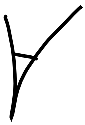
4.3



Začetek predavanj

$X \cong Y$

Trditev $X/_{\sim_X} \cong Y/_{\sim_Y}$ ($\sim_Y$ in $\sim_X$ sta vsklajeni: ($y_1 \sim y_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) \sim f^{-1}(y_2)$))

Dokaz

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_X"] & Y \arrow[d, "q_Y"] \\ X/_{\sim_X} \arrow[r, dashed, "F"'] & Y/_{\sim_Y} \end{tikzcd}$$

homeomorfizem je kvocientna preslikava

$q_Y \circ f$ kvocientna

Po definiciji: f slika ekv razrede v X v ekv. razrede v Y

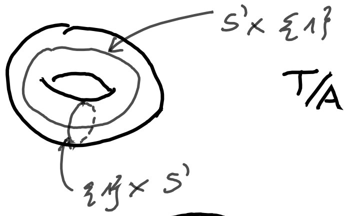
Torej $q_Y \circ f$ naredi iste identifikacije kot q_X

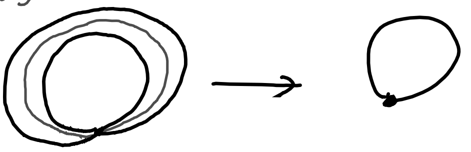
$\Rightarrow q_Y \circ f$ inducira homeomorfizem $F: X/_{\sim_X} \to Y/_{\sim_Y}$

Primer:

Naj bo $1 \in S^1 \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}^2$

$A = S^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times S^1 \subseteq S^1 \times S^1 = T$ torus





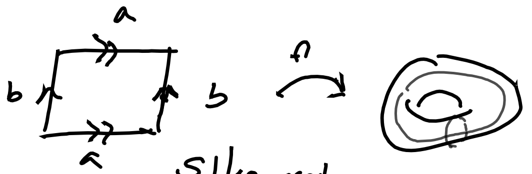
Najbrž je kvocient S^2

Ideja: torus prerežemo vzdolž A, da dobimo kvadrat z identifikacijami na robu

$X = \overset{I^2}{[0,1]\times[0,1]}$

$f: X \to S_1 \times S_1$

$f(x,y) = (\underbrace{\cos 2\pi x, \sin 2\pi x}_{e^{i2\pi x}}, \underbrace{\cos 2\pi y, \sin 2\pi y}_{e^{i2\pi y}})$



slika roba je ravno A

$B := f^{-1}(A) = \partial I^2$ ... rob kvadrata

če nadaljujemo tako da A stisnemo v točko to ustreza identifikacijam na kvadratu, ki celotni rob stisnejo v točko

$I^2 \xrightarrow{p} I^2/B$ kvocientna projekcija

vemo da $\underset{B = \partial I^2}{\boxed{I^2}} \cong \underset{S^1 = \partial B^2}{B^2}$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow p & & \downarrow q \\ I^2/B & \cong & B^2/S^1 \cong S^2 \end{array}$$

$\Rightarrow S^2 \cong T/A$

Deljivost topoloških lastnosti

Def: topološke lastnost $\mathcal{L}$ je deljiva, če za $\forall X \in \mathcal{L}$. $\forall \sim$ ekv. rel. $X/_\sim \in \mathcal{L}$

Ekvivalentno: $\mathcal{L}$ je deljiva, če se ohranja pri kvocientnih preslikavah

Trditev:

1) Deljive so naslednje lastnosti

- kompaktnost, povezanost (s potmi), lokalna povezanost (s potmi), separabilnost, diskretnost, trivialnost

2) Nedeljive so:

- lokalna kompaktnost, 1- in 2- števnost, separacijske lastnosti, metričnost, popolna nepovezanost

Dokaz:

kmp., pov. in sep. se ohranja z zveznostjo

<u>lokalna povezanost s potmi</u>

lok povezan $\Leftrightarrow$ komponente vsake odprte množice so odprte

$X/\sim \quad V^{odp} \subseteq X/\sim$

$V = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ $\quad V_\lambda$ so komponente za povezanost

