Kombinatorika

Osnovna načela kombinatorike:

- $A \times B = \{(a,b) \,;\, a \in A,\, b \in B\}$
- načela produkta
  $|A|, |B| \neq \infty \Rightarrow |A \times B| = |A| \cdot |B|$
- posplošeno načela produkta:
  $A_1, \dots, A_n$ so končne $\Rightarrow \left|\prod_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$

- načelo vsote:
  $|A|, |B| < \infty \wedge A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$
- posplošeno načelo vsote:
  $A_1, \dots A_k$ so končne $\wedge$ paroma disjunktne $\Rightarrow$
  $\Rightarrow \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$

- načelo enakosti:
  $\exists$ bijekcija $A \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow B \Rightarrow |A| = |B|$

  $A = \{x_1, \dots, x_n\}$
  $f : A \rightarrow [k] = \{1, \dots, k\}$
  $f(x_i) = i \qquad i \in [k]$

- načelo dvojnega preštevanja
  (z njim pokažemo, da sta dva izraza enaka,
  če z obema na različna načina
  preštejemo elemente iste množice)

- Dirihletovo načelo
  $n, m \in \mathbb{N}$
  $n > m \Rightarrow \neg\exists$ injektivna preslikava $[n] \rightarrowtail [m]$

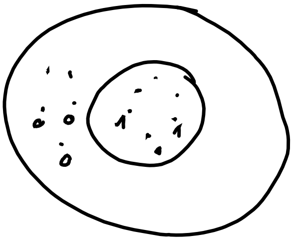
Primer: Naj bo $|A| = n < \infty$

2^A ...... potenčna množica $P(A)$

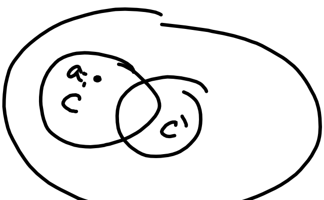
$B = \{0, 1\}$

$f : 2^A \longrightarrow B^n = \{(b_1, \dots, b_n) ; b_i \in B$

$C \subseteq A \Rightarrow f(C) = (c_1, \dots, c_n)$; $c_i = \begin{cases} 1 ; & a_i \in C \\ 0 ; & a_i \notin C \end{cases}$



f je bijekcija



$f(C)_i = c_i = 1$

$f(C')_i = c_i' = 0$

je injektivna ✓

je surjektivna ✓

■

Torej $|2^A| = |B^n| = |B|^n = 2^n = 2^{|A|}$

Po posplošenem načelu produkta

$|2^A| = 2^{|A|}$

Primer: (načelo dvojnega preštevanja)

$n \in \mathbb{N}$

$X_n = \{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots \frac{n}{n} \}$

očitno: $|X_n| = n$

X_n prepišemo tako, da vsak vlomek zamenjamo z njegovo okrajšano obliko:

$n = 12$: $X_{12} = \{ \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \dots \frac{12}{12} \} =$

$X_{12}' = \{ \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \frac{7}{12}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12} \}$

$= \{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \underbrace{\frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12}}_{} \}$

št. ki so tuja z 12

$= \{ \frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \}$

tuja z 6

$\phi(n)$ = števila iz $[n]$, ki so tuja z n
(Eulerjeva funkcija ϕ)

p.....praštevilo

$\phi(p) = p - 1$

$\phi(2^n) = 2^{n-1}$ (vsa liha števila)

$n = |X_n| = |X_n'|$

$\sum_{d|n} \phi(d) = n$ seštevanje po deliteljih št. n

$n = 12$:

$\underset{1}{\phi(1)} + \underset{1}{\phi(2)} + \underset{1,2}{\phi(3)} + \underset{1,3}{\phi(4)} + \underset{1,5}{\phi(6)} + \underset{1,\ 5,7,11}{\phi(12)} =$

$= 1 + 1 + 2 + 2 + 5 + 4 = 12$

1 je tuje in delitelj

Primer:

$X \subset [100] \quad |X| = 10$

(Npr. $X = \{17, 21, 22, 29, 42, 43, 77, 90, 91, 97\}$)

X vsebuje dve disjunktni podmnožici z isto vsoto

$\{21, 22\}, \{43\}$

Vseh podmnožic je 2^{10}

Zanimivih je: $2^{10} - 2 = 1022$
(Brez $\emptyset$ in X)

Vsota poljubne podmnožice je gotovo manj kot 100

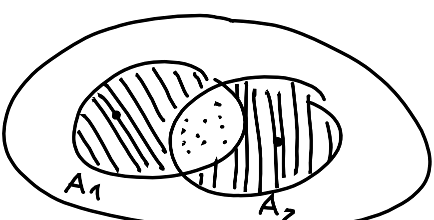
$2^X \longrightarrow \mathbb{N}$

$A \longmapsto \text{vsota od } A$

$1022 \qquad\qquad < 1000$

Dirichletovo načelo pravi da

$\exists A_1, A_2 \subseteq \text{vsota}(A_1) = \text{vsota}(A_2)$



Iskani množici sta $A_1 - A_2$ in $A_2 - A_1$

Število preslikav:

$B^A = \{ f : A \longrightarrow B \}$

$n^{\underline{k}} = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ ..... padajoča potenca

n na k padajoče

$n^{\overline{k}} = n(n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)$ ..... naraščajoča potenca

$n! = n^{\underline{n}}$ ..... fakulteta

$n^{\underline{0}} = 1 \qquad 0^0 = 1 \quad 0^{\underline{0}} = 1 \quad 0^{\overline{0}} = 1$

Trditev: Naj bosta N in K končni množici
$|N| = n \quad |K| = k$

$|X| = n \Rightarrow$ X je n-množica

i) $|K^N| = k^n$

ii) število injektivnih preslikav $N \twoheadrightarrow K$ je $k^{\underline{n}}$

iii) število bijekcij je $n!$, če $n = k$, sicer je 0

(surjekcija naslednji teden

Dokaz:

i) $N = \{x_1, \ldots, x_n\}$

$K = \{y_1, \ldots, y_n\}$

$f: N \longrightarrow K$ neka preslikava

$\mathcal{F}: K^N \longrightarrow K^n$

$\mathcal{F}: f \longmapsto (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k))$

