Uvod

Cilj topologije: Razumeti prostore in preslikave med njimi

preslikava .... zvezna funkcija

prostori: osnovni interes so metrični prostori

Različne konstrukcije dajo prostore, ki niso nujno metrični ali pa ni takoj jasno da so metrični.
Zato si pomagamo s topološkimi lastnosti

Konstrukcije prostorov:

- podprostor
- vsota oz disjunktna unija
- produkt $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} ; x_\lambda \in X_\lambda\}$

$\mathcal{B} = \{U \times V : U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$

Pride iz tega da so projekcije zvezne

$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ opremimo s najšibkejšo topologijo, da so projekcije zvezne

$$p_\mu : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \longrightarrow X_\mu \qquad \mu \in \Lambda$$

podbazo sestavljajo $p_\mu^*(U_\mu)$ odp te

$$p_\mu^*(U_\mu) = U_\mu \times \prod_{\lambda\neq\mu} X_\lambda$$

Bazne množice so $U_{\mu_1} \times U_{\mu_2} \times \dots \times U_{\mu_k} \times \prod_{\lambda\neq\mu_1,\dots,\mu_k} X_\lambda$

- kompaktifikacija z 1 točko
- slike prostora pri zvezni preslikavi
- Slike prostora pri zvezni preslikavi

$f: X \to Y \qquad f_*(X)$ dobi topologijo iz Y

$$f^*(\{y\}) \subseteq X$$

$\{f^*(\{y\}) ; y \in Y\}$ razdelitev množice X

To torej določa ekvivalenčno relacijo in vsaka ekvivalenčna relacija določa tako razdelitev

1. Kvocientni prostori

1.1 Kvocientna topologija

Def: X množica in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X. Za poljuben $x \in X$ označimo $[x] = \{y \in X;\ x \sim y\}$ <u>ekvivalenčni razred</u>, ki pripada x.

<u>Kvocientna množica</u> množica X po $\sim$ je množica vseh ekvivalenčnih razredov

$$X/_{\sim} := \{[x];\ x \in X\}$$

<u>Kvocientna projekcija</u> $q: X \longrightarrow X/_{\sim}$

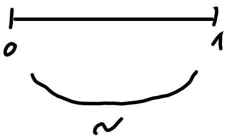
$q: x \longmapsto [x]$

Primer: $X=[0,1]$

$\sim$ ekvivalenčna relacija določena z

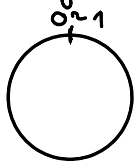
$0\sim 1$ $\quad (1\sim 0;\ x\sim x\ \forall x\in X)$

Kako si lahko predstavljamo $X/\sim$



Naraven model $X/\sim$ je $[0,1)$

Druga možnost je



Opomba: 1) pri opisu ekvivalenčne relacije bomo običajno navedli le netrivialne relacije, ki generirajo ekvivalenčno relacijo ob upoštevanju lastnosti ekv. relacije.

2) ekvivalenčna relacija $\sim$ določa razdelitev X na ekvivalenčne razrede. To razdelitev označimo z $\mathcal{R}=\{[x]\mid x\in X\}\subseteq \mathcal{P}(X)$. Kvocientno množico lahko označimo $X/\sim \,= X/\mathcal{R}$

3) Če $\sim$ določa le en netrivialen ekvivalenčni razred $A\subseteq X$; A ni enojec potem kvocientno množico označimo z X/A

Če je X topološki prostor in želimo $X/\sim$ opremiti s topologijo tako da bo ta odražala lastnosti prostora X. Posebej želimo da je $q: X \to X/\sim$ zvezna

Ta pogoj topologije na $X/\sim$ ne določa enolično.
Če neka topologija na $X/\sim$ temu ustreza, potem ustreza tudi vsaka šibkejša. Zato je smiselno $X/\sim$ opremiti z najmočnejšo topologijo pri kateri je q zvezna.

Torej za odprte v $X/\sim$ vzamemo vse, ki imajo odprte praslike v X

Def: X topološki prostor, $\sim$ ekv. relacija, $\mathcal{T}$ topologija na X. Potem je

<u>kvocientna topologija</u> na $X/\sim$

$$\mathcal{T}_\sim = \{ V \subseteq X/\sim \,;\, q^*(V) \in \mathcal{T} \}$$

Opomba: v kvocientni topologiji velja torej $V \overset{odp}{\subseteq} X/\sim \Leftrightarrow q^*(V) \overset{odp}{\subseteq} X$

$\Rightarrow$ zveznost

$\Leftarrow$ največjost $\mathcal{T}_\sim$

Z zaprta $\Leftrightarrow$ $q^*(Z)$ zaprta

Ali je torej g odprta iz zaprta?

Ne nujno:

Primer:

1) $X=[0,1]$ $\mathcal{R}=\{[0,1),\{1\}\}$

$$X/_{\sim}=\{[0],[1]\}$$

$$\tau_{\sim}=\{\emptyset, X/_{\sim}, [0]\}$$

$$g^*(\{[0]\})=[0,1)$$ odprt v X, ni zaprt v X

$\{[0]\}$ ni zaprt, je odprt

$$g^*(\{1\})=\{1\}$$ zaprta, ni odprta

Ali je g zaprta? Ne

$$g_*(\{0\})=[0]$$

zaprta ni zaprta

2) $X = [0,2]$ $[1,2]$ edini pravi dw. razred

$$X/_{[1,2]} \simeq [0,1]$$

$g : X \longrightarrow X/_{[1,2]}$ ni odprta

$$g_*(1,2) = [1]$$

$g^*([1]) = [1,2]$ ni odprt v X

3) $X = [0,1]$ $A = X \cap \mathbb{Q}$ $B = X - \mathbb{Q}$

$$X/_{\{A,B\}} = \{[0], [\tfrac{\sqrt{2}}{2}]\}$$

$$\tau = \{\emptyset, X_{\{A,B\}}\}$$

Def: X množica, $\sim$ ekv. relacija

za $A \subseteq X$ je njeno <u>nasičenje</u> enako

$g^*(g_*(A))$ ... unija vseh ekvivalenčnih razredov, ki sekajo A

Trditev: Za $A \subseteq X$ velja da je

$g_*(A)$ odprta $\Longleftrightarrow$ nasičenje $g^*(g_*(A))$ odprto

Podobno za zaprte.

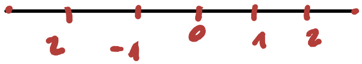
g je odprta, če je nasičenje vsake množice odprto in zaprta če je nasičenje vsake množice zaprta

Cilj:

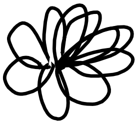
X topološki prostor $\sim$ ekv. relacija
če je to mogoče želimo poiskati
nek geometrični model za Y in
kvocient $X/\sim$ in pokazati da je
$X/\sim \;\cong Y$

Primer:

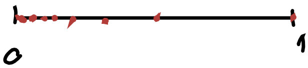
$X = \mathbb{R}$ $A = \mathbb{Z}$

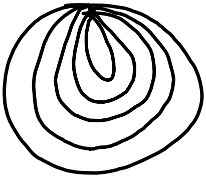


$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = ?$



2) $X = [0,1]$ $A = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$





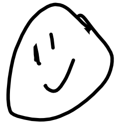
v 2) je X kompakten. Po definiciji je g zvezna, zato je $X/\sim$ tudi kompaktna
v 1) X ni kompakten zato ne vemo ali je kvocient kompakten

1) ni mogoče vložiti v evklidski prostor

1.2 Kvocientne preslikave

Cilj: razumeti preslikave iz kvocientov

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f = g \circ q"] \arrow[dr, "q"'] & & Y \\
& X/\sim \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$



če je $x \sim y$ v $X \Rightarrow$

$$\begin{array}{ccc} q(x) & = & q(y) \\ \| & & \| \\ [x] & = & [y] \end{array}$$

in zato je

$$\begin{array}{ccc} g(q(x)) & = & g(q(y)) \\ \| & & \| \\ f(x) & & f(y) \end{array}$$

Torej je f konstantna na ekvivalenčnih razredih, t.j. ekvivalentne točke slika v iste