V_λ so odprte

$q: X \to X/\sim$ kvoc ... cato

$q^{-1}(V) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} q^{-1}(V_\lambda)$ je odprta v X

po predpostavki je X lok. pov. in zato so komponente $q^{-1}(V)$ odprte v X

Naj bo W poljubna komponenta $q^{-1}(V)$

Ker je V povezana in q zvezna $\Rightarrow$

$q(W) \subseteq V = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$

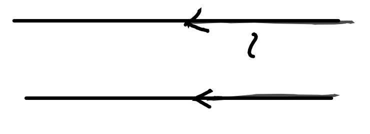
Torej $q_\lambda(W) \subseteq V_\lambda$ za nek $\lambda\in\Lambda$

$\Rightarrow W \subseteq q^{-1}(V_\lambda)$

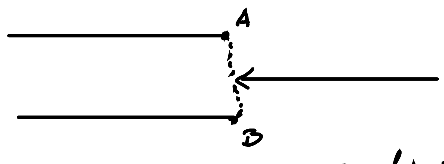
$\Rightarrow q^{-1}(V_\lambda)$ je unija komponent za povezanost $\Rightarrow q^{-1}(V_\lambda)$ je odprta $\Leftrightarrow V_\lambda$ so odprte

2) separacijske lastnosti:

T_2: $X = \mathbb{R} \times \{0,1\}$



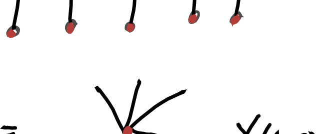
Relacija $\sim$ $(x,0) \sim (x,1)\ \forall x > 0$

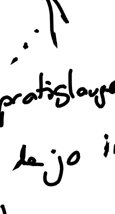


A in B nimata več disjunktnih okolic

1-števnost

$X = [0,1] \times \mathbb{N}$ $\quad A = \{0\} \times \mathbb{N}$



$X/A =$  X/A ni števen

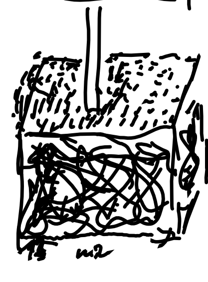
Dokaz s protislovjem:

Recimo da jo ima

$a = q(A) = q(0,n)$, $n \in \mathbb{N}$

Recimo da jo

$\forall$ ... ...



Trditev: X top. pr. $\sim$ ekv. relacija na X

$X/_\sim \in T_1 \Leftrightarrow$ ekvivalenčni razredi v X so zaprti

Dokaz:

$X/_\sim \in T_1 \Leftrightarrow$ točke v $X/_\sim$ so zaprte

$\Leftrightarrow q^{-1}(t\check{c}) \underset{zap}{\subseteq} X$

1.3 Topološke grupe in delovanje

Def: Topološka grupa je grupa G, ki je opremljena s topologijo, glede na katero sta množenje

$$m: G \times G \to G$$
$$(g,h) \mapsto gh$$

in invertiranje

$$inv: G \to G$$
$$g \mapsto g^{-1}$$

zvezni:

Opomba: Poznamo že primer topološke algebre

$(C(X), \tau_{co})$

Mi bomo večinoma delali nad $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

ki so topološki obsegi, obstajajo še drugi npr. končni obsegi $(\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}p})$ ki jih običajno opremimo z diskretno topologijo p-adičnih, ki so napolnitev $\mathbb{Q}$ v p-adični metriki

$$\frac{m}{n} = p^k \frac{m_1}{n_1} \qquad m_1, n_1 \text{ tuja } p \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left\|\frac{m}{n}\right\|_p = p^{-k}$$

Primeri

1) G poljubna grupa opremljena z diskretno topologijo je tudi grupa

2) G top. grupa $H \leq G \Rightarrow$
H z inducirano topologijo je tudi top. grupa

3) $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{H},+)$ so top. grupe

$(\mathbb{R}^*,\cdot)$ $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ $(\mathbb{H}^*,\cdot)$ so tudi top. grupe normaje multiplikativna ko:

$$\mu, \lambda \in \mathbb{F} \quad \|\mu\lambda\| = \|\mu\| \cdot \|\lambda\|$$

Posebej sledi, da so enotske sfere zaprte za množenje

$(S^0, \cdot)$ $(S^1, \cdot)$ $(S^3, \cdot)$ so topološke grupe

$S^0 = \{\pm 1\}$

kaj pa S^2? Ne!