$\mathcal{F}$ je bijekcija

$f \neq g \quad f, g \in K^N$

$\exists i.\ f(x_i) \neq g(x_i) \Rightarrow \mathcal{F}(f) \neq \mathcal{F}(g)$

$(z_1, \ldots, z_n) \in K^n$

praslika tega vektorja je $k \in K^N$

$k(x_i) = z_i \quad i \in [n]$

$\Rightarrow \mathcal{F}$ je surjektivna

$\Rightarrow \mathcal{F}$ je bijekcija $\Rightarrow |K^N| = |K|^n = k^n$

načelo produkta

ii) podobno

iii) $n = k \Rightarrow |N| = |K|$

f je bijektivna $\Leftrightarrow$ f je injektivna $\Leftrightarrow$ f je surjektivna

ker so končne

$n^{\underline{n}} = n!$

Binomski koeficienti in binomska vrsta

$x \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$

Definicija: $\displaystyle \binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}$

binomski koeficienti

$k \notin \mathbb{N}_0$ definiramo $\binom{x}{k} = 0$

Primer: $$\binom{-\frac{3}{2}}{3} = \frac{-\frac{3}{2}\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{-\cancel{3} \cdot 5 \cdot 7}{2^4 \cdot \cancel{3}} = -\frac{35}{16}$$

Trditev: $n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $k \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \binom{n}{k} \ldots \text{binomska števila}$$

Dokaz:

$$\frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 1 \cdot k!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$\binom{0}{0} = 1 = \frac{0!}{0!\,0!}$$

$$0 \leq k \leq n \Rightarrow \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Oznake:

$$\binom{N}{k} = \{ A ; A \subseteq N \wedge |A| = k \}$$

Trditev:

če je N n-množica in $0 \le k \le n$

potem je $\left|\binom{N}{k}\right| = \binom{n}{k}$

Dokaz:

$$X = \{ (n_1, \dots, n_k) ; n_i \in N \text{ paroma različni} \}$$

$$|X| = n^{\underline{k}}$$

$$x_{nk} = \left|\binom{N}{k}\right|$$

št podmnožic dolžine k

vsak vektor iz X lahko dobimo tako,da najprej (1) izberemo k različnih elementov iz k in (2) nato določima njihov vrstni red

(1) x_{nk}

(2) $k!$

$$X = x_{nk} \cdot k! = n^{\underline{k}}$$

$$x_n^k = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \binom{n}{k} \quad \blacksquare$$

Trditev: $n \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

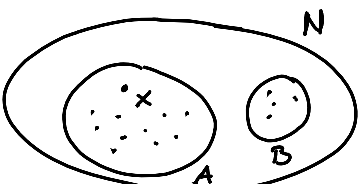
Dokaz: N, $|N| = n$, $x \in N$ ← poljuben fiksen element

$$\mathcal{A} = \left\{ A \in \binom{N}{k} ; \; x \in A \right\}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ B \in \binom{N}{k} ; \; x \notin A \right\}$$

$$\binom{N}{k} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \;, \quad \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$$

$$\binom{n}{k} = \left| \binom{N}{k} \right| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|$$



še $k-1$ jih moramo izbrati od $n-1$

$$|\mathcal{A}| = \binom{n-1}{k-1}$$

$$|\mathcal{B}| = \binom{n-1}{k}$$ iz $n-1$ jih moram še k izbrati

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1$$

ena podmnožica z 0 elementi ($\emptyset$)

ena množica z n elementi

Paskalov trikotnik

$k=0$, $k=1$, $k=2$, $k=3$ …

$n=0 \rightarrow$ 1

$n=1 \rightarrow$ 1 1

$n=2 \rightarrow$ 1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

⋮

$n=k$

$\binom{n}{n}=1$

$\binom{n}{0}=1$

Izrek (Binomski izrek)

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 .\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Dokaz

$$(a+b)^n = \underbrace{\overset{1.}{(a+b)}\,\overset{2.}{(a+b)} \cdot \ldots \cdot \overset{n.}{(a+b)}}_{n\text{-ksat}} =$$

$= \sum$ produktov kjer iz vsakega oklepaja vzamemo en člen

$$= \sum_{k=0}^{n} ?\, a^k b^{n-k}$$

$(a+b)$

$\uparrow$

$? =$ št. izbarav k oklepajev za a

$=$ št k podmnožic v n-množici $= \binom{n}{k}$

Torej $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$

Velja v komutativnem kolabarju
(seštevanje, množenje, komutativnost)

Izbori:

N je n-množica

Opazujmo izbore k-elementov

1. Izbor je urejen (važen vrstni red)
   - 1.1 elementi se lahko ponavljajo: n^k
   - 1.2 elementi se ne smejo ponavljati: $n^{\underline{k}}$
2. Izbor je neurejen
   - 2.1 elementi se lahko ponavljajo:
   - 2.2 elementi se ne smejo ponavljati: $\binom{n}{k}$

Trditev: število neurejenih izborov s ponavljanjem dolžine k iz n-množice je $\binom{n+k-1}{k}$

Dokaz:

$N = \{x_1, \ldots, x_n\}$

$$\overbrace{\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{}, x_2, \ldots, x_2, \ldots\ldots, x_n, \ldots, x_n}^{k}$$

št izborov x_1

$0 \leq \# \leq k$

$$\downarrow$$

$n-1+k$ je dolžina niza

$$\overbrace{1, \ldots, 1, 0, 1 \ldots 1, 0, 1 \ldots\ldots 0, 1, \ldots 1}$$

$$\# 0 = n-1$$

mesta za enke

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \ldots\ \_\ \_\ \_}_{n-1+k}$$

$\Rightarrow$ $n-1+k$ mest in k jih izberem

$$\Rightarrow \# = \binom{n-1+k}{k} = \binom{n-1+k}{n-1}$$

DN

Sponzor 10 različnih tekmovalcem podari telefone in izbira med 5 znamkami. Na koliko načinov lahko to naredi.

