Izrek: Naj bo G grupa in $N_1, \ldots, N_s \trianglelefteq G$. Potem je notranji direktni produkt $N_1 \cdot \ldots \cdot N_s$ natanko tedaj, ko se da $\forall g \in G$ na enoličen način zapisati kot $g = n_1 \cdot \ldots \cdot n_s$

Dokaz:

$\Rightarrow$ G je notranji direktni produkt

· enoličnost zapisa:

$$n_1 \cdot \ldots \cdot n_s = m_1 \cdot \ldots \cdot m_s$$

$$\underbrace{m_1^{-1} n_1}_{\in N_1} = \underbrace{(m_2 \cdots m_s)(n_2 \cdots n_s)^{-1}}_{\in N_2 \cdot \ldots \cdot N_s}$$

$N_1 \cap N_2 \cdots N_s = 1 \Rightarrow m_1^{-1} n_1 = 1$

$\Rightarrow n_1 = m$

itd.

$\Leftarrow$ Recimo da se da $\forall g \in G$ enolično zapisati

1) Potem očitno $G = N_1 \cdot \ldots \cdot N_s$

2) $n_i \in N_i$

$$n_i = 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot n_i \cdot 1 \cdots 1$$

$$P = N_1 \cdot \ldots \cdot N_{i-1} \cdot N_{i+1} \cdots N_s = \{ n_1 \cdot \overset{\text{brez } n_i}{\ldots} \cdot n_s \ ; \ n_j \in N_j \}$$

$x \in N_i \cap P$

$$x = 1, \ldots, n_i, \ldots, 1 = n_1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdots n_s \Rightarrow$$

$$n_1, \ldots, n_s = 1 = n_i$$

komutator $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$

$$\left([x,y] = 1 \Leftrightarrow xyx^{-1}y^{-1} = 1 \Leftrightarrow xy = yx\right.$$

Lema: $M, N \trianglelefteq G$, $M \cap N = \{1\}$
elementi iz M komutirajo z elementi iz N.

Dokaz: $m \in M$, $n \in N$

$$[m,n] = 1 \qquad \underbrace{mnm^{-1}}_{\in N} n^{-1} \in N$$

$$m \underbrace{nm^{-1}n^{-1}}_{\in M} \in M \quad \Longrightarrow \; = \{1\}$$

Izrek: Naj bo G notranji direktni produkt edink. Potem je $G \cong N_1 \times \dots \times N_s$

$$\varphi: N_1 \times \dots \times N_s \longrightarrow G$$
$$(n_1 \dots n_s) \longmapsto n_1 \cdots n_s$$

inj, surj ✓

$$(n_1, \dots, n_s)(m_1 \dots m_s) = (n_1 m_1, \dots n_s m_s) =$$
$$= n_1 m_1, \dots n_s m_s$$

$$n_1 \dots n_s \cdot m_1 \cdots m_s = n_1 m_1 n_2 \dots n_s m_2 \dots m_s =$$
$$= n_1 m_1 n_2 m_2 \dots n_s m_s$$

$\blacksquare$

Klasifikacija končnih abelovih grup

Lema: $|G| = mn$, G abelova m,n tuji

$H = \{x \in G;\ mx = 0\}$, $K = \{x \in G;\ nx = 0\}$

Potem sta H in K podgrupi v G in

$G = H \oplus K$, $|H| = m$ $|K| = n$.

Dokaz: $H \leq G$

$a,b \in H$ $\quad m(a-b) = ma - mb = 0 - 0 = 0$

m,n tuji $\Rightarrow \exists a,b \in \mathbb{Z}.\ am + bn = 1$

$x \in H \cap K$

$x = 1 \cdot x = a(mx) + b(nx) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$

$g \in G.\ \ g = mag - nbg = a\underbrace{mg}_{\in G} - b\underbrace{ng}_{\in H}$

$|H| = m$ $\quad |K| = n$

$p \mid m \Rightarrow p \mid |H|$

$p \mid m \Rightarrow p \mid |G| \Rightarrow \exists a.\ pa = 0 = am = 0$

$\Rightarrow a \in H \Rightarrow \langle a \rangle \leq H \Rightarrow p \mid |H|$