Najlepši dokaz z uporaba algebraične topologije

5) Naj bodo $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ grupe

Potem je $\prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ opremljena z operacijami po komponentah in produktno topologija tudi topološka grupa

Npr: $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}} \cong C$ ... cantorjeva množica

6) Topološke grupe linearnih izomorfizmov

$\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$

$GL_n \mathbb{F} = \{$lin. izomorf. $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n\}$

$= \{A \in \mathbb{F}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$

.... splošna linearna grupa

$(A, B) \longmapsto A \cdot B$ zvezna

$A \longmapsto A^{-1}$ tudi zvezna

$= \frac{1}{\det A} \tilde{A}$

Še več: To je Liejeva grupa ... gladka mnogoterost in operaciji sta gladki

Enako velja za vse standardne podgrupe:

$SL_n(\mathbb{F})$ .... $\det = 1$

nad $\mathbb{R}$:

O_n ... ortogonalna $AA^T = I$

SO_n ... specialna ortogonalna $A^{-1} = A^T$

nad $\mathbb{C}$:

U_n ... unitarna $AA^H = I$

SU_n ... specialna unitarna

nad $\mathbb{H}$

Sp_n .... simplektična grupa $AA^H = 1$

(sled: $\det = 1$

Trditev: Naj bo G top. grupa
$a \in G$.

<u>leva</u> (oz <u>desna</u>) <u>translacija</u> za a je

$$L_a : G \to G \qquad R_a : G \to G$$
$$g \mapsto ag \qquad g \mapsto ga$$

sta homeomorfizma

Dokaz:

$$R_a : G \xrightarrow{\approx} G \times \{a\} \subseteq G \times G \xrightarrow{m} G$$
$$g \mapsto (g, a) = (g, a) \longmapsto ga$$

kompozitum zveznih je zvezna

inverz: R_a^{-1}

$$R_a^{-1}(R_a(g)) = R_a^{-1}(ga) = (ga)a^{-1} = g(aa^{-1}) = g$$

Posledica

Top. grupa G je homogen prostor, tj za poljuben $x,y \in G$. $\exists$ homeo. $h: G \to G$; $h(x)=y$

Dokaz: $L_{yx^{-1}}$ ali $R_{x^{-1}y}$

Def:

Naj bo X top. prost. in G top. grupa

(levo) delovanje grupe G na prostor X

je zvezna preslikava $\varphi: G \times X \to X$

$$(g,x) \mapsto \varphi(g,x) = g \cdot x$$

za katero velja:

1) $ex = x \quad \forall x \in X$

$b \cdot (a \cdot x) = (ba) \cdot x \quad \forall x \in X, \forall a,b \in G$

V tem primeru rečemo da je X G-prostor

Opomba: kot v primeru grupe, delovanje določa translacijo ki je homeomorfizem prostora X

$$L_a: X \to X$$
$$x \mapsto a \cdot x$$

Ampak v splošnem X ni homogen za delovanje grupe G:

Za polj $x \in X$ je

$G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ orbita točke x in

ta v splošnem ni ves X

Torej: delovanje G na X določa ekv. relacijo na X za katero so ekvivalenčni razredi orbite delovanja:

$$x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists g \in G,\ g \cdot x = y$$

$$[x] = \{ y = g \cdot x \mid g \in G \} = G \cdot x$$

Za poljuben $x \in X$ je $G_x = \{ g \in G \mid g \cdot x = x \}$ stabilizatorska podgrupa elementa x

Velja: $G \cdot x \xleftrightarrow{bij} G / G_x$

Trditev:

Naj top. grupa G deluje na top. prostor X. Potem je kvocientna projekcija $q: X \to X/_G$ v prostor orbit odprta.

