

1. Naj bo  $G$  grupa in  $N_1, \dots, N_s \trianglelefteq G$ .

Potem je notranji direktni produkt  $N_1, \dots, N_s$  natanko tedaj, ko se da  $\forall g \in G$  ne enolično na<sup>o</sup>n zapisati kot  $g = n_1 \dots n_s$

Dokaz:

$\Rightarrow G$  je notranji direktni produkt  
'enoličnost zapisa:

$$n_1 \dots n_s = m_1 \dots m_s$$

$$\underbrace{m_1^{-1} n_1}_{\in N_1} = \underbrace{(m_2 \dots m_s)(n_2 \dots n_s)^{-1}}_{\in N_2 \dots N_s}$$

$$N_1 \cap N_2 \dots N_s = 1 \Rightarrow m_1^{-1} n_1 = 1$$

$$\text{itd.} \quad \Rightarrow n_1 = m_1$$

$\Leftarrow$  Recimo da se da  $\forall g \in G$  enolično zapisati

1) Potem o<sup>o</sup>drno  $G = N_1 \dots N_s$

2)  $n_i \in N_i$

$$n_i = 1 \dots 1 \cdot n_i \cdot 1 \dots 1$$

$$P = N_1 \dots N_{i-1} \cdot \overset{\text{brez } n_i}{N_i} \cdot N_{i+1} \dots N_s = \{ n_1 \dots n_s ; n_j \in N_j \}$$

$$x \in N_i \cap P$$

$$x = 1 \dots n_i \dots 1 = n_1 \dots 1 \dots n_s \Rightarrow$$

$$n_1 \dots n_s = 1 = n_i$$

- komutator  $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$

$$[x, y] = 1 \Leftrightarrow xyx^{-1}y^{-1} = 1 \Leftrightarrow xy = yx$$

lema:  $M, N \trianglelefteq G$ ,  $M \cap N = \{1\}$   
elementi iz  $M$  komutiraju s elementima iz  $N$ .

Dokaz:  $m \in M, n \in N$

$$\begin{aligned} [m, n] &= 1 \quad \underbrace{mn m^{-1} n^{-1}}_{\in N} \in N \\ &\quad \underbrace{m n m^{-1} n^{-1}}_{\in M} \in M \quad \Rightarrow = \{1\} \end{aligned}$$

Izrek: Maj bo  $G$  notranji direktni produkt edink.

Potem je  $G \cong N_1 \times \dots \times N_s$

$$\varphi: N_1 \times \dots \times N_s \longrightarrow G$$

$$(n_1, \dots, n_s) \longmapsto n_1 \dots n_s$$

inj, surj ✓

$$\begin{aligned}(n_1, \dots, n_s)(m_1, \dots, m_s) &= (n_1 m_1, \dots, n_s m_s) = \\ &= n_1 m_1, \dots, n_s m_s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n_1 \dots n_s \cdot m_1 \dots m_s &= n_1 m_1 n_2 \dots n_s m_2 \dots m_s = \\ &= n_1 m_1 n_2 m_2 \dots n_s m_s\end{aligned}$$



# Klasifikacija kononih abelovih grup

Lema:  $|G| = mn$ ,  $G$  abelova  $m, n$  tuji

$$H = \{x \in G; mx = 0\}, K = \{x \in G; nx = 0\}$$

Potem sta  $H$  i  $K$  podgrupi v  $G$  in

$$G = H \oplus K, |H| = m, |K| = n.$$

Dokaz:  $H \leq G$

$$a, b \in H \quad m(a-b) = ma - mb = 0 - 0 = 0$$

$$m, n \text{ tuji} \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{Z}. \quad am + bn = 1$$

$$x \in H \cap K$$

$$x = 1 \cdot x = a(mx) + b(nx) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$$

$$g \in G. \quad g = mag - nb_g = a \underbrace{mg}_{\in G} - b \underbrace{ng}_{\in H}$$

$$\underline{|H| = m} \quad \underline{|K| = n}$$

$$\underline{p|m \Rightarrow p||H|}$$

$$\begin{aligned} p|m &\Rightarrow p||G| \Rightarrow \exists a. pa = 0 = am = 0 \\ &\Rightarrow a \in H \Rightarrow \langle a \rangle \leq H \Rightarrow p||H| \end{aligned}$$

