Prostori in preslikave
(topološki) (zvezni)

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$a \in \mathbb{R}$ f je zvezna v a
$\forall \varepsilon > 0 . \exists \delta > 0 . \forall x \in \mathbb{R} . |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

f je zvezna če je zvezna v vseh točkah

Metrični prostor X
$d: X \times X \longrightarrow [0, \infty)$

1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$
2) $d(x,y) = d(y,x)$
3) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

(x,d) je metrični prostor

$f: X \longrightarrow Y$
$d_x \qquad d_y$

$a \in X$

$\forall \varepsilon > 0 . \exists \delta > 0 . \forall x \in D . d_x(x,a) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(a)) < \varepsilon$

Izrek: $f:(X,d_X) \longrightarrow (Y,d_Y)$ je zvezna, če $\forall$ odprto množico $U \subseteq Y$ njena praslika $f^*(U)$ je odprta množica v X

$U \subseteq X$ je odprta, če so vse točke v U notranje

$x \in U$ je notranja, če $\exists r>0.\ K(x,r) \subseteq U$

PDD - poorly drawn diagram

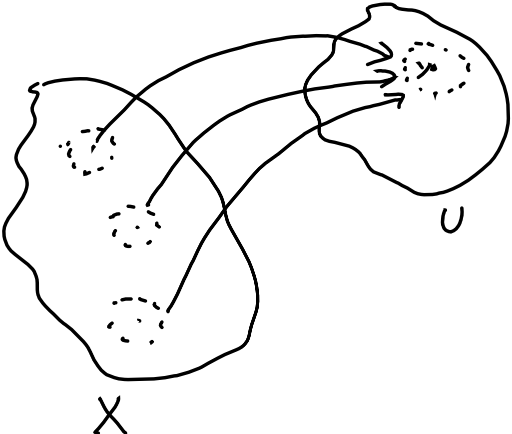
Dokaz:

$$X \xrightarrow{f} Y$$

$U \in Y$

$x \in X$ $\qquad$ $y \in U$ ← notranja točka

$f(x) = y$



Definicija: Funkcija f je zvezna, če je praslika vsake odprte množice odprta

Množica v X je odprta, če je element topologije $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$

$$(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$$

$$f^*(\mathcal{T}_Y) \subseteq \mathcal{T}_X$$

Trditev: (X, d) metrični prostor

Množica $U \subseteq X$ je odprta $\Leftrightarrow$ lahko jo predstavimo kot unijo odprtih krogov

Dokaz:

Vse točke U so notranje

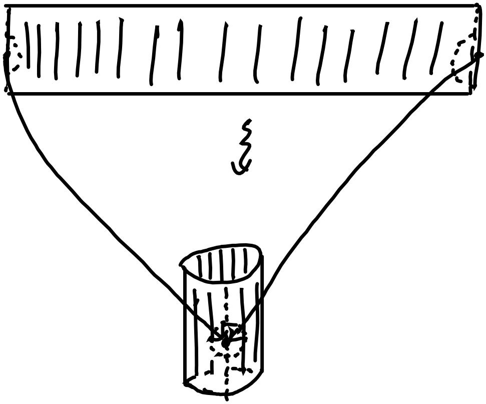
$\forall x \in U. \exists r > 0. K(x, r_x) \subseteq U$

$\Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} K(x, r_x)$

Presek odprtih krogel je odprt

$$\min\{r - d(x,a), r' - d(x',a)\}$$

Posledično je presek odprtih množic odprt



$$x,\ x-\frac{x^3}{6},\ x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120},\ x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{7!},\ \dots \rightsquigarrow \sin x$$

Topološki prostori

Naj bo X poljubna množica

Topologija na X je družina množic $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$,
ki zadošča naslednjim pogojem:

(T0): $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$

T1 : Poljubna unija elementov družine $\mathcal{T}$
je element družine $\mathcal{T}$

T2: Poljuben končni presek elementov $\mathcal{T}$ je
je element $\mathcal{T}$

Elemente $\mathcal{T}$ imenujemo odprte množice

Topološki prostor je množica X z neko
topologijo X

Primeri:

- Topologija iz metrike:

(X,d), $\mathcal{T}_d := \{$vse možne unije odprtih krogel$\}$

T_2: $\bigcup_\lambda K(x_\lambda, r_\lambda) \cap \left(\bigcup_\gamma K(x_\gamma, r_\gamma)\right) =$

$\bigcup_{\lambda,\gamma} (K(x_\lambda, r_\lambda)) \cap K(x_\gamma, r_\gamma)$

$\uparrow$

ni krogla, ampak je unija krogel

$\mathcal{T}_d$ je topologija, ki je inducirana z metriko d

$\mathcal{T}$ je metrizabilna, če je porojena z metriko

X, d

$\bar{d}(x,x') := \min\{d(x,x'), 1\}$

$\bar{d}$ je metrika

$\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\bar{d}}$

- X poljubna množica

$\mathcal{T}_{tri} := \{\emptyset, X\}$ je topologija

trivialna topologija

- $\mathcal{T}_{dis} := P(X)$ vse podmnožice so odprte

diskretna topologija

metrizabilnost $\mathcal{T}_{triv}$, $\mathcal{T}_{dis}$?

$d(x,x')>0$

x x'

$K(x, \frac{d(x,x')}{2})$, $K(x', \frac{d(x,x')}{2})$

disjunktni

$$d(x,x') = \begin{cases} 0; & x = x' \\ 1; & x \neq x' \end{cases}$$ diskretna metrika

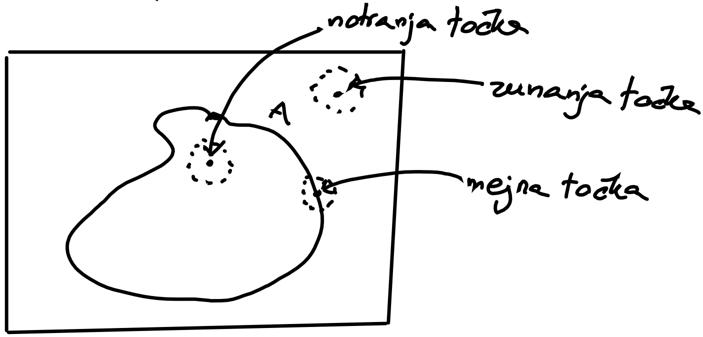
$K(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$

X, topologija je katerakoli

$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$, ki je zaprta za poljubne unije in za končne preseke

$(X, \mathcal{T})$

V metričnih prostorih:



notranjost A = {vse notranje točke}

zaprtje A = notranjost A $\cup$ meja A

A je zaprta, če so vse njene mejne točke elementi A notranjost: $\text{int}(A)$ $\mathring{A}$

- unija vseh odprtih množic, ki so vsebovane v A

$= \bigcup \{U \in \mathcal{T} ; U \subseteq A\}$ = največja odprta podmnožica A

v topološkem prostoru $(X, \mathcal{T})$ je

$\mathring{A}$:= največji element $\mathcal{T}$, ki je vsebovan v A

A je zaprta, če je $X - A$ $(A^c) \in \mathcal{T}$

$\mathcal{Z}$:= družina vseh zaprtih množic

$\bigcup \{A : X - A \in \mathcal{T}\}$

za $\mathcal{Z}$ velja

1) poljuben presek elementov $\mathcal{Z}$ je element $\mathcal{Z}$

2) vsaka končna unija elementov $\mathcal{Z}$ je element $\mathcal{Z}$

($\mathcal{Z}$ je komplement topologije)

Primer:

- če zahtevamo, da so točke X zaprte množice
  $\rightsquigarrow$ končne množice X so zaprte

$$\{A \in P(X) ; |A| < \infty\} \cup \{X\}$$

zadošča zahtevam (1), (2)

torej komplement so topologija na X

$$\mathcal{T} = \{A \in P(X) ; |X - A| < \infty\} \cup \{\emptyset\}$$

topologija končnih komplementov

$\mathcal{T}_{kk}$ ..... topologija končnih komplementov

če X končen $\rightsquigarrow$ $\mathcal{T}_{kk} = \mathcal{T}_{diskretna}$ na X

Zaprtje A := presek vseh zaprtih množic, ki vsebujejo A

= je najmanjša zaprta množica v X, ki vsebuje A

zaprtje A: $cl(A)$ $\bar{A}$

Primer:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$A \subseteq A \cup B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \overline{A \cup B}$

$B \subset A \cup B \Rightarrow \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ $\Longrightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

Jasno je da $A \cup B \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$

zaprta množica

$\overline{A \cup B}$ je najmanjša zaprta množica, torej

$\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$

$\overline{A \cap B} \overset{?}{\longleftrightarrow} \bar{A} \cap \bar{B}$ DN

Meja A : $\mathrm{Fr}A$ $\quad Cl(A) - \mathrm{int}A \quad \bar{A} - \mathring{A}$

Meja A je vedno zaprta množica

Zvezne preslikave

$(X, \mathcal{T}_X)$ $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologiji

$f: X \longrightarrow Y$ je zvezna če velja

$f^*(\mathcal{T}_Y) \subseteq \mathcal{T}_X$

torej če je praslika vsake odprte množice odprta.

Primer:

- vse zvezne funkcije v smislu metričnih prostorov so zvezne kot funkcije med porojenimi topologijami

- $f:(X,\mathcal{T}_X) \longrightarrow (X,\mathcal{T}_Y)$

  Recimo da $\mathcal{T}_Y$ je trivialna $\mathcal{T}_Y = \{\emptyset, Y\}$

  $\Rightarrow f$ je zvezna

  Recimo da je $\mathcal{T}_X$ diskretna $\Rightarrow f$ je zvezna

$id(X,\mathcal{T}) \longrightarrow (X,\mathcal{T}')$

  id je zvezna $\Leftrightarrow \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$

- $f:(X,\mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{T}_Y)$ konstantna

  $f(x) = y$ za $\forall x \in X$

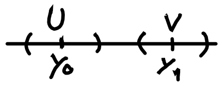
  f je zvezna

  $U \in \mathcal{T}_Y \quad f^*(U) = \begin{cases} X ; y \in U \\ \emptyset ; y \notin U \end{cases}$ oboje odprti

- $f:(\mathbb{R},\mathcal{T}_{kk}) \longrightarrow (\mathbb{R},\mathcal{T}_{evkl})$

  konstante so edine zvezne funkcije

  $y_0, y_1 \in Z_f \quad y_0 \neq y_1$



  $f^*(U), f^*(V)$ sta odprti in disjunktni

  V topologiji končnih komplementov ni disjunktnih nepraznih odprtih množic

  $U,V \in \mathcal{T}_{kk}$ ... odprti, neprazni

  $|X-U| < \infty \quad |X-V| < \infty$

  $U^c \cup V^c$ je končna

  $\quad \parallel$

  $(U \cap V)^c$ je končna

  $U \cap V$ je neprazen, če je X neskončen

Splošneje: X neskončna, Y metričen, d

$(X,\mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{T}_d)$

edine zvezne funkcije so konstantne

$(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$

$C((X,\mathcal{T}_X),(Y,\mathcal{T}_Y))$ .... množica zveznih preslikav

$\quad\;\; ''$

$C(X,Y)$, $C(X) := C(X,\mathbb{R})$, kjer ma $\mathbb{R}$ $\mathcal{T}_{evk.}$

Prostor X = množica X z neko topologijo

preslikava = zvezna funkcija

zveznost: $f^*(Y) \subseteq f^*(X)$

Trditev: kompozitum preslikav je preslikava
(zvezna funkcija)

Dokaz: $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{g} (Z, \mathcal{T}_Z)$

~~$f \circ g$~~ $g \circ f$

Naj bo $\sigma \subseteq Z$ odprta podmnožica

$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

$\underbrace{f^*(\underbrace{g^*(\sigma)}_{\text{odprta}})}_{\text{odprta}}$ torej $f^*(g^*(\sigma)) \in \mathcal{T}_X$

Trditev:

ekvivalentne izjave: $f : X \to Y$

(1) $\Leftrightarrow$ f je zvezna (praslike odprtih množic so odprte)

(2) $\Leftrightarrow$ praslika f vsake zaprte množice je zaprta

(3) $\Leftrightarrow$ $\overline{f_*(A)} \subseteq f_*(\overline{A})$

Dokaz:

(1) $\Leftrightarrow$ (2)

$A \subseteq Y$

$f^*(A^c) = f^*(A)^c$

A zaprta $\Rightarrow A^c$ odprta $\Rightarrow f^*(A)^c$ odprta
$\Rightarrow f^*(A)$ zaprta

(2) $\Leftrightarrow$ (3)

$f^* f_*(A) \supseteq A$

$f_* f^*(B) \subseteq B$

($\Rightarrow$) $\underbrace{f^*(\overset{\text{zaprta}}{\overline{f_*(A)}})}_{\text{zaprto po 2)}} \supseteq f^*(f_*(A)) \supseteq A$

A je vsebovana v zaprti množici, potem je tudi $\overline{A}$ vsebovana tam

$f^*(\overline{f_*(A)}) \supseteq \overline{A}$

$\overline{f_*(A)} \supseteq f_*(\overline{A})$

($\Leftarrow$) B^{zap} na Y

$f^*(B)$ je zaprto tj $f^*(B) = \overline{f^*(B)}$

$f_*(\overline{f^*(B)}) \subseteq f_*(f^*(\overline{B})) \subseteq \overline{B} = B$

$\overline{f^*(B)} \subseteq f^*(B) \Rightarrow \overline{f^*(B)} = f^*(B)$

ker je zaprtje kvečjemu večje ali enako

$\blacksquare$

Homeomorfizmi:

$f:(X,\mathcal{T}_X) \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow (Y,\mathcal{T}_Y)$ je <u>homeomorfizem</u>,

če je f bijekcija in f_* je bijekcija med topologijama

$$f_*:\mathcal{P}(X) \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{P}(Y)$$

$$f^*:\mathcal{P}(Y) \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{P}(X)$$ sta si inverzni

$f_*(\mathcal{T}_X) \subseteq f_*(\mathcal{T}_Y)$ $\leftarrow$ f^{-1} zvezna

$f^*(\mathcal{T}_X) \subseteq f^*(\mathcal{T}_Y)$ $\leftarrow$ zveznost f

Trditev: Za $f:(X,\mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{T}_Y)$ so ekvivalentne trditve:

1) f je homeomorfizem
2) f je bijekcija, f, f^{-1} sta zvezni
3) f je bijektivna, zvezna in <u>odprta</u>
(slika $\forall$ odprte množice je odprta
($f_*(\mathcal{T}_X) \subseteq f_*(\mathcal{T}_Y)$)
4) f je bijektivna, zvezna in zaprta
(zaprte množice slika v zaprte)

■

Primeri:

$$[0,1) \cup \{2\} \longrightarrow [0,1]$$

$$x \longmapsto x \quad ; x \in (0,1)$$

$$2 \longmapsto 1 \quad ; x = 2$$

zvezna, bijektivna

inverz ni zvezen

Nekatere zvezne funkcije so avtomatično (kot posledica zveznosti) zaprte oziroma odprte.