Produkti, koprodukti, prosti objekti

Def: Naj bo $\mathcal{C}$ kategorija, I naj bo indeksna množica, A_i, $i \in I$ naj bo družina objektov iz $\mathcal{C}$. Produkt družine objektov A_i je objekt P skupaj z morfizmi $\pi_i : P \to A_i$, $i \in I$, da velja
za $\forall$ objekt X in vsak nabor morfizmov $f_i : X \to A_i$ obstaja natanko en morfizem $f : X \to P$, da

$$\begin{tikzcd}
A_i & P \arrow[l, "\pi_i"'] \\
& X \arrow[ul, "f_i"] \arrow[u, dotted, "f"']
\end{tikzcd}$$

diagram komutira za $\forall i \in I$

(f je univerzalen)

strukturni morfizmi

Zgled:

set: A, B množici

$A \times B$ je produkt A in B

$$A \xleftarrow{\pi_1 = pr_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2 = pr_2} B$$

X poljubna množica

$f_1 : X \to A$

$f_2 : X \to B$

$$\begin{tikzcd}
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1 = pr_1"'] \arrow[r, "\pi_2 = pr_2"] & B \\
& X \arrow[ul, "f_1"] \arrow[u, dotted, "f"] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Recimo da f obstaja:

$\pi_1 \circ f = f_1$ $\qquad$ $\pi_2 \circ f = f_2$

$f(x) = (a_x, b_x)$

$\pi_1 \circ f(x) = \pi_1(a_x, b_x) = a_x = f_1(x)$

$\pi_1 \circ f(x) = b_x = f_2(x)$

če f obstaja, mora veljati $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$

(to je dokaz enoličnosti)

obstoj: definiramo $f = (f_1, f_2)$

(zgoraj tudi dokaz da komutira)

- Poljubna družina množic $A_i \in I$
  produkt je kartezični produkt
  $f = (f_1, \dots, f_n)$ skupaj s projekcijami na i-ti faktor

- Grp:
  produkt = kartezični produkt z operacijo po komponentah

- Top: isto

- Ring: isto

- Vec_K: isto

- Field (kategorija polj)
  $F_1 \longrightarrow F_2$ neničeln homomorfizem
  $\ker f \triangleleft F_1 \Longrightarrow \ker f = \{0\}$
  f mora biti injektiven
  F_1 in F_2 morata biti iste karakteristike

kartezični produkt ne more biti polje
(delitelji niča $(a,0) \cdot (0,b)$)

Produkt polj mora biti tudi produkt kolobarjev, ker imamo enoličnost
torej mora biti kartezični produkt
to pa ne gre

DN kategorija dobljena iz delno urejene množice $(M, \leq)$

Produkt a $b \in M$, če obstaja

$$\begin{tikzcd}
a & p \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & b \\
& X \arrow[ul, "f_1"] \arrow[u, dashed] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

$\pi_1 = (p, a)$ $\quad p \leq a$

$\pi_2 = (p, b)$ $\quad p \leq b$

Če $x \leq a$, $x \leq b$, potem $x \leq p$

p bi moral biti $\inf(a, b)$, če obstaja.

Trditev: Naj bo A_i $i \in I$ družina objektov v kategoriji $\mathcal{C}$. Naj bosta $(P, \pi_i)_{i\in I}$ in $(Q, \sigma_i)_{i \in I}$ produkta objektov A_i. Potem sta P in Q izomorfna

Dokaz:

Naredimo novo kategorijo: $\mathcal{D}$

objekti:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"] \arrow[d] & A_i \\ \vdots & A_j \end{tikzcd}$$

C objekt v $\mathcal{C}$

Če ne obstaja pol ni produkta

$\parallel$

$(C$, z nekimi morfizmi $f_i : C \to A_i)$

Morfizem med dvema takima objektoma

$$\underbrace{C \xrightarrow{f_i} A_i}_{D_1} \qquad \underbrace{\check{C} \xrightarrow{\check{f}_i} A_i}_{D_2}$$

Morfizem med D_1 in D_2 je morfizem med C in $\bar{C}$ v $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} & \bar{C} \arrow[dl, "\check{f}_i"'] \\ A_i & C \arrow[l, "f_i"] \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

za katerega ta diagram komutira (če obstaja) za $\forall i \in I$

Produkt v $\mathcal{C}$ je natanko končni objekt v $\mathcal{D}$ (sa enolično določeni)

Def: Naj bodo $A_i, i \in I$ objekti kategorije $\mathcal{C}$.

Koprodukt objektov A_i je produkt teh objektov v $\mathcal{C}^{opp}$.