$\cancel{10^{5}A}$

5^{10}

Permutacije

bijekcija $A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A$

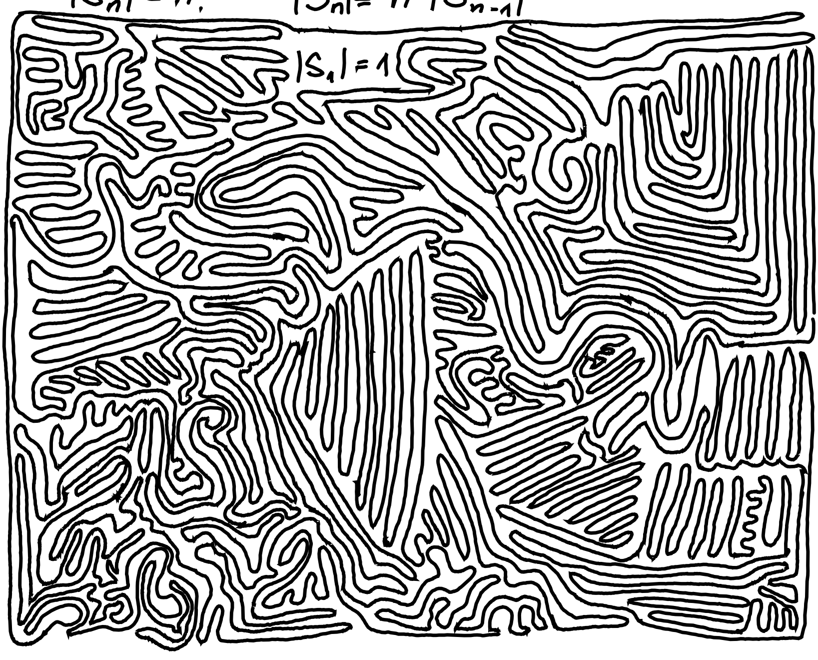
S_A .... množica vseh permutacij $A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A$

$[n]$ .... $\{1, \ldots\ldots, n\}$

$(S_A, \circ)$ je grupa

$|S_n| = n!$ $\qquad |S_n| = n \cdot |S_{n-1}|$

$|S_1| = 1$



$$\{a, a, a, b, b, c, c, c, c\}$$

$$= \{a^{(3)}, b^{(2)}, c^{(4)}$$

(S, μ) ← multi set

m, u

$$\mu : S \longrightarrow \mathbb{N}_0$$

$$c^{(x)} \longmapsto x \qquad \mu : \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\binom{n}{k}$ ... k choose n

(kombinacije z ponavljanji

Permutacije multisetov

$$M=(S,\mu)=\{1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \dots, k^{\alpha_k}\}$$

$$n=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i$$

$\#$ permutacij: $\dfrac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}$

Dokaz: $\underbrace{(\ ,\ ,\dots,\ ,\ )}_{n}$

1: $\binom{n}{\alpha_1}$ opcij kje je 1

2: $\binom{n-\alpha_1}{\alpha_2}$

$$\binom{n}{\alpha_1}\cdot\binom{n-\alpha_1}{\alpha_2}\cdots\cdots =$$

3: $\binom{n-\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_3}$

$\vdots$

i: $\binom{n-\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_j}{\alpha_i}$

$\vdots$

k: $1=\binom{\alpha_k}{\alpha_k}$

$$=\frac{n!\ \cancel{(n-\alpha_1)!}\ \cancel{\ }\ \cdots\ \cancel{\alpha_k!}}{\cancel{(n-\alpha_1)!}\,\alpha_1!\ \cancel{(n-\alpha_1-\alpha_2)!}\,\alpha_2!\cdots\cancel{\alpha_k}\,\alpha_k!}=\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_k!}$$

$\dfrac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}$ multinomial coeficient $\binom{n}{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k}$

$$(x_1+\dots+x_k)^n=\sum_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\\ \sum_i^k\alpha_i=n}}\binom{n}{\alpha_1,\dots,\alpha_k}x_1^{\alpha_1}\cdots x_k^{\alpha_k}$$

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i}$$

Compositions

Definicija: Composition of $n \in \mathbb{N}$:

$\lambda = (\lambda_1, \dots \lambda_\ell)$ $\lambda_i \in \mathbb{N}$ $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = n$

$7 = 3+1+3$ $\ell \dots$ dolzina

$n=4$:

$(4), (1,3), (3,1) (2,2), (2,1,1), (1,2,1), (1,1,2),$
$(1,1,1,1)$ 8 kompozicij

$n \geq 1$

a) # comp of $n = 2^{n-1}$

b) # comp of lenght $k = \binom{n-1}{k-1}$

Dokaz:

a) o o o o na koliko zrazličnih načinov lahko
| | | damo črtice ($n-1$ črtic
✓✗ ✓✗ ✓✗ vsaka je ali pa je ni
$2 \cdot 2 \cdot 2$

$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n-1} = 2^{n-1}$

b) o|o|o|o|o $n=5$ $(2,2,1)$
|| $k=3$ $(1,3,1)$
two bales

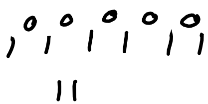
$(n-1)$ pozicij $(k-1)$ črt $\binom{n-1}{k-1}$

Weak compositions
(šibke kompozicije)

lahko je 0

$n=3$ $(0,3)$
$k=2$ $(3,0)$
$(1,2)$
$(2,1)$

\# of weak composition of n of lenght k



$n+1$ prostorčkov
$k-1$ palčk
lahko so na isti poziciji

$$\underbrace{0\,0\,|\,0\,|\,0\,0}_{n+k-1}$$

0 0 1 0 1 0 0

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Permutations of multiset: $\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!\,n!}$