Primeri

$f^{zv}: X^{komp} \longrightarrow Y^{metr.}$ je vedno zaprta

projekcije $X \times Y \longrightarrow X$ je vedno odprta

$p: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gladke z neničelnim odvodom so vedno odprte če obstaja homeomorfizem

$f: (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$

X in Y sta <u>homeomorfna</u> $X \approx Y$

Homeomorfnost je ekvivalenčna relacija

Primeri:

$[a,b] \approx [c,d]$
$a<b \qquad c<d$

$f: [0,1] \longrightarrow [a,b]$

$f(x) = a+(b-a)x$

bijektivna, zvezna, inverz je zvezen

$(a,b] \approx (0,1] \approx [0,1)$

vsak končen interval je homeomorfen enemu izmed naslednjih

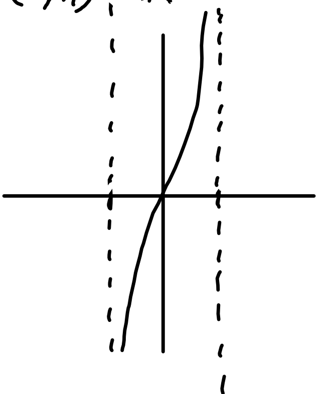
$[0,1] \quad [0,1) \quad (0,1) \approx \mathbb{R}$

$[0,1) \approx [a,\infty)$

$f: (-1,1) \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}$

$f(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$



Topološka lastnost je katera koli:

lastnost prostora, ki se ohranja pri homeomorfizmih

(M,d) $\bar{d}(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$

omejenost, polnost nista topološki lastnosti

$B^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n ; \|\vec{x}\| \leq 1\}$

enotska n-krogla

$\mathring{B}^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n ; \|\vec{x}\| < 1\}$ odprta enotska n-krogla

$S^{n-1} : \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n ; \|\vec{x}\| = 1$

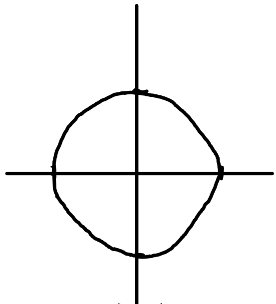
$(n-1)$ enotska sfera

Lokalno v okolici vsake točke zgleda kot $\mathbb{R}^{n-1}$ ravnine

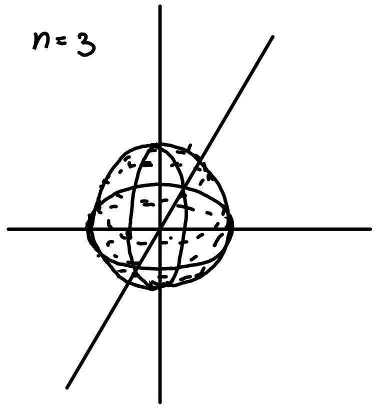
$f : \mathring{B}^n \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n$

$f(x) = \frac{\vec{x}}{1-\|\vec{x}\|}$; inverz $f^{-1}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{1+\|\vec{x}\|}$

$n=2$



$n=3$

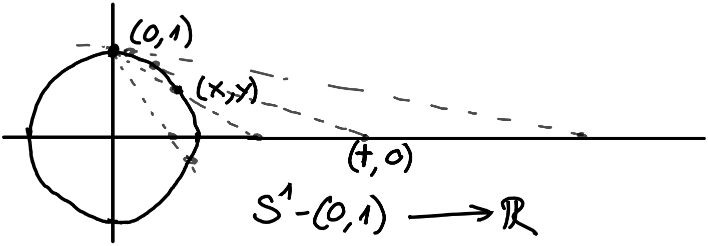


$\mathbb{R}^{n+1}$

$\cup\!|$

ena točka

$S^n - \{T\bar{c}\} \approx \mathbb{R}^n$



$$S^1-(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$(0,1)$ (x,y) $(t,0)$ ležijo na isti premici

$$t=\frac{x}{1-y}$$

$$f^{-1}(t)=\left(\frac{2t}{t^2+1},\ \frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$$

$$f: S^n-\{(0,\dots,0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_1,\dots,x_{n+1}) \longmapsto \frac{x_1+\dots+x_n}{1-x_{n+1}}$$

$$f: (\overset{\in\mathbb{R}^n}{\vec{x}}, x_{n+1}) \longmapsto \frac{\vec{x}}{1-x_{n+1}}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n-\{(\vec{0},1)\}$$

$$\vec{x} \longmapsto \left(\frac{2\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2+1},\ \frac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1}\right)$$

S^n

Taki prostori so n-razsežne mnogoterosti

Baze in predbaze

$(X, \mathcal{T})$

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ je baza $\mathcal{T}$, če lahko vse elemente $\mathcal{T}$ lahko zapišemo kot unije elementov $\mathcal{B}$

Standardni primer

V metričnem prostoru (X, d) so krogle baza

Dovolj je če vzamemo samo majhne krogle (npr z radijem $\frac{1}{n}$)

$(X, \mathcal{T}_{dis})$ vsaka baza vsebuje vse enojčke

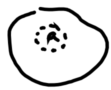
Trditev

$(X, \mathcal{T}_X)$ in $\mathcal{B}_X$ baza $\mathcal{T}_X$

$(Y, \mathcal{T}_Y)$ in $\mathcal{B}_Y$ baza $\mathcal{T}_Y$

1) $A \subseteq X$ je odprta $\iff$

$\forall a \in A.\ \exists B \in \mathcal{B}_X.\ a \in B \subseteq A$



2). $f: X \longrightarrow Y$ naj bo poljubna funkcija.

f je zvezna $\iff f^*(\mathcal{B}_Y) \subseteq \mathcal{T}_X$

f je odprta $\iff f_*(\mathcal{B}_X) \subseteq \mathcal{T}_Y$

Dokaz 2)

$(\Longrightarrow)$ ✓

$(\Longleftarrow)$ Naj bo $U \in \mathcal{T}_Y$

$U = \bigcup_\lambda B_\lambda \ ;\ B_\lambda \in \mathcal{B}_Y$

$$f^*(U) = f^*\Big(\bigcup_\lambda B_\lambda\Big) = \bigcup_\lambda \underbrace{f^*(B_\lambda)}_{\in \mathcal{T}_X} \in \mathcal{T}_X$$

$U \in \mathcal{T}_X \quad U = \bigcup_\lambda B_\lambda \quad B_\lambda \in \mathcal{B}_X$

$$f_*(U) = f_*\Big(\bigcup_\lambda B_\lambda\Big) = \bigcup_\lambda \underbrace{f_*(B_\lambda)}_{\in \mathcal{T}_Y} \in \mathcal{T}_Y$$

■

Primer:

$f: S^1 \longrightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C}$ (enotska kompleksna števila)

$f(z) = z^2$

f je odprta

Lahko preslikamo okolico vsake točke

$x \in X$, $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}$ je lokalna baza okolice X, če za $\forall$ odprto okolico U, ki vsebuje x $\exists B \in \mathcal{B}_x$. $x \in B_x \subseteq U$

običajno privzamemo, da so elementi $\mathcal{B}$ okolica X

Če je $\mathcal{B}$ baza $\mathcal{T}$, potem je $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B}; x \in B\}$ je lokalna baza okolice x. Obratno $\mathcal{B} := \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$

Standardni primer v (X, d) je $\{K(x,r);\ r \in \mathbb{R}\}$ lokalna baza pri X

$\mathcal{B}$ $\quad \mathcal{T} = \{$unije elementov $\mathcal{B}\}$

Ali je $\mathcal{T}$ topologija?

$\mathcal{T}$ je očitno zaprta za poljubne unije

$U, V \in \mathcal{T} \qquad U \cap V = \left(\bigcup B_\lambda\right) \cap \left(\bigcup B'_\mu\right) =$

$\to \bigcup_\lambda B_\lambda \quad B_\lambda \in \mathcal{B}$

$\to \bigcup_\mu B'_\mu \quad B'_\mu \in \mathcal{B}$

$$= \bigcup_{\lambda,\mu} \underbrace{B_\lambda \cap B'_\mu}_{\text{presek dveh elementov}}$$

če družina $\mathcal{B}$ vsebuje končne preseke, potem tudi $\mathcal{T}$ vsebuje končne preseke, je $\mathcal{T}$ topologija

preoster pogoj. Zadošča če je vsak končen presek elementov $\mathcal{B}$ unija elementov $\mathcal{B}$

Trditev:

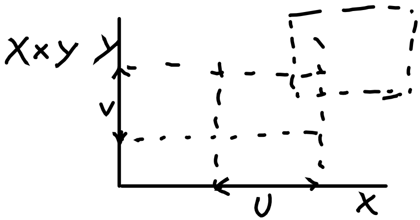
$\mathcal{B}$ je družina podmnožic X

$\mathcal{T} := \{$ unija elementov $\mathcal{B}\}$

Potem

$\mathcal{T}$ je topologija na $X \Leftrightarrow$
1) $\mathcal{B}$ je pokritje X
2) za poljubna $A, A'' \in \mathcal{B}$, $x \in A \cap A''$, $\exists A''.\ x \in A'' \subseteq A \cap A'$

$(X, \mathcal{T}_X)$ $(Y, \mathcal{T}_Y)$



$\mathcal{T}_{X\times Y}$ produktna topologija je topologija, ki je generirana z bazo elementov $U \times V$ kjer $U \in \mathcal{T}_X$ $V \in \mathcal{T}_Y$

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$$

ustreza pogoju za bazo

$$\begin{tikzcd} X\times Y \arrow[r, "pr_X"] \arrow[dr, "pr_Y"'] & X \quad \mathcal{T}_X \\ & Y \quad \mathcal{T}_Y \end{tikzcd}$$

Projekciji sta zvezni

$U \in \mathcal{T}_X$

$pr_X^{-1}(U) = U \times Y \in \mathcal{T}_{X\times Y}$

Projekciji sta odprti.

$pr_X(U \times V) = U$

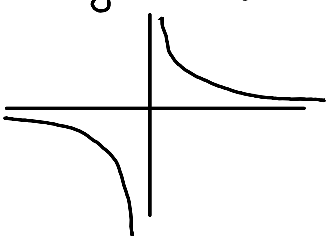
Zato so projekcije odprte

Ali so zaprte?

$pr_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

A je zaprta

$A := \text{graf } f(x) = \frac{1}{x}$



$pr_1 A = \mathbb{R} - \{0\}$

ni zaprta

Naj bo $\mathcal{P}$ poljubna družina podmnožic X. Kaj je najmanjša topologija na X, ki vsebuje $\mathcal{P}$

Družina vseh končnih presekov elementov $\mathcal{P}$ ustreza pogoju 2 iz trditve

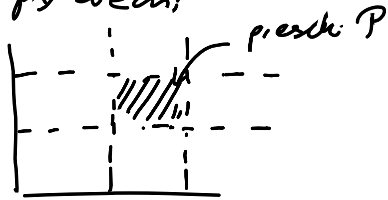
Če je $\mathcal{P}$ pokritje X, potem je $\mathcal{T}$ topologija, ki jo kot baza generira vse končne preseke elementov $\mathcal{P}$

Pravimo, da je $\mathcal{P}$ predbaza topologije $\mathcal{T}$

Primer:

Produktna topologija na $X \times Y$ je najmanjša topologija, za katero sta projekciji pr_X in pr_Y zvezni

$$P = \{ pr_X^*(U) \quad U \in \mathcal{T}_X, \quad pr_Y^*(V) \quad V \in \mathcal{T}_Y \}$$



To je definicija produktne topologije za produkte poljubno mnogo faktorjev

Trditev:

$(X, \mathcal{T}_X) \quad (Y, \mathcal{T}_Y)$

$\mathcal{P}$ naj bo neka predbaza za $\mathcal{T}_Y$

$f: X \longrightarrow Y$ je zvezna $\Longleftrightarrow f^*(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{T}_X$

Dokaz:

$\Rightarrow$

$\Leftarrow \quad f^*\left(\bigcap_1^n \mathcal{P}_i\right) = \bigcap_1^n f^*(\mathcal{P}_i) \in \mathcal{T}_X$

$\blacksquare$

Pozor: tako ne moramo testirati odprtosti preslikav

Trditev:

X, Y, Z prostori

$f: X \to Y \times Z$ je zvezna $\Leftrightarrow$

$\mapsto (f_Y, f_Z)$

f_Y, f_Z sta zvezni

tj. funkcija v produkt je zvezna $\Leftrightarrow$

njene komponente so zvezne

Dokaz:

$(\Rightarrow)$ $f_Y = pr_Y \circ f$

$f_Z = pr_Z \circ f$ kompozitum zveznih funkcij

$(\Leftarrow)$ Po prejšnji trditvi je dovolj pogledati

$f^*(P)$ $(P = U \times Z \cup Y \times V)$

$f^*(U \times Z) = \{x \in X \; f(x) \in U \times Z\} =$

$= \{x \in X \mid (f_Y(x), f_Z(x)) \in U \times Z\} =$

$= \{x \in X \mid f_Y(x) \in U\} = f_Y^*(U)$

$f^*(Y \times V) = f_Z^*(V)$

$\blacksquare$

Baze in predbaze

1. aksiom števnosti:

   $\mathcal{T}$ ima števne lokalne baze

   Za $\forall x \in X . \exists$ družina okolic x $U_1, U_2, \ldots$

   (števno) $\forall U \ni x . \exists x \in U_n \subseteq U$

   $(X, \mathcal{T})$ je 1-števen ← definicija

2. aksiom števnosti:

