U_n \in B_X; U_n \cap A = \emptyset\} \cup$$

$$\{g(V_m); V_m \in B_Y; V_m \cap f_*(A) = \emptyset\} \cup$$

$$\{g(W_{n,m}^X \cup W_{n,m}^Y) / W_{n,m} \neq \emptyset\}$$

$B$  je števna

krožice v  $B$  so odprte, ker so  $U_n, V_m$  in

$W_{n,m}^X \cup W_{n,m}^Y$  nasizene odprte, če se razločijo v del. krožice  $B$

Potrebni moramo se da je neke mn. v krož. top. pr. Zunija mreži iz  $B$ .

Za to je dovolj pokazati da za vsako mrežo  $\mathcal{D}$  odprta  $\subseteq Z$  in vsako  $d \in \mathcal{D}$ .

$$\exists \text{ mn. } W \in B: d \cap W \subseteq \mathcal{D}$$

$g^*(d)$  lahko ena točka v  $X$  ali  $Y$  ali pa

vsebuje več točk. eno v  $A$  in njeno f-ob. v  $Y$

lahino pride:

$$g^*(d) = \{x\} \subseteq X$$

$$x \in g^*(d) \cap X^{\text{odprta}} \subseteq X$$

$$\text{ker } x \in A \text{ je } x \in g^*(d) \cap X \cap A^{\text{odprta}}$$

$$\exists U_n \in B_X \text{ da je } x \in U_n \subseteq g^*(d)$$

$$\text{zato je } g(x) = d \in g(U_n) \cap B$$

$$\bullet g^*(d) = \{y\} \subseteq Y \quad y \in f(A) \quad \text{pobeno kot zgornji}$$

$$d \in g(V_m) \subseteq \mathcal{D}$$

$$\bullet g^*(d) = \{x, y\} \quad x \in A \quad y \in f(A)$$

$$\exists x \exists U_n \in B_X: x \in U_n$$

$$\exists y \exists V_m \in B_Y: y \in V_m$$

$$\Rightarrow x = f^*(y) \in f^*(V_m)$$

$$\Rightarrow x \in W_{n,m}$$

$$\Rightarrow W_{n,m}^X \subseteq g^*(d) \quad W_{n,m}^Y \subseteq g^*(d)$$

$$\Rightarrow d \in g(W_{n,m}^X \cup W_{n,m}^Y) \subseteq \mathcal{D}$$

2)  $X, Y \in T_2 \Rightarrow Z \in T_2$



se je vse, ene ne le meji, nima problem

## 1.5 Projekтивni prostori

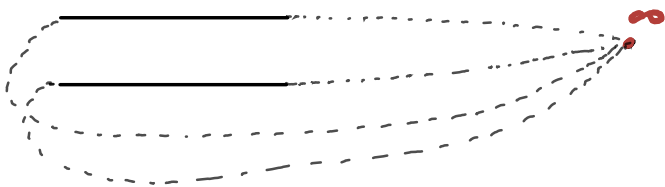
V ravninski evklidski geometriji za medsebojno lego dveh premic nastopita dve možnosti:

- se sekata v natanko eni točki
- sta vzporedni

Zato je včasih v dokazih potrebno obravnavati dve možnosti.

Želeli bi, da je situacija vedno enaka.

Torej da se poljubni premici sekata v natanko eni točki



To naredimo tako, da dodamo točko v  $\infty$  na ta način da vsakemu snopu vzporednih premic, ki je skupna vsem premicam v snopu

Vsek snop vzporednih premic dobi svojo neskončnost

Izkaže se da se v dobljenem projektivnem prostoru (projektivna ravnina  $\mathbb{RP}^2$ ) poenostavi tudi opis stožnic

$$\mathbb{RP}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{ \text{premise v } \mathbb{R}^2 \} // \leftarrow \text{vzporednost}$$