Natančneje to je objekt Q skupaj z morfizmi:

$$\sigma_i : A_i \longrightarrow Q, \text{ da velja:}$$

za $\forall$ objekt X in za vse $f_i : A_i \longrightarrow X$ obstaja natanko en morfizem $f : Q \longrightarrow X$, da vsi diagrami:

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\sigma_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & Q \arrow[d, dashed, "f"] \\ & X \end{tikzcd}$$

komutirajo

Primeri:

set: A, B množici , $Q = ?$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & Q \arrow[d, dotted, "f"] & B \arrow[l, "\sigma_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

disjunktna unija

$$Q = A \sqcup B$$

Če imamo X in f_1, f_2:

$$f : Q \longrightarrow X$$
$$f(a) = f_1(a)$$
$$f(b) = f_2(b)$$

Grp: G, H grupi

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & Q \arrow[d, dotted] & H \arrow[l, "\sigma_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

$Q = G * H$ ... prosti produkt G in H

d formalni produkt

$$d = g_1 h_1 g_2 h_2 \dots g_k h_k$$

$g_i\, h_i \in H \quad k \geq 0$

$$\sigma_1 : G \longrightarrow G * H \qquad \sigma_2 : H \longrightarrow G * H$$
$$g \longmapsto g \cdot 1 \qquad h \longmapsto 1 \cdot h$$

To je koprodukt v Grp:

$$f(g) := f_1(g)$$
$$f(h) := f_2(h)$$

$$f(g_1 h_1 \dots g_k h_k) = f(g_1) f(h_1) \dots f(g_k) f(g_k)$$

(ni nujno da se začne s h jem in konča z g jem 1 lahko dodajamo

Vec_K: V_i vektorski prostori

koprodukt: Q

$$\begin{tikzcd}
V_i \arrow[r, "\sigma_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & Q \arrow[d, dashed, "f_i"] \\
 & X
\end{tikzcd}$$

Definirajmo $Q = \{(v_i)_{i \in I} : v_i \in V_i$, le končno mnogo $v_i \neq 0\}$

$Q = \bigoplus_{i \in I} V_i$ direktna vsota V_i-jev

$\sigma_i : V_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} V_i$

$f : ((v_i)_{i \in I}) \longmapsto \sum f_i(v_i)$

Def: $\mathcal{C}$ je konkretna kategorija

Ce lahko na objekte gledamo kot na mnozice in na morfizme kot preslikave na mnozice

 ni konkretna kategorija

Def: Naj bo $\mathcal{C}$ konkretna kategorija

Naj bo X neprazna mnozica

Prosti objekt nad mnozico X je objekt P skupaj s preslikavo $\iota : X \to F$ da velja:

za $\forall$ objekt C in $\forall$ preslikavo $K : X \to C$ $\exists$ natanko en morfizem iz F v C, da komutira

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "K"] \arrow[d, "\iota"'] & C \\ F \arrow[ur, dotted, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Trditev: Prosti objekt, če obstaja je do izomorfizma natanko določen

Dokaz: kategorija $\mathcal{D}$

Objekti $X \xrightarrow{\kappa} C$; C objekt $\mathcal{C}$

Morfizem med $X \xrightarrow{\kappa} C$ in $X \xrightarrow{\lambda} D$

=

morfizem f med C in D, da

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\kappa"'] & D \\
C \arrow[ur, dashed, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Prosti objekt kategorije $\mathcal{C}$ je ravno začetni objekt v $\mathcal{D}$

∎

Zgled:

1) Vec_K

X poljubna množica; $F = \mathcal{L}in X =$

$= \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k,$

$k \geq 0 \; x_i \in X \; \alpha_i \in K\}$

formalne vsota $\longrightarrow$

2) Mon:

X poljubna množica

$F = \{x_1 x_2 \dots x_k;\ x_i \in X\}$ = prosti monoid nad X

produkt = sklop besed

3) Grp: $F = \{x_1 \dots x_k \quad x_i \in X \cup X^{-1}$

produkt = „sklop" + krajšanje

formalni izrazi $\{x^{-1}; x \in X\}$

$x_1 x_2^{-1} x_3 \cdot x_3^{-1} x_4 x_5 =$

$= x_1 x_2^{-1} x_4 x_5$

(tehnične komplikacije: robimo grupo reduciranih besed)

$\to$ prosta grupa nad X