Osnovna načela kombinatorike

- posplošeno načelo produkta

  $A_1, \ldots, A_n$ so končne $\Rightarrow \left|\prod_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$

- posplošeno načelo vsote

  $A_1, \ldots, A_k$ končne in paroma disjunktne

  $\Rightarrow \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$

- načelo enakosti

  $(\exists$ bijekcija $A \to B) \Rightarrow |A| = |B|$

- načelo dvojnega preštevanja

  (če dvakrat preštejemo elemente iste množice dobimo enak rezultat)

- Dirihletovo načelo

  $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m \Rightarrow \neg\exists$ injektivna preslikava $[n] \to [m]$

  Če n predmetov zložimo v m predalov in je $n > m$, potem bosta vsaj v enem predalu dva predmeta

$\Phi(n)$ .... eulerjeva funkcija Φ

(število števil iz $[n]$, ki so tuja z n)

$$\sum_{d|n} \Phi(d) = n$$

$$\left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} \right\} = X_n$$

$|X_n| = n$

Zamenjamo vse ulomke z okrajšanim ulomkom.

Primer za $n = 12$

$$X_n' = \left\{ \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \frac{7}{12}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}, 1 \right\}$$

Recimo da d in m delita n

$\frac{k}{d} \in X_n'$ Recimo da $k|d$

Potem $\frac{k}{d}$ ni okrajšan ulomek

Recimo da $\frac{k}{d} = \frac{l}{m} \Rightarrow$

Oba sta okrajšana ulomka torej

sledi: $d = m$ in $k = l$

Torej števila ulomkov ki imajo d v imenovalcu

je $\Phi(d)$

katera števila so v imenovalcu?

očitno števila, ki delijo 12

$$\Rightarrow \sum_{d|n} \Phi(d) = n$$

Število preslikav

$$|K^N| = |K|^{|N|}$$

$$|\{f \in K^N;\ f \text{ injektivna}\}| = k^{\underline{n}}$$

$$|\{f \in K^N;\ f \text{ surjektivna}\}| = k!\, S(n,k)$$

Binomski izrek: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} a^k b^{n-k}$

Fajn vedt: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Izbori

(izberemo k elementov iz n množice)

- urejeni izbori:
  - s ponavljanjem: n^k
  - brez ponavljanja: $n^{\underline{k}}$
- neurejeni izbori:
  - s ponavljanjem: $\binom{n+k-1}{k}$
  - brez ponavljanja: $n^{\underline{k}}$

neurejeni izbori s ponavljanjem: $\binom{n+k-1}{k}$

izberemo α_1 enk, α_2 dvojk, ... α_n n-jev

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = k$$

$$\underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{\alpha_2}, \dots \dots, \underbrace{n, \dots, n}_{\alpha_n}$$

To lahko zapišemo z 0 in 1

kot α_1 ničel, 1, α_2 ničel, ... 1, α_n ničel

Torej takole: 0001100101

št ničel je k št enk je $n-1$

iz $n-1+k$ mest izberemo k mest da bodo ničle $\Rightarrow$

št neurejenih izborov s ponavljanjem je $\binom{n+k-1}{k}$

Kaj je permutacija multimnožice?

Permutacija multiseta $\{1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \ldots, k^{\alpha_k}\}$ je urejeno zaporedje, ki vsebuje α_1 1, α_2 2, ..., α_k k jev

Multinomski koeficient: $\binom{n}{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} = \frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!}$

Multinomski izrek:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = n} \binom{n}{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}$$

Kompozicije n

(Zaporedje naravnih števil (brez 0), ki se seštejejo v n)

št kompozicij z k členi: $\binom{n-1}{k-1}$

št kompozicij z največ k členi: $\binom{n+k-1}{k-1}$

Razčlenitve n (particija)

(množica naravnih števil (brez 0), ki se seštejejo v n)

$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$$

$$\overline{p}_k(n) = \overline{p}_{k-1}(n-1) + \overline{p}_k(n-k)$$

$$p_k(n) = \overline{p}_k(n-k)$$

Stirlingova števila I. vrste $(c(n,k))$

(število permutacij množice $[n]$, ki jo zapišemo kot produkt k disjunktnih ciklov)

$$c(n,k) = c(n-1,k-1) + (n-1)\,c(n-1,k)$$

$$c(0,0) = 1 \qquad c(n,0) = 0$$

$n \backslash k$	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	0	1	0	0
2	0	1	1	0
3	0	2	3	1

