4.3

Začetek predavanj

$X \cong Y$

Trditev $X/_{\sim_X} \cong Y/_{\sim_Y}$ [$\sim_Y$ in $\sim_X$ sta

vskladjeni: $(y_1 \sim y_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) \sim f^{-1}(y_2))$)

Dokaz

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_X"] & Y \arrow[d, "q_Y"] \\ X/_{\sim_X} \arrow[r, dashed, "F"'] & Y/_{\sim_Y} \end{tikzcd}$$

homeomorfizem je kvocientna preslikava

$q_Y \circ f$ kvocientna

Po definiciji: f slika ekv razrede v X v ekv. razrede v Y

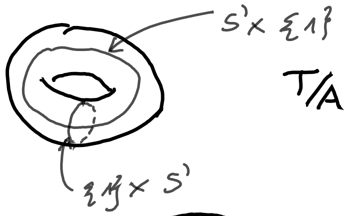
Torej $q_Y \circ f$ naredi iste identifikacije kot q_X

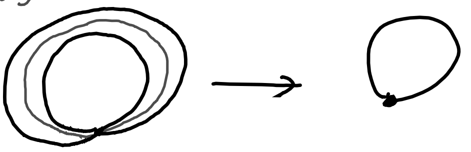
$\Rightarrow q_Y \circ f$ inducira homeomorfizem $F: X/_{\sim_X} \to Y/_{\sim_Y}$

Primer:

Naj bo $1 \in S^1 \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}^2$

$A = S^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times S^1 \subseteq S^1 \times S^1 = T$ torus





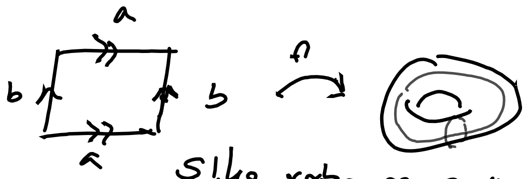
Najbrž je kvocient S^2

Ideja: torus prerežemo vzdolž A, da dobimo kvadrat z identifikacijami na robu

$X = \overset{I}{[0,1]} \times [0,1]$

$f: X \to S_1 \times S_1$

$f(x,y) = (\underbrace{\cos 2\pi x, \sin 2\pi x}_{e^{i2\pi x}}, \underbrace{\cos 2\pi y, \sin 2\pi y}_{e^{i2\pi y}})$



slika roba je ravno A

$B := f^{-1}(A) = \partial I^2 \ldots$ rob kvadrata

če nadeljujemo tako da A stisnemo v točko to ustreza identifikacijam na kvadratu, ki celotni rob stisnejo v točko

$I^2 \xrightarrow{p} I^2/B$ kvocientna projekcija

vemo da

$$\begin{tikzcd}
\boxed{I^2} \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "p"] & B^2 \arrow[d, "q"] \\
I^2/B \arrow[r, phantom, "\cong"] & B^2/S^1 \cong S^2
\end{tikzcd}$$

$B = \partial I^2$ $\qquad$ $S^1 = \partial B^2$

$\Rightarrow \quad S^2 \cong T/A$

Deljivost topoloških lastnosti

Def: topološka lastnost $\mathcal{L}$ je deljiva, če za $\forall X \in \mathcal{L}$. $\forall \sim$ ekv. rel. $X/_{\sim} \in \mathcal{L}$

Ekvivalentno: $\mathcal{L}$ je deljiva, če se ohranja pri kvocientnih preslikavah

Trditev:

1) Deljive so naslednje lastnosti

- kompaktnost, povezanost (s potmi), lokalna povezanost (s potmi), separabilnost, diskretnost, trivialnost

2) Nedeljive so:

- lokalna kompaktnost, 1- in 2- števnost, separacijske lastnosti, metričnost, popolna nepovezanost

Dokaz:

kmp., pov. in sep. se ohranja z zveznostjo

lokalna povezanost s potmi

lok povezan $\Leftrightarrow$ komponente vsake odprte množice so odprte

$X, \sim \quad V^{odp} \subseteq X/_\sim$

$V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ $\quad V_\lambda$ so komponente za povezanost

V_λ so odprte

$q : X \to X/_\sim$ kvoc cato

$q^{-1}(V) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} q^{-1}(V_\lambda)$ je odprta v X

po predpostavki je X lok. pov. ~~A~~ zato so ~~D~~ komponente $q^{-1}(V)$ odprte v X

Naj bo W poljubna komponenta $q^{-1}(V)$

Ker je V povezana in q zvezna $\Rightarrow$

$q(W)$ je $\subseteq V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$

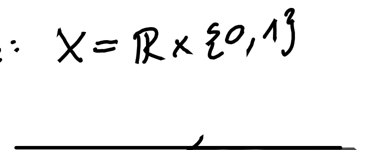
Torej $q_*(W) \subseteq V_\lambda$ za nek $\lambda \in \Lambda$

$\Rightarrow W \subseteq q^*(V_\lambda)$

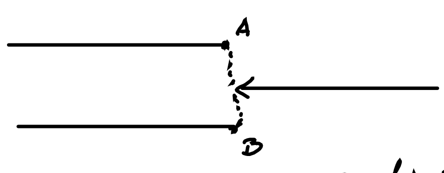
$\Rightarrow q^*(V_\lambda)$ je unija komponent za povezanost $\Rightarrow q^*(V_\lambda)$ je odprta $\Leftrightarrow V_\lambda$ so odprte

2) separacijske lastnosti:

T_2: $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$



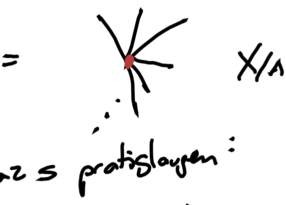
Relacija $\sim$ $(x, 0) \sim (x, 1)\ \forall x > 0$



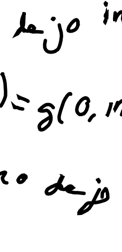
A in B nimata več disjunktnih okolic

1-števnost

$X = [0,1] \times \mathbb{N} \quad A = \{0\} \times \mathbb{N}$



$X/_A =$



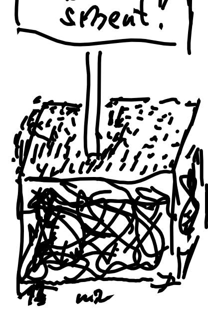
X/A ni enaštevan

Dokaz s protislovjem:

Recimo da jo ima

$a = q(A) = q(0, n),\ n \in \mathbb{N}$

Recimo da jo



$\forall$ h.s okolji ...