Želimo obratno: za preslikavo $f: X \to Y$

iskati pogoje da dobimo preslikavo $X/\sim \to Y$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "2"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

da diagram komutira

če naj diagram komutira mora biti f konstantna na ekvivalenčnih razredih

$\forall x, y \Rightarrow f(x) = f(y)$

$\bar{f}([x]) := f(x)$

$\bar{f}$ ... preslikava inducirana s f

Trditev:

Naj bo X topološki prostor, $\sim$ ekv. relacija

$f: X \to Y$ zvezna preslikava, ki je konstantna

na ekv. razredih. Potem f dobro definira

preslikavo $\bar{f}: X/_\sim \to Y$ za katero velja

$\bar{f} \circ q = f$. Poleg tega velja

1) f je zvezna $\Rightarrow$ $\bar{f}$ zvezna

2) če je f surjektivna $\Rightarrow$ $\bar{f}$ surjektivna

3) če za $\forall\, x \not\sim y$. $f(x) \neq f(y) \Rightarrow \bar{f}$ injektivna

(tj. f loči ekvivalenčne razrede

Dokaz: (2) in (3) jasno

1) Naj bo f zvezna. Dokazujemo zveznost $\bar{f}$

Izberemo poljuben $V \in \tau_Y$

Ali je $\bar{f}^*(V)$ odp v $X/_\sim$

$$\bar{f}^*(V) \text{ odp} \Leftrightarrow \underbrace{q^*(\bar{f}^*(V))}_{(\bar{f} \circ q)^*(V) = f^*(V)} \text{ odp v } X$$

Ker je V odprta v Y in $f: X \to Y$ zvezna

je $f^*(V)$ odprta v X

Zanima nas kdaj bo $\bar{f}$ homeomorfizem

(zvezna, bijektivna, zvezen inverz)
(bijektivna f, bijektivna f_*)

$\bar{f}$ je homeomorfizem $\Leftrightarrow$ $\bar{f}$ bijekcija in porodi bijekcija med topologijama

$\Leftrightarrow$ $\bar{f}$ je bijekcija in $\forall V \subseteq Y, (V^{odp} \Leftrightarrow \bar{f}^*(V)^{odp})$

$\Updownarrow$

$(V^{odp} \subseteq Y \Leftrightarrow q^*(\bar{f}^*(V))^{odp})$

$\quad \parallel$

$\quad f^*(V)$

karakterizacija kvocientnosti

Naj bosta X in Y topološka prostora

$f: X \Rightarrow Y$

f surjektivna in $\forall V \subseteq Y. (V^{odp} \Leftrightarrow f^*(V)\ odp)$

$\Rightarrow$ f imenujemo <u>kvocientna preslikava</u>

Opombe:

1) Po definiciji: kvocientne topologije je kvocientna projekcija kvocientna preslikava

Obratno: Vsako kvocientno preslikavo $f: X \Rightarrow Y$ lahko obravnavamo kot kvocientno projekcijo pri ekvivalenčni relaciji, določeni z razbitjem X na praslike točk

2) Kvocientna preslikava je vedno zvezna ($\Rightarrow$) in ni nujno odprta niti zaprta (ker že vemo za kvoc. proj)

3) implikacija ($\Leftarrow$) v definiciji kvocientne preslikave je posebna lastnost, tej včasih rečemo kvocient v ožjem smislu

Za zveznost f za njena enoličnost ~~pot~~ potrebno preveriti le pogoj

4) Surjektivna f je kvocientna $\Leftrightarrow$ $(\forall Z \subseteq Y: Z^{zap} \Leftrightarrow f^*(Z)\ zap)$

Lema: Naj bo $f: X \to Y$ zvezna in surjektivna. Če je f odprta ali zaprta je kvocientna

Dokaz:

Preveriti je treba kvocientnost v ožjem smislu

>w<

Recimo da je f zaprta

Izberimo poljubno $Z \subseteq Y$ za katero je $f^*(Z)$ zaprta v X

$Z^{zap} \subseteq Y$

- - - - - - -

$f^*(Z)$ zaprta v X in f zaprta

Torej $f_*(f^*(Z)) \underset{\uparrow}{=} Z$ zaprta

surjektivnost

Izrek: (o prepoznavi kvociента)

X, Y: top. prostor $\sim$ ekv relacija na X

Naj bo $f: X \to Y$ kvocientna preslikava,

ki naredi enake identifikacije kot $\sim$

(tj f je konstantna na ekv. razredih in jih loči)

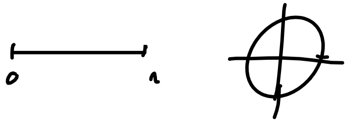
Potem je inducirana preslikava $\bar{f}: X/_\sim \to Y$

homeomorfizem

Primer: $X = [0,1]$ $\quad 0 \sim 1$

Dokažimo: $X/\sim \,\approx S^1$

Iščemo f kvocientna, ki naredi iste identifikacije kot $\sim$



$$f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

f je surjektivna in slika v krožnico

Preveriti moramo kvocientnost

imamo zveznost

kvocientnost v ožjem smislu?

Dovolj je odprtost ali zaprtost

· f je zvezna, ker je elementarna

· f je kvocientna v ožjem smislu, ker je zaprta, saj slika iz kompaktnega v hausdorffov

· f je hom. na ekv. razredih

$f(0) = (1,0)$

$f(1) = (1,0)$ $\quad 0 \sim 1 \Rightarrow f(0) = f(1)$

f loči ekvivalenčne razrede:

interval $[0,1)$ se inje slika na krožnico, zato ima f različne vrednosti na različnih ekv. razredih

izrek $\Longrightarrow$ $\bar{f}\; X/\sim \to S^1$ je homeomorfizem

4.3

začetek predavanj

$X \cong Y$

Trditev $X/_{\sim_X} \cong Y/_{\sim_Y}$ ($\sim_Y$ in $\sim_X$ sta usklajeni: $(y_1 \sim y_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) \sim f^{-1}(y_2))$)

Dokaz

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_X"] & Y \arrow[d, "q_Y"] \\ X/_{\sim_X} \arrow[r, dashed, "F"'] & Y/_{\sim_Y} \end{tikzcd}$$

homeomorfizem je kvocientna preslikava

$q_Y \circ f$ kvocientna

Po definiciji: f slika ekv. razrede v X v ekv. razrede v Y

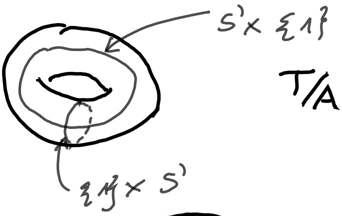
Torej $q_Y \circ f$ naredi iste identifikacije kot q_X

$\Rightarrow q_Y \circ f$ inducira homeomorfizem $F: X/_{\sim_X} \to Y/_{\sim_Y}$

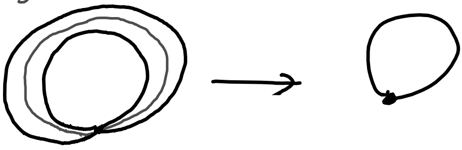
Primer:

Naj bo $1 \in S^1 \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}^2$

$A = S^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times S^1 \subseteq S^1 \times S^1 = T$ torus



T/A



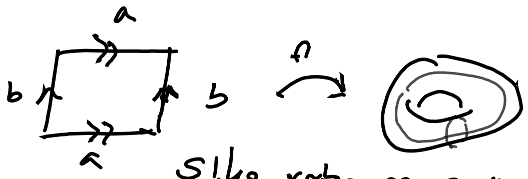
Najbrž je kvocient S^2

Ideja: torus prerežemo vzdolž A, da dobimo kvadrat z identifikacijami na robu

$X = \overset{I}{[0,1]} \times [0,1]$

$f : X \to S_1 \times S_1$

$f(x,y) = (\underbrace{\cos 2\pi x, \sin 2\pi x}_{e^{i2\pi x}}, \underbrace{\cos 2\pi y, \sin 2\pi y}_{e^{i2\pi y}})$



slika roba je ravno A

$B := f^{-1}(A) = \partial I^2 \ldots$ rob kvadrata

če nadaljujemo tako da A stisnemo v točko to ustreza identifikacijam na kvadratu, ki celotni rob stisnejo v točko