Stirlingova števila II. vrste $(S(n,k))$

(število razdelitev n-množice v k nepraznih razredov)

$S(0,0) = 1 \quad S(n,0) = 0$

$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k\,S(n-1,k)$

n\k	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	0	1	0	0
2	0	1	1	0
3	0	1	3	1

Št. ekvivalenčnih relacij: $B(n) = \sum_{k}^{n} (n,k)$

Lahova števila ($L(n,k)$)

(št razdelitev n množice na k linearno urejenih kosov)

$L(0,0) = 1 \quad L(n,0) = 0$

$$L(n,k) = L(n-1,k-1) + (n+k-1)L(n-1,k)$$

$$L(n,k) = \binom{n-1}{k-1}\frac{n!}{k!}$$

Dvanajstera pot

(Dvanajstera pot je pot, ki nas vodi skozi odtenke resničnosti, kjer vsak korak ni zgolj napredek v prostoru, temveč tudi korak v globino duše. Je pot, ki prepleta materialno in duhovno, linearno in ciklično, kot nekakšen most med svetovi. Dvanajstera, številka, ki nosi v sebi moč dualnosti in celovitosti, nas vabi da se spustimo v notranje svetove in se hkrati ozremo na zunanjo stvarnost.

Na tej poti so koraki lahkotno obdani s skrivnostjo, saj vsaka izbira, vsak trenutek, odseva celovitost vsega, kar smo bili, kar smo in kar še bomo. Ni poti brez zavojev in vzponov, a vsak zavoj, vsak trenutek zmede, odpira vrata novih razsežnosti in razumevanja. In na tej poti ni iskanje cilja, temveč iskanje samega sebe v neskončnosti. Dvanajstera pot je hkrati tisto kar iščemo, in tisto kar nas vodi, da postanemo tisto, kar smo že od nekdaj bili.)

Dvanajstera pot

(Razporejanje n predmetov v k predalov. Glede na to ali ločimo predale in predmet, in če želimo da je razporeditev poljubna, injektivna ali surjektivna, dobimo 12 različnih možnosti)

predmeti / predali	poljubna	injektivna	surjektivna
DA / DA	k^n	$k^{\underline{n}}$	$k!\,S(n,k)$
DA / NE	$\sum\limits_{i \leq k} S(n,i)$	$\begin{cases} 1 & n \leq k \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$	$S(n,k)$
NE / DA	$\binom{k+n-1}{n}$	$\binom{k}{n}$	$\binom{n-1}{k-1}$
NE / NE	$\bar{p}_k(n)$	$\begin{cases} 1 & n \leq k \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$	$p_k(n)$

Načelo vključitev in izključitev

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{j}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

$$= |A_1| + \ldots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_{n-1} \cap A_n|$$
$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots$$

Dokaz: $\forall x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ prispeva natanko 1 k formuli:

$x \in A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} \cap \ldots \cap A_{\alpha_k}$ in v noben drugi A_i

Poglejmo si vsak $\sum_{I \in \binom{[n]}{j}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$

$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff I \subseteq \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} = \mathcal{A}$

Torej x se prešteje $\binom{k}{j}$ krat

Torej x preštejemo vse skupaj

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{j+1} =$$

$$= -\binom{k}{0}(-1)^1 + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \cdot 1^{k-j} =$$

$$= 1 + (1-1)^k = 1$$

Rekurzivne enačbe

* idk

Linearna rekurzivna enačba s konstantnimi koeficienti je rekurzivna enačba oblike $a_{n+1} = c \cdot a_n$ kjer je c konstanta

Naj bo zaporedje podano z
$a_0 = b_0$
$a_1 = b_1$ $\quad a_n - Aa_{n-1} - Ba_{n-2} = 0$

Naj bosta α in β ničli polinoma $x^2 - Ax - B$. Potem velja

$\alpha = \beta \Rightarrow (C_1 + C_2 n)\alpha^n = a_n$

$\alpha \neq \beta \Rightarrow C_1\alpha^n + C_2\beta^n = a_n$

Dokaz:

za $\alpha \neq \beta$

$a_0 = C_1 + C_2 = b_0$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta - \alpha \neq 0$