   $\mathcal{T}$ ima števno bazo ← ni aksiom ampak v resnici def

   $(X, \mathcal{T})$ je 2-števen

Primeri:

- $(X, \mathcal{T})$ ima lahko tudi končno bazo
  sled: $\mathcal{T}$ je končna
- obratno če je X končna $\Rightarrow \mathcal{T}$ končna
  $\Rightarrow$ in avtomatično 1,2-števna
- metrični prostori so 1-števni
  $x, \{K(x, \frac{1}{n})\}$
- neštevna množica z diskretno topologijo je 1-števna, ampak ne morebiti 2-števna

Jasno 2-števnost $\Rightarrow$ 1-števnost

Trditev: $(X, \mathcal{T})$ je 1-števen:

1) $\forall A \subseteq X$ je $\bar{A} = L(A) = \{x ; x$ je limita zaporedja v $A\}$

2) $f : (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ je zvezna $\Leftrightarrow f(L_X(A)) \subseteq L(f_*(A))$

Dokaz: $A \subseteq L(A) \subseteq \bar{A}$

$\bar{A} \subseteq L(A)$

$x \in \bar{A}$ $U_1, U_2, \ldots$ števna baza okoli za x

Vzamemo $x_1 \in U_1 \cap A, x_2 \in U_2 \cap A, \ldots$

2) DN

∎

Primer:

$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{evkl})$ je 2-števna

$\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$ je števna in

Definicija

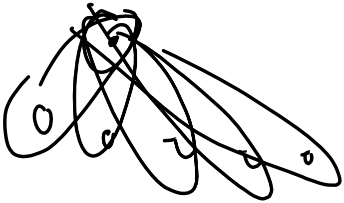
$(X,\mathcal{T})$ je separabilen če v X obstaja števna gosta podmnožica

$\mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n$

separabilnost + 1-števnost $\overset{?}{\Longrightarrow}$ 2-števnost

NE :(

Očitno: 2-števnost implicira separabilnost



Trditev:

V metričnih prostorih je separabilnost ekvivalentna 2-števnosti

Dokaz:

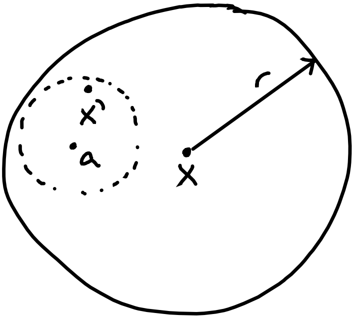
Separabilnost + metričnost implicira 2-števnost

A naj bo števno gosta

$\{K(a,r)\,;\, a \in A,\ r \in \mathbb{Q}\}$ je baza

Dovolj je dokazati, da je vsaka krogla unija krogel.

$K(x,r)$ je poljubna krogla



$\delta = \frac{r - d(x,x')}{3}$ Izberemo $a \in A$, da je

$$d(x',a) < \frac{r - d(x,x')}{3}$$

Izberemo racionalno št $\rho \in \mathbb{Q}$

$$\delta < \rho < 2\delta$$

$$x' \in K(a,\rho) \subseteq K(x,r)$$

Primer:

$C([0,1])$

Weierstrasov izrek: $\forall$ zvezno funkcijo lahko enakomerno aproksimiramo s polinomi.

Vsak polinom lahko enakomerno aproksimiramo z racionalnim polinomom.

Torej $C([0,1])$ je separabilen (in metričen) sledi da je 2-števen

Podprostori

$(X,\mathcal{T})$ $\quad A\subseteq X$

$$\mathcal{T}_A := \{ A\cap U \, ; \, U\in\mathcal{T} \}$$

$\mathcal{T}_A$ je topologija na A

T1) $U_\lambda \in \mathcal{T}_A \qquad U_\lambda = U'_\lambda \cap A \quad U'_\lambda \in \mathcal{T}$

$$\bigcup U_\lambda = \bigcup (U'_\lambda \cap A) = \underbrace{\left(\bigcup U'_\lambda\right)}_{\in\mathcal{T}} \cap A \quad \in \mathcal{T}_A$$

T2) Na isti nacin

$\mathcal{T}_A$ je inducirana / podedovana topologija na A in $(A,\mathcal{T}_A)$ je podprostor $(X,\mathcal{T})$

Primeri:

- evklidska topologija na $\mathbb{R}$ je inducirana z evklidsko topologijo na $\mathbb{R}^2$

- d metrika na X $\quad A \subseteq X$

$$\begin{tikzcd} (X,d) \arrow[r, squiggly] \arrow[d, squiggly] & (X,\mathcal{T}_d) \arrow[r, squiggly] & (A,(\mathcal{T}_d)_A) \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\ (A,d_A) \arrow[rr, squiggly] & & (A,\mathcal{T}_{(d_A)}) \end{tikzcd}$$

$$B \subseteq A \subseteq (X,\mathcal{T})$$
$$\mathcal{T}_B = (\mathcal{T}_A)_B$$

- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{evk})$
  $\quad \cup\!\!|$
  $\quad \mathbb{N}$ inducirana topologija je diskretna

Trditev: zaprte množice v $\mathcal{T}_A$ so preseki A z zaprtimi podmnožicami v X

Dokaz:

F zaprta v $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow F \cap A$ je zaprta v $(A, \mathcal{T}_A)$

$F = X - U$; $U \in \mathcal{T} \Rightarrow F \cap A = (X - U) \cap A =$

$A - \underbrace{U \cap A}_{\in \mathcal{T}_A}$

$\Leftarrow$ B je zaprta v $(A, \mathcal{T}_A)$

$B = A - \underbrace{U \cap A}_{\in \mathcal{T}_A} = A \cap \underbrace{(X - U)}_{\text{zaprt}}$

$\mathcal{B}$ je baza za $\mathcal{T}$

$\mathcal{B}_A = \{ A \cap U \; ; \; U \in \mathcal{B} \}$ je baza A

$(X, \mathcal{T})$ 1,2-števen $\Rightarrow$ $(A, \mathcal{T})$ je 1,2-števen) $\}$

Topološka lastnost je **dedna**, če iz tega da ima $(X, \mathcal{T})$ lastnost sledi: da jo imajo vsi podprostori

Diskretnost in trivialnost topologije so dedne

Separabilnost ni dedna

Odprt podprostor separabilnega prostora je separabilen trditev: $X \supseteq A \supseteq B$

$Cl_A B = Cl_X B \cap A$

$Int_A B \supseteq Int_X B \cap A$

$Fr_A B \subseteq Fr_X B \cap A$

zzz

VIDA SPI

$Fr_A B \subseteq Fr_X B \cap A$

$x \in Fr_A B$ poljuben

velja $\forall U \overset{\in A}{\ni} x .\ U \cap B \neq \emptyset \wedge U \cap (A-B) \neq \emptyset$

$U \cap (A-B) \neq \emptyset \Rightarrow U \cap A - U \cap B \neq \emptyset$

$\Rightarrow \underset{\underset{U \cap X}{\parallel}}{U} - U \cap B \neq \emptyset \Rightarrow U \cap (X-B) \neq \emptyset$

Torej $\forall U \underset{\ni x}{\subseteq} A .\ U \cap B \neq \emptyset \wedge U \cap (X-B) \neq \emptyset$

ker $x \in A$

$\forall U \subseteq X$ okolica x. $U \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$

$\forall U \subseteq X$ okolica x

$\exists V \overset{odp}{\subseteq} A .\ V \subseteq A.$

$\forall U \subseteq U .\ U \cap B \neq \emptyset \wedge U \cap (X-B) \neq \emptyset \Rightarrow$

$x \in Fr_X B$

$Cl_A B = Cl_X B \cap A$

$Cl_A B \subseteq Cl_X B$

$A - Cl_A B \supseteq A - Cl_X B$

$x \in A - Cl_X B$

$x \in A \wedge x \in X - Cl_X B$

$\exists U \overset{odp}{\subseteq} X.\ x \in U \wedge U \cap Cl_X B = \emptyset$

$U \cap A$ je odprta v A

$x \in U \cap A \wedge \underbrace{(U \cap A)}_{\text{odprta v } A} \cap Cl_X B \subseteq$

$U \cap Cl_X B = \emptyset$

$\Rightarrow x \in A - Cl_A B$

$x \in Cl_X B \cap A$

$x \in A \wedge x \in Cl_X B$

$Cl_X B \cap A \subseteq Cl_A B$

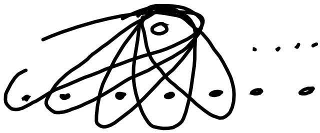
$A - Cl_X B \supseteq A - Cl_A B$

$x \in \underbrace{A - Cl_A B}_{\text{odp v } A}$

$\exists U \overset{odp}{\subseteq} A.\ x \in U \wedge U \cap Cl_A B = \emptyset$

Separabilnost ni dedna

neštevna množica z diskr. topologijo



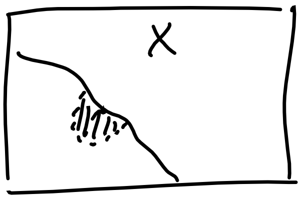
X neštevna $a \in X$ $\mathcal{T} := \{U \subseteq X;\ a \in U\} \cup \{\emptyset\}$

očitno: $\{a\}$ je gosta v X

Topologija ki jo $\mathcal{T}$ inducira na

$X - \{a\}$ je diskretna ki ni:

(če bi bil števen bi bila cela množica gosta števna v množici)



A

odp v X

$B = A \cap U$

$A^{odp} \subseteq X \wedge B^{odp} \subseteq A \Rightarrow B^{odp} \subseteq X$

$A^{zap} \subseteq X \wedge B^{zap} \subseteq A \Rightarrow B^{zap} \subseteq X$

$B = A \cap F \quad F^{zap} \subseteq X$

inkluzija

$$(A, \mathcal{T}_A) \xhookrightarrow{i} (X, \mathcal{T}) \xrightarrow{f \text{ zvezna}} (Y, \mathcal{T}')$$

zveznost i $\Leftrightarrow$ $i^*(U)$ $U \in \mathcal{T}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$\qquad\qquad\qquad U \cap A \in \mathcal{T}_A$

inkluzija je zvezna

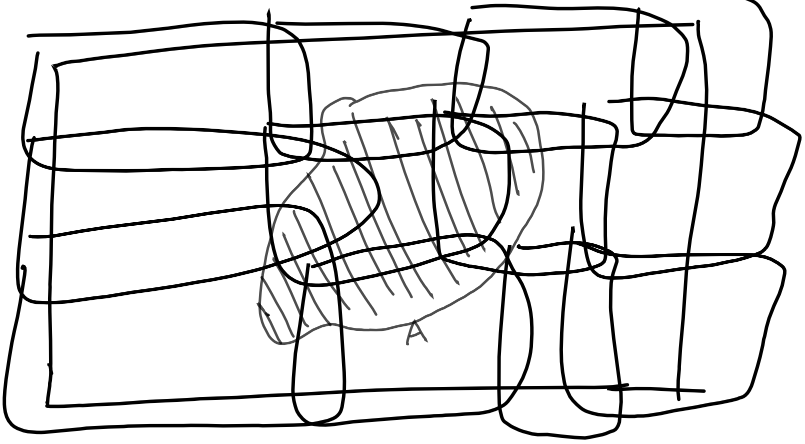
$\mathcal{T}_A$ je najmanjša topologija na A za katero je inkluzija zvezna

$f \circ i$ zvezna

$\|$

$f|_A$ zožitev f na A

Zožitev zvezne funkcije je zvezna



Trditev:

a) $\{X_\lambda\}$ odprto pokritje X

$A\subseteq X,\ A\cap X_\lambda$ odp za $\forall\lambda \Leftrightarrow A$ odp v X

b) $\{X_\lambda\}$ zaprto in lokalno končno pokritje X

$A\subseteq X \wedge A\cap X_\lambda$ zap za $\forall\lambda \Leftrightarrow A$ zap v X

lokalno končno pokritje:

$\forall x\in X\ \exists U^{odp}\ni x,\ X_\lambda\cap U\neq\emptyset$ za končno mnogo indeksov λ

Dokaz:

a) $\Rightarrow$ $A=\bigcup_\lambda X_\lambda\cap A$ je unija odprtih množic

torej je A odprta

b) $X-A$ je odprta

$x\in A$. $\exists U\ni x$ ki seka končno mnogo X_λ

$X_{\lambda_1},\dots,X_{\lambda_n}$ $\rightsquigarrow$

$U-\underbrace{X_{\lambda_1}\cap A}_{zap}-\underbrace{X_{\lambda_2}\cap A}_{zap}-\dots\dots$ je odprta

okolica x, ki ne seka A torej $A^{zap}\subseteq X$

Izrek

$\{X_\lambda\}$ pokritje X, ki je bodisi odprto ali lokalno končno zaprto

$f: X \to Y$ je zvezna $\Leftrightarrow$ $f/_{X_\lambda}$ zvezna za $\forall \lambda$

Alternativno

$\{f_\lambda : X_\lambda \to Y\}$ zvezne in usklajene na presekih ($f_\lambda/_{X_\lambda \cap X_{\lambda'}} = f_{\lambda'}/_{X_\lambda \cap X_{\lambda'}}$ za poljuben λ, λ')

Potem obstaja natanko ena preslikava $f: X \to Y$ da $f/_{X_\lambda} = f_\lambda$

Dokaz: $f_\lambda/X_\lambda \cap X_{\lambda'} = f_{\lambda'}/X_\lambda \cap X_{\lambda'}$

zagotavlja da je $f: X \to Y$ enolično definirana s $f(x) := f_\lambda(x)$ za $x \in X_\lambda$

f je zvezna

Če imam odprto pokritje, potem

$U \overset{odp}{\subseteq} Y \quad f^*(U) = \bigcup_\lambda f^*(U) \cap X_\lambda =$

$= \bigcup_\lambda \underbrace{\underbrace{(f/_{X_\lambda})^*(U)}_{\text{odp v } X_\lambda \Rightarrow \text{ odp v } X}}_{\Rightarrow \text{ odprta v } X}$

$\uparrow$ zvezna

$\{X_\lambda\}$ zaprto: $F \overset{zap}{\subseteq} Y$

$f^*(F) \cap X_\lambda = \underbrace{(f/_{X_\lambda})^*(F)}_{\text{zaprta}}$

$\hookrightarrow$ zaprta

$\hookrightarrow$ zvezna

Uporabimo točko b

$f, g: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$

$f(n) := n$ ← vložena

$g(n) = \begin{cases} 0 & ; n=0 \\ \frac{1}{n} & ; n \neq 0 \end{cases}$ ← ni vložena

$f: (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}')$ je vložitev, če je

$f: (X,\mathcal{T}) \to (f(X), \mathcal{T}_{f(X)})$ homeomorfizem

potrebni pogoj: f je zvezna injekcija

pogoj ni zadosten:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

zvezna injekcija, ki ni vložitev

Trditev: $f: X \to Y$ zvezna injekcija

a) $f_*(X)$ odp v $Y \Rightarrow$

f je vložitev $\Longleftrightarrow$ $f: X \to Y$ odprta (odprta vložitev)

b) $f_*(X)$ zap v $Y \Rightarrow$

f je vložitev $\Longleftrightarrow$ $f: X \to Y$ zaprta (zaprta vložitev)

Topološke lastnosti

- Zaporedje v $\mathbb{R}^n$ ima največ eno limito

Hausdoffova lastnost

- vsako omejeno zaporedje v $\mathbb{R}^n$ ima konvergentno podzaporedje (Bolzano-Weistrassov izrek); v ozadju je dejstvo, da je vsaka omejena podmnožica v $\mathbb{R}^n$ vsebovana v kompaktni

- (Bolzanov izrek o vmesni vrednosti)

  $f^{zv}:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(a)\cdot f(b) < 0$

  $\Longrightarrow$ f ima ničlo

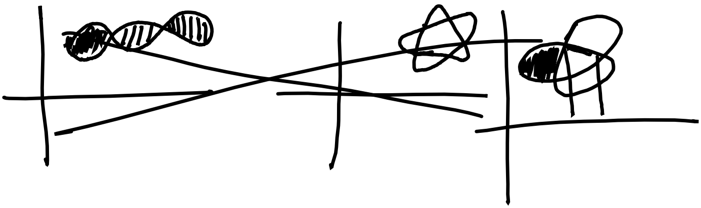
  je posledica povezanosti intervala $[a,b]$

- Cantorjev izrek (princip sendviča)

  Presek padajočega zaporedja zaprtih intervalov je neprazen

(Baireov izrek)

Metrični prostor, ki je števen in brez izoliranih točk ne more biti poln



Topološke lastnosti

- ločljivost
- povezanost
- kompaktnost
- Hausdorffova lastnost ($\mathcal{J}$ ostro loči različne točke)

  $(\exists U,V \in \mathcal{J}: U \ni x, V \ni y. \ U \cap V = \emptyset$

$\mathcal{J}$ ostro loči A in B, če $\exists U,V \in \mathcal{J}$

$A \subseteq U, B \subseteq V \quad U \cap V = \emptyset$

$\mathcal{J}$ loči A in B če

$A \subseteq U \quad B \subseteq V$

$U \cap B = \emptyset \ \wedge \ A \cap V = \emptyset$

- trivialna: ne loči
- diskretna: ostro loči dve disjunktni množici

- $A \rightsquigarrow \bar{A}$ točke, ki jih $\mathcal{J}$ ne loči od A

Primer: vsi metrični prostori so Hausdorffovi

Jkk na neskončni množici X odprte množice se vedno sekajo

Trditev: Ekvivalentne so naslednje izjave

(1) X je Hausdorffov

(2) $x \neq y \Rightarrow \exists U \overset{odp}{\ni} x \,.\, y \notin \overline{U}$

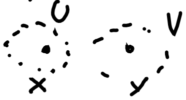
(ekvivalentno $\bigcap_{x \in U} \overline{U} = \{x\}$)

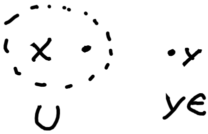
(3) $\Delta_X : \{(x,x) \in X \times X\}$ je zaprta v $X \times X$

diagonala v produktu X

Dokaz

$(1) \Leftrightarrow (2)$

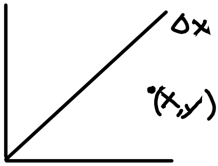
$(\Rightarrow)$  $\rightsquigarrow y$ ni v zaprtju U

$\Leftarrow$ 

$y \in \overline{U}$ $\quad$ $\overline{U}^c$ je okolica y

$U \cap \overline{U}^c = \emptyset$

$(1) \Leftrightarrow (3)$



$\Rightarrow$ $\quad (x,y) \notin \Delta_X \Rightarrow x \neq y \Rightarrow \exists U, V,\ U \cap V \neq 0$

$U \times V \ni (x,y)$ in neseka diagonale

$\Leftarrow$ $x \neq y \Rightarrow (x,y) \in \Delta_X \Rightarrow \exists$ bazična škatlasta okolica $U \times V$, ki vsebuje (x,y) in neseka diagonale

$x \in U \quad y \in V \quad U \cap V = \emptyset$

Izrek: Naj bo Y Hausdorffov

(1) Končne množice Y so zaprte
($\Leftrightarrow$ točke so zaprte

(2) zaporedje v Y ima največ eno limito

(3) $f,g: X \longrightarrow Y$ zvezni:

$\{x\in X;\ f(x)=g(x)\}$ je zaprta v X

(4) $f,g: X \xrightarrow{\text{zvezno}} Y$ $\quad A \overset{\text{gosta}}{\subseteq} X$

$$f|_A = g|_A \Rightarrow f = g$$

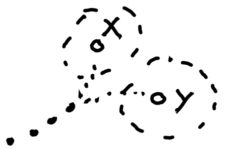
(5) graf preslikave $f: X \xrightarrow{\text{(zvez)}} Y$ je zaprta podmnožica v $X\times Y$

(vedno mišljeno zvezno če ne reče drugače

Dokaz:

(1) $\forall y \neq x.\ \exists U.\ y\in U \wedge x \notin U$

(2)



(3) $X \xrightarrow{(f,g)^{zv}} Y\times Y \qquad \{x;\ f(x)=g(x)\} =$

$= (f,g)^*(\Delta_Y)$

$\nwarrow$ zaprt

zvezna praslika zaprte je zaprta

(4)

$$f|_A = g|_A \Leftrightarrow \underset{\substack{\nearrow\\ X}}{f|_{\bar A}} = \underset{\substack{\nearrow\\ X}}{g|_{\bar A}} \Leftrightarrow f = g$$

(5) $\Gamma_f = \{(x,y)\in X\times Y;\ f(x)=y\}$

graf je množica ujemanja za funkciji $f\circ pr_X$ in pr_Y

$X\times Y \to Y$

in je zaprta po točki 3

X je Fréchetov, če topologija loči različne točke

Primeri:

- Hausdorffov $\Rightarrow$ Fréchetov
- trivialni prostori niso Frechetovi

Trditev: X je Frechetov $\Leftrightarrow$ enojci so zaprti ($\mathcal{J}$ je Frechajeva $\Leftrightarrow$ $\mathcal{J}_{kk} \subseteq \mathcal{J}$

Dokaz: $\Rightarrow$

$\Leftarrow$ $y \in X - \{x\}$ je odp

$x \in X - \{y\}$ je odp

$\blacksquare$

Trditev: Hausdorffova in Frétuchetova lastnost sta dedni in multipllikativni (ohranjata se pri produktih (X,Y imata lastnost $\Rightarrow$ $X\times Y$ ima lastnost))

Dokaz

Hausdorffova je dedna

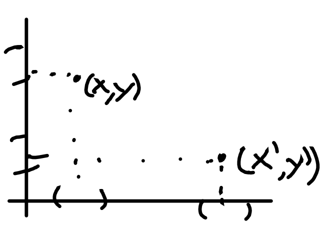
$A \subseteq X$

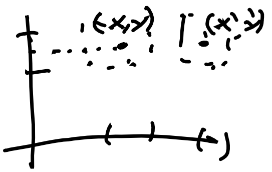
$a \neq b \quad a,b \in X$

$\exists U,V$ odp v X. $a \in U$, $b \in V \wedge U \cap V = \emptyset$

$\rightsquigarrow (A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$

Hausorffova je multiplikativna





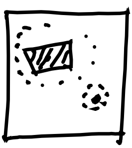
$U \times V \cap U' \times V' = \emptyset$ deluje tudi če $x = x'$ ali $y = y'$

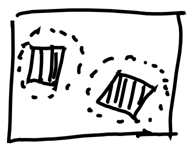
Za fechetovo lastnost enako, samo spustimo strogost

X je regularen topološki prostor, če je Fréchetov in topologija ostro loči točke od zaprtih množic

da so točke zaprte

X je normalen, če je Frechetov in topologija močno loči (disjunktne) zaprte množice





Normalnost $\Rightarrow$ regularnost $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Hausdorfova lastnost $\Rightarrow$ Frechetova lastnost

Primer

- $\mathcal{T}$ je Hausdorffova, $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T} \Rightarrow$
  $\mathcal{T}'$ je Hausdorffova

  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{evk})$

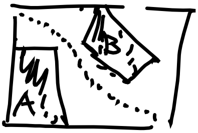
  $\mathcal{T}'$ naj bo najmanjša, da $\mathcal{T}_{evk} \subseteq \mathcal{T}'$
  in $\mathbb{Q} \in \mathcal{T}'$

  $\mathcal{T}'$ je Hausdorffova, vendar točke
  0 ne moremo ostro ločiti od
  $\mathbb{Q}^c$ (zaprta množica)

Ker je $\mathbb{R}$ edina odprta množica, ki
vsebuje $\mathbb{Q}$

Trditev: Vsak metrični prostor je normalen

Dokaz: Frechetova lastnost ✓



$U := \{x \in X \,;\, d(x,A) < d(x,B)\}$

$V := \{x \in X \,;\, d(x,A) > d(x,B)\}$

$A \subseteq U \quad B \subseteq V$

$U \cap V = \emptyset$

U in V odprti

- $x \in U$

$d(x,A) < d(x,B)$

$r = \dfrac{d(x,B) - d(x,a)}{2}$

$K(x,r) \subseteq U$

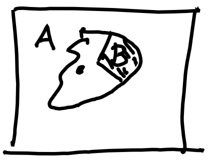
Trditev:

1) X je regularen $A \subseteq X \Rightarrow A$ regularen
(regularnost je dedna)

2) X normalen $A^{zap} \subseteq X \Rightarrow A$ je normalen

Dokaz:

1)



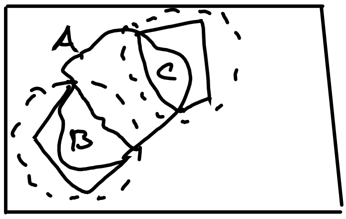
$\exists B'^{zap} \in X.\ B = A \cap B'$

$\exists U$ in V odp v X

$U \ni x \quad V \supseteq B'$

$A \cap U$ in $A \cap V$ ostra ločita x in B'

2)



Ampak B' in C' se lahko sekata :(

A zap $\Rightarrow B, C$ zap v $A \Rightarrow B, C$ zap v X

BU

$T_0 .\ \forall x, y_{x\neq y}\ \exists U \in \mathcal{J}.\ x\in U \wedge y\notin U$ (Kolmogorov)

$T_1 :\ \forall x, y \in X_{x\neq y}.\ \exists U, V \in \mathcal{J}\ x\in U \wedge x\notin V \wedge y\in V \wedge y\notin U$ (Fréchetova lastnost)

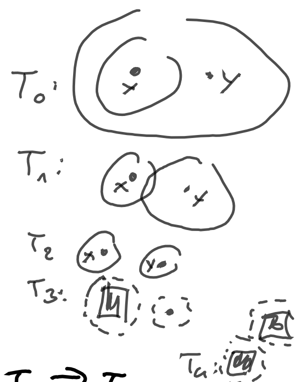
$T_2 :\ \forall x, y_{x\neq y} \in X.\ \exists U, V \in \mathcal{J}.\ x\in U, y\in V\ \ U\cap V = \emptyset$

$T_3 :\ \forall x\in X.\ A^{zap},\ x\notin A.\ \exists U, V.\ x\in U.\ A\subseteq V.\ U\cap V=\emptyset$

$T_4\ \ \forall A^{zap}, B^{zap} \subseteq X.\ A\cap B = \emptyset.\ \exists U, V \in \mathcal{J}.\ A\subseteq U,\ B\subseteq V.\ U\cap V = \emptyset$

regularnost $(T_3 + T_1)$

normalnost $(T_4 + T_1$



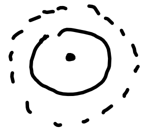
$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$

$T_4 + T_1 \Rightarrow T_3 + T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$

od te točke dalje so prostori vedno T_2

Trditev:

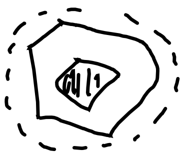
Prostor $(X,\mathcal{T})$ je T_3 $\Leftrightarrow$



$\forall x \in U \in \mathcal{T}.\ \exists V \in \mathcal{T}.\ x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$

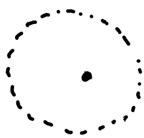
Prostor $(X,\mathcal{T})$ je T_4 $\Leftrightarrow$

$\forall A^{zap} \subseteq U \in \mathcal{T}.\ \exists V \in \mathcal{T}.\ A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$

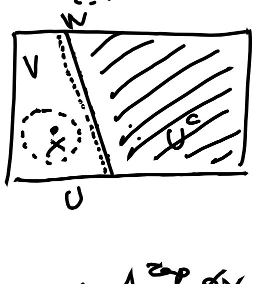


Dokaz

$\Rightarrow$ Uporabimo definicijo T_3 na x, U^c



$\exists V, W.\ x \in W, A \subseteq V \quad W \cap V = \emptyset$



$\Rightarrow$ $\overline{V}$ ne seka U^c

$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$

$\Leftarrow$ $x, A^{zap} \not\ni x$

A^c (A^{zap})^c je okolica x

$x \in A^c \quad \exists V \quad x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq A^c$

$W := \overline{V}^c \rightsquigarrow W^{odp} \supseteq A \quad V \cap W = \emptyset$

Drugi dokaz je analogen

Trditev: T_3 je multiplikativna

Posledica: Regularnost je multiplikativna (za T_1 že vemo da je)

DN

Izrek (izrek Tihonova)

$(X,\mathcal{T})$ je regularen in 2-števen $\Rightarrow (X,\mathcal{T})$ je normalen

Dokaz:

$x \in A.\ \exists U^{odp} \ni x.\ \overline{U} \cap B = \emptyset$

$\exists \mathcal{B}$ števna baza za $\mathcal{T}$

$\forall y \in B.\ \exists V \in \mathcal{B}\ y \in V.\ \overline{V} \cap A = \emptyset$

Ločili samo A od B, ampak ne ostro

$U_1, U_2, U_3 \dots$ odprte pokrivajo A

$\overline{U_i} \cap B = \emptyset$

$V_1, V_2, V_3, \dots$ odprte, pokrivajo B $\overline{V_i} \cap A = \emptyset$

$$\underbrace{\begin{array}{ll} U_1' = U_1 - \overline{V_1} & V_1' := V_1 - \overline{U_1} \\ U_2' = U_2 - \overline{V_1} - \overline{V_2} & V_2' = V_2 - \overline{U_1} - \overline{U_2} \\ & V_3' := V_3 - U_1 - U_2 - \overline{U_3} \end{array}}_{\text{odprte}}$$

Pokrivaja A

še naprej

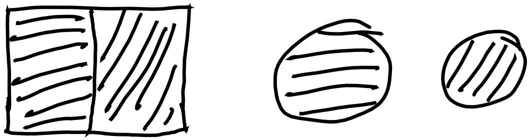
$V = \bigcup V_i' \supseteq B$

$U = \bigcup U_i' \supseteq A$

$U \cap V = \emptyset$

Povezanost

Wadova jezera (Lakes of Wade)



skupna meja

ni skupne meje
Vsak je odprt

Definicija: Prostor $(X,\mathcal{T})$ je nepovezan, če obstajata odprti množici $A,B \in \mathcal{T}$, da sta A,B neprazni, disjunktni in pokrivata cel prostor

$X = A + B$ ← pomeni disjunktni in pokrijeta cel prostor

$(X,\mathcal{T})$ je povezan, če ni nepovezan

Trditev: ekvivalentno:

1) $(X, \mathcal{T})$ je nepovezan

2) obstajata neprazni disjunktni zaprti podmnožici A, B $X = A + B$

3) obstaja prava, neprazna odprto zaprta podmnožica $A \subset X$

4) $\exists$ zvezna surjektivna preslikava
$$f : X \longrightarrow (\{0,1\}, \mathcal{T}_{dis})$$

X je povezen $:=$ nedostaja (netrivialni) razcep na dve odprti množici

$\Longleftrightarrow$

ne dostaja (netrivialni) razcep na dve zaprti množici

$\Longleftrightarrow$

ne obstaja netrivialna odprto-zaprta množica

$\Longleftrightarrow$

ne obstaja zvezna surjekcija

$$X \to \{0, 1\}$$

Izrek: $X \subseteq \mathbb{R}$ je povezana $\Leftrightarrow$ X je interval

Dokaz:

Značilnost intervala $a, b \in I$, $a < b$

$\forall\ a \leq c \leq b \Rightarrow c \in I$

X ni interval $\Rightarrow \exists a < b < c .\ a, b \in X,\ c \notin X$

$$X = \underset{a \in \uparrow}{X \cap (-\infty, c)} \amalg \underset{b \in \uparrow}{X \cap (c, \infty)}$$

netrivialni razcep na dve odprti podmnožici

$\Leftarrow$ X intervali, ki ima netrivialni razcep na dve odprto-zaprti podmnožici

$$X = \underset{a \in}{U} \amalg \underset{b \in}{V}, \quad a < b$$

$c = \sup \{x \in \mathbb{R} \mid [a, x) \subseteq U\}$ $\quad c < b$

$c \in X$ $\quad c \in U$, ker je U zaprta

U je odprta $\rightsquigarrow$ $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subseteq U$ $\quad \times$

Izrek:

① $f^{zv}: X \to Y$ X je povezan $\Rightarrow f_*(X)$ je povezan

Torej: povezanost je topološka lastnost

② Naj bo $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ družina podmnožic v X

$\bigcap A_\lambda \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup A_\lambda$ je povezana

③ Produkt povezanih je povezan

④ Če za poljubna $a, b \in X$ obstaja pot od a do b (pot v X je $\gamma: [0,1] \xrightarrow{zvezna} X$, $\gamma(0)=a$, $\gamma(b)=b$)

$\Rightarrow X$ je povezan

⑤ Če je $A \subseteq X$ povezana, $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$

$\Rightarrow B$ je povezana

Dokaz:

① $Y = \overset{odp}{U} + \overset{odp}{V}$ netrivialni razcep

$f^*(U) + f^*(V) = X$

$Y \xrightarrow{sur} \{0,1\}$

$\overset{sur}{\uparrow} f$

X $\Rightarrow X$ je razcep

②

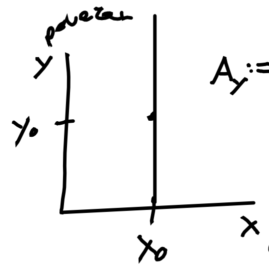
$\bigcap A_\lambda \ni a$

$s^{zv}: \bigcup A_\lambda \twoheadrightarrow \{0,1\}$

$s(a)$ je 0 ali 1

$\rightsquigarrow \forall \lambda \; s_*(A_\lambda) = \{0\}$

$\Rightarrow s_*(\bigcup A_\lambda) = \{0\} \Rightarrow s$ ni surjektivna

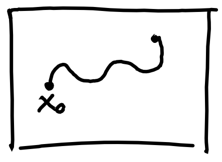
③ 

$A_y := \{x_0\} \times Y \cup X \times \{y\}$

Unija je povezana, ker imata neprazen presek

Unija vsebuje (x_0, y_0)

Uporabimo točko 2

④ 

Recimo da X ni povezan. Potem obstaja zvezna surjekcija v $\{0,1\}$

$\exists a, b. \; s(a) = 0, \; s(b) = 1$

$\exists \gamma: [0,1] \to X \quad \gamma(0) = a \quad \gamma(1) = b$

$[0,1] \xrightarrow{\gamma} X \xrightarrow{s} \{0,1\}$

$s \circ \gamma$ je zvezna surjekcija, ~~ker je~~

$\times$ ker je interval povezan

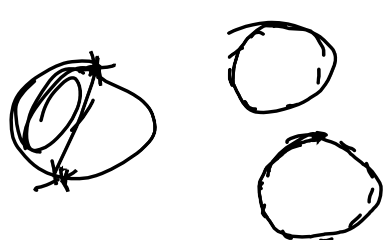
⑤

$B = U^{odp} + V^{odp}$ odprte v B neprazne

$A = A \cap U + A \cap V$

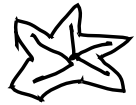
odprte v A odprte v A

Neprazni, ker je B pod zaprtjem A



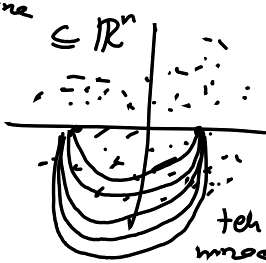
Primeri:

Vsaka konveksna podmnožica v $\mathbb{R}^n$ je zvezna 

Vsaka zvezda je povezana 

Komplement števne množice v $\mathbb{R}^n$ $n>1$ je povezan

$Q^{\text{števna}} \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad a,b \in \mathbb{R}^n - Q$



teh lokov je neštevno mnogo
ker je Q samo števno
ostaja veliko poti samo iz
$\mathbb{R}^n - Q$ da sta a, b povezana

Za $n>1$ $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$

Recimo nasprotno

$f : \mathbb{R}_0 \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n$

$f(\{0\})$

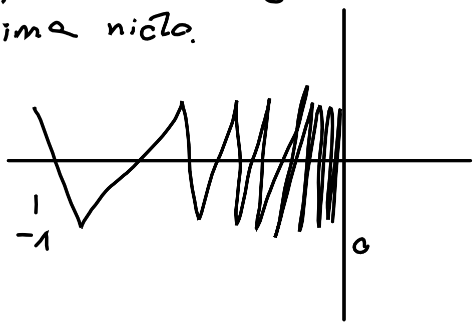
$f : \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}^n - \{f(0)\}$

nepovezan $\qquad$ povezan

Izrek o vmesni vrednosti:

$f^{zv}: X^{pov} \longrightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f_*(X) = $ interval

posebej: Če zaloga vrednosti vsebuje pozitivne in negativne vrednosti, potem f ima ničlo.



$f: [-1, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f_*([-1, 0)) =: L$ povezana

$\overline{L} = L \cup \{0\} \times [-1, 1]$ je povezana ker je zaprtje od L povezane

vendar ne obstaja pot med $(-1, 1)$ in katerokoli točko na $\{0\} \times [-1, 1]$

Dokaz:

Privzemimo:

$$(\gamma_1,\gamma_2) = \gamma : [0,1] \longrightarrow \overline{L}$$

$$\gamma(0) = (-1,1)$$

$$\gamma(1) = (0,0)$$

$$\gamma_1^*(0) \subseteq [0,1]$$

$$m := \min \gamma_1^*(\{0\})$$

$$[0,1] \longrightarrow \overline{L}$$

$$[0,m) \longrightarrow L$$

γ ni zvezna v m

na $\forall$ okolici $(m-\varepsilon, m+\varepsilon)$ zavzame γ_2 vse vrednosti med -1 in 1 v nasprotju z zveznostjo γ_2

Prostor X je povezan s potmi, če med poljubnima $a, b \in X$ obstaja pot v X od a do b

Trditev:

X pot s potmi $\Rightarrow$ X povezan

$\Leftarrow$ ne velja nujno

Dokaz:

Recimo da ni povezan

$a \in A$ $b \in B$

$\gamma(0) = a$ $f^*(A)$ odprta

$\gamma(b) = b$ $f^*(B)$ odprta $\times$

Komponente

$x \in X$

$C(x) :=$ unija vseh povezanih podmnožic celega X, ki vsebujejo x

Trditev: lastnosti komponent

1) $x \in C(x)$
2) $C(x)$ je povezana
3) $C(x)$ je maksimalna povezana podmnožica
4) $C(x)$ je zaprta v X

Dokaz:

1) $C(x) = \bigcup U_i \qquad U_i \ldots$ povezana podmnožica

$U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ker $x \in U_i \cap U_j$

3) co[illegible]

$\bigcup U^{odp} \quad x \notin U$

Primer:

- v diskretnem prostoru so komponente točke
- komponente $\mathbb{Q}$ so tudi točke, ker so edine povezane podmnožice $\mathbb{R}$ intervali
- X je popolnoma nepovezan, če so komponente X enojci

Trditev:

$f^{zv}: X \longrightarrow Y$

$C(x)$ komponenta $X \Rightarrow$

$f_*(C(x)) \subseteq C(f(x))$ komponenta v Y

Trditev: Komponente tvorijo particijo X na disjunktne podmnožice

Dokaz:

$C(x_1) \cup C(x_2) \cup \dots$

$C(x_1) \cap C(x_2) \neq \emptyset \Longrightarrow C(x_1) = C(x_2)$

$C(x_1) \subseteq C(x_1) \cup C(x_2)$

povezano

$x \sim x' \iff \exists A^{pov} \subseteq X .\ x, x' \in A$

komponente so ekvivalenčni razredi

komponente $\mathbb{Q}$ so enojčki, za zaprte vendar niso odprte

Če X ima končno mnogo komponent so komponente odprte, ker je vsaka komplement unije ostalih

X je <u>lokalno povezan</u>, če ima $\forall x \in X$ $\forall U \ni x .\ \exists V^{pov} .\ x \in V \subseteq U$ (če za $\forall$ okolico x obstaja manjša povezana okolica)

Oziroma X ima bazo iz povezanih množic

X je <u>lokalno povezan s potmi</u>: če ima bazo iz množic, ki so povezane s potmi

Primer:

- Odprte mn. v $\mathbb{R}^n$ so lokalno povezane (sp. tudi)
- $\mathbb{Q}$ ni lokalno povez.
- diskretni prostor je lokalno povezan ni pa povezan
- povezan, ni pa lokalno povezan:

v velikem je povezana, lokalno pa ni

Trditev:

X lokalno povezan $\Rightarrow$ komponente X so odprte

X lokalno povezan $\Leftrightarrow$ komponente $\forall$ odprte množice v X so odprte

Dokaz: $(\Rightarrow)$ $U^{\text{odp}} \subseteq X$ baza iz povezanih množic za X

$\rightsquigarrow$ dobimo bazo iz povezanih za U

$(\Leftarrow)$ $\mathcal{B} = \{$komponente odprtih množic v $X\}$

odprte po privzetku

povezane ker so komponente

baza, ker je vsaka odprta množica unija svojih komponent

$\blacksquare$

Ta je Peanifikacija prostora, če $(\Leftarrow)$ naredimo s tem močnejšo bazo

Trditev:

Če je X lokalno povezan s potmi, potem so komponente X = komponente X za povezanost s potmi.

Dokaz:

X, C komponenta od X

morda ima C več potnih komponent

C' potna komponenta za C

ker je X lokalno povezan s potmi

$\Rightarrow$ potne komponente so odprte

C' je komplement unije ostalih potnih komponent $\rightsquigarrow$ C' je komplement odprte množice $\Rightarrow$ C' je zaprta

C' je odprta in zaprta v C, ki je povezana in neprazna $\Rightarrow$ $C' = C$

Posledica:

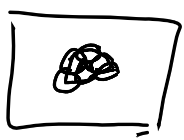
X je lokalno povezan s potmi: $\Longrightarrow$
(X je povezan $\Leftrightarrow$ X je povezan s potmi)

Posledica: Odprte množice v $\mathbb{R}^n$ so povezane $\Leftrightarrow$ ko so povezane s potmi

Kompaktnost

Prostor X je <u>kompakten</u>, če v vsakem odprtem pokritju obstaja končno podpokritje

- dovolj je gledati pokritja z baznimi okolicami
- Kompaktnost podprostora $A \subseteq X$ lahko testiramo na odprtih pokritjih v X



Primer

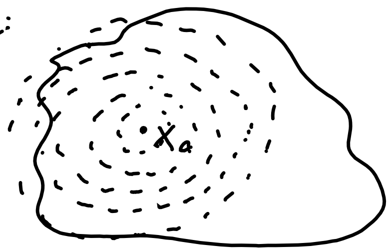
- vsaka končna množica je kompaktna
- 

$\{x_1, x_2, \dots\} \cup \{x\}$ je kompaktna
- $\mathbb{R}$ ni kompakten

Trditev:

V metričnih prostorih je vsaka kompaktna množica omejena

Dokaz:



$K(x_0, 1) \subseteq K(x_0, 2) \dots$

$\bigcup K = X$

če $\exists$ končno podpokritje, potem so vse točke vsebovane v največji krogli

Haneks

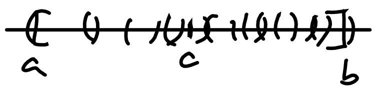
Kraft på kompakten

Rekes

Vinkel på kul

Izrek: $[a,b]$ je kompakten

Dokaz



$\mathcal{U}$ odprto pokritje za $[a,b]$

$c := \sup\{x \mid [a,x]$ ima končno podpokritje v $\mathcal{U}\}$

$c \in U \in \mathcal{U}$

$\exists \varepsilon > 0.\ (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subseteq U$

$[a, c - \frac{\varepsilon}{2}]$ ima končno podpokritje

$\{U_1, \dots, U_n\} \rightsquigarrow \{U_1, \dots, U_n, U\}$ je končno podpokritje za $[a, c+\frac{\varepsilon}{2}]$

če $c < b$ dobimo protislovje

Trditev: Zvezna slika kompakta je kompakt

Dokaz: $f^{zv} : X \xrightarrow{\text{sur. hom}} Y$ Y je kompakten

$\mathcal{U}$ .... odprto pokritje za ~~X~~ Y

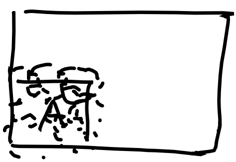
$\{f^*(U) \; ; \; U \in \mathcal{U}\}$ je odprto pokritje za X

$\{f^*(U_1) \dots f^*(U_n)\}$ končno pokritje za X

$U_1 \dots U_n$ ... končno pokritje za Y

Trditev: Zaprta podmnožica kompakta je kompaktna

Dokaz:



$\mathcal{U}$ ... pokritje A z odprtimi v X

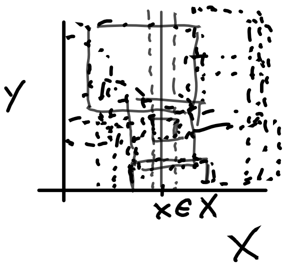
$\underbrace{\mathcal{U} \cup \{X - A\}}$ odprto pokritje X

X ima končno podpokritje $U_1 \dots U_n$

Če je $U_i = X - A$ vzamemo ven, ostane končno podpokritje za A

Izrek: X, Y kompaktna $\Longrightarrow X \times Y$ kompakten

Dokaz: Naj bo $\mathcal{U}$ poljubno pokritje $X \times Y$ s škatlami:



$\{x\} \times Y$

$\mathcal{U} = \{U_\lambda \times V_\lambda ; U_{odpr} \subseteq X \ V_{odpr} \subseteq Y\}$

obstajajo $\{U_{\lambda_1} \times V_{\lambda_1} \dots U_{\lambda_n} \times V_{\lambda_n}\}$ ki pokrive $\{x\} \times Y$

$U_x := U_{\lambda_1} \cap \dots \cap U_{\lambda_n}$ ← je odprto (najožji pas)

$U_x \times Y$ ima končno podpokritje

$\{U_x \mid x \in X\}$ je odprto pokritje za X

$\{U_{x_1} \dots U_{x_n}\}$ je končno podpokritje

Vsak izmed stolpcev $U_{x_1} \times Y \dots U_{x_n} \times Y$ je pokrit s končno mnogimi škatlami iz $\mathcal{U}$, torej je to končno podpokritje

Posledica: $X_1 \dots X_n$ komp $\Rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ kompakten

Opomba: Poljuben produkt kompaktov je kompakt

Posledica: $\forall$ zaprta in omejena podmnožica v $\mathbb{R}^n$ je kompakt

Dokaz: $X \xRightarrow{\text{omejena}} X \subseteq [a,b]^n$ ↳ kompaktna

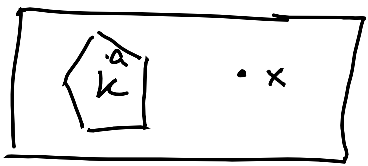
$X \xRightarrow{\text{zaprta}} X$ kompaktna

$\blacksquare$

Trditev:

$X^{\text{Hausdorffov}}$, $K^{\text{komp.}} \subseteq X \Rightarrow K$ zaprt v X

Dokaz



$\forall a \in K . \exists U_a, V_a . a \in U_a, x \in V_a . U_a \cap V_a = \emptyset$

$\{U_a \mid a \in K\}$ so odprto pokritje kompakta K

$\rightsquigarrow \{U_{a_1}, \dots, U_{a_n}\}$ končno podpokritje

$V_{a_1} \cap V_{a_2} \cap \dots \cap V_{a_n}$ so odprta okolica

točke x, ki ne seka K

komplement je odprt ∎

Opomba: S tem prejšnjim dokazom smo dokazali, da ∀ Hausdorffova topologija ostro loči točke od kompakta

Izrek (Heine-Borel-Lebesgue)

Podmnožica v $\mathbb{R}^n$ je kompaktna $\Leftrightarrow$ ko je zaprta in omejena

Opomba:

M metričen.

Zaprte krogle so kompaktne $\Leftrightarrow$ velja Heine-Borel-Lebesgue izrek za ta prostor

Posledica:

$X^{komp} \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow \forall f^{zv}: X \longrightarrow \mathbb{R}$ je omejena

ter zavzame minimum in maksimum

Dokaz:

$f_*(X)$ je kompakt v $\mathbb{R}$, torej omejen, torej ima inf in sup, ker je zaprt sta inf in sup elementa zaloge vrednosti, torej sta minimum in maksimum

Trditev: v kompaktu ima $\forall$ neskončna množica stekališče

Dokaz: Naj bo $X \overset{\text{komp}}{\supseteq} A$ brez stekališča

$\forall x \in X . \exists U_x \ni x . U_x \cap A$ je končna za X.

$\{U_x \mid x \in X\}$ odprto pokritje za X

$\rightsquigarrow U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ pokritje za X (in za A)

$\rightsquigarrow A$ je končna

$\blacksquare$

Posledica: (Bolzano-Weierstrass)

Vsako omejeno zaporedje v $\mathbb{R}^n$ ima konvergentno podzaporedje

Dokaz: $x_1, x_2, x_3, \ldots \subseteq [a,b]^n$

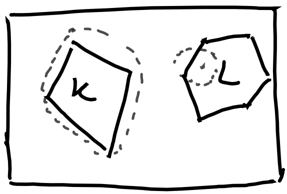
ločimo → množica elementov zaporedja je končna (vsaj kateri se ponovi neskončnokrat. konstantno podzaporedje je konvergentno.

→ množica elementov je neskončna, ima stekališče, ki je limita nekega podzaporedja

Izreki:

Prostor ki je kompakten in Hausdorffov je normalen

Dokaz:



$\forall x \in L . \exists U_x, V_x . K \subseteq U_x$
$x \in V_x . \; U_x \cap V_x = \emptyset$

$\{V_x \mid x \in L\}$ je odprto pokritje za L

ker je L kompakten $\exists V_{x_1}, \dots, V_{x_n}$ končno podpokritje $U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_n}$ je odprta okolica za K in $V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}$ je odprta okolica za L in sta si disjunktni.

S tem smo dokazali, da $\forall$ Hausdorffova topologija ostro loči kompakte.

$X^{\text{kompakten, Hausdorffov}}$

$A, B^{\text{zap. disjunktni}} \subseteq X \Rightarrow A, B$ kompaktni

$\exists U, V^{\text{odp}} . \; A \subseteq U, B \subseteq V . \; U \cap V = \emptyset$

X^{komp}: $\forall$ odp pokritje $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ $\bigcup U_\lambda = X$

$\exists$ podpokritje $\{U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n}\}$

$$\Longleftrightarrow$$

$\{U_\lambda^c\}_{\lambda\in\Lambda}$ zaprtje $\bigcap\limits_\lambda U_\lambda^c = \emptyset$

$\exists$ $U_{\lambda_1}^c \cap \dots \cap U_{\lambda_n}^c = \emptyset$

Trditev: X je kompakten $\Leftrightarrow$ v $\forall$ družini zaprtih podmnožic s praznim presekom obstaja končna poddružina, katere presek je tudi prazen

Dokaz

Posledica (Cantorjev izrek)

X^{komp} $F_1^{\text{zap}} \supseteq F_2^{\text{zap}} \supseteq \ldots$

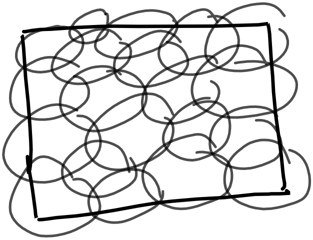
padajoče zaporedje zaprtih nepraznih podmnožic

$\Rightarrow \bigcap F_i \neq \emptyset$

Dokaz: Če bi veljalo, da je $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$, potem bi imeli neko končno podpokritje $F_{i_1} \ldots F_{i_n}$ ki bi imela prazen presek $= F_{i_n}$

$\times$

Cilj: f^{zv} $X^{komp,\,metr} \longrightarrow Y^{metr} \Rightarrow f$ enakomerno zvezna



~~Trditev~~ Def: Če je $\mathcal{U}$ odprto pokritje za X, $\lambda > 0$ je ~~Lebesgueova~~ Lebeguevo število pokritja $\mathcal{U}$, če $\forall$ podmnožice s premerom $< \lambda$ leži v celoti v enem elementu $\mathcal{U}$

Trditev: Za $\forall$ odprto pokritje kompaktnega metričnega prostora vsebuje Lebeguova število

Dokaz:

$\mathcal{U}$ odprto pokritje za X^{komp}

$U_1 \ldots U_n$ končno podpokritje

$$\forall x \in X \quad \max\{d(x, U_1^c)\, d(x, U_2^c) \ldots d(x, U_n^c)\} =: f(x)$$

f je zvezna: $X^{komp} \to \mathbb{R}$ $\quad f > 0$

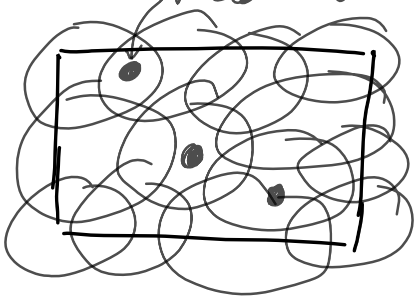
f zavzame minimum $\quad \lambda = \min f(x) > 0$

∎

Lebesgueva lema

$X^{\text{komp, metr}}$, za $\forall$ odprto pokritje $\mathcal{U}$ $\exists$ Lebesguevo število $\lambda > 0$, da je $\forall$ množica z diam $< \lambda$ vsebovana v nekem elementu $\mathcal{U}$

v celoti v $\forall \in \mathcal{U}$



Posledica:

$f \overset{zv}{:} X^{\text{komp, metr}} \longrightarrow Y^{\text{metr}}$

je enakomerno zvezna

Dokaz:

$\varepsilon > 0$. Y pokrijemo s kroglami: $\{K(y, \frac{\varepsilon}{2}) \mid y \in Y\}$

$\rightsquigarrow \{f^{-1}(K(y, \frac{\varepsilon}{2})) \mid y \in Y\}$ so pokritje X

$\delta :=$ lebesguejevo število tega pokritja

$d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon$

(ker sta v isti krogli)

■

X je lokalno kompakten če ima $\forall$ točka X kompaktno okolico

Tj. $\forall x \in X.\ \exists K^{komp} \subseteq X.\ x \in \operatorname{Int} K$

Privzetek: $X^{hausdorffov}$ je lokalno kompakten, ko ima topologija baze iz relativno kompaktnih odprtih množic

(njeno zaprtje je kompaktno)

Zgled

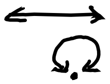
- $\forall$ kompakten je lokalno kompakten
- $\mathbb{R}^n$ je lokalno kompakten
- diskreten prostor je lokalno kompakten
- $\mathbb{Q}$ ni lokalno kompakten

Trditev:

X lokalno kompakten in Hausdorfov

$\Rightarrow$ X regularen

$X^{\text{poljuben}} \cup \{\infty\}$ ← pač ena točka



$= X^+$

$$(X,\mathcal{T}) \rightsquigarrow (X^+,\mathcal{T}^+)$$

$$\mathcal{T}^+ = \mathcal{T} \cup \underbrace{\text{okolice točke } \infty}_{\text{vse množice oblike}}$$

$$\{\infty \cup K^c \mid K \text{ je kompakt v } X\}$$

$\mathcal{T}^+$ je topologija na X^+

· rutinsko preverjanje

X^+ je kompakten

$\mathcal{U}$ odprto pokritje za X^+

$\infty \in U \in \mathcal{U}$

U^c je kompakt in ima končno podpokritje iz $\mathcal{U}$

X^+ ... kompaktifikacija z eno točko oz kompaktifikacija Aleksandrova

Uporabimo eno trditev naprej →

X lokalno kompakten, Hausdorfov $\rightsquigarrow$

X^+ kompakten, Hausdorfov $\rightsquigarrow$

X^+ normalen (torej regularen) $\rightsquigarrow$

X regularen, ker je regularnost dedna

Primer:

- X števna diskretna $\Longrightarrow X^+ \approx \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} \cup \{0\}$
- $X = (0,1) \Rightarrow X^+ \approx S^1$
- $\mathbb{Q}^+$ ni hausdorffov

. . . . - - - - -

- stožnevsebljivostne točke

Trditev:

X lokalno kompakten, Hausdorffov $\Leftrightarrow$

X^+ je kompakten, Hausdorffov

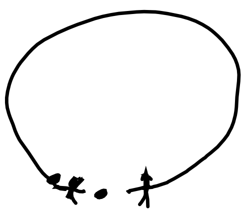
Dokaz:

$x, x' \in X$

$x \in X, \infty$

$x \in \operatorname{Int} X \quad K^{\text{komp}} \subseteq X$

$\underset{\underset{x}{\rotatebox{90}{$\in$}}}{\operatorname{Int} K}, \quad \underset{\underset{\infty}{\rotatebox{90}{$\in$}}}{K^c \cup \{\infty\}}$ odprta disjunktni v X^+



Izrek: (Baireov izrek)

X lokal. komp, Hausdorffov

(velja tudi za polne metrične prostore)

$F_1, F_2, F_3 \dots$ zaporedje zaprtih množic s prazno notranjostjo

$\Rightarrow F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \dots$ ima tudi prazno notranjost

Temu rečemo Baireova lastnost

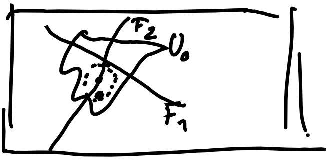
Dokaz:

$U_0^{odp} \subseteq X$

$x_1 \in U_0 - F_1$

$\rightsquigarrow \exists U_1 . \overline{U_1}$ kompaktna . $x_1 \in U_1$

$U_1 \cap F_1 = \emptyset$



$\exists x_2 \in U_1 - F_2 . \exists U_2 . \overline{U_2}$ komp . $x_3 \in U_2$

$\overline{U_1} \supseteq \overline{U_2} \supseteq \overline{U_3} \supseteq \dots$ padajoče zaporedje kompaktov, $\bigcap \overline{U_i} \neq 0$

$\rightsquigarrow U_0$ ni pokrit z $\{F_i\}$

(vsaj ena točka iz U_0 ni v $\{F_i\}$)

∎

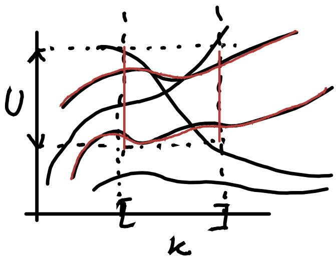
Prostori preslikav

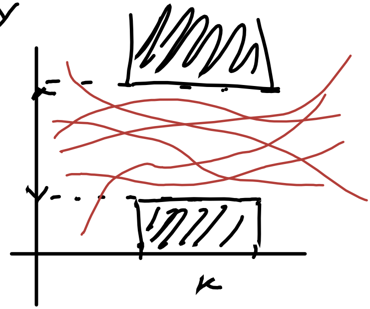
X, Y prostora

$\rightsquigarrow$ $C(X,Y)$ množica, ki jo opremimo z neko topologijo (prostori Soboleva)

$$\langle K, U\rangle := \{ f \overset{zv}{:} X \to Y \mid f(K) \subseteq U \}$$

$K^{komp} \subseteq X \cdot U^{odp} \subseteq Y$





$$\langle K, U\rangle \subseteq C(X,Y)$$

Kompaktno odprta topologija je topologija, ki jo generira predbaza $\{\langle K, U\rangle ; K^{komp} \subseteq X, U^{odp} \subseteq Y\}$ (co-topologija)

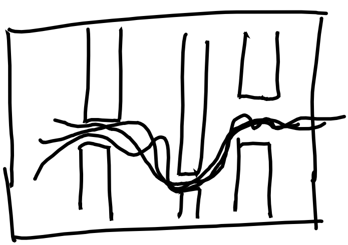
$C(X,Y)$

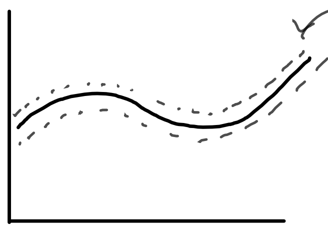
predbaza: $\{\langle K, U\rangle \mid K \overset{komp}{\subseteq} X,\ U \overset{odp}{\subseteq} Y\}$

$$\langle K,U\rangle := \{f : X \to Y \ ; \ f(K) \subseteq U$$

$\mathcal{T}_{co}$ .... kompaktno odprta topologija na $C(X,Y)$

$\mathcal{T}_{co}$ ustreza „topologiji enakomerne konvergence na kompaktih





To je bazna odprta množica

Baze:

$$\langle f, K, \varepsilon \rangle = \{ g : X \Rightarrow Y^{metr} \mid d_Y(g(x), f(x)) < \varepsilon \text{ za } \forall x$$

$$\mathcal{B} = \{ \langle f, K, \varepsilon \rangle \mid f \in C(X,Y);\ K^{komp} \subseteq X,\ \varepsilon > 0$$

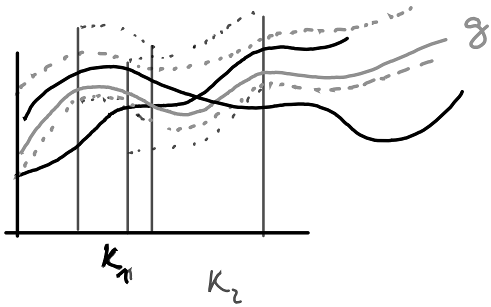
Trditev: Y metričen $\Longrightarrow$ $\mathcal{T}_{CO}$ = top. enakomerne konvergence na kompaktih

Dokaz

$\{\langle f, K, \varepsilon \rangle\}$ je res baza

Recimo da je presek neprazen

$$\langle f_1, K_1, \varepsilon_1 \rangle \cap \langle f_2, K_2, \varepsilon_2 \rangle \ni g$$



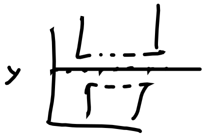
$$\langle g, K_1 \cup K_2, \min\{ \varepsilon_1 - \max_{x \in K_1} \{ d(f_1(x), g(x)) \}, \ \varepsilon_2 - \max \{ d(f_2(x), g(x)) \} \}$$

Pokritje: očitno

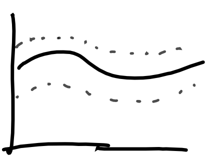
2)

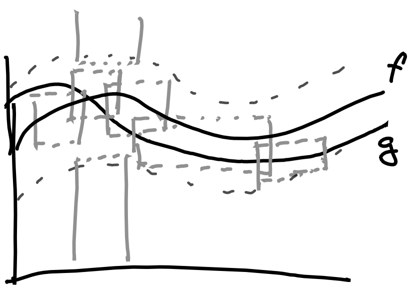
$\underline{\mathcal{T}_{co} \subseteq \mathcal{T}_{e,k,k}}$

$\langle K, K(y,\varepsilon)\rangle = \langle c_y, K, \varepsilon\rangle$



$\mathcal{T}_{ekk} \subseteq \mathcal{T}_{co}$





$c \in K$ $\quad U_c = \{x \in K \mid d(f(x), g(c)) < (\varepsilon - d(f(c)-g(c)))\}$

$\rightsquigarrow$ $\exists$ končno podpokritje za K

dobimo $U_{c_1}, \dots, U_{c_n}$ za K

zaprto v K

$f\,\cancel{g} \in \langle \bar{U}_{c_1} \cap K_1, K(\cancel{g}\,f(c_1), \frac{\varepsilon}{2})\rangle \cap \dots \langle \bar{U}_{c_n} \cap K, K(\cancel{g}\,f(c_n), \frac{\varepsilon}{2})\rangle$

je okolica v $\mathcal{T}_{co}$ $\quad \subseteq \langle f, K, \varepsilon\rangle$

lahko ali pa samo?

Dokazujemo da v vsaki bazni množici ostaja bazna množica

$\{C(X,Y), \mathcal{T}_{co}\}$

$i: Y \hookrightarrow C(X,Y)$

$y \longmapsto c_y$ - konstantna funkcija pri y

i je vložitev

$i^* \langle K, U\rangle = U \quad \langle K, U\rangle \cap i(Y)$

Y lahko gledamo kot podprostor v $C(X,Y)$

Trditev:

a) $C(X,Y)$ je Hausdorffov $\Leftrightarrow$ Y je Hausdorffov

b) $C(X,Y)$ je regularen $\Leftrightarrow$ Y je regularen

Dokaz: $f, g \in C(X,Y)$ $f \neq g$

$\exists x.\ f(x) \neq g(x)$

Naj bosta $U, V^{odpr} \subseteq Y$

$f(x) \in U$, $f(y) \in V$ $U \cap V = \emptyset$

$\langle \{x\}, U \rangle$ $\langle \{x\}, V \rangle$

$\ni f$ $\ni g$

b) DN. $\blacksquare$

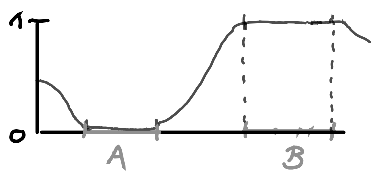
Preslikave na normalnih prostorih

Kdaj obstajajo nekonstantne preslikave $f: X \longrightarrow Y$ ($\mathbb{R}$)

Izrek: (Urisonova Lema)

X je $T_4 \iff$ za $A, B^{zap} \subseteq X$, $A \cap B = \emptyset$.

$\exists f^{zv}: X \longrightarrow [0,1]$. $f_*(A) = 0$ $f_*(B) = 1$



Dokaz:

($\Leftarrow$) Topologija ostro loči disjunktne zaprte množice

A, B zap $A \cap B = \emptyset$

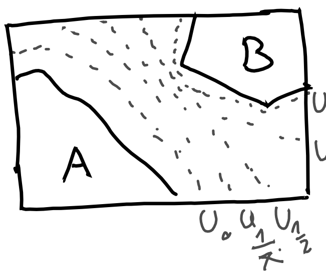
$f^{zv} X \to [0,1]$ $f_*(A) = 0$ $f_*(B) = 1$

$f^*([0, \frac{1}{2})) = U \supseteq A$

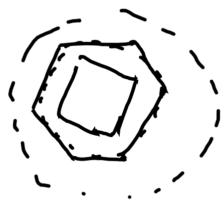
$f^*((\frac{1}{2}, 1]) = V \supseteq V$

$U \cap V = \emptyset$

($\Rightarrow$)



$A^{zap} \subseteq U^{odp}$



$\exists V.\ A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$

$U_1 = X - B$

$A \subseteq U_1$ $\exists U_0.\ A \subseteq U_0 \subseteq \bar{U}_0 \subseteq U_1$

$\bar{U}_0 \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \bar{U}_{\frac{1}{2}} \subseteq U_1$

$\bar{U}_0 \subseteq U_{\frac{1}{4}} \subseteq \bar{U}_{\frac{1}{4}} \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \bar{U}_{\frac{1}{2}} \subseteq U_{\frac{3}{4}} \subseteq \bar{U}_{\frac{3}{4}} \subseteq U_1$

$U_{\frac{1}{8}}$ $U_{\frac{3}{8}}$ $U_{\frac{5}{8}}$ $U_{\frac{7}{8}}$

$\rightsquigarrow \{U_r \mid r$ je dvojiški ulomek $(r = \frac{k}{2^n})\}$

odp v X $r < s \Rightarrow \bar{U}_r \subseteq U_s$

$$f(x) := \begin{cases} \inf\{r \mid x \in U_r\}; & x \notin B \\ 1; & x \in B \end{cases}$$

$f: X \longrightarrow [0,1]$ $f(A) = 0$ $f(B) = 1$

f je zvezna

$x \in X$. $f(x) \in (0,1)$

$\varepsilon > 0$

$f(x) - \varepsilon < r < f(x) < s < f(x + \varepsilon)$

dvojiška ulomka

$U_s - \bar{U}_r$ je neprazna odprta množica v X

(X, d) metrika

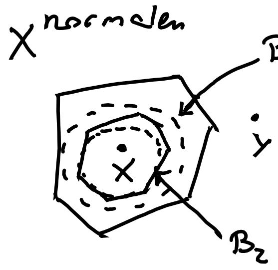
A, B zap, disj $\subseteq X$

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x,A) + d(x, B)} \text{ je zvezna}$$

$f(A) = 0$

$f(B) = 1$

Cilj: Pokazati da prostor, ki je normalen in drugi števen je metrizabilen



zaprta

$X - B_1 \ni y$

$\exists f : X \longrightarrow [0,1]$

$f(\overline{B_2}) = 0 \quad f(X - B_1) = 1$

To lahko naredimo za poljubni bazični okolici $B_1 \subseteq \overline{B_1} \subseteq B_2$

V 2-števnem normalnem prostoru dostaja števen nabor takih funkcij

$f_1, f_2, f_3 \ldots$

vsaki točki priredimo zaporedje

$x \in X \longmapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots)$

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$d(x_i, y_i) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$

Pogoj da je ta metrika definirana je da se omejimo na zaporedja, za katere je $\sum x_i^2 < \infty$ "kvadratno sumabilna zaporedja"

standardna oznaka l^2

l^2 = metrični prostor s kvadratom sumabilnih zaporedij in z evklidsko metriko

$f : X \longrightarrow l^2$

$f(x) = \left(f_1(x), \frac{f_2(x)}{2}, \frac{f_3(x)}{3}, \ldots \right)$

$\sum \ldots \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots < \infty$

f je vložitev (je homeomorfizem na sliko

injektivnost: $\exists_i\ f_i(x) \neq f_i(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

zveznost:

Topologija na l^2 je produktna

DN

f je zvezna $\Leftrightarrow$ ~~kadar~~ je zvezna na komponentah

$(f_1, f_2, \ldots)$ To je zvezno

zveznost inverza

. . .

Izrek: (Urisonov metrizacijski izrek)

X normalen, 2-števen $\Rightarrow$ X je metrizabilen

Posledica:

X regularen, 2-števen $\Rightarrow$ X je metrizabilnost

Pravzaprav (ker reg+2-štetnost $\Rightarrow$ norm.)