$I^2 \xrightarrow{p} I^2/B$ kvocientna projekcija

vemo da

$$\begin{tikzcd} \underset{B = \partial I^2}{\boxed{I^2}} \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "p"] & \underset{S^1 = \partial B^2}{B^2} \arrow[d, "2"] \\ I^2/B \arrow[r, phantom, "\cong"] & B^2/S^1 \cong S^2 \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \quad S^2 \cong T/A$

Deljivost topoloških lastnosti

Def: topološke lastnost $\mathcal{L}$ je deljiva, če za $\forall X \in \mathcal{L}$. $\forall \sim$ ekv. rel. $X/_{\sim} \in \mathcal{L}$

Ekvivalentno: $\mathcal{L}$ je deljiva, če se ohranja pri kvocientnih preslikavah

Trditev:

1) Deljive so naslednje lastnosti

- kompaktnost, povezanost (s potmi), lokalna povezanost (s potmi), separabilnost, diskretnost, trivialnost

2) Nedeljive so:

- lokalna kompaktnost, 1- in 2- števnost, separacijske lastnosti, metričnost, popolna nepovezanost

Dokaz:

kmp., pov. in sep. se ohranja z zveznostjo

lokalna povezanost s potmi:

lok. povezan $\Leftrightarrow$ komponente vsake odprte množice so odprte

$X, \sim \quad V^{odp} \subseteq X/_\sim$

$V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ $\quad V_\lambda$ so komponente za povezanost

V_λ so odprte

$q: X \to X/_\sim$ kvoc. cato

$q^{-1}(V) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} q^{-1}(V_\lambda)$ je odprta v X

po predpostavki je X lok. pov. zato so komponente $q^{-1}(V)$ odprte v X

Naj bo W poljubna komponenta $q^{-1}(V)$

Ker je V povezana in q zvezna $\Rightarrow$

$q(W)$ je $\subseteq V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$

Torej $q(W) \subseteq V_\lambda$ za nek $\lambda \in \Lambda$

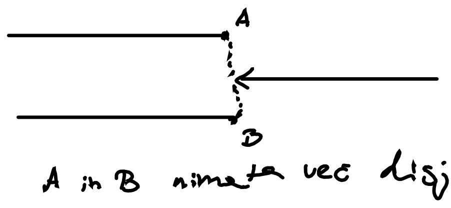
$\Rightarrow W \subseteq q^{-1}(V_\lambda)$

$\Rightarrow q^{-1}(V_\lambda)$ je unija komponent za povezanost $\Rightarrow q^{-1}(V_\lambda)$ je odprta $\Leftrightarrow V_\lambda$ so odprte

2) separacijske lastnosti:

T_2: $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$

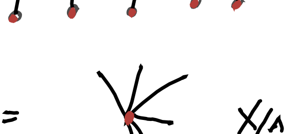
Relacija $\sim$ $(x,0) \sim (x,1)$ $\forall x > 0$

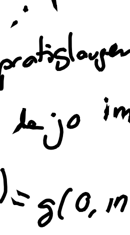


A in B nimata več disjunktnih okolic

1-števnost

$X = [0,1] \times \mathbb{N} \quad A = \{0\} \times \mathbb{N}$



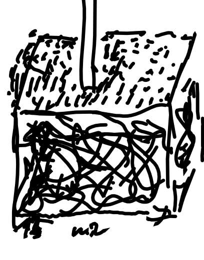
$X/_A =$  X/A ni enoštevna

Dokaz s protislovjem:

Recimo da jo ima

$a = q(A) = q(0, n)$, $n \in \mathbb{N}$

Recimo da jo



V 4,3 zadnjih 15 min

Trditev: X top. pr. $\sim$ ekv. relacija na X

$X/\sim \in T_1 \Leftrightarrow$ ekvivalenčni razredi v X so zaprti

Dokaz:

$X/\sim \in T_1 \Leftrightarrow$ točke v $X/\sim$ so zaprte

$\Leftrightarrow g^{-1}(t\check{c}) \underset{\text{zap}}{\subseteq} X$

1,3 Topološke grupe in delovanje

Def: Topološka grupa je grupa G, ki je opremljena s topologijo, glede na katero sta množenje

$$m: G \times G \to G$$
$$(g,h) \mapsto gh$$

in invertiranje

$$inv: G \to G$$
$$g \mapsto g^{-1}$$

zvezni:

Opomba: Poznamo že primer topološke algebre

$(C(X), \tau_{co})$

Mi bomo večinoma delali nad $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

ki so topološki obsegi, obstajajo še drugi npr. končni obsegi $(\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}_p})$ ki jih običajno opremimo z diskretna topologijo p-adičnih, ki so napolnitev $\mathbb{Q}$ v p-adični metriki

$$\frac{m}{n} = p^k \frac{m_1}{n_1} \qquad m_1, n_1 \text{ tuja } p \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left\|\frac{m}{n}\right\|_p = p^{-k}$$

Primeri

1) G poljubna grupa opremljena z diskretno topologijo je tudi grupa

2) G top. grupa $H \leq G \Rightarrow$
H z inducirano topologijo je tudi top. grupa

3) $(\mathbb{R},+), (\mathbb{C},+), (\mathbb{H},+)$ so top. grupe

$(\mathbb{R}^*, \cdot)$ $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, $(\mathbb{H}^*, \cdot)$ so tudi top. grupe normaje multiplikativne ko:

$$\mu, \lambda \in \mathbb{F} \qquad \|\mu\lambda\| = \|\mu\| \cdot \|\lambda\|$$

Posebej sledi, da so enotske sfere zaprte za množenje

$(S^0, \cdot)$ $(S^1, \cdot)$ $(S^3, \cdot)$ so topološke grupe

$S^0 = \{\pm 1\}$

kaj pa S^2? Ne!

Najlepši dokaz z uporabo algebraične topologije

5) Naj bodo $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ grupe

Potem je $\prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ opremljena z operacijami po komponentah in produktno topologija tudi topološka grupa

Npr: $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}} \cong C$ ... cantorjeva množica

6) Topološke grupe linearnih izomorfizmov

$\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$

$GL_n\mathbb{F} = \{$lin. izomorf. $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n\}$

$= \{A \in \mathbb{F}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$

.... splošna linearna grupa

$(A, B) \longmapsto A \cdot B$ zvezna

$A \longmapsto A^{-1}$ tudi zvezna

$= \frac{1}{\det A} \tilde{A}$

Še več: To je Liejeva grupa ... gladka mnogoterost in operaciji sta gladki

Enako velja za vse standardne podgrupe:

$SL_n(\mathbb{F})$ .... $\det$ 1

nad $\mathbb{R}$:

O_n ... ortogonalna $AA^T = I$

SO_n ... specialna ortogonalna $A^{-1} = A^T$

nad $\mathbb{C}$.

U_n ... unitarna $AA^H = I$

SU_n ... specialna unitarna

nad $\mathbb{H}$

Sp_n ....simplektična grupa $AA^H = 1$

(sled: $\det = 1$

Trditev: Naj bo G top. grupa $a \in G$.