$a_1 = C_1\alpha + C_2\beta = b_1$

Torej C_1 in C_2 obstajata

$a_n = A(C_1\alpha^{n-1} + C_2\beta^{n-1}) + B(C_1\alpha^{n-2} + C_2\beta^{n-2}) =$

$\alpha^{n-2}C_1(\underbrace{A\alpha + B}_{\alpha^2}) + C_2\beta^{n-2}(\underbrace{A\beta + B}_{\beta^2}) =$

$C_1\alpha^n + C_2\beta^n$

za $\alpha = \beta$

$a_0 = C_1 = b_0$

$a_1 = (C_1 + C_2)\alpha = b_1 \rightarrow C_2 = \frac{b_1}{\alpha} - C_1$

za $\alpha \neq 0$

Če $\alpha = 0 \Rightarrow x^2 + Ax + B = x^2$

$\Rightarrow A = B = 0 \Rightarrow a_n = 0$ za $\forall n$

$(C_1 + C_2 n)0^n = 0 = a_n$ za $\forall n$ ✓

za $\alpha \neq 0 \Rightarrow$

$a_n = A(C_1 + C_2(n-1))\alpha^{n-1} + B(C_1 + C_2(n-2))\alpha^{n-2} = \quad :0$

$= \alpha^{n-2}C_1(\underbrace{A\alpha + B}_{\alpha^2}) + \alpha^{n-2}C_2(A(n-1)\alpha + B(n-2))$

$= C_1\alpha^n + C_2\alpha^{n-2}n(A\alpha + B) + C_2\alpha^{n-2}(\underbrace{-\alpha A - 2B}_{\alpha^2 + B})$

$= C_1\alpha^n + C_2\alpha^n n - C_2\alpha^{n-2}(\alpha^2 + B)$

$*$ id

$$a_{n+d} + c_{d-1} a_{n+d-1} + \dots + c_0 a_0 = 0$$

Rešitev je oblike

$$A_1(n)\lambda_1^n + \dots + A_k(n)\lambda_k = a_n$$

kjer so λ_i ničle polinoma

$$x^d + c_{d-1}x^{d-1} + \dots + c_0$$

stopnja ničle λ_i

in A_i polinom stopnje $st(\lambda_i) - 1$

Dokaz:

Določimo $Q(E) = E^d + c_{d-1}E^{d-1} + \dots c_0 I$

$(a_n)_n \in \ker Q(E) \iff Q(E)(a_n)_n = 0$

$\iff E^d (a_n)_n + c_{d-1} E^{d-1} (a_n)_n + \dots c_0 I (a_n)_n = 0$

$\iff (a_d, a_{d+1}, \dots) + c_{d-1}(a_{d-1}, a_d, \dots) + \dots + c_0(a_0, a_1, \dots) = 0$

$\iff a_{n+d} + c_{d-1} a_{n+d-1} + \dots + c_0 a_0 = 0 \ \forall n$

$\iff (a_n)_n$ reši enačbo

$$a_{n+d} + c_{d-1} a_{n+d-1} + \dots + c_0 a_0$$

$Q(x) = (E - \lambda_1 I)^{s_1} \dots (E - \lambda_k I)^{s_k}$

Vemo: $\ker Q(x) = \ker(E - \lambda_1 I)^{s_1} \oplus \dots \oplus \ker(E - \lambda_k I)^{s_k}$

$\ker(E - \lambda_i I)^{s_i}$

Formalna potenčna vrsta

(funkcijska vrsta oblike $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$

Rodovna funkcija

(funkcija, ki pripada formalni potenčni vrsti, da velja $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$)

1) Rešitev zapišemo z rekurzivno enačbo

2) Zapišemo rodovno funkcijo zaporedja s pomočjo rekurzivne zveze

3) Z algebro nad rodovnimi funkcijami rodovno funkcijo razvijemo v vrsto

4) Iz razvoja razberemo rešitev našega začetnega problema

Catalanova števila

zaporedje števil podana z rekurzivno formulo $C_0 = C_1 = 1$

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$$

- na koliko načinov lahko postavimo oklepaje med $n+1$ števili
- št dvojiških dreves s korenom na n vozliščih
- na koliko načinov se lahko $2n$ ljudi rokuje za okroglo mizo, brez da se kakšen par rok križa
- št poti od $(0,0)$ do $(2n,0)$ z uparabo korakov $\vec{g} = (1,1)$ in $\vec{d} = (-1,-1)$

