Direktni produkt (notranji) $N_1 \ldots N_s \triangleleft G$

$G = N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_s \quad \wedge \quad N_i \cap N_{i+1} = \{1\}$ za $\forall i$

- $\Leftrightarrow \forall g \in G.\ g = n_1 \cdot \ldots \cdot n_s \quad n_i \in N_i$ enoličen zapis

Komutator

x in y je $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$

- $M, N \triangleleft G,\ M \cap N = \{1\} \Rightarrow mn = nm \ \forall n \in N. \forall m \in M$

- $\underbrace{G = N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_s}_{\text{notranji direktni produkt}} \Rightarrow G \cong \underbrace{N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_s}_{\text{zunanji direktni produkt}}$

(Velja za končne grupe)

Abelove grupe

- $|G| = mn$; m, n tuji
  $H = \{x \in G;\ mx = 0\}$ $K = \{x \in G;\ nx = 0\}$
  Potem $G = H \oplus K$ in $|H| = m$;
- Posledica: $\forall$ končna abelova grupa je vsota p-grup
- p-grupa je ciklična $\Leftrightarrow$ vsebuje natanko 1 grupo moči p
- $\forall$ končna abelova abelova grupa je izomorfna direktni vsoti cikličnih p-grup

KONČNE GRUPE

Delovanje $G \curvearrowright X$

1) $g\cdot(h\cdot x) = (gh)\cdot x$
2) $1\cdot x = x$

(levo delovanje)

Imamo delovanje $G \curvearrowright X$. Potem

$$\Phi : G \longrightarrow \mathrm{Sym}\, X$$
$$\Phi : g \longmapsto (x \longmapsto gx)$$

je homomorfizem

$\ker \Phi$ je **jedro delovanja**

Orbita $G\cdot x = \{g\cdot x \,;\, g \in G\}$

Stabilizator $G_x = \{g \in G \,;\, gx = x\}$

Fiksne točke g-ja $X^g = \{x \in X \,;\, gx = x\} = \mathrm{fix}(g)$

Fiksne točke (invariante)

$$X^G = \bigcap_{g \in G} X^g = \{x \in X ;\, \forall g \in G .\, gx = x$$

- $G_x \leq G$
- $x \sim y \iff \exists g \in G .\, y = gx$. Ekvivalenčni razredi so obrbite $(G\cdot x)$

$$X/G = X/\sim \quad \text{prostor orbit}$$

- **Tranzitivno delovanje** delovanje z eno orbito
- $\forall x \in X .\, |G\cdot x| = [G : G_x]$
- G končna $\Longrightarrow |G| = |G_x|\cdot|G x|$

- G p-grupa. $G \curvearrowright X \Rightarrow |X| \equiv |X^G| \bmod p$
- Burnsidova lema $|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|$
- Razredna formula
  $\exists x_1, \dots, x_r \in X - Z(G).\ |G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{r}[G : C_G(x_i)]$
- G p-grupa $\Rightarrow Z(G) \neq \{1\}$ $\quad (p \mid |Z(G)|)$
- $|G| = p^2 \Rightarrow G$ je abelova
- Cauchyjev izrek $p \mid |G| \Rightarrow \exists a \in G.\ red(a) = p$
- Lagraangev izrek $H \leq G \Rightarrow |H| \mid |G|$
- $H \leq G$ je p-podgrupa Sylowa če
  $|H| = p^\alpha$; $\quad p^\alpha \mid |G|$; $\quad p^{\alpha+1} \nmid |G|$
- Izrek Sylowa
  1) $p^\ell \mid |G| \Rightarrow \exists H \leq G.\ |H| = p^\ell$
     ($\exists$ p-podgrupa Sylowa)
  2) $\forall$ p-podgrupa G je vsebovana v p-podgrupi Sylowa
  3) Vse p-podgrupe Sylowa v G so konjugirane med sabo
  4) $n_p \dots$ št p-podgrup Sylowa
     $n_p \mid |G|$; $\quad n_p \equiv 1 \bmod p$

S p-podgrupa Sylowa; normalizator S v G je $N_G(S) = \{g \in G;\ gSg^{-1} = S\}$

- $n_p = 1 \iff S \triangleleft G$
- grupa je enostavna če sta $\{1\}$ in G edini edinki
- A_n je enostavna za $\forall n \in \mathbb{N} - \{4\}$
- grupa G je rešljiva, če $\exists$ končno zaporedje $\{1\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \ldots \triangleleft G_k = G$
  $G_i \triangleleft G_{i+1}$; G_{i+1}/G_i abelova