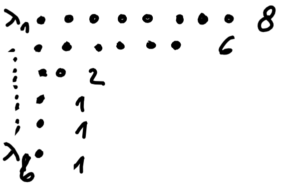
$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Particije naravnih števil

Definicija:

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \qquad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 1$$

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = n$$



(4)
(3, 1)
(2, 2)
(2, 1, 1)
(1, 1, 1, 1)

$p(n) = \#$ particij za n

$p_k(n) := \#$ particij za n dolžine k

$\bar{p}_k(n) = \#$ partizi za n dolžine $\leq k$

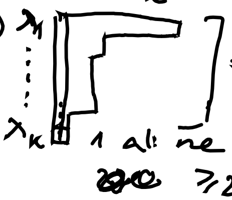
Theorem:

1) $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$

2) $p_k(n) = \bar{p}_k(n-k)$

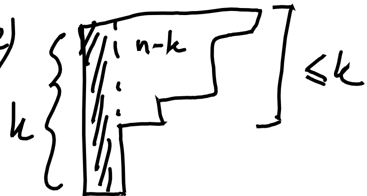
3) $\bar{p}_k(n) = \bar{p}_{k-1}(n) + \bar{p}_k(n-k)$

Dokaz:

1) 

$= p_{k-1}(n-1)$; $\lambda_k = 1$

$p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$

2) 

Stirlingova števila I. vrste

Za $1 \leq k \leq n$ je stirlingovo število I vrste $c(n,k)$, število permutacij množice $[n]$, ki jo zapišemo kot produkt k disjunktnih ciklov

$$C(n,0) = 0 \quad n>0$$
$$C(0,0) = 1$$

Primer: $C(n,n) = 1$ $\quad id$

$$C(n,1) = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

$$\left.\begin{matrix}(x_1, \dots x_n) \\ (x_n\, x_1, \dots x_{n-1}) \\ \vdots\end{matrix}\right\} n$$

$C(4,2)$:

$(\cdot)(\cdot\cdot\cdot)$: $4 \cdot 2$ — $(4)(1\ 2\ 3)$, $(4)(1\ 3\ 2)$

$(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)$: 3 — $\dfrac{\binom{4}{2}}{2} = 3$

$\parallel$

11

Trditev: za $1 \leq k < n$

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + (n-1)\, C(n-1,k)$$

Dokaz: Permutacije $[n]$ s k cikli razdelimo takole:

i) tisti kjer je n negibna točka $\#a$

ii) ostali $\#b$

$$C(n,k) = a+b$$

$a=?$ $\quad \pi = \underbrace{(\ldots)(\ldots)\ldots(\ldots)}_{k-1}(n)$

$$a = C(n-1,k-1)$$

n je v ciklu dolžine vsaj 2

$b=?$ $\quad \pi = \underbrace{(\ldots)(\ldots)\ldots(\ldots)}_{k}$

Če n odstranimo dobimo permutacijo $n-1$ elementov s k cikli. Takih je $C(n-1,k)$

$$(\ldots\ldots)(\ldots)(\ldots\ldots)(\ldots\ldots)(\ldots)$$

n lahko damo na $n-1$ mest

torej $b = (n-1)\, C(n-1,k)$

$$a+b = C(n-1,k-1) + (n-1)\, C(n-1,k)$$

Stirlingove matrike prve vrste

$(n-1)!$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		1

$2\cdot$

$2+3\cdot 3$

$$x^{\overline{k}} = x(x+1)(x+2)(x+3) = x^4+6x^3+11x^2+6$$

Trditev:

$$x^{\overline{n}} = \sum_k C(n,k)x^k$$

Dokaz: (z indukcijo na n)

$n=0$

$$x^{\overline{0}} = 1 \qquad C(0,0)x^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$n-1 \longrightarrow$

$$x^{\overline{n}} = x^{\overline{n-1}}(x+n-1) \qquad x^{\overline{n-1}} = \sum C(n-1,k)x^k$$

$$x^{\overline{n}} = \left(\sum_k C(n-1,k)x^k\right)(x+n-1) =$$

$$= \sum_k C(n-1,k)x^{k+1} + (n-1)\sum_k C(n-1,k)x^k)$$

$$= \sum_k C(n-1,k-1)x^k + \sum_k (n-1)C(n-1,k)x^k$$

$$= \sum_k C(n,k)x^k \qquad \blacksquare$$

Stirlingova števila II vrste in Bellova števila

Razdelitev množice X je družina podmnožic X_i, kjer je $\{X_i\}_{i\in I}$, da je

$$\bigcup_{i\in I} X_i = X \wedge X_i \cap X_j = \emptyset \text{ za } \forall i,j \,.\, i\neq j$$

Za $1\leq k\leq n$ je Stirlingovo število II vrste $S(n,k)$ število razdelitev množice n v k nepraznih razredov

$S(n,0)=0 \quad n>0$

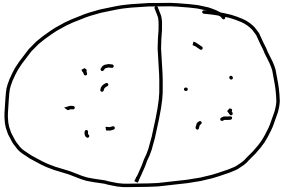
$S(0,0)=1$

Primeri:

$S(n,n) = 1$

$S(n,1) = 1$

$S(n,2) = 2^{n-1} - 1$



$\frac{2^n - 2}{2}$ različnih podmnožic

Bellova števila $B(n)$

$B(n)=\sum_k S(n,k)$ število vseh razdelitev n množice

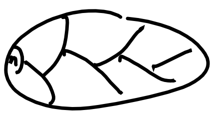
Trditev: za $1 \le k \le n$:

$$S(n,k)=S(n-1,k-1)+kS(n-1,k)$$

Dokaz: $[n]$: razdelitve v k razredov razdelimo

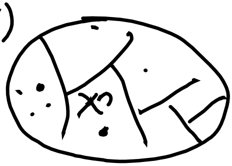
i) tiste ki imajo n kot samostojen del #a

ii) ostale #b



i) $S(n-1,k-1)$

ii)



odstranimo n

$S(n-1,k)$

n potem lahko postavimo na k mest

torej $b=k\cdot S(n-1,k)$

$\blacksquare$

		0	1	2	3	4	5	6
	0	1						
$B(1)=1$	1	0	1					
$B(2)=2$	2	0	1	1				
$B(3)=5$	3	0	1	3	1			
$B(4)=15$	4	0	1	7	6	1		
$B(5)=52$	5	0	1	15	25	10	1	
	6	0	1	⋮	⋮	⋮	⋮	1