<u>leva</u> (oz <u>desna</u>) <u>translacija</u> za a je

$$L_a : G \to G \qquad\qquad R_a : G \to G$$
$$g \mapsto ag \qquad\qquad g \mapsto ga$$

sta homeomorfizma

Dokaz:

$$R_a : G \xrightarrow{\approx} G \times \{a\} \subseteq G \times G \xrightarrow{m} G$$
$$g \mapsto (g,a) = (g,a) \longmapsto ga$$

kompozitum zveznih je zvezna

inverz: R_a^{-1}

$$R_a^{-1}(R_a(g)) = R_a^{-1}(ga) = (ga)a^{-1} = g(aa^{-1}) = g$$

Posledica

Top. grupa G je homogen prostor, tj za poljuben $x, y \in G$. $\exists$ homeo. $h: G \to G$; $h(x) = y$

Dokaz: $L_{yx^{-1}}$ ali: $R_{x^{-1}y}$

Def:

Naj bo X top. prost. in G top. grupa

(levo) delovanje grupe G na prostor X je zvezna preslikava $\varphi: G \times X \to X$

$$(g, x) \mapsto \varphi(g, x) = g \cdot x$$

za katero velja:

1) $ex = x \quad \forall x \in X$

$b \cdot (a \cdot x) = (ba) \cdot x \quad \forall x \in X, \forall a, b \in G$

V tem primeru rečemo da je X G-prostor

Opomba: kot v primeru grupe, delovanje določa translacijo ki je homeomorfizem prostora X

$L_a: X \to X$
$x \mapsto a \cdot x$

Ampak v splošem X ni homogen za delovanje grupe G:

Za polj $x \in X$ je

$G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ orbita točke x in ta v splošnem ni ves X

Torej: delovanje G na X določa ekv. relacijo na X za katero so ekvivalenčni razredi orbite delovanja:

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists g \in G.\ g \cdot x = y$$

$$[x] = \{ y = g \cdot x \mid g \in G \} = G \cdot x$$

Za poljuben $x \in X$ je $G_x = \{ g \in G \mid g \cdot x = x \}$ stabilizatorska podgrupa elementa x

Velja: $G \cdot x \xleftrightarrow{\text{bij}} G / G_x$

Trditev:

Naj top. grupa G deluje na top. prostor X. Potem je kvocientna projekcija $q: X \to X/_G$ v prostor orbit odprta.

Dokaz:

Preveriti moramo da je nasičenje odprte mn. v X odprt v X:

$U^{odp} \subseteq X$

$$q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{x \in U} G \cdot x = \{ g \cdot x \mid g \in G, x \in U \}$$

$$= \bigcup_{g \in G} \{ g \cdot x \mid x \in U \} = \bigcup_{g \in G} L_g(U)$$

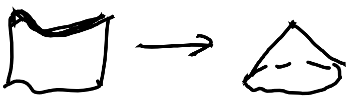
Ker je U^{odp} in L_g homeo. slika odp. v odp. zato je $L_g(U)$ odprta, ~~ker~~ zato tudi unija teh odprta

1.4 Konstrukcije kocientov

1) X top. p.

stožen nad X: $CX := X \times I / _{X \times \{1\}}$

2) suspenzija X: $\Sigma X := X \times [-1, 1] / _{X \times \{-1\}, X \times \{1\}}$

1) 

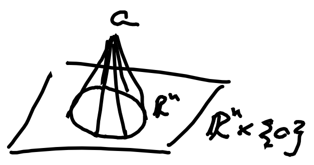
Trditev:

$$CS^n = B^{n+1}$$
$$\Sigma S^n = S^{n+1}$$

opomba:
za $X \subseteq \mathbb{R}^n$

1) "$\mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

za poljuben $a \notin \mathbb{R}^{n+1} \times \{0\}$



Definiramo linearni stožec nad X kot unijo vseh daljic

$$\{[a,x] \mid x \in X\}.$$

Vse te daljice se paroma sekajo v točki a

$L_a X$ .... linearni stožec

$L_a X$ je kot množica enaka CX.
topologijo ima enako če je X kompakten

2) Simetrični produkt

X top. prostor $n \in \mathbb{N}$

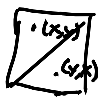
$$X^n = X \times \dots \times X$$

simetrična grupa S_n deluje na X^n s permutacijami faktorjev in kvocient pri tem delovanju je simetrični produkt

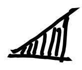
$$S^n X := X^n / S_n$$

Primer:

$X = [0,1] = I$ $\quad n = 2$

I^2 

$(x,y) \sim (y,x)$

$S^2 I \simeq$ 

3) Limita prostorov

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} X_4 \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\lim} (X_n, f_n) = \left(\coprod_{n=1}^{\infty} X_n\right)/\sim$$

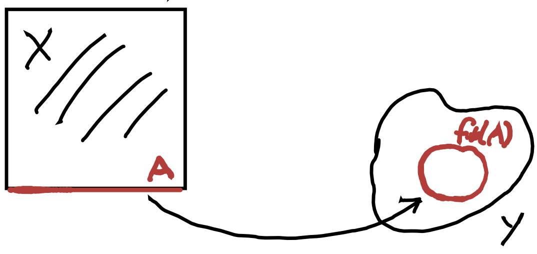
$x_i \in X_i \quad x_j \in X_j$

$x_i \sim x_j$, če $\exists k > i,j$ da je

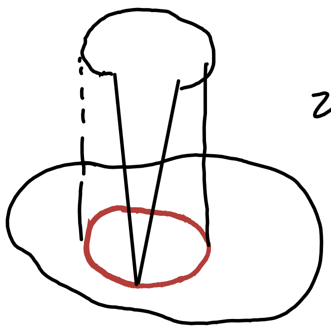
$$f_k \circ \dots \circ f_{i+1} \circ f_i(x_i) = f_k \circ \dots \circ f_j(x_j)$$

4) Zlepek

X, Y top. pr $\quad A \subseteq X$; $\quad f: A \to Y$



Zlepek X in Y vzdolž f je $X \cup_f Y = (X \sqcup Y)/_{\substack{a \sim f(a) \\ A \quad Y}}$



Ekvivalenčni razredi:

$[x] = \{x\}$ $\quad x \in X - A$

$[y] = \{y\}$ $\quad y \in Y - f_*(A)$

$[y] = f^*(\{y\}) \cup \{y\}$ $\quad y \in f_*(A)$

Primer

1) $A \subseteq X$

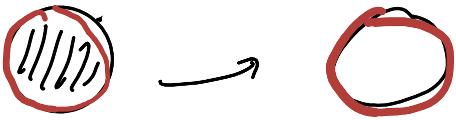
$Y = \{*\}$

$f: A \to Y$ konst. preslikava

$X \cup_f Y \approx X/A$

2) Naj bo $f: S^{n-1} \to S^{n-1}$ homeo

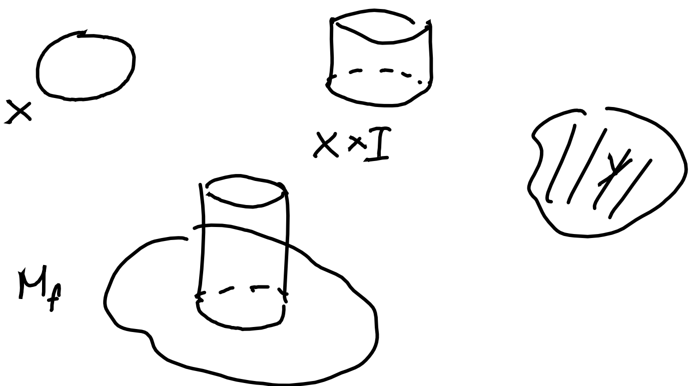
$B^n \cup_f B^n \approx S^n$



3) Naj bo $f: X \to Y$ zvezna

Preslikavni cilinder je zlepek

$M_f = X \times I \cup_f Y$ $\qquad f: X \times \{0\} \to Y$



Izrek: (normalnost dlepkov

X, Y normalna prostora

$A \subseteq X$ zaprt $f: A \to Y$ zvezna

Potem je zlepek $X \cup_f Y$ normalen

Dokaz:

normalnost: $T_1 + T_4$

$q: X \sqcup Y \to X \cup_f Y$ kvocientna proj

Netrivialni: ekv. razredi so oblike

$f^*(y) \cup \{y\}, \; y \in f_*(A)$

T_1: Kvocient je $T_1 \Leftrightarrow$ ekv. razredi zaprti

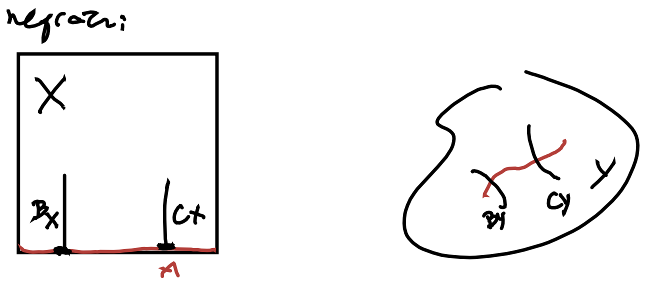
(ker sta X, Y T_1 so točke zaprte

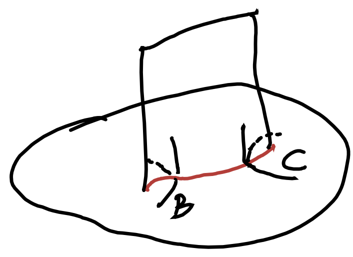
ker je f zvezna in so točke zaprte je tudi $f^*(\{y\})$ zaprt zato so vsi ekv razredi zaprti