Dokaz:

Preveriti moramo da je nasičenje odprte mn. v X odprt v X:

$$U^{odp} \subseteq X$$

$$q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{x\in U} G\cdot x = \{ g\cdot x \mid g\in G, x\in U\}$$

$$= \bigcup_{g\in G}\{ g\cdot x \mid x\in U\} = \bigcup_{g\in G} L_g(U)$$

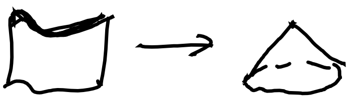
Ker je U^{odp} in L_g homeo. slika odp. v odp. zato je $L_g(U)$ odprta, zato tudi unija teh odprta

1.4 Konstrukcije kvocientov

1) X top. p.

stožen nad X: $CX := X \times I / X \times \{1\}$

2) suspenzija X: $\Sigma X := X \times [-1,1] / X \times \{-1\}, X \times \{1\}$

1) 

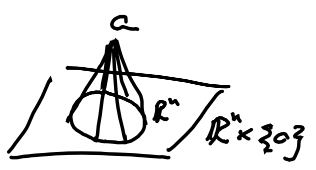
Trditev:

$$C S^n = B^{n+1}$$
$$\Sigma S^n = S^{n+1}$$

opomba:
za $X \subseteq \mathbb{R}^n$

1) "$\mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

za poljuben $a \notin \mathbb{R}^{n+1} \times \{0\}$



Definiramo linearni stožec nad X kot unijo vseh daljic

$$\{[a,x] \mid x \in X\}.$$

Vse te daljice se paroma sekajo v točki a

$L_a X$ .... linearni stožec

$L_a X$ je kot množica enaka CX. topologija ima enako če je X kompakten

2) Simetrični produkt

X top. prostor $n \in \mathbb{N}$

$X^n = X \times \dots \times X$

simetrična grupa S_n deluje na X^n s permutacijami faktorjev in kvocient pri tem delovanju je simetrični produkt

$$S^n X := X^n / S_n$$

Primer:

$X = [0,1] = I \quad n = 2$

I^2 

$(x,y) \sim (y,x)$

$S^2 I \simeq$ 

3) Limita prostorov

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} X_4 \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\lim} (X_n, f_n) = \left(\coprod_{n=1}^{\infty} X_n\right) / \sim$$

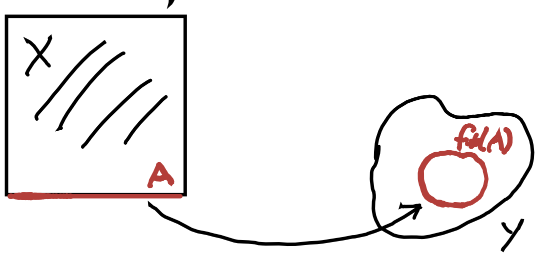
$x_i \in X_i \quad x_j \in X_j$

$x_i \sim x_j$, če $\exists k > i,j$ da je

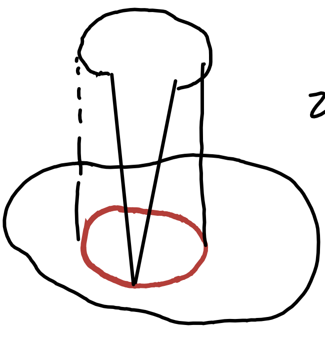
$$f_k \circ \dots \circ f_{i+1} \circ f_i (x_i) = f_k \circ \dots \circ f_j (x_j)$$

4) Zlepek

X, Y, top. pr $A \subseteq X$; $f: A \to Y$



Zlepek X in Y vzdolž f je $X \cup_f Y = (X \sqcup Y) / {\scriptstyle a \sim f(a),\ a \in A,\ f(a) \in Y}$



Ekvivalenčni razredi:

$[x] = \{x\} \qquad x \in X - A$

$[y] = \{y\} \qquad y \in Y - f_*(A)$

$[y] = f^*(\{y\}) \cup \{y\} \qquad y \in f_*(A)$

Primer

1) $A \subseteq X$

$Y = \{*\}$

$f: A \to Y$ konst. preslikava

$X \cup_f Y \approx X/A$

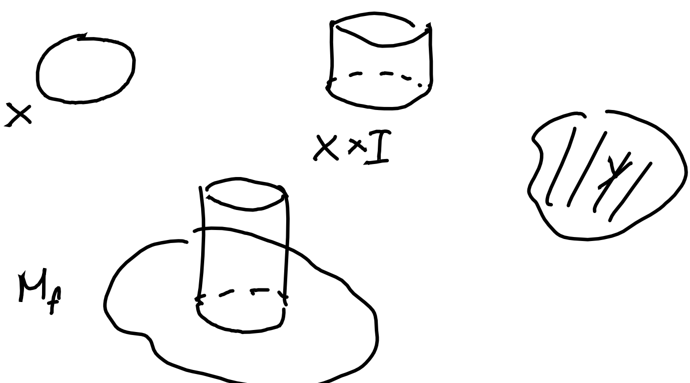
2) Naj bo $f: S^{n-1} \to S^{n-1}$ homeo