X 2-števen $\Rightarrow$ (X regularen $\Leftrightarrow$ X metrizabilen)

Nagata smirnov

$X^{norm} \supseteq A, B$ disj. zap.

disjunktna unija

$$\begin{tikzcd}
& f : A \amalg B \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rr] \arrow[dd, hook] & & \mathbb{R} \\
0 & & 1 & \\
& X \arrow[uurr, dashed, "F"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dokazali bomo Tietzejev izrek

Tietzejev izrek:

Naj bo $A^{zap} \subseteq X^{norm}$

$f : A \longrightarrow \overset{\text{interval}}{J} \subseteq \mathbb{R}$

$\exists\, F : X \longrightarrow J$ razširitev f da ta diagram

tj $F|_A = f$ komponira

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & J \\
X \arrow[ur, dashed, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

razširitev

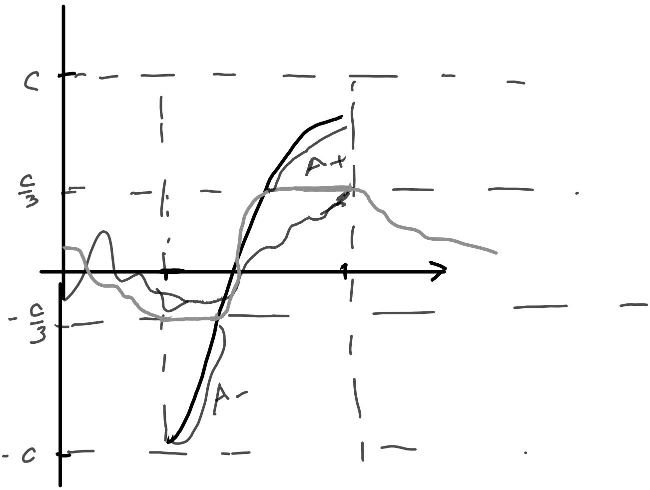
$F \circ i = f$

Lema:

$A^{zap} \subseteq X^{norm}$, $f : A \to [-c, c]$

$\exists h. X \longrightarrow [-\frac{c}{3}, \frac{c}{3}]$

$|h(x) - f(x)| \leq \frac{2}{3} c$ za $\forall x \in A$



Dokaz:

$A_+ := \{x \in A \mid f(x) \geq \frac{c}{3}\}$

$A_- := \{x \in A \mid f(x) \leq \frac{c}{3}\}$

obe zaprti v X

h naj bo Urisonova funkcija

$h : (X, A_-, A_+) \longrightarrow ([-\frac{c}{3}, \frac{c}{3}], -\frac{c}{3}, +\frac{c}{3})$

Dokaz Tietzeovega izreka

$f^{zv}: A^{zap} \longrightarrow [-1,1]$ BŠZS

Po lem: $\exists h_1 : X \longrightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

$|f - h_1| \leq \frac{2}{3}$ na A

$f - h_1 : A \longrightarrow [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$

po lem: za $c = \frac{2}{3}$

$\exists h_2 : X \longrightarrow \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right]$

$|f - h_1 - h_2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$

Nadaljujemo $h_1 \, h_2 \ldots$

$F = h_1 + h_2 + h_3 + \ldots : X \longrightarrow [-1,1]$

konvergira za $\forall x$

$F/A = f$

$\blacksquare$

$f: X \to \mathbb{R}$

nosilec $f := [f \neq 0] = \overline{f^*(\mathbb{R} - \{0\})}$

zaprtje tega, kje je $f \neq 0$

$\{U_1, \dots, U_n\}$ odprto pokritje za X

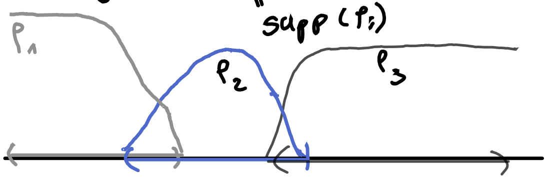
<u>Razčlenitev enote</u> podrejena pokritju $\{U_1, \dots, U_n\}$

je nabor $\rho_1, \dots, \rho_n : X \to [0,1]$

$\rho_1 + \dots + \rho_n = 1$

$(\rho_1(x) + \dots + \rho_n(x) = 1$ za $\forall x)$

in velja $\underset{\substack{\| \\ \text{supp}(\rho_i)}}{\text{nosilec}(\rho_i)} \subseteq U_i$

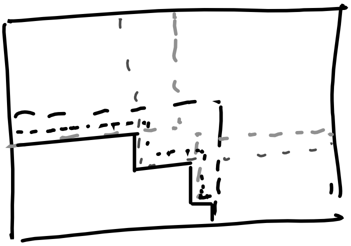


Izrek:

X^{norm} $\{U_1 \dots U_n\}$ odp pokritje

Obstaja razčlenitev enote podrejene temu pokritju

Dokaz:



1. korak

skrčimo do pokritja

$\{V_1, \dots V_n\}$ $\overline{V_i} \subseteq U_i$

$A_1 \overset{zap}{=} X - U_2 - \dots U_n \subseteq U_1$

$\exists V_1 \overset{odp}{:} A_1 \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq U_1$

$\{V_1, U_2 \dots U_n\}$ je odprto pokritje

ponovimo

Dobimo $\{V_1 \dots V_n\}$

Vse to skupaj naredimo še enkrat

Dobimo $\{W_1 \dots W_n\}$ odprto pokritje

$W_i \subseteq \overline{W_i} \subseteq V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$

$\rho_i : X \longrightarrow [0,1]$

$\rho_i(\overline{W_i}) = 1 \quad \rho_i(X - V_i) = 0$

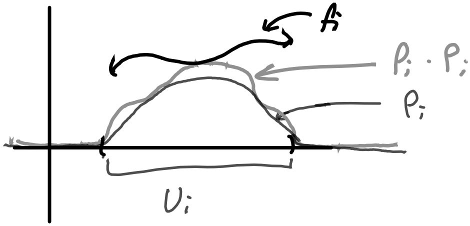
$\rho = \rho_1 + \dots + \rho_n$ je povsod >0

$\frac{\rho_1}{\rho}, \frac{\rho_2}{\rho}, \dots \frac{\rho_n}{\rho}$ se ~~sestejejo~~ v 1

nosilec $\frac{\rho_i}{\rho}$ $\overset{\text{zvezne so}}{=}$ nosilec $\rho_i \subseteq U_i$

$f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_i \cdot \rho_i \ (x) = \begin{cases} f_i(x) \cdot \rho_i(x) & \text{za } x \in U_i \\ 0 ; & x \in X - \operatorname{supp}(\rho_i) \end{cases}$$



$f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R} \quad i \in \{1, \dots, n\}$

razčlenitev enote podrejena $\{U_i\}$

$\rightsquigarrow f := f_i \, \rho_i + \dots f_n \cdot \rho_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$

Primer: X kompakten, T_2 in

$\forall$ točka ima okolico, ki je izomorfna $\mathbb{R}^n$

(n-razsežna mnogoterost)

Potem X lahko vložimo v nek evklidski prostor.

Obstaja pokritje $U_1, \ldots U_n$

$$U_i \underset{f_i}{\xrightarrow{\cong}} \mathbb{R}^n$$

Izberemo razčlenitev enote $\rho_1, \ldots \rho_n$

$$f := (\underbrace{\rho_1, \ldots \rho_m}_{\mathbb{R}^{m \cdot 1}}, \underbrace{f_1 \cdot \rho_1, \ldots f_m \rho_m}_{\mathbb{R}^{n}{}_{m \cdot n}}) : X \to \mathbb{R}^{m(n+1)}$$

f je zvezna ker so vse koordinate zvezne

f je injektivna $f(x) = f(y)$, $\rho_i(x) = \rho_i(y) > 0$

$f_i(x) = \rho_i(y) \Rightarrow x = y$

f je vložitev ker slika iz kompakta v T_2

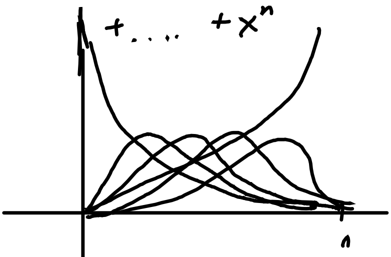
Stone-Weierstrasov izrek

Weierstrasov izrek: Polinomi so gosti v $C[a,b]$
Tj. vsako zvezno funkcijo lahko poljubno enakomerno aproksimiramo s polinomi)

Bernsteinovi polinomi

$$1 = ((1-x)+x)^n =$$
$$= (1-x)^n + \binom{n}{1}(1-x)^{n-1}x + \dots + \underbrace{\binom{n}{i}(1-x)^{n-i}x^i}_{B_{n,i}(x)} + \dots + x^n$$

$\to$ Beinsteinov (n,i) polinom



je razdelitev enote, ki ni podrejena drobnemu pokritju

$f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) := \sum_{i=0}^{n} f\left(\tfrac{i}{n}\right) \cdot B_{n,i}(x)$$

$f_n(x)$ konvergirajo k $f(x)$

Dokaz:

f zvezna. $M := \max\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$

$$f_n(x) - f(x) = \left(\sum f\left(\tfrac{i}{n}\right) \cdot B_{n,i}(x)\right) - \left(f(x) \cdot \sum B_{n,i}(x)\right)$$

$$= \sum_{i}^{n} \left(f\left(\tfrac{i}{n}\right) - f(x)\right) B_{n,i}(x)$$

$$|f_n(x) - f(x)| \le \sum_i \left|f\left(\tfrac{i}{n}\right) - f(x)\right| B_{n,i}(x) =$$

$$\forall \varepsilon > 0.\ \exists \delta > 0.\ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

izberemo $\varepsilon \to \delta$ enakomerne zveznost polinomov

$$= \underbrace{\sum_{i : |x - \frac{i}{n}| < \delta} \underbrace{\left|f\left(\tfrac{i}{n}\right) - f(x)\right|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \cdot B_{n,i}(x)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \sum_{i : |x - \frac{i}{n}| \ge \delta} \left|f\left(\tfrac{i}{n}\right) - f(x)\right| B_{n,i}(x)$$

$$\sum_{i : |x - \frac{i}{n}| \ge \delta} \overbrace{\left|f\left(\tfrac{i}{n}\right) - f(x)\right|}^{\le 2M} \cdot B_{n,i}(x) \le 2M \sum_{|x - \frac{i}{n}| \ge \delta} B_{n,i}(x)$$

$$\boxed{\text{Velja: } \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{x - i}{n}\right)^2 \cdot B_{n,i}(x) = \frac{x(1-x)}{n}}$$

$$\le 2M \sum_i \frac{\left(\frac{i}{n} - x\right)^2}{\delta^2} \cdot B_{n,i}(x) \le \frac{2M}{\delta^2} \frac{x(1-x)}{n} \le$$

$$\le \frac{2M}{\delta^2 n} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ za dovolj velik } n$$

■

M. Stone:

$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$

$\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ je algebra

$f_1, f_2, f_3, \ldots$

Najmanjša unitarna podalgebra $\mathcal{C}(X, A)$, ki vsebuje $f_1, f_2, f_3 \ldots$ je sestavljena iz

$p(f_{i_1}, \ldots, f_{i_n})$ p polinom n spremenljivk

f_{i_k} so iz nabora

Izrek (Stone-Weierstrasov izrek)

Če je $A \subseteq \mathcal{C}(X^{\text{normalen}})$ unitarna podalgebra, ki $\underbrace{\text{loči točke}}_{\forall x \neq x' \in X \ \exists f \in A . f(x) \neq f(x')}$, potem je $\mathcal{C}(X) = \bar{A}$

↳ v C-0 topologiji

Če je v A vsaj ena injektivna funkcija, potem A loči točke

sinx in cosx ne ločita vseh točk (na intervalu $[0,2\pi]$), ampak skupaj jih

Dokaz

$k(t) = \sqrt{t}$ je enakomerna limita polinomov (na $[0,1]$) po Weierstrasovem izreku

- $f \in A, f > 0 \quad \sqrt{f} \in \bar{A}$ (A ... algebra) (A podalgebra ⇒ $\bar{A}$ podalgebra)
- $|f| = \sqrt{f^2} \in \bar{A}$ (f podalgebra)
- $f, g \in A \quad \max(f,g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$

$\min(f,g) = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$

⇒ $\varepsilon > 0 . \ |\sqrt{t} - (a_0 + a_1 t + \dots a_k t^k)| < \varepsilon$

M max f na kompaktu

. . . . . ??

- $\max\{f_1 \dots f_n\}$
- $\min\{f_1 \dots f_n\}$ $\quad \in \bar{A}$

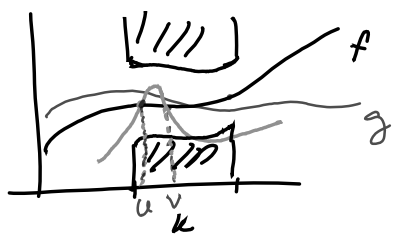
$x \neq x' . \exists g \in A : X \to \mathbb{R} \quad g(x) \neq g(x')$

$\Rightarrow \forall a,b \ \exists h \in A . \ h(x) = a \quad h(x') = b$

$h(t) := a + \dfrac{b-a}{g(x')-g(x)} (h(t) - h(x))$

$f \in \mathcal{C}(X)$, $\langle f, K, \varepsilon \rangle$ ... bazična okolica

Iščemo $g \in A \cap \langle f, K, \varepsilon \rangle$



$\forall u, v \in K$ izberemo

$h_{u,v} : X \to \mathbb{R}$

$h_{u,v}(u) = f(u) \quad h_{u,v}(v) = f(v)$

Pri fiksnem u definiramo

$U_v := \{x \in K \mid h_{u,v}(x) < f(x) + \varepsilon\}$

je okolica v

$\{U_v\}$ je odprto pokritje K $U_{v_1}, \dots U_{v_n}$

$h_u := \min\{h_{u,v_1}, \dots h_{u v_n}\}$

Dobimo funkcijo ki ne gre višje od $f(x) + \varepsilon$

$\forall u$ definiramo $V_u := \{x \in K . \ h_u(x) > f(x) - \varepsilon\}$

$\{V_u \mid u \in K\}$ so odprto pokritje K

$V_{u_1} \dots V_{u_n}$ je končno podpokritje

$h := \max\{h_{u_1} \dots h_{u_n}\} \in \bar{A}$

Torej bo h znotraj okolice