Kompaktnost

dovolj gledati pokritja z baznimi okolicami ✓

- M metričen $K \subseteq M$ kompaktna $\Rightarrow$ K omejena
- f zvezna, K kompakt $\Rightarrow$ $f_*(K)$ kompaktna
- $A^{zap} \subseteq K \Rightarrow A$ je kompaktna
- X, Y kompaktna $\Rightarrow$ $X \times Y$ kompaktna
- $X^{\text{Hausdorffov}}$, $K^{\text{kompakt}} \subseteq X \Rightarrow K$ zaprt v X
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktna $\Leftrightarrow$ A zaprta in omejena
- $K \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow \forall f^{zv}: K \to \mathbb{R}$ je omejena in zavzame minimum in maksimum
- V kompaktu ima vsaka neskončna množica stekališče
- kompaktnost + Hausdorffov $\Rightarrow$ normalnost
- $X^{\text{komp, metr}}$, Y^{metr}, $f^{zv}: X \to Y \Rightarrow f$ enakomerno zvezna
- Hausdorffov prostor je lokalno kompakten $\Leftrightarrow$ topologija ima bazo iz relativno kompaktnih odprtih množic
- lokalna kompaktnost + Hausdorffov $\Rightarrow$ regularnost
- metričnost $\Rightarrow$ (kompaktnost $\Leftrightarrow$ poln + popolnoma omejen)

Prostori preslikav

$\langle K, U\rangle := \{ f^{zv}: X \to Y \,;\, f_*(K) \subseteq U \} : \mathcal{T}_{co}$

- Y metričen $\Rightarrow \mathcal{T}_{co} =$ top. enakomerne konvergence na kompaktih
- $C(X,Y)$ Hausdorffov $\Rightarrow Y$ Hausdorffov
- $C(X,Y)$ regularen $\Rightarrow Y$ regularen
- Urisonova lema: X je $T_4 \Leftrightarrow \forall A^{zap}, B^{zap} \subseteq X$, $A \cap B = \emptyset . \exists f^{zv}: X \to [0,1] . f_*(A) = 0, f_*(B) = 1$
- normalnost + 2-števnost $\Rightarrow$ metrizabilnost ✓
- regularnost + 2-števnost $\Rightarrow$ metrizabilnost ✓
- 2-števnost $\Rightarrow$ (regularnost $\Leftrightarrow$ metrizabilnost) ✓
- $X^{komp}, T_2, \forall a \in X . \exists U \ni a . U \cong \mathbb{R}^n \Rightarrow X$ lahko vložimo v nek evklidski prostor
- Vsako zvezno funkcijo lahko poljubno enakomerno aproksimiramo s polinomi;
- $\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{x-i}{n}\right)^2 \cdot B_{n,i}(x) = \frac{x(1-x)}{n}$

$$B_{n,i}(x) = \binom{n}{i} (1-x)^{n-i} x^i$$

Povezanost

Prostor $(X, \mathcal{T})$ je nepovezan $\Leftrightarrow$
$\exists A, B \in \mathcal{T} .\ A \cap B = \emptyset,\ A, B \neq \emptyset,\ A \cup B = X$

$\Leftrightarrow \exists A \subseteq X,\ A \neq \emptyset,\ A \neq X .\ A$ zaprta in odprta

$\Leftrightarrow \exists$ zvezna surjektivna preslikava
$f : X \to (\{0,1\}\ \mathcal{T}_{dis})$

- $X \subseteq \mathbb{R}$ povezan $\Leftrightarrow X$ je interval
- Povezanost je topološka lastnost.
  $f^{zv} : X \to Y \quad X$ povezan $\Rightarrow f_*(X)$ povezan
- $\{A_\lambda\},\ A_\lambda \subseteq X,\quad \bigcap A_\lambda \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup A_\lambda$ je povezana
- X, Y povezana $\Rightarrow X \times Y$ povezana
- povezanost s potmi $\Rightarrow$ povezanost

lokalna povezanost:

$\forall x \in X . \exists U \ni x . \exists V \overset{pov}{.} \; x \in V \subseteq U$

- X lokalno povezan $\Leftrightarrow$ komponente $\forall$ odprte množice v X so odprte
- X lokalno povezan s potmi $\Rightarrow$ komponente X so komponente za povezanost s potmi
- X lokalno povezan s potmi $\Rightarrow$
  (X povezan $\Leftrightarrow$ X povezan s potmi
- $A \overset{odp}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ povezana $\Leftrightarrow$ povezana s potmi