Rodovne funkcije

$$a_n \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

- $\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n$
- $\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)' = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$
- $(A(x)\cdot B(x))' = A'(x)B(x) + A(x)\cdot B'(x)$
- Eksponentna rodovna funkcija: $E(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$
- Trditev: $A(x)$ je obrnljiva $\Leftrightarrow a_0 \neq 0$

Catalanova števila .... na koliko načinov lahko postavimo oklepaje med n števil:

$a_0 = 0$

$a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 2 \quad a_4 = 5$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} a_n \cdot a_{n-k} \quad \text{za } n \geq 2$$

$$G(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0 + x + \sum_{n \geq 2} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} x^n$$

$$= x + \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} x^n = x + G^2(x)$$

$$G^2(x) - G(x) + x = 0$$

$$D = 1 - 4x \qquad G(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$$

Vstavimo: $x = 0$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$G(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - (1-4x)^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{n \geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4)^n x^n\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{2} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4)^n \underset{a_n = C_{n-1}}{\rightsquigarrow} C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

$C_0 = C_1 = 1 \qquad C_2 = 2 \qquad C_3 = 5$

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$$

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Grafi

$V(G)$ .... vozlišča

$E(G)$ ..... povezave

(r-) regularen graf ... vsa vozlišča imajo isto stopnjo (r)

$N_G(u)$ .... soseščina u. $(\{v \in V(G);\ uv \in E(G)\})$

$\deg_G(u)$ .... stopnja u $(|N_G(u)|)$

H je podgraf če $V(H) \subseteq V(G) \wedge E(H) \subseteq E(G)$

H je vpet če $V(H) = V(G)$

H je porojen ali induciran če velja

$\forall u,v \in V(H).\ u \sim_G v \Rightarrow u \sim_H v$

Sprehod ... zaporedje povezanih vozlišč

enostaven sprehod ... različne povezave

Pot .... različna vozlišča

cikel .... sklenjen sprehod z različnimi vozlišči

G je povezan .... $\forall u,v\ \exists\ u,v$-pot

$\Omega(G)$ .... št. komponent grafa

ekscentričnost $(ecc_G(u))$ vozlišča u

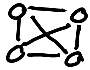
$= \max\limits_{v \in V(G)} d_G(u,v) = \max\{d(u,v); v \in G\}$

premer $(diam(G)) = \max\limits_{u \in V} ecc(u)$

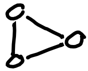
$\delta(G)$ .... minimalna stopnja

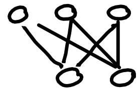
u,v poti P in Q sta notranji-disjunktni, če je $V(P) \cap V(Q) = \{u,v\}$

Družine grafov

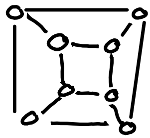
K_n .... polni graf 

P_n ...., pot 

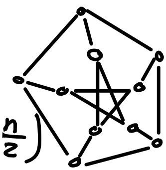
C_n .... cikel 



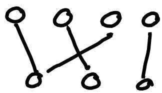
$K_{n,m}$ .... polni dvodelni graf

Q_n .... n-kocka  (Q_3)

$P_{n,k}$ ...... posplošeni
petersonovi graf $(k \leq \frac{n}{2})$



$P_{5\,2}$

dvodelen graf 

- Lema o rokovanju: $\sum_{u \in V(G)} \deg(u) = 2|E(G)|$ ✓
- Posledica: št. vozlišč lihe stopnje je vedno sodo

- ($\exists$ u,v-sprehod) $\Rightarrow$ $\exists$ u,v-pot
- ($\exists$ dve različni u,v-poti) $\Rightarrow$ $\exists$ cikel
- ($\exists$ sklenjen sprehod lihe dolžine) $\Rightarrow$ $\exists$ cikel lihe dolžine

- Graf je dvodelen $\Leftrightarrow$ ne vsebuje lihih ciklov

- Graf je 2-povezan $\Leftrightarrow$ $\forall u,v \in V(G).\ \exists P,Q$ notranje disjunktni u,v-poti

$f: V(G) \to V(H)$ je homomorfizem če velja

$$uv \in E(G) \Rightarrow f(u)f(v) \in E(H)$$

Injektivni homomorfizem je vložitev

Vložitev je izometrična če velja

$$\forall u,v \in V(G).\ d_G(u,v) = d_H(u,v)$$

f je izomorfizem če velja

1.) f je bijekcija

2.) f je homomorfizem

3.) f^{-1} je homomorfizem

$(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ je grupa

- $\mathrm{Aut}(K_n) \cong \mathrm{Sym}([n])$
- $\mathrm{Aut}(P_n) \cong \mathbb{Z}_2$
- $\mathrm{Aut}(C_n) \cong D_{2n}$