$1 + 1 \cdot 2$

$S(n, n-1) = \binom{n}{2}$

Trditev:

$$x^n = \sum_k S(n,k)\, x^{\underline{k}}$$

Dokaz:

Naj bo $x \in \mathbb{N}$

Opazujmo $\{(x_1, \ldots, x_n);\ x_i \in [x]\}$

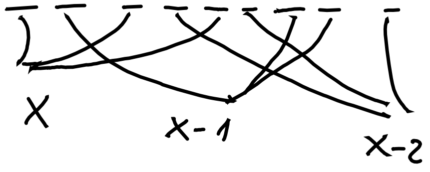
$|X| = x^n$

$(\_,\_,\_,\_,\_,\_)$ Take vektorje razdelimo glede na to koliko različnih komponent ima

$k:\ \underbrace{\underline{7}\ \underline{1}\ \underline{3}\ \underline{1}\ \underline{1}\ \underline{7}\ \underline{8}\ \underline{8}\ \underline{7}\ \underline{3}\ \underline{3}\ \underline{9}\ \underline{7}}_{n}$

$k=5\ (1,3,7,8,9)\quad n=13$

Teh k elementov torej določa razdelitev n v k nepraznih razredov $(S(n,k))$



$x^{\underline{k}}$ možnosti

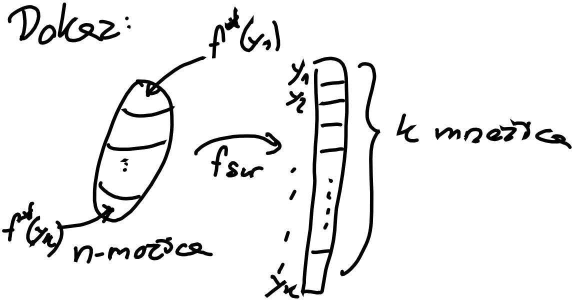
$\Rightarrow$ takih vektorjev s k različnimi komponentami je torej $S(n,k) \cdot x^{\underline{k}}$

Za vsaka dva polinoma stopnje n, ki se sekata v $n+1$ točkah sta enaka

Izrek: Število surjekcij iz n-množice v k-množico je

$$k!\, S(n,k)$$

Dokaz:



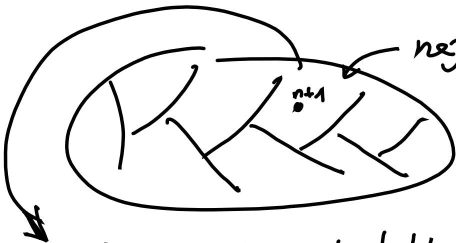
Vsaka surjekcija določa razdelitev n množice v k nepraznih razredov

za $\forall$ tako razdelitev $\exists$ natanko $k!$ različnih surjekcij

■

Trditev: $B(n+1) = \sum_k \binom{n}{k} B(k)$

Dokaz: $[n+1]$ opazujmo razdelitev



naj bo v tem delu razdelitve $k+1$ elementov

ostale elemente lahko izberemo ~~...~~ z $\binom{n}{k}$ načinov

ostalo: $n-k$ elementov v k delov $B(n-k)$

$$B(n+1) = \sum_k \binom{n}{k} B(n-k) =$$

$$\sum_k \binom{n}{n-k} \left(B(n-k)\right) =$$

$$= \sum_k \binom{n}{n-k} B(k)$$

ker če gremo po k je isto kot če gremo po $n-k$

Definicija:

Za $1 \leq k \leq n$ je Lahovo število $L(n,k)$ število razdelitev n množice v k linearno urejenih kosov

Dvanajstera pot

N ...... n-množica predmetov

K ...... k-množica predalov

$f: N \longrightarrow K$ ... razporedi predmete po predalih

predmeti
- → jih ločimo medseboj
- → predmetov ne ločimo medseboj

predali
- → jih ločimo med seboj
- → jih ne ločimo med seboj

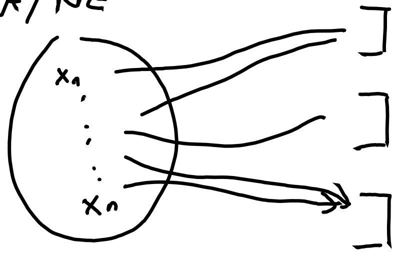
f
- → poljubna
- → injektivna
- → surjektivna

$2 \cdot 2 \cdot 3$ možnosti

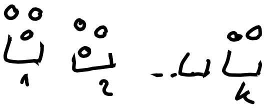
Izrek: (dvanajstera pot)

lahko predmete / predale	poljubna	injektivna	surjektivna
DA / DA	k^n	$\underline{k^n}$	$k!\,S(n,k)$
DA / NE	$\sum_{i \leq k} S(n,i)$	$\begin{cases} 1 & n \leq r \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$	$S(n,k)$
NE / DA	$\binom{k+n-1}{n}$	$\binom{k}{n}$	$\binom{n-1}{k-1}$
NE / NE	$\overline{p_k}(n)$	$\begin{cases} 1 & n \leq k \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$	$p_k(n)$

DA/NE

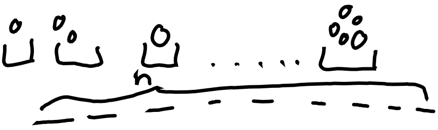


NE/DA



šibke kompozicije
=
neurejene izbire
s ponavljanjem n
iz k množice

~~nefetivne~~
surjektivne

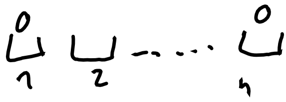


n-1 mest

$\underbrace{||||\ \ldots\ |}_{k-1}$ palčk

$\binom{n-1}{k-1}$

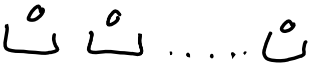
injektivnost



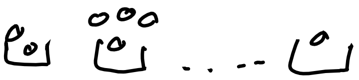
$\binom{k}{n}$ izmed k predalov n jih izberem neurejeno