T_4: Urisonova lema:

~~Za poljubni~~ $T_4 \Leftrightarrow$ za poljubni dis. zap. množici iščemo urisonova funkcijo

Naj bosta $B, C \subseteq Z$ disjunktni, zap, negrazni:





Naj bo $B_X := q^*(B) \cap X$ $\quad C_X$ podobno

$B_Y := q^*(B) \cap Y$ $\quad C_Y$

Te množice so zaprte $B_X \cap C_X = \emptyset$

$B_Y \cap C_Y = \emptyset$

ker je Y T_4 obstaja Urisonova funkcija $\varphi_Y : Y \to [0,1]$

$$f_Y/_{B_Y} = 0 \qquad f_Y/_{C_Y} = 1$$

Definiramo $\psi: B_X \cup C_X \cup A \to [0,1]$

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in B_X \\ 1 & ; y \in C_X \\ \varphi_Y(f(x)) & ; x \in A \end{cases}$$

ψ je dobro definirana

Po Tietzejevem izreku lahko ψ razširimo do zvezne

$\varphi_X : X \to [0,1]$ ki je urisonova funkcija na X

Funkciji: φ_X in φ_Y pa skupaj določata

iskano urisonova funkcijo za zlepek Z

$$\begin{tikzcd} X \sqcup Y \arrow[r, "\varphi_X \sqcup \varphi_Y"] \arrow[d, "q"'] & I = [0,1] \\ Z = X \cup_f Y \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

za $x \in X$ $y \in Y$ je $x \sim y \Leftrightarrow y = f(x) \in f(A)$

$$\varphi_X(x) = \psi(x) = \varphi_Y(f(x)) = \varphi_Y(y)$$

$\Rightarrow$ inducirana funkcija obstaja in ker sta φ_X, φ_Y zvezni je tudi inducirana zvezna

$\Rightarrow \varphi$ je Urisonova saj je $\varphi/_B = 0$ $\quad \varphi/_C = 1$

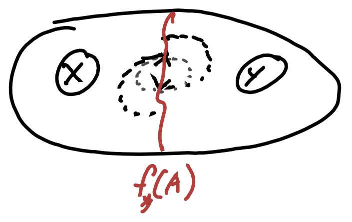
Trditev: $A^{zap} \subseteq X$; $f: A \to Y$

Označimo $Z = X \cup_f Y$

1) če sta X, Y 2-števna je tudi Z 2-števen

2) če sta $X\ Y \in T_2$ je tudi $Z \in T_2$

Dokaz



Naj bo $B_X = \{U_n ; n \in \mathbb{N}\}$ baza za X
$B_Y = \{V_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ baza za Y

Za poljubna $n, m \in \mathbb{N}$ naj bo
$W_{n,m} = (U_n \cap A) \cap f^*(V_m \cap f_*(A))$

$W_{n,m} \neq \emptyset$ je svedeno odprta v A zato
$\exists W^X_{n,m} \subseteq U_n$ in $W^X_{n,m} \cap A = W_{n,m}$
$\exists W^Y_{n,m} \overset{odp}{\subseteq} V_m$ in $W_{n,m} \cap f(A) = f(W_{n,m})$
odp v $f_*(A)$

Naj bo
$B = \{g(U_n) ; U_n \in B_X ; U_n \cap A = \emptyset\} \cup$
$\cup \{g(V_m) \mid V_m \in B_Y ; V_m \cap f_*(A) = \emptyset\} \cup$
$\cup \{g(W^X_{n,m} \cup W^Y_{n,m}) / W_{n,m} \neq \emptyset$

B je števna
Množice v B so odprte, ker so U_n, V_m in $W^X_{n,m} \cup W^Y_{n,m}$ nasičene odprte, ze nastopajo v def. družine B

Pokazati moramo še da je vsake mn. v kvoc. top. pr. Z unija mnoči iz B.
Za to je dovolj pokazati da za $\forall$ tako množico $D \overset{odp}{\subseteq} Z$ in $\forall$ točko $d \in D$.
$\exists$ mn. $W \in B$: $d \in W \subseteq D$

$g^*(d)$ lahko ena točka v X ali Y ali pa vsebuje več točk. eno v A in njeno f-sliko v Y

Ločimo primere:

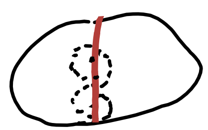
$g^*(d) = \{x\} \subseteq X$
$x \in g^*(D) \cap X \overset{odp}{\subseteq} X$
ker $X \in A$ je $X \in g^*(D) \cap X_n A^{c\ odp}$
$\exists U_n \in B_X$ da je $x \in U_n \subseteq g^*(D)$
zato je $g(x) = d \in g(U_n) \in B$
$\overset{\cap\!\!|}{D}$

- $g^*(d) = \{y\} \subseteq Y$ $y \in f(A)$ podobno kot zgoraj; $d \in g(V_m) \subseteq D$

- $g^*(d) = \{x, y\}$ $x \in A$ $y = f(x) \in f(A)$

za $x \exists U_n \in B_X$: $x \in U_n$
za $y \exists V_m \in B_Y$: $y \in V_m$
$\Rightarrow x = f^*(y) \in f^*(V_m)$
$\Rightarrow x \in W_{n,m}$
$\Rightarrow W^X_{n,m} \subseteq g^*(D)$ $W^Y_{n,m} \subseteq g^*(D)$
$\Rightarrow d \in g(W^X_{n,m} \cup W^X_{n,m}) \subseteq D$

2) $X, Y \in T_2 \Rightarrow Z \in T_2$



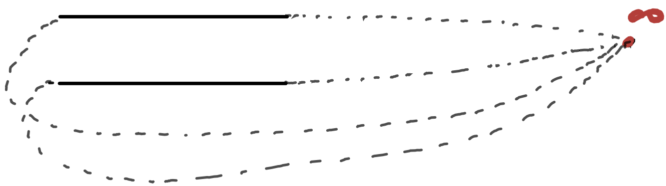
če je vse, ena ne le meji mamo problem

1.5 Projektivni prostori

V ravninski evklidski geometriji za medsebojno lego dveh premic nastopita dve možnosti:

- se sekata v natanko eni točki
- sta vzporedni

Zato je včasih v dokazih potrebno obravnavati dve možnosti.
Želeli bi, da je situacija vedno enaka.
Torej da se poljubni premici sekata v natanko eni točki



To naredimo tako, da dodamo točke v ∞ na ta način da vsakemu snopu vzporednih premic, ki je skupna vsem premicam v snopu

Vsak snop vzporednih premic dobi svojo neskončnost

Izkaže se da se v dobljenem projektivnem prostoru (projektivna ravnina $\mathbb{RP}^2$) poenostavi tudi opis stožnic

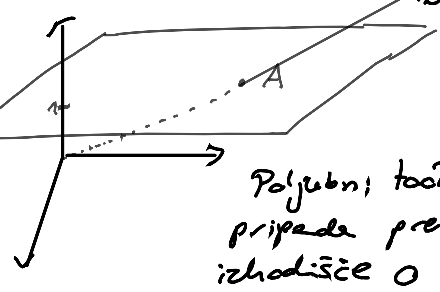
$$\mathbb{RP}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\text{premice v } \mathbb{R}^2\}/_{\parallel} \leftarrow \text{vzporednost}$$