- G dvodelen $\Rightarrow \exists f$ homomorfizem. $f: G \to K_2$

- f je izomorfizem $\Leftrightarrow$ f bijekcija,

  $uv \in E(G) \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E(H)$

Operacije z grafi

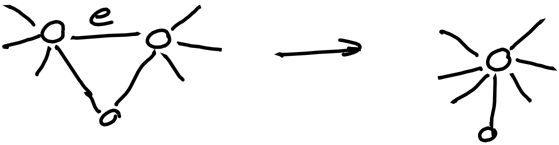
$v \in V(G)$: $G - v$ .... graf brez vozlišča

$e \in E(G)$: $G - e$ .... graf brez povezave

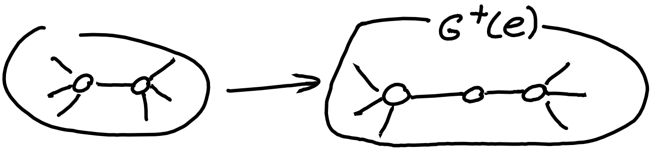
$X \subseteq V(G)$: $G - X$ .... graf brez vozlišč iz X

$F \subseteq E(G)$: $G - F$ .... graf brez povezav iz F

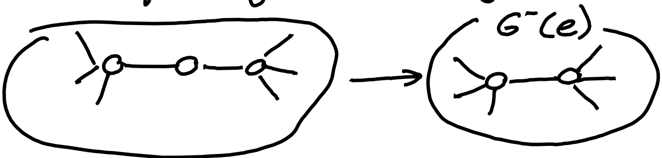
$e \in E(G)$: $G \setminus e$ .... skrčitev grafa



subdivizija .... zamenjava povezave s potjo dolžine 2



glajenje vozlišča stopnje 2 (obratna operacija subdivizije)



H je minor grafa G, če ga lahko dobimo s skrčitvijo nekaj povezav

- H je minor $\Leftrightarrow$ lahko ga dobimo z zaporedjem operacij
    1.) odstrani vozlišče
    2.) odstrani povezavo
    3.) skrči povezavo

  v poljubnem vrstnem redu

H je subdivizija če ga lahko dobimo z zaporedjem subdivizij povezav

- ($\exists X$ graf. G in H sta subdiviziji X) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ G in H sta homeomorfna

Kartezični produkt $G \square H$

$V(G \square H) = V(G) \times V(H)$

$(g,h) \sim_{G \square H} (g',h') \iff (g = g' \wedge h \sim_H h')$
$\vee (h = h' \wedge g \sim_G g')$

$G^{n,\square} = G \square \dots \square G$

Vozlišče grafa je prerezno če

$\Omega(G-u) > \Omega(G)$

Povezava je prerezna al. most, če je
$\Omega(G-f) > \Omega(G)$

Množica S je prerez če $\Omega(G-S) > \Omega(G)$
(Velja za vozlišča in povezave)

Graf je K-povezan, če ima vsaj $k+1$ vozlišč in nima prerezov moči $< k$

Povezanost grafa $(K(G))$ je največji k za katerega je G k-povezan

$(K(G) \leq \delta(G))$

Drevesa

Gozd ... graf brez ciklov
Drevo .... povezan gozd
List ..... vozlišče stopnje 1

Vpeto drevo .... vpet graf, ki je drevo

$\tau(G)$ .... št vpetih dreves grafa G

$$\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G \setminus e)$$

Tu ne odstranimo dvojnih povezav

- T drevo ima vsaj dva vozlišča $\Rightarrow$
  T ima vsaj dva lista
- T drevo : $|E(T)| = |V(T)| - 1$
- G povezan, $e \in E(G)$ leži na nekem ciklu
  $\Rightarrow$ $G-e$ je povezan graf
- G je povezan. $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$
- Graf je povezan $\Leftrightarrow$ vsebuje vpeto drevo
- $\forall \tau$ drevo na $k-1$ vozliščih.
  $\forall G.\ \delta(G) \geq k-1 \Rightarrow G$ vsebuje podgraf
  izomorfen τ

Laplaceva matrika

$$L(G)_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & i=j \\ -\text{št povezav med } v_i\, v_j \end{cases}$$

$\tau(G)$ ... det matrike, ki jo dobimo tako da $L(G)$ odstranimo vrstico in stolpec nekega vozlišča

$\tau(K_n) = n^{n-2}$

Eulerjevi in hamiltonovi grafi

Sprehod je eulerjev če je enostaven in prehodi vse povezave

Graf je eulerjev, če premore sklenjen eulerjev sprehod

Hamiltonov cikelj je cikel, ki vsebuje vsa vozlišča grafa

Hamiltonova pot je pot, ki vsebuje vsa ogljišča

Graf je Hamiltonov, če premore hamiltonov cikel

- G je Eulerjev $\Leftrightarrow$ je povezan in vsa vozlišča so soda
- Povezan graf premore eulerjev sprehod $\Leftrightarrow$ ima kvečjemu dve vozlišči lihe stopnje