NE/NE

inj:



surj:

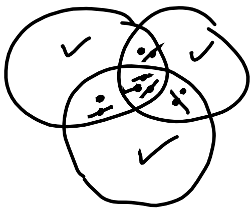


particije dolžine k

Načelo vključitev in izključitev

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B - C|$$
$$+ |A \cap B \cap C|$$

Primer:

Koliko števil v [30] ni tujih s 30

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 5 \\ 3 & 3 \\ & \end{array}$$

A_2 ... večkratniki 2 v [30]

A_3 ... -||-

A_5 ..... -||-

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 15+10+6-5-3-2+1 =$$

$20+2$

$= 22$

Št tujih števil s 30 je 8

Izrek: načelo vključitev in izključitev

Če so $A_1, \dots, A_n$ množice, potem je

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sigma_j$$

kjer je

$$\sigma_j = \sum_{I \in \binom{[n]}{j}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

množica j podmnožic od $[n]$

$$|\bigcup A_i| = |A_1| + \dots + |A_n|$$
$$- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n|$$
$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots$$

Dokaz: $x \in \bigcup A_i \Rightarrow x$ prispeva natanko 1 k formuli;

$x \in \bigcup A_i \Rightarrow x$ leži v k množicah A_i $k \in [n]$

x k formuli prispeva

$\sigma_1 \dots k$

$\sigma_2 \dots -\binom{k}{2}$

$\vdots$

$\sigma_n \dots \pm\binom{k}{n}$

$\sigma_{k+1} \dots 0$

$\vdots$

Prispevek x je torej

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \dots \pm \binom{k}{n}$$

$$0 = (1-1) = (1-1)^k$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} (-1)^n = \underbrace{\binom{k}{0}}_{=1} - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \dots \pm \binom{k}{n} = 0$$

Torej to je 1

Primer:

Na koliko načinov lahko razporedimo n označenih predmetov v k označenih predelov, če je vsaj en predel prazen

A_i ... tiste razporeditve, kjer je A^i prazen

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \sigma_i$$

$$\sigma_i = \binom{k}{i} (k-i)^n$$

zberemo i predelov, ki so prazni

vsak predmet gre lahko kamorkoli.

$$= \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \binom{k}{i} (k-i)^n$$

$=$ vse $-$ surjektivne

Posledica:

Če je X ~~N~~-množica in so

$A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ podmnožice, je št. elementov

množice X, ki niso v nobeni od teh množic

$$N + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \sigma_j$$

Število premestitev = št. permutacij brez negibnih točk

$\pi \in S_n$ permutacija $[n] \longrightarrow [n]$

$\pi(i) = i$ ..... i je negibna točka

a_n .... št. permutacij S_n, ki so brez negibnih točk

$a_1 = 0 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$a_2 = 1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$a_3 = 2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$A_i = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i\}$

$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \{\pi \in S_n ; \exists i \in [n]. \pi(i) = i$

$a_n = n! - |A_1 \cup \ldots \cup A_n| =$

$n! + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \sigma_j$

$|A_i| = (n-1)!$ za $\forall i$

$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$ $\qquad (\ldots \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} j \\ j \end{pmatrix} \ldots)$

$= n! - \left(\binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! \ldots \pm \binom{n}{n}(n-n)!\right)$

$\binom{n}{i}(n-i)! = \frac{n!\,(n-i)!}{i!\,(n-i)!} = \frac{n!}{i!}$

$= n! - \left(\frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \ldots\right) =$

$n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \ldots \pm \frac{1}{n!}\right)$

Izrek: Če je $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ razcep n na praštevila, potem je

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

eulerjeva funkcija ϕ (št. števil manjših od n, ki so tuja z n)

Dokaz: Za $i \in [r]$:

$A_i = \{ j \in [n] : p_i \mid j \}$ = večkratniki od p_i v množici $[n]$

$A_1 \cup \ldots \cup A_r$ ..... števila $[n]$ ki niso tuja z n

$$\Rightarrow \phi(n) = n - |A_1 \cup \ldots \cup A_r|$$

$$|A_i| = \left|\left\{ p_i, 2p_i, \ldots, \left(\frac{n}{p_i}\right) p_i \right\}\right| = \frac{n}{p_i}$$

$$\sum_{i=1}^{r} |A_i| = \frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \ldots \frac{n}{p_r} = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i}$$

$$|A_i \cap A_j| = \left|\left\{ p_i p_j, 2p_i p_j, \ldots \left(\frac{n}{p_i p_j}\right) \cdot p_i p_j \right\}\right| = \frac{n}{p_i p_j}$$

$$\phi(n) = n - \left(\frac{n}{p_1} + \ldots \frac{n}{p_r}\right) + \\ + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \ldots + \frac{n}{p_{r-1} p_r}\right) - \\ - \left(\frac{n}{p_1 p_2 p_3} \ldots\ldots\right) + \\ \ldots \\ \pm \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_r} =$$

$$n\left(1 - \left(\frac{1}{p_1} + \ldots \frac{1}{p_r}\right) + \left(\frac{1}{p_1 p_2} \ldots + \frac{1}{p_{r-1} p_r}\right) - \ldots \pm \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_r}\right.$$