· kakšna je topologija na $\mathbb{RP}^2$

Dodali smo neskončno točk v neskončnosti
Ali te točke sestavljajo kak geometrijski objekt
Ali $\mathbb{RP}^2$ izgleda enako v okolici ∞ točk kot v okolici končnih

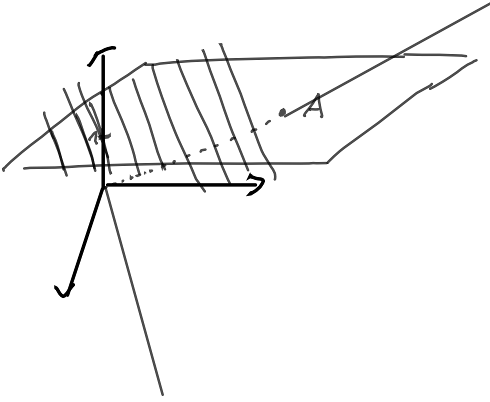
Točke v $\mathbb{RP}^2$ lahko opišemo na enak način

$\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}^2 \times \{1\}$



Poljubni točki $A \in \mathbb{R}^2 \times \{1\}$ pripada premica skozi izhodišče O določena s smernim vektorjem $\vec{OA}$

Točka A je edino presečišče te premice z ravnino $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$
Na ta način dobimo bijekcijo med točkami na $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$ in premicami skozi O v $\mathbb{R}^3$ ki ne ležijo na ravnini $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.
Premice skozi $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ pa so v korespondenci s snopi vzporednih premic na $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$



Torej je $\mathbb{RP}^2 = \{L; L \text{ 1-dim lin. prostor v } \mathbb{R}^3\}$

$\mathbb{RP}^2 = \{L - \{0\}, L \text{ 1-dim lin. prostor v } \mathbb{R}^3\}$
↑
paroma disjunktni, njihova unija je $\mathbb{R}^3 - \{0\}$

To razbitje $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ določa ekvivalenčno relacijo.
Ekvivalenčni razredi so 1-dimenzionalni linearni podprostori brez izhodišča

$$x, y \in L - \{0\} \iff \exists \lambda \neq 0.\ y = \lambda x$$

$$L - \{0\} = \{\lambda x;\ \lambda \in \mathbb{R}^\times\}$$
$\parallel$
$[x]$

To je orbita delovanja $\mathbb{R}^\times$ na $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ z množenjem s skalarji

$$\mathbb{RP}^2 = \mathbb{R}^3 - \{0\}/_{x \sim \lambda x} = \mathbb{R}^3 - \{0\}/_{\mathbb{R}^\times}$$
↑
prostor orbit pri delovanju grupe $\mathbb{R}^\times$

Def: Naj bo $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ in naj bo $n \in \mathbb{N}_0$

Projektivni prostor dimenzije n nad obsegom $\mathbb{F}$ je

$$\mathbb{F}P^n := \mathbb{F}^{n+1} - \{0\} \big/ x \sim \lambda x \ ; \lambda \in \mathbb{F}^\times = \mathbb{F}^{n+1} - \{0\} \big/ \mathbb{F}^\times$$

opremljen s kvocientno topologijo

Opomba: enako lahko naredimo za poljuben topološki obseg

Trditev:

Naj bo $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ $n \in \mathbb{N}_0$

$\mathbb{F}P^n$ je homogen prostor

(t.j. za poljubne $x, y \in \mathbb{F}P^n$ $\exists\, h$ homeo $\mathbb{F}P^n$ $\mathbb{F}P^n$:
$h(x) = y$)

Dokaz:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^{n+1} - \{0\} \arrow[r, "H"] \arrow[d, "q"] & \mathbb{F}^{n+1} - \{0\} \arrow[d, "q"] \\
\mathbb{F}P^n \arrow[r, dashed, "h"] & \mathbb{F}P^n
\end{tikzcd}$$

$$[v] = x \xmapsto{\ h\ } y = [w]$$

za H bomo izbrali linearni izomorfizem
ki v slika v w

v dopolnimo do baze $\mathbb{F}^{n+1}$
$v, v_1, v_2 \dots v_n$
w dopolnimo do baze $\mathbb{F}^{n+1}$
$w, w_1, \dots, w_n$

za H vzamemo prehodno preslikavo,
ki slika bazne vektorje v bazne vektorje
(z istim indeksom)

H je homeomorfizem $\Rightarrow q \circ H$ je kvocientna
$q \circ H$ naredi iste identifikacije kot q
(stisne premice v točke, H pa je bijekcija
med premicami

$\Rightarrow$ inducirana preslikava h je homeo
in $h(x) = h([v]) = q(H(v)) = q(w)$

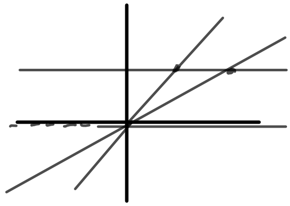
Primeri:

1) $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$

$$\mathbb{F}P^0 = \mathbb{F}^1 - \{0\}/\mathbb{F}^\times = \mathbb{F}^\times/\mathbb{F}^\times = \{*\}$$

2) $\mathbb{F}P = ?$

$$\mathbb{F}P^1 = \mathbb{F}^2 - \{0\}/\mathbb{F}^\times$$

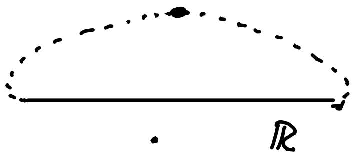


Zdi se da je

$\mathbb{F}P^1 = \mathbb{F} \cup \{\infty\}$ kompaktifikacija z 1 točko

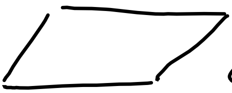
(za zdaj se ugibanje

$\mathbb{R}P^1$



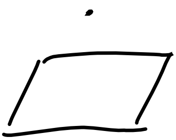
$\mathbb{R}$ $\approx S^1$

$\mathbb{C}P^1$



$\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \quad \approx S^2$

$\mathbb{H}P^1$



$\mathbb{H} = \mathbb{R}^4 \quad \approx S^4$

$$d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F} = \begin{cases} 1 & \mathbb{F} = \mathbb{R} \\ 2 & \mathbb{F} = \mathbb{C} \\ 4 & \mathbb{F} = \mathbb{H} \end{cases}$$

$$\mathbb{F}P^1 = S^d$$

(3) $\mathbb{R}P^2$ je neka sklenjena ploskev, ki pa ni S^2

Trditev: $\mathbb{F}P^n$ ima pokritje z $n+1$ odprtimi množicami, ki so homeo. $\mathbb{F}^n \equiv \mathbb{R}^{dn}$

Dokaz: $\mathbb{F}^{n+1}-\{0\}$ $\quad U_i = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^{n+1} ; x_i \neq 0\}$

$x = (x_0, x_1 \dots x_n)$ $\quad i \in \{0, \dots, n\}$

U_i je odprta za $\forall i$ $\{U_0 \dots U_n\}$ so torej odprto pokritje za $\mathbb{F}^{n+1} - \{0\}$

ker so U_i nasičene so $g_*(U_i)$ odp $\subseteq \mathbb{F}P^n$ in tvorijo odprto pokritje

$g_*(U_i) \approx \mathbb{F}^n$:

Dovolj je dokazati za $i=0$:

$$\begin{tikzcd}
U_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g|_{U_0}"'] & \mathbb{F}^n \\
g_*(U_0) \arrow[ur, dashed, "\approx"', "\bar{f}"] &
\end{tikzcd}$$

$\lambda(x_0 \dots x_n) = (\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

$f(x_0 \dots x_n) = (x_0^{-1} x_1, \dots, x_0^{-1} x_n)$

f slika ekvivalentne točke v iste

$f(\lambda x_0, \dots \lambda x_n) = (x_0^{-1} \lambda^{-1} \lambda x_1, \dots, x_0^{-1} \lambda^{-1} \lambda x_n)$

