

Direktni produkt (notranji?) $N_1 \dots N_s \trianglelefteq G$

$$G = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_s \quad \wedge \quad N_i \cap N_{i+1} = \{1\} \quad \forall i$$

• $\Leftrightarrow \forall g \in G. g = n_1 \cdot \dots \cdot n_s \quad n_i \in N_i$; **enoličen zapis**

Komutator x in y je $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$

• $M, N \trianglelefteq G, M \cap N = \{1\} \Rightarrow mn = nm \quad \forall n \in N, \forall m \in M$

• $G = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_s \Rightarrow G \cong N_1 \times N_2 \times \dots \times N_s$
notranji direktni produkt zunanji direktni produkt
(Velja za končne grupe)

Abelove grupe

- $|G| = mn$; m, n tuji
 $H = \{x \in G; mx = 0\}$ $K = \{x \in G; nx = 0\}$
Potem $G = H \oplus K$ in $|H| = m$;
- Posledica: V končni abelovi grupi je vsota p -grup
- p -grupa je ciklična \Leftrightarrow vsebuje natanko 1 grupo modi p
- V končni abelovi grupi je izomorfna direktni vsoti cikličnih p -grup

KONČNE GRUPE

Delovanje $G \curvearrowright X$

- 1) $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$
 - 2) $1 \cdot x = x$
- (levo delovanje)

Imamo delovanje $G \curvearrowright X$. Potem

$$\Phi: G \longrightarrow \text{Sym} X$$

$$\Phi: g \longmapsto (x \mapsto gx) \text{ je homomorfizem}$$

$\ker \Phi$ je jedro delovanja

Orbita $G \cdot x = \{g \cdot x; g \in G\}$

Stabilizator $G_x = \{g \in G; gx = x\}$

Fiksne točke g-ja $X^g = \{x \in X; gx = x\} = \text{fix}(g)$

Fiksne točke (invariante)

$$X^G = \bigcap_{g \in G} X^g = \{x \in X; \forall g \in G. gx = x\}$$

$$\bullet G_x \leq G$$

$$\bullet x \sim y \iff \exists g \in G. y = gx \quad \text{Ekvivalenčni}$$

razredi so orbite ($G \cdot x$)

$$X/G = X/\sim \text{ prostor orbit}$$

• **Tranzitivno delovanje** delovanje z eno orbito

$$\bullet \forall x \in X. |G \cdot x| = [G : G_x]$$

$$\bullet G \text{ končna} \implies |G| = |G_x| \cdot |G \cdot x|$$

• G p -grupa. $G \cong X \Rightarrow |X| \equiv |X^G| \pmod{p}$

• Burnsidova lema $|\frac{X}{G}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$

• Razredna formula

$$\exists x_1, \dots, x_r \in X - Z(G). \quad |G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^r [G : C_G(x_i)]$$

• G p -grupa $\Rightarrow Z(G) \neq \{1\}$ ($p \mid |Z(G)|$)

• $|G| = p^2 \Rightarrow G$ je abelova

• Cauchyjev izrek $p \mid |G| \Rightarrow \exists a \in G. \text{red}(a) = p$

• Lagrangev izrek $H \leq G \Rightarrow |H| \mid |G|$

• $H \leq G$ je p -podgrupa Sylowa če

$$|H| = p^\alpha; \quad p^\alpha \mid |G|; \quad p^{\alpha+1} \nmid |G|$$

• Izrek Sylowa

$$1) \quad p^f \mid |G| \Rightarrow \exists H \leq G. |H| = p^f$$

($\exists p$ -podgrupa Sylowa)

2) $\forall p$ -podgrupa G je vsebovana v p -podgrupi Sylowa

3) Vse p -podgrupe Sylowa v G so konjugirane med sabo

4) $n_p, \dots, \overline{st}$ p -podgrup Sylowa

$$n_p \mid |G|; \quad n_p \equiv 1 \pmod{p}$$

S p-podgrupa Sylowa; **normalizator** $S \trianglelefteq G$
 je $N_G(S) = \{g \in G; gSg^{-1} = S\}$

• $n_p = 1 \Leftrightarrow S \triangleleft G$

• grupa je **enostavna** če sta $\{1\}$ in G edini edinki

• A_n je enostavna za $\forall n \in \mathbb{N} - \{4\}$

• grupa G je **rešljiva**, če \exists končno zaporedje $\{1\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_k = G$
 $G_i \triangleleft G_{i+1}$; G_{i+1}/G_i abelove

- V katero grupo G lahko vložimo v simetrično grupo S_n za nek $n \in \mathbb{N}$

Uporabne grupe ki niso izomorfne \mathbb{Z}_n

$$4: \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \cong \{\text{id}, (12), (34), (12)(34)\}$$

$$6: D_6 \cong S_3$$

$$8: \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, D_8, Q$$

$$9: \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$$

$$10: D_{10}$$

$$12: \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_2, D_{12}, D_{12}, A_4 = \{\text{id},$$

$$(12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (132), (234),$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\approx \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2}$$

$$(243), (341), (314), (412), (421)\}$$

$$14: D_{14}$$

$$\mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$$

• konjugirana podgrupa aHa^{-1}
za nek $a \in G$

• $H, K \leq G$ sta konjugirani če $aHa^{-1} = K$

• (levi) odsek $aH = \{ ah; h \in H \}$
 $aH = bH \iff ab^{-1} \in H$

• Fermatov mali izrek: $a^p \equiv a \pmod p$

• $\varphi: G \rightarrow G'$ homomorfizem

a) $H \leq G \Rightarrow \varphi^*(H') \leq G$

b) $N \trianglelefteq G \Rightarrow \varphi^*(N') \trianglelefteq G$

c) $H \leq G \Rightarrow \varphi_*(H) \leq G'$

d) $N \trianglelefteq G \wedge \varphi$ surj. $\Rightarrow \varphi(N) \trianglelefteq G'$

• korespondenčni izrek

a) \forall podgrupa grupe H/N je oblike H_1/N
kjer $H \leq G$ in $N \leq H$

b) \forall edinka grupe G/N je oblike M/N
kjer $M \trianglelefteq G$ in $N \leq M$

• K komutativen koldbar $M \trianglelefteq K$

M maksimalen $\iff K/M$ je pdje

Komutatorska podgrupa $[G, G] =$
 $\{a^{-1}b^{-1}ab; a, b \in G\}$

- $H \triangleleft G \wedge G/H$ abelova $\Rightarrow [G, G] \subseteq H$
- $H < G$. $H \triangleleft G \Leftrightarrow [H, G] < H$
- $[G, G] \triangleleft G$
- $G/[G, G]$ je abelova