# Produkti, koprodukti, prosti objekti

Def: Naj bo  $\mathcal{C}$  kategorija,  $I$  naj bo indeksna množica,  $A_i; i \in I$  naj bo družina objektov iz  $\mathcal{C}$ . **Produkt** družine objektov  $A_i$  je objekt  $P$  skupaj z morfizmi:

$\pi_i: P \rightarrow A_i; i \in I$ , da velja

↑ Za  $\forall$  objekt  $X$  in vsek nabar morfizmov

$f_i: X \rightarrow A_i$  obstaja natanko en morfizem

$f: X \rightarrow P$ , da

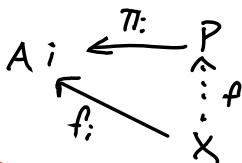


diagram komutira  
za  $\forall i \in I$   
( $f$  je univerzalen

Strukturi;  
morfizmi;

Zaželi:

set:  $A, B$  množici

$A \times B$  je produkt  $A$  in  $B$

$$A \xleftarrow{\pi_1 = p_{r1}} A \times B \xrightarrow{\pi_2 = p_{r2}} B$$

$X$  poljubna množica

$$f_1: X \rightarrow A$$

$$f_2: X \rightarrow B$$

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{\pi_1 = p_{r1}} & A \times B & \xrightarrow{\pi_2 = p_{r2}} & B \\ & \swarrow f_1 & \uparrow f & \searrow f_2 & \\ & X & & & \end{array}$$

Recimo da  $f$  obstaja:

$$\pi_1 \circ f = f_1 \quad \pi_2 \circ f = f_2$$

$$f(x) = (a_x, b_x)$$

$$\pi_1 \circ f(x) = \pi_1(a_x, b_x) = a_x = f_1(x)$$

$$\pi_2 \circ f(x) = b_x = f_2(x)$$

če  $f$  obstaja, mora veljati  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$   
(to je dokaz enoličnosti)

obstaj: definiramo  $f = (f_1, f_2)$   
(zgoraj tudi dokaz da komutira)

- Poljubna družina množic  $A_i \in I$   
 produkt je kartezični produkt  
 $f = (f_1, \dots, f_n)$  skupaj  $\supset$  projekcijami  
 na  $i$ -ti faktor

- Grp:  
 produkt = kartezični produkt z operacijami  
 po komponentah

- Top: isto

- Ring: isto

- Vec<sub>K</sub>: isto

- Field (kategorija polj)

$F_1 \rightarrow F_2$  nemicaln homomorfizem  
 $\ker f \triangleleft f_1 \Rightarrow \ker f = \{0\}$   
 $f$  mora biti injektiven

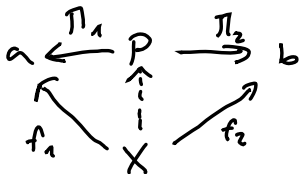
$F_1$  in  $F_2$  morata biti iste karakteristike

kartezični produkt ne more biti polje  
 (delitelj: nič  $(a,0) \cdot (0,b)$ )

Produkt polj mora biti tudi produkt  
 kolobarjev, če imamo enoličnost  
 torej mora biti kartezični produkt  
 to pa ne gre