Teorija grafov

Stopnja vozlišča grafa je število povezav ki jih tvori to vozlišče

$$\sum_{u \in V(G)} \deg(u) = 2|E(G)|$$

Dokaz:
Zapišemo matriko velikosti $|E(G)| \times |V(G)|$ kjer i-ti stolpec predstavlja povezavo $e_i = v_j v_k$ in ima ničle povsod razen na j-tem in k-tem mestu

$$\begin{array}{c c} & e_i \\ \begin{array}{c} \\ v_j \\ \\ v_k \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Število enk v k-ti vrstici je $\deg(v_k)$, torej število enk v matriki je $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$

V vsakem stolpcu sta dve enki, torej je št enk v matriki $2 \cdot |E(G)|$

Sledi: $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|$

Sprehod Zaporedje vozlišč $(v_1, \dots, v_k)$ tako da velja $v_i v_{i+1} \in E(G)$ za $\forall i \in [k]$

Sklenjen sprehod je sprehod $(v_1, \dots, v_k)$ kjer je $v_1 = v_k$

Pot je sprehod, kjer se nobeno vozlišče v zaporedju ne ponovi

Cikel je sklenjen sprehod s samimi različnimi vozlišči

Vsak graf, ki vseb sklenjen sprehod lihe dolžine vsebuje tudi cikel lihe dolžine

Dokaz:

Naj bo Q sprehod dolžine $2k+1$

$k=1 \Rightarrow Q$ ima tri vozlišča 

$\Rightarrow Q$ je cikel

Recimo da za $\forall n < k$ velja sklenjen sprehod dolžine $2n+1$ vsebuje lih cikel

Dve možnosti:

Q ne vsebuje podvojenih vozlišč
$\Rightarrow Q$ je cikel lihe dolžine

Q vsebuje podvojeno vozlišče $v_i = v_j$

Potem sta tudi $\underbrace{(v_1, \dots v_i, v_{j+1}, \dots v_k)}_{Q_1}$ in $\underbrace{(v_1, \dots, v_j)}_{Q_2}$ sklenjena sprehoda

in velja dolžina Q_1 + dolžina Q_2 = dolžina Q, Torej je vsaj en od Q_1 in Q_2 lih sklenjen sprehod.
Na njem uporabimo indukcijsko predpostavko in tako najdemo cikel lihe dolžine v grafu. ∎

Dvodelni graf

(graf je dvodelen, če obstaja razdelitev $V(G) = M \cup N$ da velja $uv \in E(G) \Rightarrow u \in M \land v \in N$)

Graf je dvodelen $\Leftrightarrow$ G ne vsebuje lihih ciklov.

Dokaz:

($\Rightarrow$) Recimo da G vsebuje lih cikel $(v_0, \ldots, v_k)$

Razdelimo vozlišča cikla v dve množici
$v_i \in M$ če je i sod in $v_i \in N$ če je i lih
$v_0 \in M \land v_k \in N$
$v_0 = v_k$ Torej M in N nista disjunktni

($\Leftarrow$) Naj bo G poljuben graf, ki nima lihih ciklov. BŠZS je G povezan
Vzamimo vozlišče $x \in V(G)$
Razdelimo vozlišča:
$d(x,v)$ je sodo $\Rightarrow v \in M$
$d(x,v)$ je liho $\Rightarrow v \in N$

očitno $M \cup N = V(G)$
Recimo da sta $u, v \in M$ povezana
Potem $d(x,u) = d(x,v)$
Torej lahko iz x do u pridemo po dveh različnih poteh in sicer
Q pot sode dolžine in P pot lihe dolžine ki gre čez v
Torej vsebuje graf lih povezan sprehod
$\Rightarrow$ graf vsebuje lih cikel $\times$
Za $u, v \in N$ naredimo podobno

