Osnove Newtnove mehanike

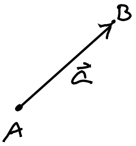
Def: Afini prostor $\mathcal{A}$ nad vektorskim prostorom $\mathcal{V}$ je množica $\mathcal{A}$ z binarno operacijo $\mathcal{A}\times\mathcal{V}\longrightarrow\mathcal{A}:(A,\vec{a})\longmapsto A+\vec{a}$ z lastnostmi:

i) $(A+\vec{a})+\vec{b}=A+(\vec{a}+\vec{b})$

ii) $\forall\, A,B\in\mathcal{A}\ \exists!\, \vec{a}\in\mathcal{V}.\ B=A+\vec{a}$

$\dim\mathcal{A}=\dim\mathcal{V}$

Primeri:



Def: Definiramo operacijo $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{V}$.
s predpisom $B-A=\vec{a}\Leftrightarrow \vec{B}=A+\vec{a}$

Trditev:

i) $A-A=\vec{0}$

ii) $(A-B)+(B-A)=\vec{0}$

iii) $(A-B)+(B-C)+(C-A)=\vec{0}$

iv) $(A-B)+\vec{a}=(A+\vec{a})-B$

v) $(A+B)-C=B+(A-C)$

Dokaz:

i) $A-A=\vec{a}\Leftrightarrow A=A+\vec{a}\Leftrightarrow A=(A+\vec{a})+\vec{a}=A+2\vec{a}$

$\Rightarrow\ \vec{a}=2\vec{a}$ (ker je $\vec{a}$ natanko določen)

$\Rightarrow\ \vec{a}=\vec{0}$

v) $A-C=\vec{a}\ \Rightarrow\ A=C+\vec{a}$

$B+(A-C)=B+\vec{a}=C+(\vec{b}+\vec{a})$

$B-C=\vec{b}\Rightarrow B=C+\vec{b}$

vektor, zato lahko zamenjamo oklepaje

$(A+B)-C=\big((\overbrace{C+\vec{a})+(C+\vec{b}}^{\text{vektor}})\big)-C=$

$=C+\vec{a}+(\underbrace{C+\vec{b}-C}_{\text{vektor}})=\vec{C}+\vec{a}+\vec{b}$

$(\mathcal{A}, V)$ $(\mathcal{A}', V')$

$g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$

Def: Preslikava $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ je afina če obstaja

$dg \in \mathcal{L}(V, V')$ tako da velja $g(A) - g(B) = dg(A-B)$
za $\forall A, B \in \mathcal{A}$

$$g(A) = g(B) + dg(A-B)$$

$g(A) = g(O) + dg(A-O)$; O je pol afine preslikave

Izbira pola je poljubn

$$\tilde{g}(A) = g(\tilde{O}) + dg(A-\tilde{O}) = g(O) + dg(\tilde{O}-O) + dg(A-\tilde{O})$$
$$= g(O) + dg(\underbrace{(\tilde{O}-O) + (A-\tilde{O})}_{A-O}) = g(A)$$

Izberimo $O \in \mathcal{A}$ $\qquad \vec{a} = A - O$

$$A \in \mathcal{A} \; ; \; A = O + (A-O) = O + \vec{a}$$

$\forall A \in \mathcal{A}$ lahko identificiramo z vektorjem $\vec{a} \in V$

Definicija: Galilejeva struktura G je trojica $(\mathcal{A}, \tau, d)$, kjer je $\mathcal{A}$ štirirazsežen afini prostor, $\tau \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ in d evklidska razdalja nad prostorom istočasnih dogodkov.

linearna preslikava

Funkcionalu τ pravimo časovnost. Dogodka $A, B \in \mathcal{A}$ sta istočasna, če $A - B \in \ker \tau$

Definicija: Galilejevi strukturi $G(\mathcal{A}, \tau, d)$ in $\tilde{G}(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\tau}, \tilde{d})$ sta ekvivalentni, če obstaja afina bijekcija $g: \mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}$, ki ohranja časovnost in razdaljo istočasnih dogodkov

$$\tilde{\tau}(g(A) - g(B)) = \tau(A - B)$$

A, B istočasna $\Leftrightarrow$ $g(A), g(B)$ istočasna

$$d(A, B) = \tilde{d}(g(A), g(B))$$

Definicija

$\mathbb{R}\times E$ afini prostor, kjer je E trorazsežni evklidski prostor

Na $\mathbb{R}\times E$ vpeljemo naravno Galilejevo strukturo.

$$A\in \mathbb{R}\times E \Rightarrow A=(t,P) \quad t\in\mathbb{R},\ P\in E$$

ima normo podano s skalarnim produktom

$$\tau(A_2-A_1)=t_2-t_1$$

$$d(A_1,A_2)=\|P_1-P_2\|$$

Tej strukturi pravimo naravna Galilejeva struktura

Definicija: Koordinatni sistem na afinem prostoru $\mathcal{A}$ je bijektivna preslikava $\varphi:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$

$$A\mapsto \varphi(A)=(\pi_t\varphi(A),\pi_P\varphi(A))$$
$$=\varphi_t(A),\varphi_P(A))$$

za katero je φ_t afina preslikava

$$(\mathbb{R}\times E,\ t,\ \|\ \|)$$

$$\tau(A-B)=t(\varphi_t(A)-\varphi_t(B))$$

$$d(A,B)=\|\varphi_P(A)-\varphi_P(B)\|$$

Lahko merimo razdaljo tudi med neistočasnimi dogodki

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\tilde{\varphi}"'] & \mathbb{R}\times E \arrow[d, leftrightarrow] \\
 & \mathbb{R}\times E
\end{tikzcd}$$

