Direktni produkt (notranji): $N_1 \dots N_s \trianglelefteq G$

$G = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_s \quad \wedge \quad N_i \cap N_{i+1} = \{1\}$ za $\forall i$

- $\Leftrightarrow \forall g \in G.\ g = n_1 \cdot \dots \cdot n_s \quad n_i \in N_i$; enoličen zapis

Komutator x in y je $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$

- $M, N \trianglelefteq G,\ M \cap N = \{1\} \Rightarrow mn = nm \ \forall n \in N. \forall m \in M$

- $G = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_s \Rightarrow G \cong N_1 \times N_2 \times \dots \times N_s$
  notranji direktni produkt — zunanji direktni produkt

(Velja za končne grupe)

Abelove grupe

- $|G| = mn$; m, n tuji

  $H = \{x \in G ; mx = 0\}$ $K = \{x \in G ; nx = 0\}$

  Potem $G = H \oplus K$ in $|H| = m$;
- Posledica: V končna abelova grupa je vsota p-grup
- p-grupa je ciklična $\Leftrightarrow$ vsebuje natanko 1 grupo moči p
- V končna abelova abelova grupa je izomorfna direktni vsoti cikličnih p-grup

KONČNE GRUPE

Delovanje $G \curvearrowright X$

1) $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$
2) $1 \cdot x = x$

(levo delovanje)

Imamo delovanje $G \curvearrowright X$. Potem

$\Phi : G \longrightarrow \mathrm{Sym} X$

$\Phi : g \longmapsto (x \longmapsto gx)$ je homomorfizem

$\ker \Phi$ je **jedro delovanja**

Orbita $G \cdot x = \{g \cdot x ; g \in G\}$

Stabilizator $G_x = \{g \in G ; gx = x\}$

Fiksne točke g-ja $X^g = \{x \in X ; gx = x\} = \mathrm{fix}(g)$

Fiksne točke (invariante)

$$X^G = \bigcap_{g \in G} X^g = \{x \in X ; \forall g \in G . gx = x\}$$

- $G_x \leq G$
- $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G . y = gx$. Ekvivalenčni razredi so orbite $(G \cdot x)$

  $X/G = X/\sim$ prostor orbit

- **Tranzitivno delovanje** delovanje z eno orbito
- $\forall x \in X . |G \cdot x| = [G : G_x]$
- G končna $\Rightarrow |G| = |G_x| \cdot |G \cdot x|$

- G p-grupa. $G \curvearrowright X \implies |X| \equiv |X^G| \bmod p$
- Burnsidova lema $\left|\frac{X}{G}\right| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$
- Razredna formula
  $\exists x_1, \ldots, x_r \in X - Z(G). \; |G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{r} [G : C_G(x_i)]$
- G p-grupa $\Rightarrow Z(G) \neq \{1\}$ $\quad (p \mid |Z(G)|$
- $|G| = p^2 \Rightarrow G$ je abelova
- Cauchyjev izrek $p \mid |G| \Rightarrow \exists a \in G. \; red(a) = p$
- Lagraangev izrek $H \leq G \Rightarrow |H| \mid |G|$
- $H \leq G$ je p-podgrupa Sylowa če
  $|H| = p^\alpha$; $p^\alpha \mid |G|$; $p^{\alpha+1} \nmid |G|$
- Izrek Sylowa
  1) $p^l \mid |G| \Rightarrow \exists H \leq G. \; |H| = p^l$
     ($\exists$ p-podgrupa Sylowa)
  2) $\forall$ p-podgrupa G je vsebovana v p-podgrupi Sylowa
  3) Vse p-podgrupe Sylowa v G so konjugirane med sabo
  4) $n_p, \ldots, \nexists$ p-podgrup Sylowa
     $n_p \mid |G|$, $n_p \equiv 1 \bmod p$

S p-podgrupa Sylowa; normalizator S v G je $N_G(S) = \{g \in G;\ gSg^{-1} = S\}$

- $n_p = 1 \Leftrightarrow S \trianglelefteq G$
- grupa je enostavna če sta $\{1\}$ in G edini edinki
- A_n je enostavna za $\forall n \in \mathbb{N} - \{4\}$
- grupa G je rešljiva, če $\exists$ končno zaporedje $\{1\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_k = G$

  $G_i \trianglelefteq G_{i+1}$; G_{i+1}/G_i abelova