$\blacksquare$

Homomorfizem grafov

(preslikava $f: V(G) \longrightarrow V(H)$ da velja

$$u \sim_G v \Longrightarrow f(u) \sim_H f(v) \quad)$$

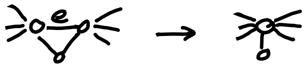
f je izomorfizem če velja
f bijekcija, f homomorfizem, f^{-1} homomoriz

Automorfizem je izomorfizem kjer sta
Domena in kodomena ista množica

$Aut(G)$ je množica $\{\varphi; \varphi$ je automorfizem $G\}$
in je grupa za kompozitum

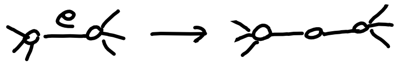
Minor grafa

(H je minor G, če lahko dobimo H s skrčitvijo nekaj povezav podgrafa G)

(skrčitev: 

)

Dva grafa G in H sta **homeomorfna**, če obstaja graf X da sta G in H subdiviziji grafa X

(subdivizija: 

)

Kartezični produkt $G \square H$ je graf z vozlišči $V(G) \times V(H)$ in povezavami:

$$(g,h) \sim (g',h') \Leftrightarrow (g=g' \wedge h \sim_H h') \vee (h=h' \wedge g \sim_G g')$$

Vozlišče u je **prerezno** če $\Omega(G-u) > \Omega(G)$ in povezava f je **prerezna** če $\Omega(G-f) > \Omega(G)$

Graf je **k-povezan** ko ima vsaj $k+1$ vozlišč in nima prerezov moči $< k$

Povezanost grafa $K(G)$ je največji k za katerega je G k-povezan

Whitney-ev izrek

Graf G je 2-povezan $\Leftrightarrow$ $\forall u,v \in V(G)$
$u \neq v$. $\exists$ dve notranje-disjunktni uv poti

Skica dokaza:

($\Rightarrow$) Dokaz z indukcijo *slb dokaz, ampak je skica

Recimo da za u,v ne bi obstajali dve notranje disjunktni poti. Potem bi imela eno skupno povezavo e
$G-e$ potem nima uv poti torej $G-e$ ni povezan, torej G ni 2-povezan $\times$

($\Leftarrow$)

Recimo da bi bil G 1-povezan, potem bi lahko odstranili povezavo e in dobili dve komponenti M in N
$u \in M$, $v \in N$. V G obstajata dve notranje disjunktni poti. Torej vsaj ena ne vsebuje povezave e. Potem ta pot povezuje u in v tudi v $G-e$ $\times$

Mengerjev izrek

Naj bo G graf in $A, B \subseteq V(G)$.

Potem je najmanjše število točk, ki ločijo množici A in B enako največjemu številu (A,B)-poti v G

Gozd je graf brez ciklov

Drevo je povezan gozd

G Drevo $\Leftrightarrow$ G povezan $\wedge$ $E(G) = V(G) - 1$

G drevo $\Leftrightarrow$ G povezan $\wedge$ $\forall e \in E(G)$ je most

G drevo $\Leftrightarrow$ G povezan $\wedge$ $\forall$ pot je enolična

Vpeto drevo

(vpet podgraf, ki je drevo)

G vsebuje vpeto drevo $\Rightarrow$ G je povezan

$$\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G/e)$$

Laplaceva matrika

je $|V(G)| \times |V(G)|$ matrika $[L_{ij}]$

$$L_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & ; i=j \\ -\text{št povezav med } v_i \text{ in } v_j & ; i \neq j \end{cases}$$

Kirchoffov izrek:

$\tau(G) =$ determinanta matrike, ki jo dobimo tako da izbrišemo vrstico in stolpec nekega vozlišča

Eulerjev graf

(Graf, ki premore sklenjen eulerjev sprehod)

G je eulerjev $\Longleftrightarrow$ G je povezan $\land$ vsa vozlišča so sode stopnje

Dokaz

($\Rightarrow$) povezanost: očitno

sodost stopenj:

Opazujemo eulerjev sprehod $(v_1, \dots, v_k)$ za vsako pojavitev v_i v zaporedju sta dve povezavi: $v_i v_{i+1}$ in $v_{i-1} v_i$ ker se povezave ne ponavljajo jih je soda