$B^n \cup_f B^n \approx S^n$

3) Naj bo $f: X \to Y$ zvezna

Preslikavni cilinder je zlepek

$M_f = X \times I \cup_f Y \qquad f: X \times \{0\} \to Y$



Izrek: (normalnost zlepkov

X, Y normalna prostora

$A \subseteq X$ zaprt $\quad f: A \to Y$ zvezna

Potem je zlepek $X \cup_f Y$ normalen

Dokaz:

normalnost: $T_1 + T_4$

$q: X \sqcup Y \to X \cup_f Y$ kvocientna proj

Netrivialni: ekv. razredi so oblike

$f^*(y) \cup \{y\}$, $y \in f_*(A)$

T_1: kvocient je $T_1 \Leftrightarrow$ ekv. razredi zaprti

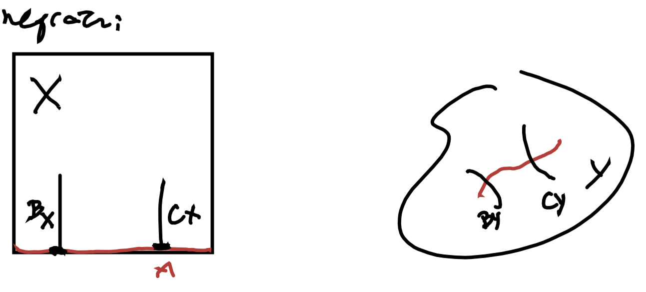
ker sta X, Y T_1 so točke zaprte

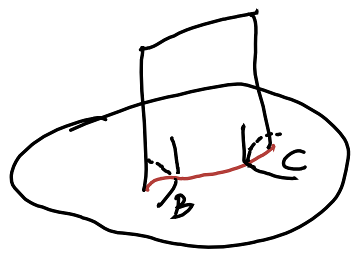
ker je f zvezna in so točke zaprte je tudi $f^*(\{y\})$ zaprt zato so vsi ekv razredi zaprti

T_4: Urisonova lema:

~~za poljubni~~ $T_4 \Leftrightarrow$ za poljubni dis. zap. množici iščemo urisonova funkcija

Naj bosta $B, C \subseteq Z$ disjunktni, zap, neprazni





Naj bo $B_X := q^*(B) \cap X \qquad C_X$ podobno

$B_Y := q^*(B) \cap Y \qquad C_Y$

Te množice so zaprte $\quad B_X \cap C_X = \emptyset$

$B_Y \cap C_Y = \emptyset$

ker je Y T_4 obstaja Urisonova funkcija $\varphi_Y: Y \to [0,1]$

$$f_Y/_{B_Y} = 0 \qquad f_Y/_{C_Y} = 1$$

Definirajmo $\psi: B_X \cup C_X \cup A \to [0,1]$

$$\psi(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & ; x \in B_X \\ 1 & ; y \in C_X \\ \varphi_Y(f(x)) & ; x \in A \end{array} \right\}$$

ψ je dobro definirana

Po tizejevem izreku lahko ~~φ~~ razširimo do zvezne

$\varphi_X: X \to [0,1]$ ki je urisonova funkcija ~~za~~ na X

Funkciji φ_X in φ_Y pa skupaj določata

inducirano urisonova funkcijo za zlepek Z

$$\begin{array}{ccc} X \quad Y & & \\ \cap \quad \cap & & \\ X \sqcup Y & \xrightarrow{\varphi_X \sqcup \varphi_Y} & I = [0,1] \\ q \downarrow & \nearrow_{\varphi} & \\ Z = X \cup_f Y & & \end{array}$$

za $x \in X$ $y \in Y$ je $x \sim y \Leftrightarrow y = f(x) \in f(A)$

$$\varphi_X(x) = \psi(x) = \varphi_Y(f(x)) = \varphi_Y(y)$$

$\Rightarrow$ inducirana funkcija obstaja ~~in~~ ker sta φ_X, φ_Y zvezni je tudi inducirana zvezna