- G Hamiltonov, $X \subseteq V(G) \Rightarrow \Omega(G-X) \leq |X|$
- G povezan $\wedge$ ($\forall$ par nesosednjih vozlišč. $\deg(u)+\deg(v) \geq V(G)$) $\Rightarrow$ G je hamiltonov
- $|V(G)| \geq 3$, $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|-1}{2} \Rightarrow G$ ima Hamiltonovo pot
- G povezan; $uv \notin E(G)$. $\deg(u)+\deg(v) \geq |V(G)|$ $\Rightarrow$ G je hamiltonov
- $|V(G)| \geq 3$, $\delta(G) \geq \frac{n}{2} \Rightarrow G$ ima Hamiltonovo pot

Ravninski grafi

Graf je ravninski, če ga lahko narišemo v ravnini tako, da se povezave ne križajo

Ravninski graf je skupaj z ustrezno risbo v ravnini vložen v ravnino

Lica vložitve so sklenjena območja omejena s ciklom

$F(G)$.... množica lic

Dolžina lica F ($\ell(F)$)... št povezav, ki mejijo na lice F

Ožina ($g(G)$) je dolžina najkrajšega cikla v G

Eulerjeve formule:

$n = |V(G)|$ $m = |E(G)|$ f... št lic

$n - m + f = 2$

G ravninski: $m \leq 3n - 6$

g ožina G: $m \leq \frac{g}{g-2}(n-2$

G dvodelen: $m \leq 2n - 4$

Leme o rokovanju:

$2m = \sum_{v \in V} \deg v = \sum_{i \geq 1} i \cdot n_i$ — št vozlišč stopnje i

$= \sum_{i \geq 3} i \cdot f_i$ — št. lic dolžine i veja za grafe vložene v ravnino

- $$\sum_{F \in F(G)} \ell(F) = 2|E(G)|$$

- Enostavna sklenjena krivulja razdeli ravnino na dva dela: notranjost in zunanjost krivulje (in rob)

- Če ima G vsaj en cikel in je vložen v ravnino
$$|E(G)| \geq \frac{g(G)}{2} \cdot |F(G)|$$

- $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 1 + \Omega(G)$

- G povezan: $|E(G)| \leq \frac{g(G)}{g(G)-2}(|V(G)|-2)$

- G povezan: $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$

- G povezan in nima trikotnikov:
$$|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$$

- G je ravninski $\Leftrightarrow$ ne vsebuje podgrafa, ki je subdivizija K_5 ali $K_{3,3}$

- G je ravninski $\Leftrightarrow$ $K_5 \vee K_{3,3}$ nista njegova minorja

Iz vaj:

Motzkinovo število..., št načino da na kroglo narišemo tetive med danimi točkami, da nimajo skupne točke

$M_0=1 \quad M_1=1 \quad M_2=2 \quad M_3=3$

$$M_{n+1}=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\cdot M_{n-k-1}+M_n =$$

$$\sum_{n\geq 0} M_{n+1}X^{n+1} = \sum_{n\geq 1}\sum_{k=0}^{n-1} M_k\cdot M_{n-k-1}\cdot X^{n+1} + \sum_{n\geq 0} M_n X^{n+1}$$

$$M(x)-M_0 = X\cdot M(x) + \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} M_k\cdot M_{n-k}\cdot X^{n+2} =$$

$$M(x)-M_0 = xM(x) + x^2 M^2(x)$$

$$x^2M^2(x)+M(x)(x-1)+M_0$$

$$D=(x-1)^2-4x^2 = x^2-2x+1-4x^2=$$

$$=-3x^2-2x+1$$

$$M(x)=\frac{1-x\pm\sqrt{-3x^2-2x+1}}{2x^2}$$

$$M(0)=\frac{1\pm\sqrt{1}}{2\cdot 0} \Rightarrow .$$

$$M(x)=\frac{1-x-(-3x^2-2x+1)^{\frac{1}{2}}}{2x^2}$$

- $|V| \geq 2 \Rightarrow$ G vsebuje vsaj dve vozlišči, ki imata isto stopnjo

- $n \geq 2$, $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ je grafovsko $\Leftrightarrow$ $d_2-1, d_3-1, \ldots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$ grafovsko

- $k \cdot l \equiv \pm 1 \bmod n \Leftrightarrow P_{n,k} \cong P_{n,l}$

- G povezan ravninski graf $\Rightarrow \Delta(G) \leq 5$