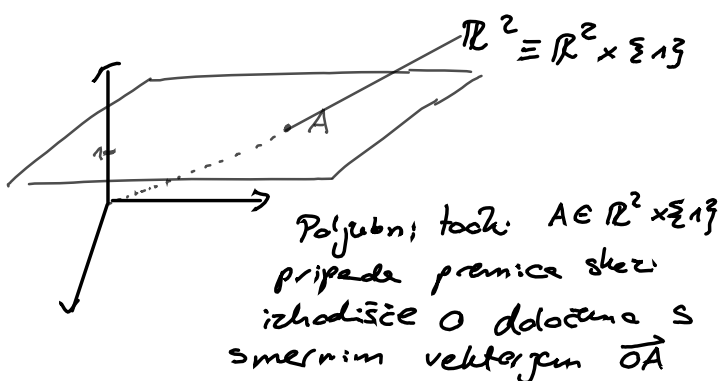
Kakšna je topologija na  $\mathbb{RP}^2$

Dodeli smo neskončno točk v neskončnosti

Ali te točke sestavljajo kak geometrijski objekt

Ali  $\mathbb{RP}^2$  izgleda enako v okolici  $\infty$  točk kot v okolici končnih

Točke v  $\mathbb{RP}^2$  lahko opišemo na enak način



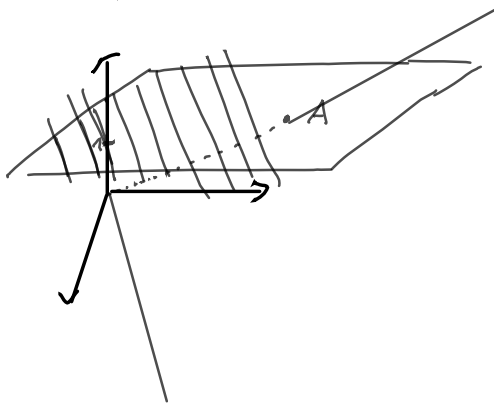
Točka A je edino presečišče te premice z ravnino  $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$

Na ta način dobimo bijekcijo med točkami:

na  $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$  in premicami skozi O v  $\mathbb{R}^3$  ki

ne ležijo na ravnini:  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$

Pramice skozi  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  pa so v korespondenci s snopi vzporednih premic na  $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$



Torej je  $\mathbb{RP}^2 = \{ L; L \text{ 1-dim lin. prostor v } \mathbb{R}^3 \}$

$$\mathbb{RP}^2 = \{ L - \{0\}, L \text{ 1-dim lin. prostor v } \mathbb{R}^3 \}$$

↑  
paroma disjunktni, njihova unija je  
 $\mathbb{R}^3 - \{0\}$

To razbitje  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  določa ekvivalenčno relacijo.

Ekvivalentni razredi so 1-dimenzionalni linearni podprostorji brez izhodišča

$$x, y \in L - \{0\} \iff \exists \lambda \neq 0. y = \lambda x$$

$$L - \{0\} = \{ \lambda x; x \in \mathbb{R}^x \}$$

||  
[x]

To je orbita delovanja  $\mathbb{R}^x$  na  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  z množenjem s skalarji

$$\mathbb{RP}^2 = \mathbb{R}^3 - \{0\} /_{x \sim \lambda x} = \mathbb{R}^3 - \{0\} /_{\mathbb{R}^x}$$

↑  
prostor orbit pri delovanju  
grupe  $\mathbb{R}^x$

Def: Naj bo  $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$  in naj bo  $n \in \mathbb{N}_0$

Projektivni prostor dimenzije  $n$  nad obsegom  $F$  je

$$\mathbb{P}^n := \frac{F^{n+1} - \{0\}}{x \sim \lambda x; \lambda \in F^\times} = \frac{F^{n+1} - \{0\}}{F^\times}$$

opremljen s kvocienčno topologijo.