$= (x_0^{-1} x_1, \dots, x_0^{-1} x_n)$

f je zvezna

ker je U_0 odprta je $g|_{U_0}$ kvocientna

zato f zvezna $\Rightarrow$ $\bar{f}$ zvezna

Da je $\bar{f}$ zvezni homeo. sledi iz obstoja

inverzne zvezne preslikave

Naj bo G $\mathbb{F}^n \to g(U_0)$

$G(w_1, \dots w_n) = g(1, w_1, \dots w_n)$ zvezna

in očitno inverzna $\bar{f}$

Posledica: $\mathbb{F}P^n \in T_2$

Dokaz:

$x, y \in \mathbb{F}P^n$; $x \neq y$

$x = [v]$ $\quad v = (v_0, \dots, v_n)$

1) $v_i \neq 0$ za $\forall i \in \{0 \dots n\}$

$\Rightarrow v \in U_i$ za $\forall i \Rightarrow x \in q(U_i)$ za $\forall i$

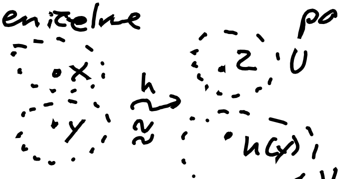
Ampak za y $\exists$ vsaj en j da je $y \in q_*(U_j)$

Torej $x, y \in q_*(U_j) \approx \mathbb{F}^n = \mathbb{R}^{dn}$

x in y imata v $q_*(U_j)$ disjunktni okolici in ker je $q_*(U_j)$ odprta v $\mathbb{F}P^n$ imata okolici v celem prostoru

2) Splošen primer:

po homogenosti $\mathbb{F}P^n$ lahko x s homeo. h preslikamo v Z, ki ima vse komponente neničelne po 1) $\exists$ disjunktni okolici



$h^*(U)$ in $h^*(V)$ sta disjunktni okolici x in y

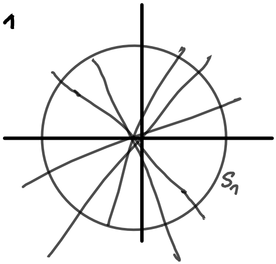
Zanimajo nas top. lastnosti $\mathbb{F}P^n$

Za $n \geq 1$ je $\mathbb{F}^{n+1} - \{0\} \Rightarrow \mathbb{F}P^n$ povezan

$\mathbb{F}^{n+1} - \{0\}$ lok. povezan $\Rightarrow \mathbb{F}P^n$ lok. povezan

Pokazati želimo da so $\mathbb{F}P^n$ kompaktni:

$\mathbb{R}P^1$



V $\mathbb{F}^k$ označimo enotsko sfero $S(\mathbb{F}^k)$
$= \{x \in \mathbb{F}^k ; \|x\| = 1$

$\mathbb{F} = \mathbb{R} \Longrightarrow S^{k-1}$

$\mathbb{F} = \mathbb{C} \Rightarrow S^{2k-1}$

$\mathbb{F} = \mathbb{H} \Rightarrow S^{4k-1}$

Ker je $\mathbb{F}$ topološki obseg množenje z enotskimi skalarji ohranja enotsko sfero $S(\mathbb{F}^k)$, zato delovanje $\mathbb{F}^\times$ na $\mathbb{F}^{n+1} - \{0\}$ (množenje s skalarji) določa delovanje $S(\mathbb{F})$ na enotsko sfero na $S(\mathbb{F}^{n+1})$

$$S(\mathbb{F}) = \begin{cases} S^0 & \mathbb{F} = \mathbb{R} \\ S^1 & \mathbb{F} = \mathbb{C} \\ S^3 & \mathbb{F} = 3 \end{cases}$$

Trditev: $\mathbb{F}P^n \approx S(\mathbb{F}^{n+1})/S(\mathbb{F})$

Dokaz:

$$\begin{tikzcd}
S(\mathbb{F}^{n+1}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f \text{ koc}"] & \mathbb{F}^{n+1} - \{0\} \arrow[d, "q"] \\
S(\mathbb{F}^{n+1})/S(\mathbb{F}) \arrow[r, "\chi"'] & \mathbb{F}P^n
\end{tikzcd}$$

f naredi iste identifikacije kot p

$\Rightarrow$ f je homeo

Pokazali smo da so $\mathbb{F}P^n$ kompaktni:

Y

mankele
son

1,4

$Y \in AE(\mathbb{R})$: $\forall X \in \mathcal{R}, \forall A^{zap} \subseteq X$

$\forall\ f: A \to Y.\ \exists$ razširitev $F: X \to Y$

$F/_A = f$

Tietze: $J \subseteq \mathbb{R}$ interval $J \in AE(\mathcal{N})$

normalni prostori

Trditev:

1) Biti $AE(\mathcal{R})$ je top. lastnost
2) Produkt $AE(\mathcal{R})$ je $AE(\mathcal{R})$
3) Retrakt $AE(\mathcal{R})$ je $AE(\mathcal{R})$

Def: $\mathcal{R}$ družina top.pr $Y \in AE(\mathcal{R})$ ...
absolutni retrakt za družino $\mathcal{R}$

1) $Y \in \mathcal{R}$
2) za $\forall$ zaprto vložitev $\varphi : Y \to X$ $X \in \mathcal{R}$
je slika $\varphi_*(Y)$ retrakt prostora X

Trditev: $\mathcal{R} \cap AE(\mathcal{R}) \subseteq AR(\mathcal{R})$

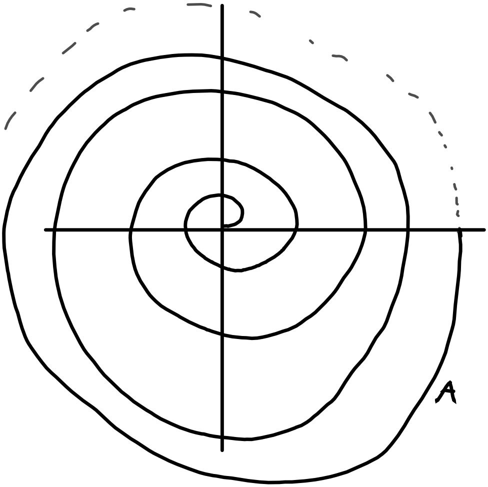
Dokaz:
$Y \in \mathcal{R} \cap AE(\mathcal{R})$
izberimo poljuben $X \in \mathcal{R}$ in naj bo
$\varphi : Y \longrightarrow X$ poljubna zaprta vložitev
Označimo $A := \varphi_*(Y) \overset{zap}{\subseteq} X$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "id"] \arrow[d, hook, "i"'] & A \\ X \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

$A \approx Y$ zato $A \in AE(\mathcal{R})$

$\exists r$ retrakcija

Ali je spirala retrakt ravnine



Lahko gre v neskončnost ali pa je kompaktna (ker mora biti zaprta)

Da, kompakten je izomorfen $[a,b]$, ki je $AE(\mathcal{N})$ zato je $AR(\mathcal{N})$

Nekompaktna spirala pa je homeomorfna
$J = [0,1) \in AE(\mathcal{N}) \cap \mathcal{N} \subseteq AR(\mathcal{N})$

Izjava Bn: Izrek o neobstoju retrakcije

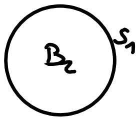
Sfera S^{n-1} ni retrakt B^n

$n=1$: S^0 ni retrakt B^1

$S^0 = \{-1,1\}$, $B^1 = [-1,1]$

že vemo ker $\{-1,1\}$ ni povezan

$n=2$

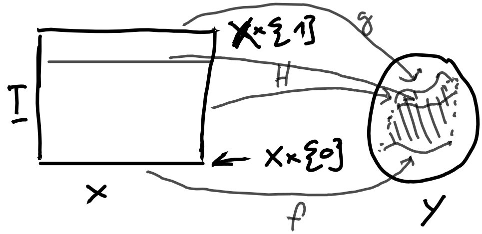


Izjava trdi da ne obstaja zvezna preslikava, ki ne miruje na S_1 $r: B^2 \to S^1$

