Uvod

Cilj topologije: Razumeti prostore in preslikave med njimi

preslikava .... zvezna funkcija

prostori: osnovni interes so metrični prostori

Različne konstrukcije dajo prostore, ki niso nujno metrični ali pa ni takoj jasno da so metrični.
Zato si pomagamo s topološkimi lastnostmi

Konstrukcije prostorov:

- podprostor
- vsota oz disjunktna unija
- produkt $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \{(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} ; x_\lambda \in X_\lambda\}$

$$\mathcal{B} = \{U \times V : U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$$

Pride iz tega da so projekcije zvezne

$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ opremimo s najšibkejšo topologijo, da so projekcije zvezne

$$p_\mu : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \longrightarrow X_\mu \qquad \mu \in \Lambda$$

podbazo sestavljajo $p_\mu^*(U_\mu)$ odprte

$$p_\mu^*(U_\mu) = U_\mu \times \prod_{\lambda \neq \mu} X_\lambda$$

Bazne množice so $U_{\mu_1} \times U_{\mu_2} \times \dots \times U_{\mu_k} \times \prod_{\lambda \neq \mu_1, \dots, \mu_k} X_\lambda$

- kompaktifikacija z 1 točko
- slike prostora pri zvezni preslikavi
- slike prostora pri zvezni preslikavi
  $f : X \to Y$ $\quad f_*(X)$ dobi topologijo iz Y

$$f^*(\{y\}) \subseteq X$$

$\{f^*(\{y\}) ; y \in Y\}$ razdelitev množice X

To torej določa ekvivalenčno relacijo in vsaka ekvivalenčna relacija določa tako razdelitev

1. Kvocientni prostori

1.1 Kvocientna topologija

Def: X množica in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X. Za poljuben $x \in X$ označimo $[x] = \{y \in X;\ x \sim y\}$ <u>ekvivalenčni razred</u>, ki pripada x

<u>Kvocientna množica</u> množica X po $\sim$ je množica vseh ekvivalenčnih razredov

$$X/_{\sim} := \{[x];\ x \in X\}$$

<u>Kvocientna projekcija</u> $q: X \longrightarrow X/_{\sim}$

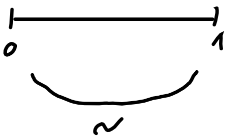
$q: x \longmapsto [x]$

Primer: $X=[0,1]$

$\sim$ ekvivalenčna relacija določena z

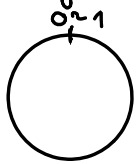
$0\sim 1$ $\quad(1\sim 0;\ x\sim x\ \forall x\in X)$

Kako si lahko predstavljamo $X/\sim$



Naraven model $X/\sim$ je $[0,1)$

Druga možnost je



Opomba: 1) pri opisu ekvivalenčne relacije bomo običajno navedli le netrivialne relacije, ki generirajo ekvivalenčno relacijo ob upoštevanju lastnosti ekv. relacije.

2) ekvivalenčna relacija $\sim$ določa razdelitev X na ekvivalenčne razrede. To razdelitev označimo z $\mathcal{R}=\{[x]\mid x\in X\}\subseteq\mathcal{P}(X)$. Kvocientno množico lahko označimo $X/\sim\, = X/\mathcal{R}$

3) Če $\sim$ določa le en netrivialen ekvivalenčni razred $A\subseteq X$; A ni enojec potem kvocientno množico označimo z X/A

Če je X topološki prostor in želimo $X/\sim$ opremiti s topologijo tako da bo ta odražala lastnosti prostora X. Posebej želimo da je $q: X \to X/\sim$ zvezna

Ta pogoj topologije na $X/\sim$ ne določa enolično
če neka topologija na $X/\sim$ temu ustreza, potem ustreza tudi vsaka šibkejša. Zato je smiselno $X/\sim$ opremiti z najmočnejšo topologijo pri kateri je q zvezna.

Torej za odprte v $X/\sim$ vzamemo vse, ki imajo odprte praslike v X

Def: X topološki prostor, $\sim$ ekv. relacija $\mathcal{T}$ topologija na X. Potem je

<u>kvocientna topologija</u> na $X/\sim$

$$\mathcal{T}_\sim = \{ V \subseteq X/\sim \, ; \, q^*(V) \in \mathcal{T} \}$$

Opomba: v kvocientni topologiji velja torej $V^{odp} \subseteq X/\sim \iff q^*(V) \text{ odp} \subseteq X$

$\Rightarrow$ zveznost
$\Leftarrow$ največjost $\mathcal{T}_\sim$

Z zaprta $\iff q^*(Z)$ zaprta

Ali je torej g odprta iz zaprta?