Opomba: enako lahko naredimo za poljubno topološki obseg

Trditev:

Naj bo  $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$   $n \in \mathbb{N}_0$

$FP^n$  je homogen prostor

(t.j. za poljubne  $x, y \in FP^n$ .  $\exists$  h homom  $FP^n$ .  $h(x) = y$ )

Dokaz:

$$\begin{array}{ccc} F^{n+1} - \{0\} & \xrightarrow{H} & F^{n+1} - \{0\} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ FP^n & \xrightarrow{h} & FP^n \\ [v] = x^v & \xrightarrow{h} & y^v = [w] \end{array}$$

za  $H$  bomo izbrali linearni izomorfizem  
k v slika v w

v dopolnimo do baze  $F^{n+1}$

$v_1, v_2, \dots, v_n$

w dopolnimo do baze  $F^{n+1}$

$w_1, w_2, \dots, w_n$

za  $H$  vzamemo prehodno preslikavo,  
ki slika baze vektore v baze vektore  
(z istim indeksom)

$H$  je homeomorfizem  $\Rightarrow g \circ H$  je kvocientna  
 $g \circ H$  naredi iste identifikacije kot  $g$

(stisne premice v točke,  $H$  pa je bijekcija  
med premicami)

$\Rightarrow$  inducirane preslikave  $h$  je homeo

in  $h(x) = h([v]) = g(H(v)) = g(w)$

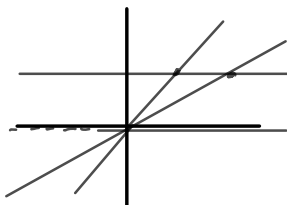
Primeri:

$$1) F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$$

$$FP^0 = F^1 - \{0\} / F^x = F^x / F^x = \{*\}$$

$$2) FP = ?$$

$$FP^1 = F^2 - \{0\} / F^x$$

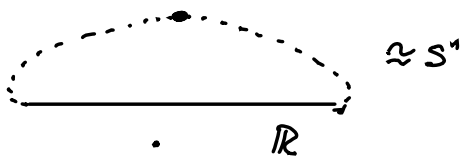


Zdi se da je

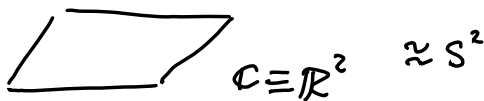
$FP^1 = F \cup \{0\}$  kompaktifikacija z 1 točko

(za zdaj se uganja)

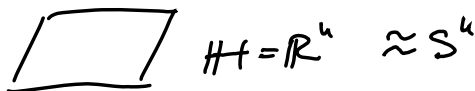
$$\mathbb{R}P^1$$



$$\mathbb{C}P^1$$



$$\mathbb{H}P^1$$



$$d = \dim_{\mathbb{R}} F = \begin{cases} 1 & F = \mathbb{R} \\ 2 & F = \mathbb{C} \\ 4 & F = \mathbb{H} \end{cases}$$

$$FP^1 = S^d$$

(3)  $\mathbb{R}P^2$  je neka sklenjena ploskev, ki pa

ni  $S^2$



Trditelj:  $\mathbb{F}P^n$  ima pokritje z  $n+1$  odprtimi množicami, k. so homeo.  $\mathbb{F}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$

Dokaz:  $\mathbb{F}^{n+1} - \{0\}$   $U_i = \{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^{n+1}; x_i \neq 0 \}$   
 $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \quad i \in \{0, \dots, n\}$

$U_i$  je odprta za  $\forall i: \{U_0, \dots, U_n\}$  so torej

odprto pokritje za  $\mathbb{F}^{n+1} - \{0\}$

ker so  $U_i$  nasičene so  $g_*(U_i)$  odprti  $\subseteq \mathbb{F}P^n$   
in tvorijo odprto pokritje

$$g_*(U_i) \cong \mathbb{F}^n$$

Dava!j je dokazati za  $i=0$ :

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{f} & \mathbb{F}^n \\ \downarrow g_0 & \searrow \tilde{f} & \\ g_*(U_0) & & \end{array}$$

$$\lambda(x_0, \dots, x_n) = (\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

$$f(x_0, \dots, x_n) = (x_0^{-1}x_1, \dots, x_0^{-1}x_n)$$

$f$  slika ekvivalentne točke v iste

$$\begin{aligned} f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) &= (x_0^{-1} \lambda^{-1} \lambda x_1, \dots, x_0^{-1} \lambda^{-1} \lambda x_n) \\ &= (x_0^{-1} x_1, \dots, x_0^{-1} x_n) \end{aligned}$$