($\Leftarrow$) indukcija na številu povezav

za $|E(G)| = 0$ je pogoj izpolnjen

Naj bo G poljuben graf s sodimi vozlišči ker nima listov ni drevo, torej vsebuje cikel C. Naj bo $H = G - E(C)$ v H so vsa vozlišča sode stopnje, ker smo odstranili od vsakega vozlišča 2 ali pa 0 povezav. Potem je H eulerjev

obstaja eulerjev cikel $v_1, \dots, v_k$, kjer $v_1 = v_k \in V(C)$

Potem je v G eulerjev cikel

$v_1 \dots v_k u_1 \dots u_n$ kjer so $u_1, \dots u_n \in V(C)$

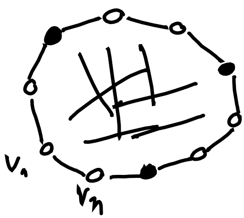
$\blacksquare$

Hamiltonov graf

(Graf, ki premore hamiltonov cikel)

G Hamiltonov $\wedge$ $S \subseteq V(G) \Rightarrow \Omega(G-S) \leq |S|$

Skica dokaza:



• - množica S

$v_1 \dots v_n, v_1$ hamiltonov cikel

$v_{\alpha_1}, \dots, v_{\alpha_k} \in S \quad \alpha_1 < \alpha_2 \dots < \alpha_k$

V $G-S$ so med za vsa vozlišča z indeksi med α_i in α_{i+1} del iste komponente za $\forall i$

Torej največ možnih komponent je $|S|$

Ravninski graf

(graf, ki ga lahko narišemo v ravnini tako, da se povezave ne križajo

Lica vložitve so sklenjena domočja omejena s ciklom

$$\sum_{F \in F(G)} \ell(F) = 2|E(G)|$$

$$|E(G)| \leq \frac{g(G)}{g(G)-2}(|V(G)|-2)$$

Eulerjeva formula za ravninske grafe

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 1 + \Omega(G)$$

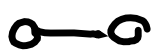
Dokaz

Najprej za povezane grafe

Torej dokazujemo

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$$

$n = |V(G)|$ $m = |E(G)|$ $f = |F(G)|$

$m = 1 \Rightarrow$  $2 - 1 + 1 = 2$ ✓

$m \rightsquigarrow m+1$:

Recimo da je G drevo $\Rightarrow$

$$n - (n-1) + 1 = 2$$ ✓

Če ima G vsaj en cikel. Vzemimo cikel C, ki omejuje lice in $e \in C$ povezavo ki je v ciklu. $H-e$ je tudi vložen v ravnino in povezan, torej velja

$$\underset{n}{\underset{\parallel}{|V(H)|}} - \underset{m-1}{\underset{\parallel}{|E(H)|}} + \underset{f-1}{\underset{\parallel}{|F(H)|}} = 2$$

Torej $n - m + 1 + f - 1 = 2$ $\blacksquare$

Kromatično število $\chi(G)$

Najmanjše število barv za katerega obstaja dobro barvanje grafa G

Požrešni algoritem

1) Razvrstimo graf G v nek poljuben vrstni red

2) Barvamo vozlišča po vrsti tako da je vozliše pobarvana z najmanjšo barvo, s katero sosedi vozlišča niso pobarvani.

$$\chi(G) \leq \max_{i \in [V(G)]} \{ \min \{ \deg(v_i), i-1 \} + 1$$

Ker ko barvama s požrešno metodo po vrsti $v_1, \dots, v_n$

na item koraku so v_j ; $j < i$ že pobarvani

Torej barva od v je $\leq i$

Prav tako je barva $\leq \deg(v_i) + 1$

Torej barva od $v_i \leq \min\{\deg(v), i-1\} + 1$

Torej je $\chi(G) \leq \max_{i \in [V(G)]} \{ \min\{\deg(v_i), i-1\}\} + 1$

Kromatični ideks $\chi'(G)$

(Najmanjše število barv s katerim lahko dobro pobarvamo povezave v grafu)

Vizingov izrek

$$\chi'(G) \in \{\Delta(G), \Delta(G)+1\}$$

Vse grafe potem lahko razdelimo na

razred I - če $\chi'(G) = \Delta(G)$ in

razred II - če $\chi'(G) = \Delta(G)+1$