Ne nujno:

Primer:

1) $X = [0,1]$ $\mathcal{R} = \{[0,1), \{1\}\}$

$X/_\sim = \{[0], [1]\}$

$\mathcal{T}_\sim = \{\emptyset, X/_\sim, [0]\}$

$g^*(\{[0]\}) = [0,1)$ odprt v X
ni zaprt v X

$\{[0]\}$ ni zaprt, je odprt
$g^*(\{1\}) = \{1\}$ zaprta, ni odprta

Ali je g zaprta? Ne

$g_*(\{0\}) = [0]$
zaprta ni zaprta

2) $X = [0,2]$ $\quad [1,2]$ edini pravi dw. razred

$$X/_{[1,2]} \simeq [0,1]$$

$g: X \longrightarrow X/_{[1,2]}$ ni odprta

$$g_*(1,2) = [1]$$

$g^*([1]) = [1,2]$ ni odprt v X

3) $X = [0,1]$ $\quad A = X \cap \mathbb{Q}$ $\quad B = X - \mathbb{Q}$

$$X/_{\{A,B\}} = \{[0], [\tfrac{\sqrt{2}}{2}]\}$$

$$\tau = \{\emptyset, X_{\{A,B\}}\}$$

Def: X množica, $\sim$ ekv. relacija

za $A \subseteq X$ je njeno <u>nasičenje</u> enako

$g^*(g_*(A))$ ... unija vseh ekvivalenčnih razredov, ki sekajo A

Trditev: Za $A \subseteq X$ velja da je

$g_*(A)$ odprte $\Leftrightarrow$ nasičenje $g^*(g_*(A))$ odprto

Podobno za zaprte.

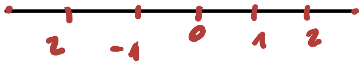
g je odprta, če je nasičenje vsake množice odprto in zaprta če je nasičenje vsake množice zaprta

Cilj:

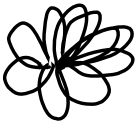
X topološki prostor ~ ekv. relacija
če je to mogoče želima poiskati nek geometrični model za Y, a kvocient $X/\sim$ in pokazati da je
$X/\sim \;\cong Y$

Primer:

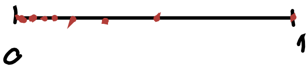
$X = \mathbb{R}$ $A = \mathbb{Z}$

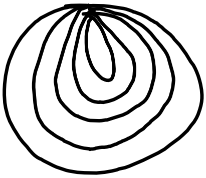


$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = ?$



2) $X = [0,1]$ $A = \{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$





v 2) je X kompakten. Po definiciji je g zvezna, zato je $X/\sim$ tudi kompaktna
v 1) X ni kompakten zato ne vemo ali je kvocient kompakten

1) ni mogoče vložiti v evklidski prostor

1.2 Kvocientne preslikave

Cilj: razumeti preslikave iz kvocientov

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f = g \circ q"] \arrow[dr, "q"'] & & Y \\ & X/\sim \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

če je $x \sim y$ v $X \implies q(x) = q(y)$

$$\begin{array}{ccc} q(x) & = & q(y) \\ \parallel & & \parallel \\ [x] & = & [y] \end{array}$$

in zato je $g(q(x)) = g(q(y))$

$$\begin{array}{ccc} g(q(x)) & = & g(q(y)) \\ \parallel & & \parallel \\ f(x) & & f(y) \end{array}$$

Torej je f konstantna na ekvivalenčnih razredih, t.j. ekvivalentne točke slika v iste

Želimo obratno: za preslikavo $f: X \to Y$

iskati pogoje da dobimo preslikavo $X/_\sim \to Y$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "2"'] & Y \\ X/_\sim \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

da diagram komutira

Če naj diagram komutira mora biti f konstantna na ekvivalenčnih razredih

$\forall x, y \Rightarrow f(x) = f(y)$

$\bar{f}([x]) := f(x)$

$\bar{f}$ ... preslikava inducirana s f

Trditev:

Naj bo X topološki prostor, $\sim$ ekv. relacija

$f: X \to Y$ zvezna preslikava, ki je konstantna na ekv. razredih. Potem f dobro definira preslikavo $\bar{f}: X/_\sim \to Y$ za katero velja

$\bar{f} \circ q = f$. Poleg tega velja

1) f je zvezna $\Rightarrow$ $\bar{f}$ zvezna

2) če je f surjektivna $\Rightarrow$ $\bar{f}$ surjektivna

3) če za $\forall x \not\sim y$. $f(x) \neq f(y) \Rightarrow \bar{f}$ injektivna

(tj. f loči ekvivalenčne razrede

Dokaz: (2) in (3) jasno

1) Naj bo f zvezna. Dokazujemo zveznost $\bar{f}$

Izberemo poljuben $V \in \tau_Y$

Ali je $\bar{f}^*(V)$ odp v $X/_\sim$

$$\bar{f}^*(V) \text{ odp} \Leftrightarrow \underbrace{q^*(\bar{f}^*(V))}_{(\bar{f} \circ q)^*(V) = f^*(V)} \text{ odp v } X$$