Mislim da lahko nadaljujemo z indukcijo na r

$\blacksquare$

Rekurzivne enačbe

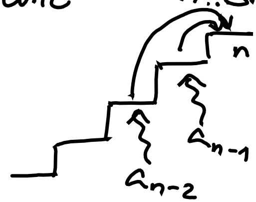
Primer 1: Na koliko načinov lahko prehodimo n stopnic, če vsakič prestopimo 1 ali 2

a_n .... iskano število $\qquad$ n .. št stopnic

$a_1 = 1$

$a_2 = 2$

$a_3 = 3$

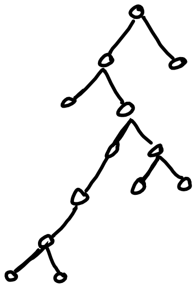


$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad a_n = F_{n+1}$$

$F_0 = 0$

$F_1 = 1$ $\qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad n \geq 2$

Primer 2: Koliko je dvojiških dreves s korenom? (z n vozlišči



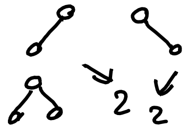
Vsako vozlišče ima kvečjemu dva potomca

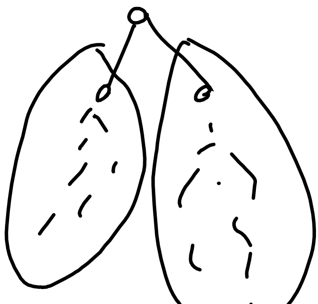
a_n … št dvojiških dreves

$a_1 = 1$

$a_2 = 2$

$a_3 = 5$





0 do a_{n-1} 0 do a_{n-1}

k vozlišč $(n-k-1)$ vozlišč

a_k a_{n-k-1}

Potem rečemo $a_0 = 1$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k-1}$$

Izrek:

Naj bo zaporedje $(a_n)_{n\geq 0}$ podano tako

$a_0 = b_0 \quad a_1 = b_1 \quad a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2} \quad n \geq 2$

kje so b_0, b_1, A, B fiksna števila

Naj bosta α, β korena karakteristične enačbe $x^2 = Ax + B$

Tedaj velja:

1) $\alpha \neq \beta \Rightarrow \exists K_1, K_2 .\ a_n = K_1\alpha^n + K_2\beta^n$

2) $\alpha = \beta \Rightarrow \exists K_1, K_2 .\ a_n = (K_1 + K_2 n)\alpha^n$

Dokaz:

1) $\alpha \neq \beta$

$a_0 = K_1 + K_2 = b_0$

$a_1 = \alpha K_1 + \beta K_2 = b_1$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta - \alpha \neq 0$

Torej je rešljiva

K_1, K_2 obstajata $\Rightarrow$ za a_0 in a_1 velja

$n \geq 2$: indukcija

$a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2} =$

$A(\alpha^{n-1}K_1 + \beta^{n-1}K_2) + B(\alpha^{n-2}K_1 + \beta^{n-2}K_2) =$

$= \alpha^{n-2}K_1\underbrace{(A\alpha + B)}_{\alpha^2} + \beta^{n-2}K_2\underbrace{(A\beta + B)}_{\beta^2} =$

$x^2 = Ax + B$

$= \alpha^n K_1 + \beta^n K_2$

2) $\alpha = \beta$

2.1) $\alpha = \beta = 0$

$x^2 = Ax + B$

$x_{1,2} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4B}}{2}$

$x_1 = x_2 \Rightarrow \sqrt{A^2 + 4B} = 0$

$\alpha = \beta = \frac{A}{2} = 0 \quad A = 0 \Rightarrow B = 0$

Torej je a_n ničelno zaporedje

(za a_1 in a_2 se ne sekiramo)

2.2) $\alpha = \beta \neq 0$

$a_0 = K_1 = b_0$

$a_1 = K_1 + K_2\alpha = b_1$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} = \alpha \neq 0$

K_1, K_2 obstajata torej formula velja za a_0 in a_1

$a_n = Aa_{n-1} + Aa_{n-2}$

$A(K_1 + K_2(n-1))\alpha^{n-1} + B(K_1 + K_2(n-2))\alpha^{n-2} =$

$AK_1\alpha^{n-1} + AK_2 n\alpha^{n-1} - AK_2\alpha^{n-1}$

$+ BK_1\alpha^{n-2} + BK_2 n\alpha^{n-2} - 2BK_2\alpha^{n-2} =$

$= K_1\alpha^{n-2}\overbrace{(A\alpha + B)}^{\alpha^2} + K_2\alpha^{n-2} n\underbrace{(A\alpha + B)}_{\alpha^2} -$

$AK_2\alpha^{n-1} - 2BK_2\alpha^{n-2}$

$= K_1\alpha^n + K_2 n\alpha^n - \underbrace{K_2\alpha^{n-2}(A\alpha + 2B)}_{=0}$

$A\alpha + 2B$

$x^2 = Ax + B \quad x^2 - Ax - B = 0$

$\alpha = \frac{A}{2} \quad A^2 + 4B = 0 \rightarrow B = -\frac{A^2}{4}$

$A\alpha + 2B = A \cdot \frac{A}{2} + 2\left(-\frac{A^2}{4}\right) = 0$

■

Splošni primer:

$(a_n)_{n\geq 0}$ je podano takole:

$a_0 = b_0$

$a_1 = b_1$

$a_{d-1} = b_{d-1}$

$c_d a_{n+d} + c_{d-1} a_{n+d-1} + \dots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = f(n)$

$c_d, \dots, c_0$ ... fiksne števila

$f(n): \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ (homogena rekurzija če $f(n)=0$

(*) d-členа linearna rekurzija s konstantnimi koeficienti

Skica reševanja:

$\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} = \{(a_n)_n \,;\, a_n \in \mathbb{C}\}$

$(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}, +, \cdot)$ vektorski prostor

$\mathrm{End}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0})$ linearne preslikave $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$

$= (\mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}))$

$(\mathrm{End}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}), +, \cdot)$ je vektorski prostor

$E \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0})$

$E: (a_0, a_1, \dots) = (a_1, a_2, \dots)$

Reševanje homogene rekurzije (*)

BŠZS $c_d = 1$

$$a_{n+d} + c_{d-1} a_{n+d-1} + \dots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = 0$$

$$\mapsto Q(x) = x^d + c_{d-1} x^{d-1} + \dots + c_1 x + c_0 \quad (**)$$

(priredimo mu polinom)