DN kategorija določena iz delno rejenih množic  $(M, \leq)$

Produkt  $a, b \in M$ , če obstaja



$$\pi_1 = (p, a) \quad p \leq a$$

$$\pi_2 = (p, b) \quad p \leq b$$

če  $x \leq a$ ,  $x \leq b$ , potem  $x \leq p$

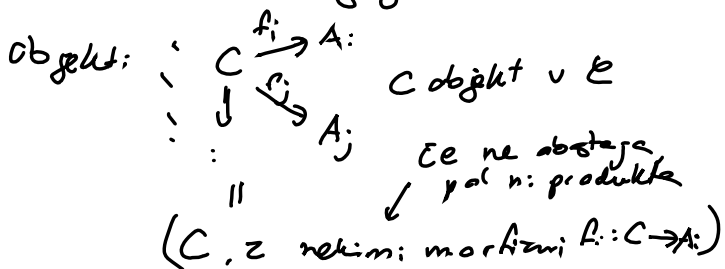
$p$  bi moral biti  $\inf(a, b)$ , če obstaja.



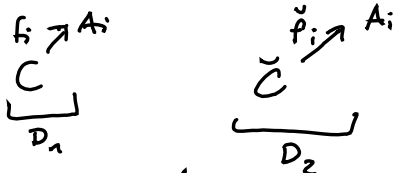
Trditelj: Naj bo  $A_i : \in I$  družina objektov  
v kategoriji  $\mathcal{C}$ . Naj bo  $(P, \Pi_i) : \in I$   
in  $(Q, \sigma_i) : \in I$  produkta objektov  $A_i$ .  
Potem sta  $P$  in  $Q$  izomorfna

Dokaz:

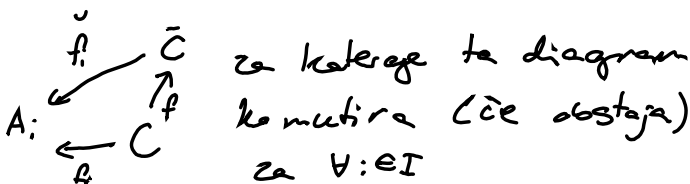
Naredimo novo kategorijo:  $\mathcal{D}$



Morfizem med dvema takima objektoma



Morfizem med  $D_1$  in  $D_2$  je morfizem  
med  $C$  in  $\check{C}$  v  $\mathcal{C}$



Produkt v  $\mathcal{C}$  je natanko kanon: objekt  
v  $\mathcal{D}$  (se enolično določeni)

Def: Naj bodo  $A_i, i \in I$  objekti kategorije  $\mathcal{C}$

**koproduct** objektov  $A_i$  je produkt teh objektov  $v \in \text{obj.}$

Natančneje to je objekt  $Q$  skupaj z morfi:

$$\sigma_i: A_i \rightarrow Q, \text{ da velja:}$$

za  $\forall$  objekt  $X$  in za vse  $f_i: A_i \rightarrow X$

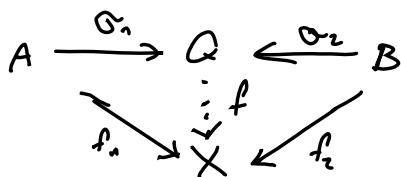
obstaja natančno en morfi  $\mu$

$f: Q \rightarrow X$ , da vsi diagrami:

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\sigma_i} & Q \\ & \searrow f_i & \downarrow \mu \\ & & X \end{array} \quad \text{komutirajo}$$

Primeri:

seti  $A, B$  množici,  $Q = ?$



↙ disjunktna unija

$$Q = A \cup B$$

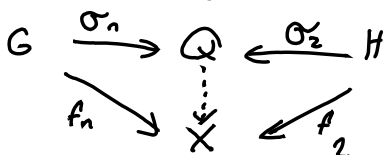
Če imamo  $X$  in  $f_1, f_2$ :

$$f: Q \rightarrow X$$

$$f(a) = f_1(a)$$

$$f(b) = f_2(b)$$

Grp:  $G, H$  grupi



$Q = G * H$  ... prosti produkt  $G$  in  $H$

d. formalni produkt

$$d = g_1 h_1 g_2 h_2 \dots g_k h_k$$

$$g_i, h_i \in H \quad k \geq 0$$

$$\sigma_1: G \rightarrow G * H$$

$$g \mapsto g \cdot 1$$

$$\sigma_2: H \rightarrow G * H$$

$$h \mapsto 1 \cdot h$$

to je produkt v Grp:

$$f(g) := f_1(g)$$

$$f(h) := f_2(h)$$

$$f(g_1 h_1 \dots g_k h_k) = f(g_1) f(h_1) \dots f(g_k) f(h_k)$$

(n; nujno da se začne s  $h$  jem

in konča z  $g$  jem 1 lahko

doberjamo

$\text{Vec}_K$ :  $V$ : vektorski prostori

koprodukt:  $Q$

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{\sigma_i} & Q \\ & \searrow f & \vdots A_i \\ & & X \end{array}$$

Definicija:  $Q = \{(v_i)_{i \in I} : v_i \in V_i, \text{ le}$

kar eno mnogo  $v_i \neq 0\}$

$Q = \bigoplus_{i \in I} V_i$  direktna vsota  $V_i$ -jev

$$\sigma_i : V_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} V_i$$

$$f : (v_i)_{i \in I} \longmapsto \sum A_i(v_i)$$

Def:  $\mathcal{C}$  je konkretna kategorija

Če lahko na objekte gledamo kot na množice in na morfizme kot preslikave na množice

☺ $\rightarrow$   $n$ : konkretna kategorija

Def: Naj bo  $\mathcal{C}$  konkretna kategorija

Naj bo  $X$  neprazna množica

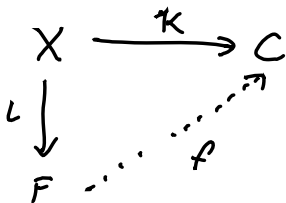
Prosti objekt nad množico  $X$  je objekt  $P$  skupaj s preslikavo  $\iota: X \rightarrow P$

da velja:

$\forall$  objekt  $C$  in  $\forall$  preslikavo  $K: X \rightarrow C$

$\exists$  natanko en morfizem iz  $P$  v  $C$ , da

komutira



Trditev: Prosti objekt, če obstaja je  
do izomorfizma natančno določen

Dokaz: Kategorija  $\mathcal{D}$

Objekti:  $X \xrightarrow{\kappa} C$  ;  $C$  objekt v

Morfizem med  $X \xrightarrow{\kappa} C$  in  $X \xrightarrow{\lambda} D$

morfizem  $f$  med  $C$  in  $D$ , da

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\lambda} & D \\ \kappa \downarrow & \nearrow f & \\ C & & \end{array}$$

Prosti objekt kategorije  $\mathcal{D}$  je ravno  
začetni objekt v  $\mathcal{D}$

~~QED~~

Zažled:

1)  $V_{\text{ek}}$

$X$  poljubna množica:  $F = \text{Lin } X =$

formalne  
vsota  $\rightarrow$

$$= \left\{ \sum \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k, \right. \\ \left. k \geq 0, x_i \in X, \alpha_i \in K \right\}$$

2) Mon:

$X$  poljubna množica

$F = \{ x_1 x_2 \dots x_k; x_i \in X \} = \text{prosti monoid nad } X$   
produkt = sklop besed

3) Grp:  $F = \{ x_1 \dots x_k, x_i \in X \cup X^{-1} \}$

produkt = „sklop“ + krajšanje

$$x_1 x_2^{-1} x_3 \cdot x_3^{-1} x_4 x_5 =$$

$$= x_1 x_2^{-1} x_4 x_5$$

$\uparrow$   
formalni  
izrazi  
 $\{ x^{-1}; x \in X \}$

(tehnične komplikacije: robimo  
grupo reduciranih besed)

$\rightarrow$  prosta grupa nad  $X$