Ker je V odprta v Y in $f: X \to Y$ zvezna

je $f^*(V)$ odprta v X

Zanima nas kdaj bo $\bar{f}$ homeomorfizem

(zvezna, bijektivna, zvezen inverz)
(bijektivna f, bijektivna f_*)

$\bar{f}$ je homeomorfizem $\Leftrightarrow$ $\bar{f}$ bijekcija in porodi bijekcijo med topologijama

$\Leftrightarrow$ $\bar{f}$ je bijekcija in $\forall V \subseteq Y, (V \text{ odp} \Leftrightarrow \bar{f}^*(V) \text{ odp})$

$$\Updownarrow$$

$$\Big(V \overset{\text{odp}}{\subseteq} Y \Leftrightarrow \underbrace{q^*(\bar{f}^*(V))}_{= f^*(V)} \text{ odp}\Big)$$

karakterizacija kvocientnosti

Naj bosta X in Y topološka prostora

$f: X \to Y$

f surjektivna in $\forall V \subseteq Y. (V^{odp} \Leftrightarrow f^*(V) \text{ odp})$

$\Rightarrow$ f imenujemo <u>kvocientna preslikava</u>

Opombe:

1) Po definiciji: kvocientna topologija je kvocientna projekcija kvocientna preslikava
Obratno: Vsako kvocientno preslikavo $f: X \to Y$ lahko obravnavamo kot kvocientno projekcijo pri ekvivalenčni relaciji, določeni z razbitjem X na praslike točk

2) Kvocientna preslikava je vedno zvezna $(\Rightarrow)$ in ~~ja~~ ni nujno odprta niti zaprta (ker že vemo za kvoc. proj)

3) implikacija $(\Leftarrow)$ v definiciji kvocientne preslikave je posebna lastnost, tej včasih rečemo kvocient v ožjem smislu
Za zveznost f za njena enoličnost ~~pot~~ potrebno preveriti le pogoj

4) Surjektivna f je kvocientna $\Leftrightarrow$
$(\forall Z \subseteq Y: Z^{zap} \Leftrightarrow f^*(Z) \text{ zap})$

Lema: Naj bo $f: X \to Y$ zvezna in surjektivna. Če je f odprta ali zaprta je kvocientna

Dokaz:

Preveriti je treba kvocientnost v ožjem smislu

Recimo da je f zaprta

Izberimo poljubno $Z \subseteq Y$ za katero je $f^*(Z)$ zaprta v X

$\underline{Z^{zap} \subseteq Y}$

$f^*(Z)$ zaprta v X in f zaprta

Torej $f_*(f^*(Z)) \underset{\text{surjektivnost}}{=} Z$ zaprta

Izrek: (o prepoznavi kvociente)

X, Y : top. prostor $\sim$ ekv relacija na X

Naj bo $f: X \to Y$ kvocientna preslikava,

ki naredi enake identifikacije kot $\sim$

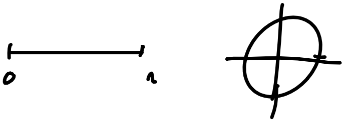
(tj f je konstantna na ekv. razredih in njih loči)

Potem je inducirana preslikava $\bar{f}: X/_\sim \to Y$ homeomorfizem

Primer: $X=[0,1]$ $\quad 0\sim 1$

Dokažimo: $X/_{\sim} \approx S^1$

Iščemo f kvocientna, ki naredi iste identifikacije kot $\sim$



$$f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

f je surjektivna in slika v krožnico

Preveriti moramo kvocientnost

imamo zveznost

kvocientnost v ožjem smislu?

Dovolj je odprtost ali zaprtost

- f je zvezna, ker je elementarna
- f je kvocientna v ožjem smislu, ker je zaprta, saj slika iz kompaktnega v hausdorffov
- f je hom. na ekv. razredih

$f(0) = (1,0)$

$f(1) = (1,0)$ $\quad 0\sim 1 \Rightarrow f(0)=f(1)$

f loči ekvivalenčne razrede:

interval $[0,1)$ se injektivno slika na krožnico, zato ima f različne vrednosti na različnih ekv. razredih

izrek $\Rightarrow$ $\bar{f}: X/_{\sim} \to S^1$ je homeomorfizem