$\Rightarrow \varphi$ je Urisonova saj je $\varphi/_B = 0 \quad \varphi/_C = 1$

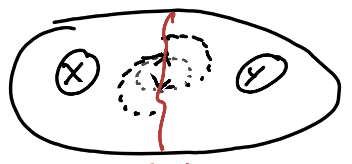
Trditev: $A^{zap} \subseteq X$; $f: A \to Y$

Označimo $Z = X \cup_f Y$

1) Če sta X, Y 2-števna je tudi Z 2-števen

2) Če sta $X\ Y \in T_2$ je tudi $Z \in T_2$

Dokaz



$f_*(A)$

Naj bo $B_X = \{U_n ; n \in \mathbb{N}\}$ baza za X

$B_Y = \{V_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ baza za Y

Za poljubna $n, m \in \mathbb{N}$ naj bo

$W_{n,m} = (U_n \cap A) \cap f^*(V_m \cap f_*(A))$

$W_{n,m} \neq \emptyset$ je svede odprta v A zato

$\exists W^X_{n,m} \subseteq U_n$ in $W^X_{n,m} \cap A = W_{n,m}$

$\exists W^Y_{n,m} \overset{odp}{\subseteq} V_m$ in $W_{n,m} \cap f(A) = f(W_{n,m})$

odp v $f_*(A)$

Naj bo

$B = \{g(U_n) ; U_n \in B_X ; U_n \cap A = \emptyset\} \cup$

$\cup \{g(V_m) \mid V_m \in B_Y ; V_m \cap f_*(A) = \emptyset\} \cup$

$\cup \{g(W^X_{n,m} \cup W^Y_{n,m}) / W_{n,m} \neq \emptyset$

B je števna

Množice v B so odprte, ker so U_n, V_m in $W^X_{n,m} \cup W^Y_{n,m}$ nasičene odprte, ki nastopajo v def. družine B

Pokazati moramo še da je vsaka mn. v kvoc. top. pr. Z unija množic iz B.
Za to je dovolj pokazati da za $\forall$ tako množico $D \overset{odp}{\subseteq} Z$ in $\forall$ točko $d \in D$.
$\exists$ mn. $W \in B$: $d \in W \subseteq D$

$g^*(d)$ lahko ena točka v X ali Y ali pa vsebuje več točk. eno v A^c in njeno f-sliko v Y

Ločimo primere:

$g^*(d) = \{x\} \subseteq X$

$x \in g^*(D) \cap X \overset{odp}{\subseteq} X$

ker $x \notin A$ je $x \in g^*(D) \cap X_n A^{c\ odp}$

$\exists U_n \in B_X$ da je $x \in U_n \subseteq g^*(D)$

zato je $g(x) = d \in \underset{\overset{\cap\!\shortmid}{D}}{g(U_n)} \in B$

- $g^*(d) = \{y\} \subseteq Y$ $y \in f(A)$ podobno kot zgoraj,

$d \in g(V_m) \subseteq D$

- $g^*(d) = \{x, y\}$ $x \in A$ $y = f(x) \in f(A)$

Za $x \ \exists U_n \in B_X$: $x \in U_n$

Za $y \ \exists V_m \in B_Y$: $y \in V_m$

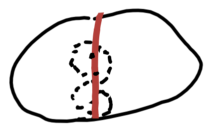
$\Rightarrow x = f^*(y) \in f^*(V_m)$

$\Rightarrow x \in W_{n,m}$

$\Rightarrow W^X_{n,m} \subseteq g^*(D)$ $W^Y_{n,m} \subseteq g^*(D)$

$\Rightarrow d \in g(W^X_{n,m} \cup W^Y_{n,m}) \subseteq D$

2) $X, Y \in T_2 \Rightarrow Z \in T_2$



Zdej je vseeno, ena ne bo mogli imamo problem