Ampak S_1 je retrakt $B_2 - \{0\}$

Za zadnjo izjavo povezano z Brouwerjevim izrekom o negibni točki že potrebujemo pojem homotopije

Def: f, g sta homotopni, če med njima obstaja kaka homotopija, ki je zv. preslikava $H: X \times I \longrightarrow Y$ za katero velja
$H(x,0) = f(x)$ $H(x,1) = g(x)$



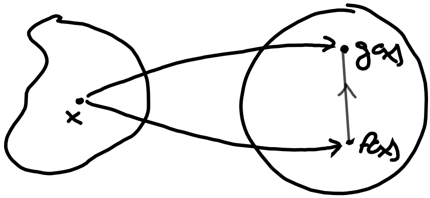
za $\forall t \in I$ definiramo. $H_t : X \to Y$
$x \longmapsto H(x,t)$

Def:
Prostor X je <u>kontraktibilen</u>, če je id_X homotopna kaki konstantni preslikavi
Pripadajoča homotopija imenujemo kontrakcija

$X \simeq *$

Primer

1) Za polj. prostor X sta polj. preslikavi $f, g : X \to B^n$ homotopni



s premočrtno homotopijo

$$H(x,t) = (1-t) f(x) + t g(x)$$

H je očitno zvezna

Op: B^n lahko zamenjamo s poljubno konveks. mn.

2) B^n je kontraktibilen: $\mathrm{id}\, B^n \to B^n$ je po 1) homotopna konst. $c : B^n \to B^n$

$$x \mapsto 0$$

Opomba: Enako velja za zvezdaste množice

3) $\mathbb{R}^n$ je kontraktibilen: $(x,t) \mapsto (1-t)x$

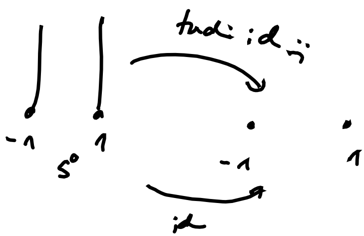
4) Ali je S^0 kontraktibilna

$S^0 = \{-1, -1\}$

Kontrakcija $H : S^0 \times I \to S^0$

$H_0 = id$

$H_1 = const$



Ker je I povezan je slika $\{-1\}\times I$ pri homotopiji H povezana in ker je $H(-1,0) = -1$

$\to H(\{-1\} \times I) = \{-1\}$

Podobno $H(\{1\} \times I)$ $\Rightarrow H_1 = id$

$\Rightarrow id_{S^0} \simeq$ konst zato S^0 ni.

Izjava C_n: sfera S^{n-1} ni kontraktibilna

opomba: primer je $n=1$ je na prejšnji strani

videli smo da so A_1, B_1 in C_1 ekvivalentne

Trditev: Za $\forall n \in \mathbb{N}$ so izjave A_n, B_n in C_n ekvivalentne

Dokaz: Vse implikacije bomo dokazali: ~~tom~~ protislovjem

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$$

A_n: B^n ima lastnost negibne točke

B_n: S^{n-1} ni retrakt B^n-ja

C_n: S^{n-1} ni kontraktibilna

$A_n \Rightarrow B_n$:

Recimo da $\neg B_n$

Naj bo $r: B^n \to S^{n-1}$ retrakcija

Iščemo zu $f: B^n \to B^n$ brez negibne točke

Naj bo $f(x) := -r(x)$

$$f: B^n \xrightarrow{r} S^{n-1} \xrightarrow{(-1)} S^{n-1} \hookrightarrow B^n$$

Iščemo negibne točke

$f(x) = x$

$\underbrace{-r(x)}_{\in S^n} = x \Rightarrow x \in S^n$

če obstaja negibna točka je na sferi

$x \in S^n \Rightarrow r(x) = x$

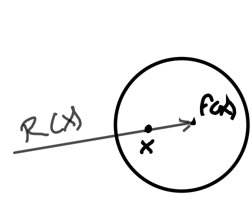
$x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin S^{n-1}$

$B_n \Rightarrow A_n$

Predpostavimo $\neg A_n$

$\exists f: B^n \to B^n$ zvezna brez negibne točke

$\forall x \in B^n.\ f(x) \neq x$



Naj bo $R(x)$ odprt poltrak iz $f(x)$ skozi x

Poltrak seka sfero v natanko eni točki ki jo označimo z $r(x)$

Tako dobimo $r: B^n \to S^{n-1}$

$x \in S^{n-1} \Rightarrow R(x) \cap S^{n-1} \ni x$ in zato je $r(x) = x$

Preveriti je treba dobro definiranost in zveznost

$B_n \Rightarrow C_n$ predpostavimo $\neg C_n$

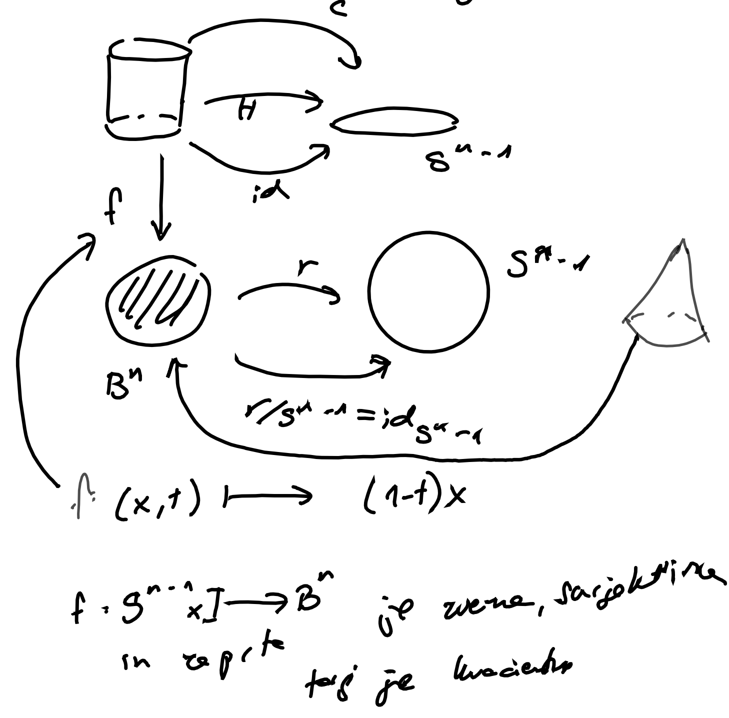
S^{n-1} je kontraktibilna: $\exists$ kontrakcija

$H: S^{n-1} \times I \to S^{n-1}$

$H_0 = id$

$H_1 = c$ konstanta

Poiskati moramo retrakcijo $r: B^n \to S^{n-1}$



$f: (x,t) \longmapsto (1-t)x$

$f: S^{n-1} \times I \to B^n$ je zvezna, surjektivna in zaprta

torej je kvocientna

f je injektivna na $S^{n-1} \times [0,1)$

$S^{n-1} \times \{1\}$ pa preslika v 1 točko

Edini netrivialen ~~domen~~ ekv razred ki ga določa f je $S^{n-1} \times \{1\}$ tega pa slika v c

Zato jo H konst na ekv. razredih

Torej določa ind. presl. $B^n \xrightarrow{r} S^{n-1}$

Iz zveznosti H sledi zveznost

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "f"] & S^{n-1} \\
B^n \arrow[ur, dashed, "r"'] &
\end{tikzcd}$$

Trdimo še: $r/S_{n-1} = id_{S^{n-1}}$

$$\begin{tikzcd}
(x,0) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & H(x,0) = H_0^{(x,0)} = x \\
x \arrow[ur, bend right, "r"'] &
\end{tikzcd}$$

$B_n \Leftarrow C_n$

Predpostavimo $\neg B_n$

$\exists$ retr. $r: B^n \to S^{n-1}$

Poiskati moramo kontrakcijo sfere S^{n-1} tj.

$H: S^{n-1} \times I \to S^{n-1}$ $H_0 = id$ $H_1 = c$

Vzamemo $H := r \circ f$

res: $H_0 = id_{S^{n-1}}$

$H_1 = r(0)$

Ahh

Zapiski

nekje pred 30 stranjo