Kdaj sta dve naravni galilejevi strukturi ekvivalentni

$$g: \mathbb{R}\times E \longrightarrow \mathbb{R}\times E$$

$$A = \begin{bmatrix} t \\ P \end{bmatrix} \longmapsto g(A) = \begin{bmatrix} t' \\ P' \end{bmatrix} = g(O) + d_g(A-O)$$

$$= \begin{bmatrix} t_0' \\ P_0' \end{bmatrix} + \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \alpha & \vec{a}^T \\ \hline \vec{c} & Q \end{array}\right]}_{4\times 4 \text{ matrika}} \begin{bmatrix} t-t_0 \\ P-P_0 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} t_0 \\ P_0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} t_1 \\ P_1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} t_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

$$t(g(A_2) - g(A_1)) = t(A_2 - A_1)$$

$$g(A_2) - g(A_1) = \begin{bmatrix} \alpha & \vec{a}^T \\ \vec{c} & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_2 - t_1 \\ P_2 - P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(t_2-t_1) + \vec{a}(P_2-P_1) \\ (t_2-t_1)\vec{c} + Q(P_2-P_1) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha(t_2-t_1) + \vec{a}(P_2-P_1) = t_2 - t_1 \Rightarrow \alpha = 1, \ \vec{a} = \vec{0}$$

Ta velja da se ohranja časovnost

ohranjanje razdalje med istočasnimi dogodki:

$$d(g(A_1), g(A_2)) = d(A_2, A_1) \quad \text{za } t_1 = t_2$$

$$\Vert \quad \leftarrow t_2 - t_1 = 0 \qquad\qquad \Vert$$

$$\|Q(P_2-P_1)\| \qquad\qquad \|P_2 - P_1\|$$

$$\Rightarrow Q \in O(3)$$

$\uparrow$ ortogonalna matrika 3x3

Definicija: Preslikava, ki ohranja Galilejevo strukturo pravimo Galilejeva preslikava

Trditev: Galilejeve preslikave med naravna Galilejevima strukturama $\mathbb{R}\times E$ je oblike

$$\begin{bmatrix} t \\ p \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} t' \\ p' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0' + t - t_0 \\ P_0' + \vec{c}(t-t_0) + Q(P-P_0) \end{bmatrix} =$$

kjer je $Q \in O(3)$, $\vec{c}$ poljuben vektor, t_0 poljubno število in P_0' poljubna točka

$$= \begin{bmatrix} \tilde{t}_0 + t \\ \tilde{P}_0 + \vec{c}t + Q(P-P_0) \end{bmatrix}$$

$t_0' - t_0 = \tilde{t}_0$

Dva opazovalca: $\varphi(t,P)$, $\varphi'(t',P')$

gibanje $t \mapsto P(t)$ trajektorija točke

$$\vec{v} = \frac{dP}{dt} \quad \text{vektor hitrosti} \quad \lim_{h\to 0}\frac{P(t+h)-P(t)}{h}$$

$$\ddot{P} = \dot{\vec{v}} = \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{vektor pospeška}$$

$|\vec{v}| = v$ brzina

$$P'(t') = P_0' + \vec{c}(t'-t_0') + Q\overbrace{(P(t)-P_0)}^{Q(P(t'-t_0')-P_0)} \quad \text{trajektorija v } \varphi'$$

$$\vec{v}' = \frac{dP'}{dt'} = \vec{c} + Q\frac{dP}{dt}(t'-t_0') = \vec{c} + QP(t)$$

$$\| $$

$$\dot{P}' \qquad \dot{P}'(t') = \vec{c} + Q\dot{P}(t)$$

najprej črtica, nato odvod

$$\ddot{P}'(t') = \vec{a}' = \frac{dv'}{dt'} = Q\ddot{P}(t)$$

	φ	φ'
	P	$P' = P_0' + \vec{c}t + Q(P-P_0)$
	$\vec{a} = P_2 - P_1$	$\vec{a}' = P_2' - P_1' = Q(P_2 - P_1) = Q\vec{a}$

Definicija: vektor $a = P_2 - P_1$ je koordinatno neodvisen

$A \in \mathcal{L}(V,V) \quad A' = Q^T A Q$

$\lambda \quad \lambda' = \lambda$

Sistem materialnih točk $(P_1, \ldots P_n) = P$

$$\underline{P}' = \underline{P_0}' + \underline{\vec{c}}\,t + Q\,(\underline{P} - \underline{P_0})$$

$$\underline{P_0}' = (P_0', \ldots P_0') \qquad Q(\underline{P} - \underline{P_0}) = (Q\,(P_1 - P_0), \ldots Q(P_n - P_0))$$

$$\underline{\vec{c}} = (\vec{c}, \ldots \vec{c})$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{P}}' = \vec{c} + Q\underline{\dot{P}}$$

$$\underline{\ddot{P}}' = Q\,\underline{\ddot{P}}$$

Princip determiniranosti

V danem KS (koordinatni sistem) je trektorija sistema materialnih točk natanko določena z začetnim položajem in začetno hitrostjo.

To specialno pomeni, da obstaja funkcija interakcije $\underline{\vec{f}}$ tako da je $\underline{\ddot{P}} = \underline{\vec{f}}(t, \underline{P}, \underline{\dot{P}})$

$$\left(\ddot{P}(t) = \vec{f}(t, \underline{P(t)}, \dot{P}(t)) \quad \text{nadalje}\right)$$