$f$  je zvezna

ker je  $U_0$  odprta je  $g_0$  kvocienčna  
zato  $f$  zvezna  $\Rightarrow \tilde{f}$  zvezna

Da je  $\tilde{f}$  zvezna homeo. sledi iz obstoja  
inverzne zvezne preslikave

$$\text{Naj bo } G: \mathbb{F}^n \rightarrow g(U_0)$$

$$G(w_1, \dots, w_n) = g(1, w_1, \dots, w_n) \text{ zvezna}$$

in očitno inverzna  $\tilde{f}$

Posledica:  $FP^n \in T_2$

Dokaz:

$$x, y \in FP^n ; x \neq y$$

$$x = [V] \quad V = (v_0, \dots, v_n)$$

1)  $v_i \neq 0 \text{ za } i \in \{0, \dots, n\}$

$$\Rightarrow \exists U_i \text{ za } v_i \Rightarrow x \in \mathcal{G}_*(U_i) \text{ za } v_i$$

Ampek za  $y \exists$  vsaj en  $j$  da je  $y \in \mathcal{G}_*(U_j)$

Torej  $x, y \in \mathcal{G}_*(U_j) \approx FP^n = \mathbb{R}^n$

$x$  in  $y$  imata v  $\mathcal{G}_*(U_i)$  disjunktni:

okolici in ker je  $\mathcal{G}_*(U_j)$  odprta v  $FP^n$  imata okolici v celnem prostoru

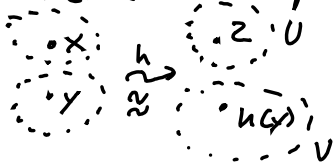
2) Splošen primer:

po homogenosti  $FP^n$  lahko  $x$  s homeo.

$h$  preslikamo v  $\mathbb{Z}$ , ki ima vse komponente

nenuljne

po 1)  $\exists$  disjunktni okolici



$h^*(U)$  in  $h^*(V)$  sta disjunktni okolici  $x$  in  $y$

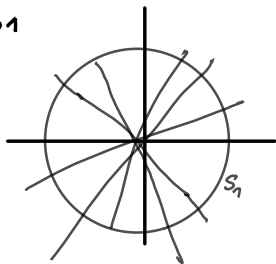
Zanimajo nas top. lastnosti  $FP^n$

Če  $n \geq 1$  je  $FP^{n+1} \setminus \{0\} \Rightarrow FP^n$  pavčan

$FP^{n+1}$  lok. pavčan  $\Rightarrow FP^n$  lok. pavčan

Pokažeti želimo da so  $FP^n$  kompaktni:

$RP^1$



v  $F^k$  označimo  
enotsko sfero  $S(F^k)$   
 $= \{x \in F^k; \|x\|=1\}$

$$F = \mathbb{R} \Rightarrow S^{k-1}$$

$$F = \mathbb{C} \Rightarrow S^{2k-1}$$

$$F = \mathbb{H} \Rightarrow S^{4k-1}$$

Ker je  $F$  topološki obseg množenje z  
enotskimi skalarji ohranja enotsko sfero  $S(F^k)$ ,  
zato delovanje  $F^x$  na  $F^{n+1} \setminus \{0\}$  (množenje  
s skalarji) določa delovanje  $S(F)$  na  
enotsko sfero na  $S(F^{n+1})$

$$S(F) = \begin{cases} S^0 & F = \mathbb{R} \\ S^1 & F = \mathbb{C} \\ S^3 & F = \mathbb{H} \end{cases}$$

$$\text{Trditaj: } \mathbb{F}P^n \approx S(\mathbb{F}^{n+1})/S(\mathbb{F})$$

Dokaz:

$$\begin{array}{ccc}
 S(\mathbb{F}^{n+1}) & \hookrightarrow & \mathbb{F}^{n+1} - \{0\} \\
 \downarrow p & \searrow f_{\text{noc}} & \downarrow \cong \\
 S(\mathbb{F}^{n+1}/S(\mathbb{F})) & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{F}P^n
 \end{array}$$

$f$  naravno je identifikacija kot  $p$

$\Rightarrow f$  je homeo

Pokažemo da so  $\mathbb{F}P^n$  kompaktni: