Uvod

Cilj topologije: Razumeti prostore in preslikave med njimi

preslikava .... zvezna funkcija

prostori: osnovni interes so metrični prostori

Različne konstrukcije dajo prostore, ki niso nujno metrični ali pa ni tako jasno da so metrični.
Zato si pomagamo s topološkimi lastnostmi

Konstrukcije prostorov:

- podprostor
- vsota oz disjunktna unija
- produkt $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \{(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} ; x_\lambda \in X_\lambda\}$

$$\mathcal{B} = \{U \times V : U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$$

Pride iz tega da so projekcije zvezne

$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ opremimo s najšibkejšo topologijo, da so projekcije zvezne

$$p_\mu : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \longrightarrow X_\mu \qquad \mu \in \Lambda$$

podbazo sestavljajo $p_\mu^*(U_\mu)$ odprte

$$\parallel$$

$$U_\mu \times \prod_{\lambda \neq \mu} X_\lambda$$

Bazne množice so $U_{\mu_1} \times U_{\mu_2} \times \dots \times U_{\mu_k} \times \prod_{\lambda \neq \mu_1, \dots, \mu_k} X_\lambda$

- kompaktifikacija z 1 točko
- slike prostora pri zvezni preslikavi
- slike prostora pri zvezni preslikavi

$f: X \to Y$ $\quad f_*(X)$ dobi topologijo iz Y

$$f^*(\{y\}) \subseteq X$$

$\{f^*(\{y\}); y \in Y\}$ razdelitev množice X

To torej določa ekvivalenčno relacijo in vsaka ekvivalenčna relacija določa tako razdelitev

1. Kvocientni prostori

1.1 kvocientna topologija

Def: X množica in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X. Za poljuben $x \in X$ označimo $[x] = \{y \in X ; x \sim y\}$ <u>ekvivalenčni razred</u>, ki pripada x

<u>Kvocientna množica</u> množica X po $\sim$ je množica vseh ekvivalenčnih razredov

$$X/_\sim := \{[x] ; x \in X\}$$

<u>Kvocientna projekcija</u> $q : X \longrightarrow X/_\sim$

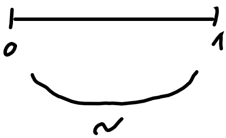
$q : x \longmapsto [x]$

Primer: $X=[0,1]$

$\sim$ ekvivalenčna relacija določena z

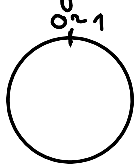
$0\sim 1$ $(1\sim 0;\ x\sim x\ \forall x\in X)$

Kako si lahko predstavljamo $X/\sim$



Naraven model $X/\sim$ je $[0,1)$

Druga možnost je



Opomba: 1) pri opisu ekvivalenčne relacije bomo običajno navedli le netrivialne relacije, ki generirajo ekvivalenčno relacijo ob upoštevanju lastnosti ekv. relacije.

2) ekvivalenčna relacija $\sim$ določa razdelitev X na ekvivalenčne razrede. To razdelitev označimo z $\mathcal{R}=\{[x]\mid x\in X\}\subseteq \mathcal{P}(X)$. Kvocientno množico lahko označimo $X/_{\sim} = X/_{\mathcal{R}}$

3) Če $\sim$ določa le en netrivialen ekvivalenčni razred $A\subseteq X$; A ni enojec potem kvocientno množico označimo z $X/_A$

Če je X topološki prostor in želimo $X/_\sim$ opremiti s topologijo tako da bo ta odražala lastnosti prostora X.
Posebej želimo da je $q: X \to X/_\sim$ zvezna

Ta pogoj topologije na $X/_\sim$ ne določa enolično
če neka topologija na $X/_\sim$ temu ustreza, potem ustreza tudi vsaka šibkejša. Zato je smiselno $X/_\sim$ opremiti z najmočnejšo topologijo pri kateri je q zvezna.

Torej za odprte v $X/_\sim$ vzamemo vse, ki imajo odprte praslike v X

Def: X topološki prostor, $\sim$ ekv. relacija, τ topologija na X. Potem je
<u>kvocientna topologija</u> na $X/_\sim$
$$\tau_\sim = \{ V \subseteq X/_\sim ; q^*(V) \in \tau \}$$

Opomba: v kvocientni topologiji velja
torej $V^{odp} \subseteq X/_\sim \Leftrightarrow q^*(V)^{odp} \subseteq X$

$\Rightarrow$ zveznost
$\Leftarrow$ največjost $\tau_\sim$

Z zaprta $\Leftrightarrow q^*(Z)$ zaprta

Ali je torej g odprta iz zaprta?

Ne nujno:

Primer:

1) $X = [0,1]$ $\mathcal{R} = \{[0,1), \{1\}\}$

$X/_\sim = \{[0], [1]\}$

$\mathcal{T}_\sim = \{\emptyset, X/_\sim, [0]\}$

$g^*(\{[0]\}) = [0,1)$ odprt v X
ni zaprt v X

$\{[0]\}$ ni zaprt, je odprt

$g^*(\{1\}) = \{1\}$ zaprta, ni odprta

Ali je g zaprta? Ne

$g_*(\{0\}) = [0]$

zaprta $\qquad$ ni zaprta

2) $X = [0,2]$ $\quad [1,2]$ edini pravi dw. razred

$$X/_{[1,2]} \simeq [0,1]$$

$g : X \longrightarrow X/_{[1,2]}$ ni odprta

$g_*(1,2) = [1]$

$g^*([1]) = [1,2]$ ni odprt v X

3) $X = [0,1]$ $\quad A = X \cap \mathbb{Q}$ $\quad B = X - \mathbb{Q}$

$$X/_{\{A,B\}} = \{[0], [\tfrac{\sqrt{2}}{2}]\}$$

$$\tau = \{\emptyset, X_{\{A,B\}}\}$$

Def: X množica, $\sim$ ekv. relacija
za $A \subseteq X$ je njeno <u>nasičenje</u> enako

$g^*(g_*(A))$ ... unija vseh ekvivalenčnih razredov, ki sekajo A

Trditev: Za $A \subseteq X$ velja da je
$g_*(A)$ odprta $\Longleftrightarrow$ nasičenje $g^*(g_*(A))$ odprto

Podobno za zaprte.

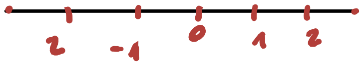
g je odprta, če je nasičenje vsake množice odprto in zaprta če je nasičenje vsake množice zaprto

Cilj:

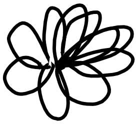
X topološki prostor $\sim$ ekv. relacija
če je to mogoče želimo poiskati nek geometrični model za Y za kvocient $X/\sim$ in pokazati da je
$X/\sim \,\cong Y$

Primer:

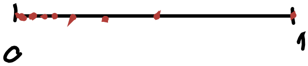
$X = \mathbb{R}$ $A = \mathbb{Z}$

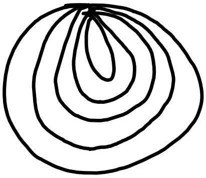


$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = ?$



2) $X = [0,1]$ $A = \{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$





v 2) je X kompakten. Po definiciji je q zvezna, zato je $X/\sim$ tudi kompaktna
v 1) X ni kompakten zato ne vemo ali je kvocient kompakten

1) ni mogoče vložiti v evklidski prostor

1.2 Kvocientne preslikave

Cilj: razumeti preslikave iz kvocientov

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f = g \circ q"] \arrow[dr, "q"'] & & Y \\
& X/\sim \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

če je $x \sim y$ v $X \Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ [x]}}{q(x)} = \underset{\substack{\parallel \\ [y]}}{q(y)}$

in zato je $\underset{\substack{\parallel \\ f(x)}}{g(q(x))} = \underset{\substack{\parallel \\ f(y)}}{g(q(y))}$

Torej je f konstantna na ekvivalenčnih razredih. t.j. ekvivalentne točke slika v iste

Želimo obratno: za preslikavo $f: X \to Y$

iskati pogoje da dobimo preslikavo $X/_\sim \to Y$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "2"'] & Y \\ X/_\sim \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

da diagram komutira

Če naj diagram komutira mora biti f konstantna na ekvivalenčnih razredih

$\forall x, y \Rightarrow f(x) = f(y)$

$\bar{f}([x]) := f(x)$

$\bar{f}$ ... preslikava inducirana s f

Trditev:

Naj bo X topološki prostor, $\sim$ ekv. relacija

$f: X \to Y$ zvezna preslikava, ki je konstantna

na ekv. razredih. Potem f dobro definira

preslikavo $\bar{f}: X/_{\sim} \to Y$ za katero velja

$\bar{f} \circ q = f$. Poleg tega velja

1) f je zvezna $\Rightarrow$ $\bar{f}$ zvezna

2) če je f surjektivna $\Rightarrow$ $\bar{f}$ surjektivna

3) če za $\forall\, x \not\sim y$. $f(x) \neq f(y) \Rightarrow \bar{f}$ injektivna

(tj. f loči ekvivalenčne razrede

Dokaz: (2) in (3) jasno

1) Naj bo f zvezna. Dokazujemo zveznost $\bar{f}$

Izberemo poljuben $V \in \tau_Y$

Ali je $\bar{f}^*(V)$ odp v $X/_{\sim}$

$$f^*(V) \text{ odp} \Leftrightarrow \underbrace{q^*(\bar{f}^*(V))}_{(f \circ q)^*(V) = f^*(V)} \text{ odp v } X$$

Ker je V odprta v Y in $f: X \to Y$ zvezna

je $f^*(V)$ odprta v X

Zanima nas kdaj bo $\bar{f}$ homeomorfizem

(zvezna, bijektivna, zvezen inverz)
(bijektivna f, bijektivna f_*)

$\bar{f}$ je homeomorfizem $\Leftrightarrow$ $\bar{f}$ bijekcija in

porodi bijekcija med topologijama

$\Leftrightarrow$ $\bar{f}$ je bijekcija in $\forall V \subseteq Y, (V^{odp} \Leftrightarrow \bar{f}^*(V)^{odp})$

$\Updownarrow$

$(V^{odp} \subseteq Y \Leftrightarrow q^*(\bar{f}^*(V))^{odp})$

$\quad = $

$f^*(V)$

karakterizacija kvocientnosti

Naj bosta X in Y topološka prostora

$f: X \to Y$

f surjektivna in $\forall V \subseteq Y. (V^{odp} \Leftrightarrow f^*(V) \text{ odp})$

$\Rightarrow$ f imenujemo <u>kvocientna preslikava</u>

Opombe:

1) Po definiciji: kvocientne topologije je kvocientna projekcija kvocientna preslikava

Obratno: Vsako kvocientno preslikavo $f: X \to Y$ lahko obravnavamo kot kvocientno projekcijo pri ekvivalenčni relaciji, določeni z razbitjem X na praslike točk

2) Kvocientna preslikava je vedno zvezna $(\Rightarrow)$ in ~~ja~~ ni nujno odprta niti zaprta (ker že vemo za kvoc. proj)

3) implikacija $(\Leftarrow)$ v definiciji kvocientne preslikave je posebna lastnost, tej včasih rečemo kvocient v ožjem smislu

Za zveznost f za njeno enoličnost ~~pot~~ potrebno preveriti le pogoj

4) Surjektivna f je kvocientna $\Leftrightarrow$
$(\forall Z \subseteq Y: Z^{zap} \Leftrightarrow f^*(Z) \text{ zap})$

Lema: Naj bo $f: X \to Y$ zvezna in surjektivna
če je f odprta ali zaprta je kvocientna

Dokaz:

Preveriti je treba kvocientnost v ožjem smislu

>_n<

Recimo da je f zaprta

Izberimo poljubno $Z \subseteq Y$ za katero je
$f^*(Z)$ zaprta v X

$Z^{zap} \subseteq Y$

$f^*(Z)$ zaprta v X in f zaprta

Torej $f_*(f^*(Z)) = Z$ zaprta

surjektivnost

Izrek: (o prepoznavi kvociента)

X, Y: top. prostor $\sim$ ekv relacija na X

Naj bo $f: X \to Y$ kvocientna preslikava,

ki naredi enake identifikacije kot $\sim$

(tj f-je konstantne na ekv. razredih in jih loči)

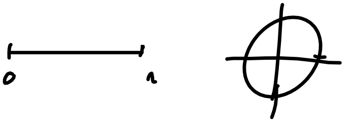
Potem je inducirana preslikava $\bar{f}: X/_\sim \to Y$

homeomorfizem

Primer: $X=[0,1]$ $\quad 0\sim 1$

Dokažimo: $X/\sim \;\approx S^1$

Iščemo f kvocientno, ki naredi iste identifikacije kot $\sim$



$$f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

f je surjektivna in slika v krožnico

Preveriti moramo kvocientnost

imamo zveznost

kvocientnost v ožjem smislu?

Dovolj je odprtost ali zaprtost

- f je zvezna, ker je elementarna
- f je kvocientna v ožjem smislu, ker je zaprta, saj slika iz kompaktnega v hausdorffov
- f je hom. na ekv. razredih

$f(0) = (1,0)$

$f(1) = (1,0)$ $\qquad 0\sim 1 \Rightarrow f(0)=f(1)$

f loči ekvivalenčne razrede:

interval $[0,1)$ se inje slika na krožnico, zato ima f različne vrednosti na različnih ekv. razredih

izrek $\Longrightarrow \bar{f}: X/\sim \;\to S^1$ je homeomorfizem

4.3

Začetek predavanj

$X \cong Y$

Trditev $X/_{\sim_X} \cong Y/_{\sim_Y}$ ($\sim_Y$ in $\sim_X$ sta usklajeni: $(y_1 \sim y_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) \sim f^{-1}(y_2))$)

Dokaz

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_X"] & Y \arrow[d, "q_Y"] \\
X/_{\sim_X} \arrow[r, dashed, "F"'] & Y/_{\sim_Y}
\end{tikzcd}$$

homeomorfizem je kvocientna preslikava

$q_Y \circ f$ kvocientna

Po definiciji: f slika ekv razrede v X v ekv. razrede v Y

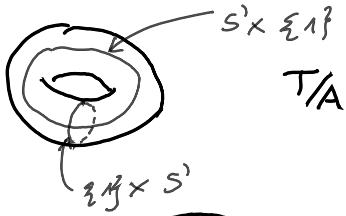
Torej $q_Y \circ f$ naredi iste identifikacije kot q_X

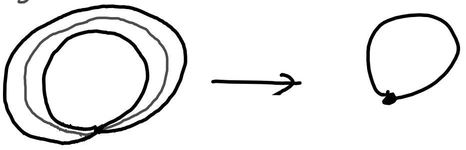
$\Rightarrow q_Y \circ f$ inducira homeomorfizem $F: X/_{\sim_X} \to Y/_{\sim_Y}$

Primer:

Naj bo $1 \in S^1 \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}^2$

$$A = S^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times S^1 \subseteq S^1 \times S^1 = T \quad \text{torus}$$





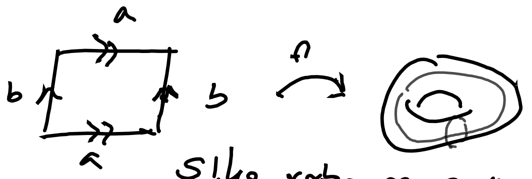
Najbrž je kvocient S^2

Ideja: torus prerežemo vzdolž A, da dobimo kvadrat z identifikacijami na robu

$$X = \overbrace{[0,1]}^{I} \times [0,1]$$

$$f : X \to S_1 \times S_1$$

$$f(x,y) = (\underbrace{\cos 2\pi x, \sin 2\pi x}_{e^{i2\pi x}}, \underbrace{\cos 2\pi y, \sin 2\pi y}_{e^{i2\pi y}})$$



Slika roba je ravno A

$$B := f^{-1}(A) = \partial I^2 \ldots \text{rob kvadrata}$$

Če nadeljujemo tako da A stisnemo v točko to ustreza identifikacijam na kvadratu, ki celotni rob stisnejo v točko

$I^2 \xrightarrow{p} I^2/B$ kvocientna projekcija

$$\begin{tikzcd}
\text{vemo da } \boxed{I^2}_{B=\partial I^2} \arrow[d, "p"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & B^2_{\,S^1=\partial B^2} \arrow[d, "q"] \\
I^2/B \arrow[r, phantom, "\cong"] & B^2/S^1 \cong S^2
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow S^2 \cong T/A$$

Deljivost topoloških lastnosti

Def: topološka lastnost $\mathcal{L}$ je deljiva, če za $\forall X \in \mathcal{L} \; \forall \sim$ ekv. rel. $X/_\sim \in \mathcal{L}$

Ekvivalentno: $\mathcal{L}$ je deljiva, če se ohranja pri kvocientnih preslikavah

Trditev:

1) Deljive so naslednje lastnosti

- kompaktnost, povezanost (s potmi), lokalna povezanost (s potmi), separabilnost, diskretnost, trivialnost

2) Nedeljive so:

- lokalna kompaktnost, 1- in 2- števnost, separacijske lastnosti, metričnost, popolna nepovezanost

Dokaz:

kmp., pov. in sep. se ohranja z zveznostjo

lokalna povezanost s potmi

lok povezan $\Leftrightarrow$ komponente vsake odprte množice so odprte

$X/\sim \quad V^{odp} \subseteq X/\sim$

$V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ $\quad V_\lambda$ so komponente za povezanost

V_λ so odprte

$g: X \to X/\sim$ kvoc $\quad$ cato

$g^{-1}(V) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} g^{-1}(V_\lambda)$ je odprta v X

po predpostavki je X lok. pov. ~~in~~ zato so ~~in~~ komponente $g^{-1}(V)$ odprte v X

Naj bo W poljubna komponenta $g^{-1}(V)$

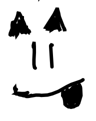
Ker je V povezana in g zvezna $\Rightarrow$

$g(W)$ ~~je~~ $\subseteq V$ ~~P~~ $= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$

Torej $g_\lambda(W) \subseteq V_\lambda$ za nek $\lambda \in \Lambda$

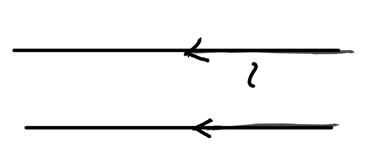
$\Rightarrow W \subseteq g^{*}(V_\lambda)$

$\Rightarrow g^{*}(V_\lambda)$ je unija komponent za povezanost $\Rightarrow g^{*}(V_\lambda)$ je odprta $\Leftrightarrow V_\lambda$ so odprte

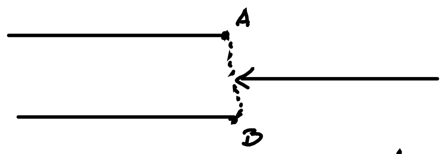


2) separacijske lastnosti:

T_2: $X = \mathbb{R} \times \{0,1\}$



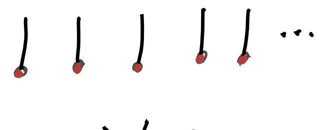
Relacija $\sim$ $\quad (x,0) \sim (x,1) \; \forall x > 0$



A in B nimata več disjunktnih okolic

1-števnost

$X = [0,1] \times \mathbb{N} \qquad A = \{0\} \times \mathbb{N}$



$X/A =$  X/A ni enaštevna

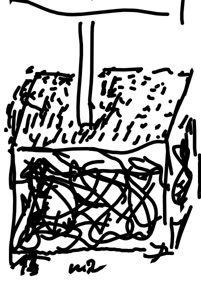
Dokaz s protislovjem:

Recimo da jo ima

$a = g(A) = g(0,n)$, neki

Recimo da jo

$\forall$ n.s. odn...



Trditev: X top. pr. $\sim$ ekv. relacija na X

$$X/_{\sim} \in T_1 \Leftrightarrow \text{ekvivalenčni razredi v } X \text{ so zaprti}$$

Dokaz:

$$X/_{\sim} \in T_1 \Leftrightarrow \text{točke v } X/_{\sim} \text{ so zaprte}$$

$$\Leftrightarrow q^{-1}(\text{tč}) \underset{\text{zap}}{\subseteq} X$$

1,3 Topološke grupe in delovanje

Def: Topološka grupa je grupa G, ki je opremljena s topologijo, glede na katero sta množenje

$$m: G \times G \to G$$
$$(g,h) \mapsto gh$$

in invertiranje

$$inv: G \to G$$
$$g \mapsto g^{-1}$$

zvezni:

Opomba: Poznamo že primer topološke algebre

$(C(X), \tau_{co})$

Mi bomo večinoma delali nad $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

ki so topološki obsegi, obstajajo še drugi npr. končni obsegi ($\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}_p}$) ki jih običajno opremimo z diskretno topologijo p-adičnih, ki so napolnitev $\mathbb{Q}$ v p-adični metriki

$$\frac{m}{n} = p^k \frac{m_1}{n_1} \qquad m_1, n_1 \text{ tuja } p \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left\|\frac{m}{n}\right\|_p = p^{-k}$$

Primeri

1) G poljubna grupa opremljena z diskretno topologijo je tudi grupa

2) G top. grupa $H \leq G \Rightarrow$
H z inducirano topologijo je tudi top. grupa

3) $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{H}, +)$ so top. grupe

$(\mathbb{R}^*, \cdot)$ $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, $(\mathbb{H}^*, \cdot)$ so tudi top. grupe norma je **multiplikativna** ko:

$$\mu, \lambda \in \mathbb{F} \qquad \|\mu\lambda\| = \|\mu\| \cdot \|\lambda\|$$

Posebej sledi, da so enotske sfere zaprte za množenje

$(S^0, \cdot)$ $(S^1, \cdot)$ $(S^3, \cdot)$ so topološke grupe

$S^0 = \{\pm 1\}$

kaj pa S^2? Ne!

Najlepši dokaz z uporabo algebraične topologije

⑤ Naj bodo $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ grupe

Potem je $\prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ opremljena z operacijami po komponentah in produktno topologija tudi topološka grupa

Npr: $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}} \cong C$ ... cantorjeva množica

6) Topološke grupe linearnih izomorfizmov

$\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$

$GL_n\mathbb{F} = \{$lin. izomorf. $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n\}$

$= \{A \in \mathbb{F}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$

.... splošna linearna grupa

$(A, B) \longmapsto A \cdot B$ zvezna

$A \longmapsto A^{-1}$ tudi zvezna

$= \frac{1}{\det A} \tilde{A}$

Še več: To je Liejeva grupa ... gladka mnogoterost in operaciji sta gladki

Enako velja za vse standardne podgrupe:

$SL_n(\mathbb{F})$ .... $\det = 1$

nad $\mathbb{R}$:

O_n ... ortogonalna $AA^T = I$

SO_n ... specialna ortogonalna $A^{-1} = A^T$

nad $\mathbb{C}$.

U_n ... unitarna $AA^H = I$

SU_n ... specialna ~~or~~ unitarna

nad $\mathbb{H}$

Sp_n ....simpletična grupa $AA^H = 1$

(sled: $\det = 1$

Trditev: Naj bo G top. grupa, $a \in G$.

<u>leva</u> (oz <u>desna</u>) <u>translacija</u> za a je

$$L_a : G \to G \qquad\qquad R_a : G \to G$$
$$g \longmapsto ag \qquad\qquad g \longmapsto ga$$

sta homeomorfizma

Dokaz:

$$R_a : G \xrightarrow{\approx} G \times \{a\} \subset G \times G \xrightarrow{m} G$$
$$g \mapsto (g,a) = (g,a) \longmapsto ga$$

kompozitum zveznih je zvezna

inverz: R_a^{-1}

$$R_a^{-1}(R_a(g)) = R_a^{-1}(ga) = (ga)a^{-1} = g(aa^{-1}) = g$$

Posledica

Top. grupa G je homogen prostor, tj za poljuben $x,y \in G$. $\exists$ homeo. $h: G \to G$; $h(x)=y$

Dokaz: $L_{yx^{-1}}$ ali: $R_{x^{-1}y}$

Def:

Naj bo X top. prost. in G top. grupa

(levo) delovanje grupe G na prostor X je zvezna preslikava $\varphi: G \times X \to X$

$$(g,x) \mapsto \varphi(g,x) = g \cdot x$$

za katero velja:

1) $ex = x \quad \forall x \in X$

$b \cdot (a \cdot x) = (ba) \cdot x \quad \forall x \in X, \forall a,b \in G$

V tem primeru rečemo da je X G-prostor

Opomba: kot v primeru grupe, delovanje določa translacijo ki je homeomorfizem prostora X

$$L_a: X \to X$$
$$x \mapsto a \cdot x$$

Ampak v splošem X ni homogen za delovanje grupe G:

Za polj $x \in X$ je

$G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ orbita točke x in

ta v splošnem ni ves X

Torej: delovanje G na X določa ekv. relacijo na X za katero so ekvivalenčni razredi orbite delovanja:

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists g \in G, \; g \cdot x = y$$

$$[x] = \{y = g \cdot x \mid g \in G\} = G \cdot x$$

Za poljuben $x \in X$ je $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ stabilizatorska podgrupa elementa x

Velja: $G \cdot x \xleftrightarrow{\text{bij}} G/G_x$

Trditev:

Naj top. grupa G deluje na top. prostor X. Potem je kvocientna projekcija $q: X \to X/_G$ v prostor orbit odprta

Dokaz:

Preveriti moramo da je nasičenje odprte mn. v X odprt v X:

$U^{odp} \subseteq X$

$$q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{x \in U} G \cdot x = \{ g \cdot x \mid g \in G, x \in U \}$$

$$= \bigcup_{g \in G} \{ g \cdot x \mid x \in U \} = \bigcup_{g \in G} L_g(U)$$

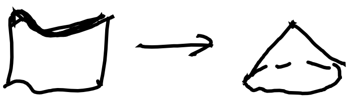
Ker je U^{odp} in L_g homeo. slika odp. v odp. zato je $L_g(U)$ odprta, ~~ker~~ zato tudi unija bo odprta

1.4 Konstrukcije kocientov

1) X top. p.

stožen nad X: $CX := X \times I / X \times \{1\}$

2) suspenzija X: $\Sigma X := X \times [-1,1] / X \times \{-1\}, X \times \{1\}$

1) 

Trditev:

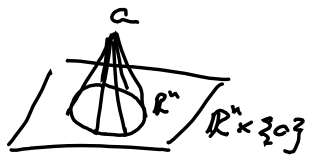
$$CS^n = B^{n+1}$$
$$ZS^n = S^{n+1}$$

opomba:

za $X \subseteq \mathbb{R}^n$

1) "$\mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

za poljuben $a \notin \mathbb{R}^{n+1} \times \{0\}$



Definiramo linearni stožec nad X kot unijo vseh daljic

$$\{[a,x] \mid x \in X\}.$$

Vse te daljice se paroma sekajo v točki a

$L_a X$ .... linearni stožec

$L_a X$ je kot množica enaka CX. topologijo ima enako če je X kompakten

2) Simetrični produkt

X top. prostor $n \in \mathbb{N}$

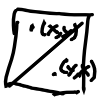
$X^n = X \times \dots \times X$

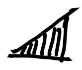
simetrične grupa S_n deluje na X^n s permutacijami faktorjev in kvocient pri tem delovanju je simetrični produkt

$$S^n X := X^n / S_n$$

Primer:

$X = [0,1] = I \quad n = 2$

I^2  $(x,y) \sim (y,x)$

$S^2 I \simeq$ 

3) Limita prostorov

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} X_4 \to$$

$$\xrightarrow{\lim} (X_n, f_n) = \left(\coprod_{n=1}^{\infty} X_n\right) / \sim$$

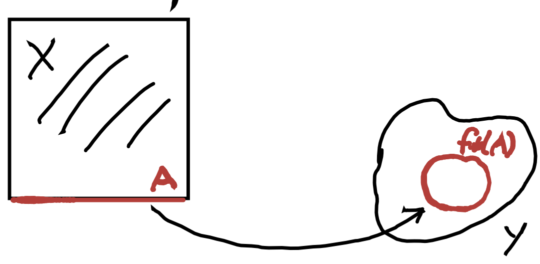
$x_i \in X_i \quad x_j \in X_j$

$x_i \sim x_j$, če $\exists k > i,j$ da je

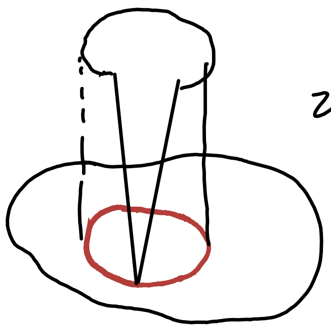
$$f_k \circ \dots \circ f_{i+1} \circ f_i(x_i) = f_k \circ \dots \circ f_j(x_j)$$

4) Zlepek

X, Y, top.pr $A \subseteq X$; $f : A \to Y$



Zlepek X in Y vzdolž f je $X \cup_f Y = (X \sqcup Y) / \underset{a \in A,\ f(a) \in Y}{a \sim f(a)}$



Zlepek

Ekvivalenčni razredi:

$[x] = \{x\} \quad x \in X - A$

$[y] = \{y\} \quad y \in Y - f_*(A)$

$[y] = f^*(\{y\}) \cup \{y\} \quad y \in f_*(A)$

Primer

1) $A \subseteq X$

$Y = \{*\}$

$f: A \to Y$ konst. preslikava

$X \cup_f Y \approx X/A$

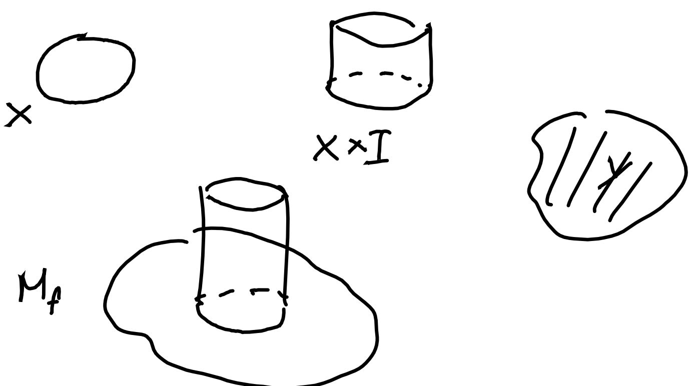
2) Naj bo $f: S^{n-1} \to S^{n-1}$ homeo

$B^n \cup_f B^n \approx S^n$

3) Naj bo $f: X \to Y$ zvezna

Preslikovni cilinder je zlepek

$M_f = X \times I \cup_f Y$ $\qquad f: X \times \{0\} \to Y$



Izrek: (normalnost zlepkov

X, Y normalna prostora

$A \subseteq X$ zaprt $f: A \to Y$ zvezna

Potem je zlepek $X \cup_f Y$ normalen

Dokaz:

normalnost: $T_1 + T_4$

$q: X \sqcup Y \to X \cup_f Y$ kvocientna proj

Netrivialni: ekv. razredi so oblike

$f^*(y) \cup \{y\}$, $y \in f_*(A)$

T_1: Kvocient je $T_1 \iff$ ekv. razredi zaprti

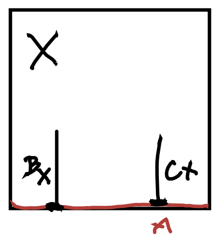
(ker sta X, Y T_1 so točke zaprte

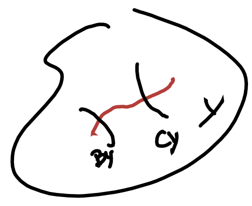
Ker je f zvezna in so točke zaprte je tudi $f^*(\{y\})$ zaprt zato so vsi ekv razredi zaprti

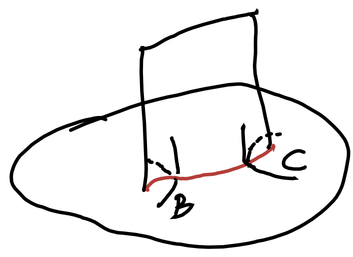
T_4: Urisonova lema:

~~Za podprost~~ $T_4 \iff$ za poljubni disj. zap. množici iščemo urisonova funkcijo

Naj bosta $B, C \subseteq Z$ disjunktni, zap, neprazni







Naj bo $B_X := q^*(B) \cap X$ C_X podobno

$B_Y := q^*(B) \cap Y$ C_Y

Te množice so zaprte $B_X \cap C_X = \emptyset$

$B_Y \cap C_Y = \emptyset$

Ker je Y T_4 obstaja Urisonova funkcija $\varphi_Y: Y \to [0,1]$

$f_Y/_{B_Y} = 0$ $f_Y/_{C_Y} = 1$

Definiramo $\psi: B_X \cup C_X \cup A \to [0,1]$

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in B_X \\ 1 & ; y \in C_X \\ \varphi_Y(f(x)) & ; x \in A \end{cases}$$

ψ je dobro definirana

Po Tietzejevem izreku lahko ψ razširimo do zvezne

$\varphi_X: X \to [0,1]$ ki je urisonova funkcija na X

Funkciji: φ_X in φ_Y pa skupaj določata iskano urisonova funkcijo za zlepek Z

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup Y & \xrightarrow{\varphi_X \sqcup \varphi_Y} & I = [0,1] \\ q \big\downarrow & \nearrow_{\varphi} & \\ Z = X \cup_f Y & & \end{array}$$

za $x \in X$ $y \in Y$ je $x \sim y \iff y = f(x) \in f(A)$

$\varphi_X(x) = \psi(x) = \varphi_Y(f(x)) = \varphi_Y(y)$

$\Rightarrow$ inducirana funkcija obstaja in ker sta φ_X, φ_Y zvezni je tudi inducirana zvezna

$\Rightarrow \varphi$ je Urisonova saj je $\varphi/_B = 0$ $\varphi/_C = 1$

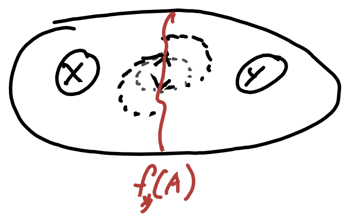
Trditev: $A^{zap} \subseteq X$; $f: A \to Y$

Označimo $Z = X \cup_f Y$

1) če sta X, Y 2-števna je tudi Z 2-števen

2) če sta $X\ Y \in T_2$ je tudi $Z \in T_2$

Dokaz



Naj bo $B_X = \{U_n ; n \in \mathbb{N}\}$ baza za X

$B_Y = \{V_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ baza za Y

Za poljubna $n, m \in \mathbb{N}$ naj bo

$W_{n,m} = (U_n \cap A) \cap f^*(V_m \cap f_*(A))$

$W_{n,m} \neq \emptyset$ je svedena odprta v A zato

$\exists W^X_{n,m} \subseteq U_n$ in $W^X_{n,m} \cap A = W_{n,m}$

$\exists W^Y_{n,m} \overset{odp}{\subseteq} V_m$ in $W_{n,m} \cap f(A) = f(W_{n,m})$ odp v $f_*(A)$

Naj bo

$B = \{g(U_n) ; U_n \in B_X ; U_n \cap A = \emptyset\} \cup$

$\cup \{g(V_m) \mid V_m \in B_Y ; V_m \cap f_*(A) = \emptyset\} \cup$

$\cup \{g(W^X_{n,m} \cup W^Y_{n,m}) / W_{n,m} \neq \emptyset$

B je števna

Množice v B so odprte, ker so U_n, V_m in $W^X_{n,m} \cup W^Y_{n,m}$ nasičene odprte, ze so nastopajo v def. družine B

Pokazati moramo še da je neke mn. v kvoc. top. pr. Z unija množic iz B.
Za to je dovolj pokazati da za $\forall$ tako množico $D \overset{odp}{\subseteq} Z$ in $\forall$ točko $d \in D$.
$\exists$ mn. $W \in B$: $d \in W \subseteq D$

$g^*(d)$ lahko ena točka v X ali Y ali pa vsebuje več točk. eno v A^c in njeno f-sliko v Y

Ločimo primere:

$g^*(d) = \{x\} \subseteq X$

$x \in g^*(D) \cap X \overset{odp}{\subseteq} X$

ker $x \in A$ je $x \in g^*(D) \cap X_n A^{c\ odp}$

$\exists U_n \in B_X$ da je $x \in U_n \subseteq g^*(D)$

zato je $g(x) = d \in g(U_n) \in B$
$\cap$
D

- $g^*(d) = \{y\} \subseteq Y$ $y \in f(A)$ podobno kot zgoraj

$d \in g(V_m) \subseteq D$

- $g^*(d) = \{x, y\}$ $x \in A$ $y = f(x) \in f(A)$

za x $\exists U_n \in B_X$: $x \in U_n$

za y $\exists U_m \in B_Y$: $y \in U_m$

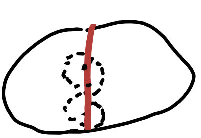
$\Rightarrow x = f^*(y) \in f^*(U_m)$

$\Rightarrow x \in W_{n,m}$

$\Rightarrow W^X_{n,m} \subseteq g^*(D)$ $W^Y_{n,m} \subseteq g^*(D)$

$\Rightarrow d \in g(U^X_{n,m} \cup W^Y_{n,m}) \subseteq D$

2) $X, Y \in T_2 \Rightarrow Z \in T_2$



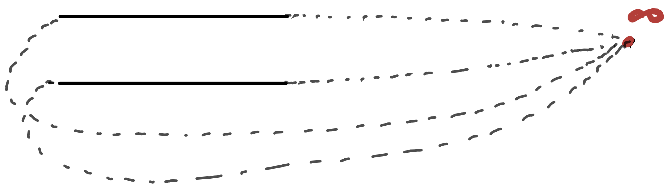
če je vsaj ena ne le mej imamo problem

1.5 Projektivni prostori

V ravninski evklidski geometriji za medsebojno lega dveh premic nastopita dve možnosti:

- se sekata v natanko eni točki
- sta vzporedni

Zato je včasih v dokazih potrebno obravnavati dve možnosti.
Želeli bi, da je situacija vedno enaka.
Torej da se poljubni premici sekata v natanko eni točki



To naredimo tako, da dodamo točke v ∞ na ta način da vsakemu snopu vzporednih premic, ki je skupna vsem premicam v snopa

Vsak snop vzporednih premic dobi svojo neskončnost

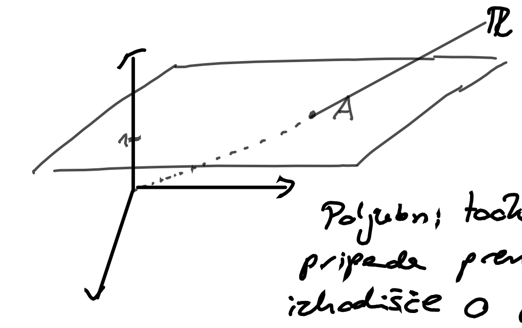
Izkaže se da se v dobljenem projektivnem prostoru (projektivna ravnina $\mathbb{R}P^2$) poenostavi tudi opis stožnic

$$\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\text{premice v } \mathbb{R}^2\}/_{\parallel}$$ ← vzporednost

· kakšna je topologija na $\mathbb{R}P^2$

Dodali smo neskončno točk v neskončnosti
Ali te točke sestavljajo kak geometrijski objekt
Ali $\mathbb{R}P^2$ izgleda enako v okolici ∞ točk kot v okolici končnih

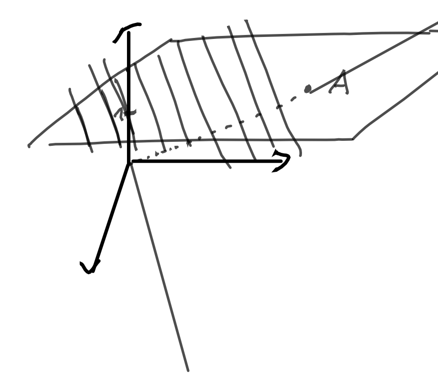
Točke v $\mathbb{R}P^2$ lahko opišemo na enak način



Poljubni točki $A \in \mathbb{R}^2 \times \{1\}$ pripada premica skozi izhodišče O določena s smernim vektorjem $\overrightarrow{OA}$

Točka A je edino presečišče te premice z ravnino $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$

Na ta način dobimo bijekcijo med točkami na $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$ in premicami skozi O v $\mathbb{R}^3$ ki ne ležijo na ravnini $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.
Premice skozi $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ pa so v korespondenci s snopi vzporednih premic na $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$



Torej je $\mathbb{R}P^2 = \{L ; L \text{ 1-dim lin. prostor v } \mathbb{R}^3\}$

$$\mathbb{R}P^2 = \{L - \{0\}, L \text{ 1-dim lin. prostor v } \mathbb{R}^3\}$$

↑
paroma disjunktni, njihova unija je $\mathbb{R}^3 - \{0\}$

To razbitje $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ določa ekvivalenčno relacijo.
Ekvivalenčni razredi so 1-dimenzionalni linearni podprostori brez izhodišča

$$x, y \in L - \{0\} \iff \exists \lambda \neq 0.\ y = \lambda x$$

$$L - \{0\} = \{\lambda x ;\ \lambda \in \mathbb{R}^\times\}$$
$$\parallel$$
$$[x]$$

To je orbita delovanja $\mathbb{R}^\times$ na $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ z množenjem s skalarji

$$\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^3 - \{0\} /_{x \sim \lambda x} = \mathbb{R}^3 - \{0\} /_{\mathbb{R}^\times}$$

↑
prostor orbit pri delovanju grupe $\mathbb{R}^\times$

Def: Naj bo $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ in naj bo $n \in \mathbb{N}_0$

Projektivni prostor dimenzije n nad obsegom $\mathbb{F}$ je

$$\mathbb{F}P^n := \mathbb{F}^{n+1} - \{0\} \Big/ x \sim \lambda x \;;\lambda \in \mathbb{F}^\times = \mathbb{F}^{n+1} - \{0\} \Big/ \mathbb{F}^\times$$

opremljen s kvacientno topologijo

Opomba: enako lahko naredimo za poljuben topološki obseg

Trditev:

Naj bo $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ $n \in \mathbb{N}_0$

$\mathbb{FP}^n$ je homogen prostor

(t.j. za poljubne $x, y \in \mathbb{FP}^n$. $\exists h$ homeo $\mathbb{FP}^n$ $\mathbb{FP}^n$: $h(x) = y$)

Dokaz:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^{n+1} - \{0\} \arrow[r, "H"] \arrow[d, "q"] & \mathbb{F}^{n+1} - \{0\} \arrow[d, "q"] \\
\mathbb{FP}^n \arrow[r, dashed, "h"] & \mathbb{FP}^n
\end{tikzcd}$$

$$[v] = x \overset{h}{\longmapsto} y = [w]$$

za H bomo izbrali linearni izomorfizem ki v slika v w

v dopolnimo do baze $\mathbb{F}^{n+1}$

$v, v_1, v_2, \dots, v_n$

w dopolnimo do baze $\mathbb{F}^{n+1}$

$w, w_1, \dots, w_n$

za H vzamemo prehodno preslikavo, ki slika bazne vektorje v bazne vektorje (z istim indeksom)

H je homeomorfizem $\Rightarrow$ $q \circ H$ je kvocientna

$q \circ H$ naredi iste identifikacije kot q

(stisne premice v točke, H pa je bijekcija med premicami

$\Rightarrow$ inducirana preslikava h je homeo

in $h(x) = h([v]) = q(H(v)) = q(w)$

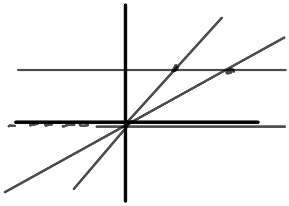
Primeri:

1) $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$

$$\mathbb{F}P^0 = \mathbb{F}^1 - \{0\} / \mathbb{F}^\times = \mathbb{F}^\times / \mathbb{F}^\times = \{*\}$$

2) $\mathbb{F}P = ?$

$$\mathbb{F}P^1 = \mathbb{F}^2 - \{0\} / \mathbb{F}^\times$$

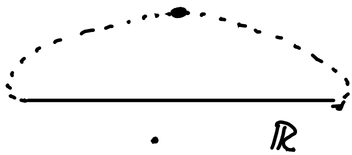


Zdi se da je

$\mathbb{F}P^1 = \mathbb{F} \cup \{\infty\}$ kompaktifikacija z 1 točko

(za zdaj se ugibanje

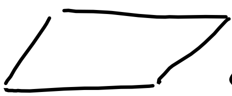
$\mathbb{R}P^1$



$\approx S^1$

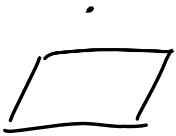
$\mathbb{R}$

$\mathbb{C}P^1$



$\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \quad \approx S^2$

$\mathbb{H}P^1$



$\mathbb{H} = \mathbb{R}^4 \quad \approx S^4$

$$d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F} = \begin{cases} 1 & \mathbb{F} = \mathbb{R} \\ 2 & \mathbb{F} = \mathbb{C} \\ 4 & \mathbb{F} = \mathbb{H} \end{cases}$$

$$\mathbb{F}P^1 = S^d$$

(3) $\mathbb{R}P^2$ je neka sklenjena ploskev, ki pa ni S^2

Trditev: $\mathbb{F}P^n$ ima pokritje z $n+1$ odprtimi množicami, ki so homeo. $\mathbb{F}^n \equiv \mathbb{R}^{dn}$

Dokaz: $\mathbb{F}^{n+1}-\{0\}$ $\qquad U_i=\{(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{F}^{n+1};\ x_i\neq 0\}$

$x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ $\qquad i\in\{0,\dots,n\}$

U_i je odprta za $\forall i$ $\quad \{U_0, \dots, U_n\}$ so torej odprto pokritje za $\mathbb{F}^{n+1}-\{0\}$

ker so U_i nasičene so $g_*(U_i)$ odp $\subseteq \mathbb{F}P^n$

in tvorijo odprto pokritje

$g_*(U_i) \approx \mathbb{F}^n$:

Dovolj je dokazati za $i=0$:

$$\begin{tikzcd} U_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g/U_0"'] & \mathbb{F}^n \\ g_*(U_0) \arrow[ur, dotted, "\approx"', "\bar{f}"] & \end{tikzcd}$$

$$\lambda(x_0,\dots,x_n) = (\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

$$f(x_0,\dots,x_n) = (x_0^{-1}x_1, \dots, x_0^{-1}x_n)$$

f slika ekvivalentne točke v iste

$$f(\lambda x_0,\dots,\lambda x_n) = (x_0^{-1}\lambda^{-1}\lambda x_1, \dots, x_0^{-1}\lambda^{-1}\lambda x_n)$$
$$= (x_0^{-1}x_1, \dots, x_0^{-1}x_n)$$

f je zvezna

ker je U_0 odprta je g/U_0 kvocientna

zato f zvezna $\Rightarrow$ $\bar{f}$ zvezna

Da je $\bar{f}$ zvezni homeo. sledi iz obstoja

inverzne zvezne preslikave

Naj bo $G: \mathbb{F}^n \to g(U_0)$

$G(w_1,\dots,w_n) = g(1, w_1, \dots, w_n)$ zvezna

in očitno inverzna $\bar{f}$

Posledica: $\mathbb{F}P^n \in T_2$

Dokaz:

$x, y \in \mathbb{F}P^n$; $x \neq y$

$x = [v]$ $\quad v = (v_0, \dots, v_n)$

1) $v_i \neq 0$ za $\forall i \in \{0 \dots n\}$

$\Rightarrow v \in U_i$ za $\forall i \Rightarrow x \in g(U_i)$ za $\forall i$

Ampak za y $\exists$ vsaj en j da je $y \in g_*(U_j)$

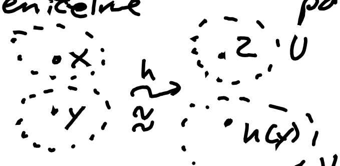
Torej $x, y \in g_*(U_j) \approx \mathbb{F}^n = \mathbb{R}^{dn}$

x in y imata v $g_*(U_j)$ disjunktni okolici in ker je $g_*(U_j)$ odprta v $\mathbb{F}P^n$ imata okolici v celem prostoru

2) Splošen primer:

po homogenosti $\mathbb{F}P^n$ lahko x s homeo. h preslikamo v z, ki ima vse komponente neničelne

po 1) $\exists$ disjunktni okolici



$h^*(U)$ in $h^*(V)$ sta disjunktni okolici x in y

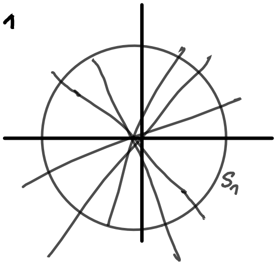
Zanimajo nas top. lastnosti $\mathbb{F}P^n$

Za $n \geq 1$ je $\mathbb{F}^{n+1} - \{0\} \Rightarrow \mathbb{F}P^n$ povezan

$\mathbb{F}^{n+1} - \{0\}$ lok. povezan $\Rightarrow \mathbb{F}P^n$ lok. povezan

Pokazati želimo da so $\mathbb{F}P^n$ kompaktni:

$\mathbb{R}P^1$



V $\mathbb{F}^k$ označimo enotsko sfero $S(\mathbb{F}^k)$
$= \{x \in \mathbb{F}^k ; \|x\| = 1$

$\mathbb{F} = \mathbb{R} \Longrightarrow S^{k-1}$

$\mathbb{F} = \mathbb{C} \Rightarrow S^{2k-1}$

$\mathbb{F} = \mathbb{H} \Rightarrow S^{4k-1}$

Ker je $\mathbb{F}$ topološki obseg množenje z enotskimi skalarji ohranja enotsko sfero $S(\mathbb{F}^k)$, zato delovanje $\mathbb{F}^\times$ na $\mathbb{F}^{n+1} - \{0\}$ (množenje s skalarji) določa delovanje $S(\mathbb{F})$ na enotsko sfero na $S(\mathbb{F}^{n+1})$

$$S(\mathbb{F}) = \begin{cases} S^0 & \mathbb{F} = \mathbb{R} \\ S^1 & \mathbb{F} = \mathbb{C} \\ S^3 & \mathbb{F} = 3 \end{cases}$$

Trditev: $\mathbb{F}P^n \approx S(\mathbb{F}^{n+1})/S(\mathbb{F})$

Dokaz:

$$
\begin{tikzcd}
S(\mathbb{F}^{n+1}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"', "\mathrm{Noc}"] & \mathbb{F}^{n+1} - \{0\} \arrow[d, "q"] \\
S(\mathbb{F}^{n+1})/S(\mathbb{F}) \arrow[r, "\chi"'] & \mathbb{F}P^n
\end{tikzcd}
$$

f naredi iste identifikacije kot p

$\Rightarrow$ f je homeo

Pokazali smo da so $\mathbb{F}P^n$ kompaktni.

F

mankele
son

1.4

$Y \in AE(\mathcal{R})$: $\forall X \in \mathcal{R}$, $\forall A^{zap} \subseteq X$

$\forall f : A \to Y$. $\exists$ razširitev $F : X \to Y$

$F/_A = f$

Tietze: $J \subseteq \mathbb{R}$ interval $J \in AE(\mathcal{N})$

normalni prostori

Trditev:

1) Biti $AE(\mathcal{R})$ je top. lastnost
2) Produkt $AE(\mathcal{R})$ je $AE(\mathcal{R})$
3) Retrakt $AE(\mathcal{R})$ je $AE(\mathcal{R})$

Def: $\mathcal{R}$ druzina top.pr $Y \in AE(\mathcal{R})$ ...
absolutni retrakt za druzino $\mathcal{R}$

1) $Y \in \mathcal{R}$
2) za $\forall$ zaprto vložitev $\varphi: Y \to X$ $X \in \mathcal{R}$
je slika $\varphi_*(Y)$ retrakt prostora X

Trditev: $\mathcal{R} \cap AE(\mathcal{R}) \subseteq AR(\mathcal{R})$

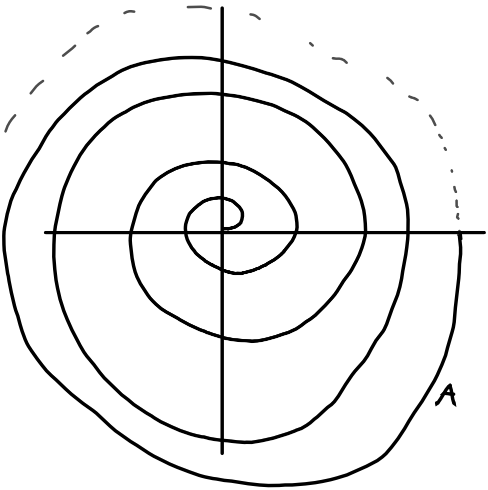
Dokaz:
$Y \in \mathcal{R} \cap AE(\mathcal{R})$
izberimo poljuben $X \in \mathcal{R}$ in naj bo
$\varphi: Y \longrightarrow X$ poljubna zaprta vložitev
Oznacimo $A := \varphi_*(Y) \overset{zap}{\subseteq} X$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "id"] \arrow[d, "i"'] & A \\ X \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

$A \approx Y$ zato $A \in AE(\mathcal{R})$

$\exists r$ retrakcija

Ali je spirala retrakt ravnine



Lahko gre v neskončnost ali pa je kompaktna (ker mora biti zaprta)

Da, kompakten je izomorfen $[a,b]$, ki je $AE(\mathcal{N})$ zato je $AR(\mathcal{N})$

Nekompaktna spirala pa je homeomorfna

$J = [0,1) \in AE(\mathcal{N}) \cap \mathcal{N} \subseteq AR(\mathcal{N})$

Izjava Bn: Izrek o neobstoju retrakcije

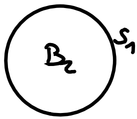
Sfera S^{n-1} ni retrakt B^n

$n=1$: S^0 ni retrakt B^1

$S^0 = \{-1, 1\}$, $B^1 = [-1, 1]$

že vemo ker $\{-1,1\}$ ni povezan

$n=2$



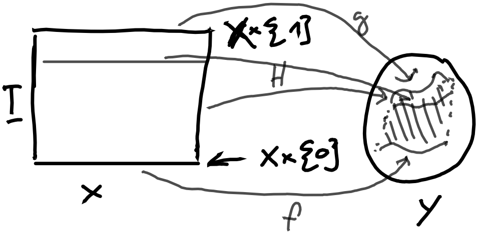
Izjava trdi, da ne obstaja zvezna preslikava, ki ne miruje na S_1 $r: B^2 \to S^1$

Ampak S_1 je retrakt $B_2 - \{0\}$

Za zadnjo izjavo povezano z Brouwerjevim izrekom o negibni točki še potrebujemo pojem homotopije

Def: f, g sta homotopni, če med njima obstaja kaka homotopija, ki je zv. preslikava $H: X \times I \longrightarrow Y$ za katero velja

$H(x,0) = f(x) \quad H(x,1) = g(x)$



za $\forall t \in I$ definiramo. $H_t : X \longrightarrow Y$

$x \longmapsto H(x,t)$

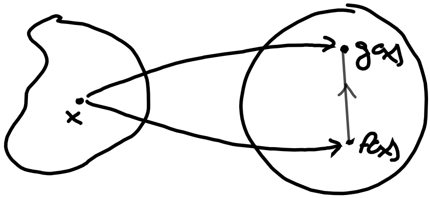
Def:

Prostor X je <u>kontraktibilen</u>, če je id_X homotopna kaki konstantni preslikavi. Pripadajočo homotopijo imenujemo kontrakcija

$X \simeq *$

Primer

1) Za polj. prostor X sta polj. preslikavi $f, g : X \to B^n$ homotopni:



s premočrtno homotopijo

$$H(x,t) = (1-t)\,f(x) + t\,g(x)$$

H je očitno zvezna

Op: B^n lahko zamenjamo s poljubno konveks. mn.

2) B^n je kontraktibilen: $\mathrm{id}\, B^n \to B^n$ je po 1) homotopna konst. $c : B^n \to B^n$
$$x \mapsto 0$$

Opomba: Enako velja za zvezdaste množice

3) $\mathbb{R}^n$ je kontraktibilen : $(x,t) \mapsto (1-t)x$

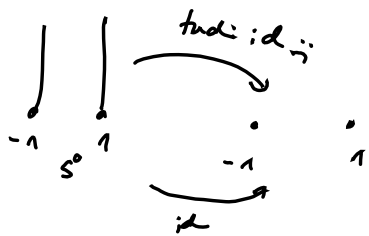
4) Ali je S^0 kontraktibilna

$S^0 = \{-1, -1\}$

Kontrakcija $H : S^0 \times I \to S^0$

$H_0 = id$

$H_1 = const$



Ker je I povezan je slika $\{-1\} \times I$ pri homotopiji H povezana in ker je $H(-1, 0) = -1$

$\Rightarrow H(\{-1\} \times I) = \{-1\}$

Podobno $H(\{1\} \times I)$ $\Rightarrow H_1 = id$

$\Rightarrow id_{S^0} \simeq konst$ zato S^0 ni.

Izrek: Sfera S^{n-1} ni kontraktibilna

opomba: primer je $n=1$ je nepresenji [illegible]

Videli smo da so A_n, B_n in C_n ekvivalentne

Trditev: Za $\forall n \in \mathbb{N}$ so izjave A_n, B_n in C_n ekvivalentne

Dokaz: Vse implikacije bomo dokazali: ~~tem~~ protislovjem

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$$

A_n: B^n ima lastnost negibne točke

B_n: S^{n-1} ni retrakt B^n-ja

C_n: S^{n-1} ni kontraktibilna

$A_n \Rightarrow B_n$:

Recimo da $\neg B_n$

Naj bo $r: B^n \to S^{n-1}$ retrakcija

Iščemo $f: B^n \to B^n$ brez negibne točke

Naj bo $f(x) := -r(x)$

$$f: B^n \xrightarrow{r} S^{n-1} \xrightarrow{(-1)} S^{n-1} \hookrightarrow B^n$$

Iščemo negibne točke

$f(x) = x$

$\underbrace{-r(x)}_{\in S^n} = x \Rightarrow x \in S^n$

Če obstaja negibna točka je na sferi

$x \in S^n \Rightarrow r(x) = x$

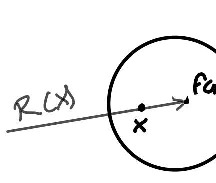
$x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin S^{n-1}$

$B_n \Rightarrow A_n$

Predpostavimo $\neg A_n$

$\exists f: B^n \to B^n$ zvezna brez negibne točke

$\forall x \in B^n.\ f(x) \neq x$



Naj bo $R(x)$ odprt poltrak iz $f(x)$ skozi x

Poltrak seka sfero v natanko eni točki ki jo označimo z $r(x)$

Tako dobimo $r: B^n \to S^{n-1}$

$x \in S^{n-1} \Rightarrow R(x) \cap S^{n-1} \ni x$ in zato je $r(x) = x$

Preveriti je treba dobro definiranost in zveznost

$B_n \Rightarrow C_n$ predpostavimo $\neg C_n$

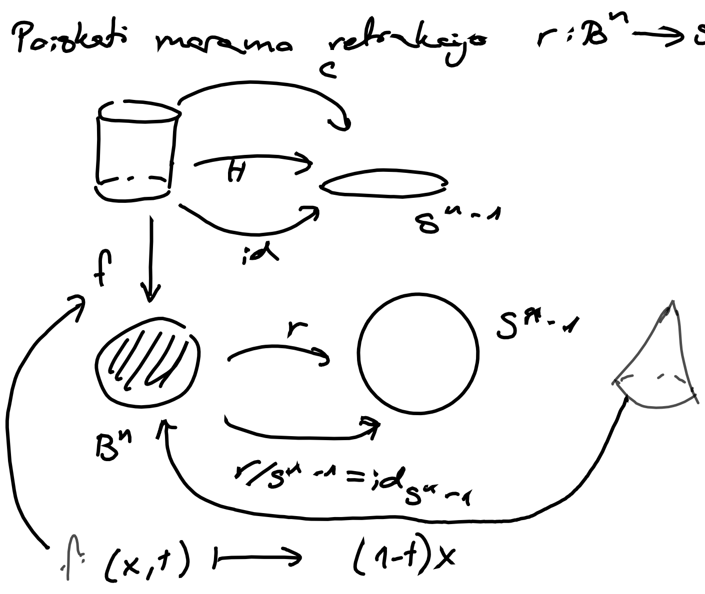
S^{n-1} je kontraktibilna: $\exists$ kontrakcija

$H: S^{n-1} \times I \to S^{n-1}$

$H_0 = id$

$H_1 = c$ konstanta

Poiskati moramo retrakcijo $r: B^n \to S^{n-1}$



$f: (x,t) \longmapsto (1-t)x$

$f: S^{n-1} \times I \to B^n$ je zvezna, surjektivna in zaprta torej je kvocientna

f je injektivna na $S^{n-1} \times [0,1)$

$S^{n-1} \times \{1\}$ preslika v 1 točko

Edini netrivialen ~~[illegible]~~ ekv razred ki ga določa f je $S^{n-1} \times \{1\}$ tega pa H slika v c zato je H konst na ekv. razredih torej določa ind. presl. $B^n \xrightarrow{r} S^{n-1}$

Iz zveznosti H sledi zveznost r

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "f"] & S^{n-1} \\ B^n \arrow[ur, dashed, "r"] & \end{tikzcd}$$

Trdimo še: $r/S^{n-1} = id_{S^{n-1}}$

$$\begin{tikzcd} (x,0) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & H(x,0) = H_0(x,0) = x \\ x \arrow[ur, bend right, "r"] & \end{tikzcd}$$

$B_n \Leftarrow C_n$

Predpostavimo $\neg B_n$

$\exists$ retr. $r: B^n \to S^{n-1}$

Poiskati moramo kontrakcijo sfere S^{n-1} tj.

$H: S^{n-1} \times I \to S^{n-1}$ $H_0 = id$ $H_1 = c$

Vzamemo $H := r \circ f$

res: $H_0 = id_{S^{n-1}}$

$H_1 = r(0)$