Poglejmo $Q(E) \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0})$

$$(a_n)_n \in \ker(Q(E)) \iff Q(E)((a_n)_n) = \overset{(0,0,\dots)}{0}$$

$$\iff (E^d + c_{d-1}E^{d-1} + \dots c_1 E + c_0 I)(a_n)_n = 0$$

$$\iff E^d(a_n) + c_{d-1}E^{d-1}(a_n) + \dots c_1 E(a_n) + c_0 I(a_n) = 0$$

$$\iff (a_d, a_{d+1}, \dots) + c_{d-1}(a_{d-1}, a_d, \dots) + \dots + c_0(a_1, \dots) \overset{?}{=} 0$$

$$\iff (a_d + c_{d-1}a_{d-1} + \dots c_1 a_1 + c_0 a_0,$$
$$a_{d+1} + c_{d-1} a_d + \dots,$$
$$\dots\dots) = (0, \dots 0)$$

$$\iff a_n \text{ reši } (**) (Q(x) = 0)$$

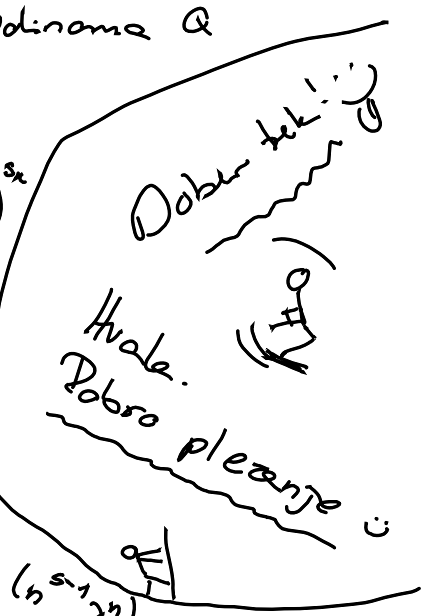
Splošne rešitve homogene enačbe so natanko elementi $\ker(Q(E))$

$$Q(x) = (x - \lambda_1)^{s_1} \cdots (x - \lambda_k)^{s_k} \qquad s_1 + \dots + s_k = d$$

faktorizacija polinoma Q

$\ker(Q(E)) =$
$\ker(E - \lambda_1 I)^{s_1} \oplus \ker(E - \lambda_k I)^{s_k}$

Hočemo torej dobiti
$\ker(E - \lambda_i I)^{s_i}$
$\dim \ker(E - \lambda I)^s = s$



$(\lambda^n)_{n \geq 0}, (n\lambda^n)_{n \geq 0}, \dots (n^{s-1}\lambda^n)_{n \geq 0}$ zaporedje

so si linearno neodvisni in so baza $\ker(E - \lambda I)^2$

Izrek: $(a_n)_n \in \ker(E - \lambda I)^s \iff$
ko je $(a_n)_n$ oblike
$a_n = P(n)\lambda^n$ kjer je $P(n)$ polinom stopnje $\leq n-1$

Trditev: $(a_n)_n \in \ker((E-\lambda I)^s)$

$\iff$ a_n oblike $A(n)\lambda^n$ kjer je $A(n)$ polinom stopnje $\leq s-1$

Izrek: Splošna rešitev enačbe

$$a_{c+d} + c_{d-1}a_{c+d-1} + \dots + c_0 a_n = 0$$

je oblike

$A_1(n)\lambda_1^n + \dots + A_k(n)\lambda_k^n$, kjer so λ_i ničle karakterističnega polinoma stopnje s_i $i \in [k]$

in je A_i polinom stopnje $\leq s_i - 1$

Rešitev homogene enačbe

$$c_d a_{n+d} + \dots + c_0 a_n = f(n)$$

je oblike $z_n + b_n$ kjer je z_n splošna rešitev ustrezne homogene enačbe in je b_n neke partikularne rešitev pri čemer upoštevamo, da če je $f(n)$ aditivna

$$f(n) = f_1(n) + \dots + f_k(n)$$

Potem b_n lahko dobimo kot vsoto partikularnih rešitev od

$$c_n a_{n+d} + \dots + c_0 a_n = f_i(n)$$

Primer: $a_0=0 \quad a_1=1$

$$a_n=4a_{n-1}-4a_{n-2}-2n+5\cdot 3^n$$

$$a_n-4a_{n-1}-4a_{n-2}=-2n+5\cdot 3^n$$

$$a_n-4a_{n-1}+4a_{n-2}=0$$

$$x^2-4x+4=0 \qquad (x-2)^2=0$$

$$x_{1,2}=2$$

- $z_n=(A+B_n)\,2^n$ poljuben polinom stopnje 1

- $a_n-4a_{n-1}+4a_{n-2}=-2n$

nastavek: $b'=A_0+A_1 n$

$$A_0+A_1 n-4(A_0+A_1(n-1))+4(A_0+A_1(n-2))=-2n$$

$$A_0+A_1 n-\cancel{4A_0}-\cancel{4A_1 n}+4A_1+\cancel{4A_0}+\cancel{4A_1 n}-8A_1=-2n$$

$$(A_0-4A_1)+A_1 n=-2n$$

$$A_0-4A_1=0$$

$$A_1=-2 \qquad \Rightarrow b'=-8-2n$$

- $a_n-4a_{n-1}+4a_{n-2}=5\cdot 3^n$

$$b''=c\cdot 3^n$$

$$c\cdot 3^n-4c\cdot 3^{n-1}+4c\,3^{n-2}=5\cdot 3^n \quad /:3^{n-2}$$

$$9c-12c+4c=45$$

$$c=45$$

$$b''=45\cdot 3^n=5\cdot 3^{n+2}$$

Splošna rešitev

$$a_n=(A+B_n)\,2^n+5\cdot 3^{n+2}-8-2n$$

Upoštevamo da $a_0=0 \quad a_1=1$

$$A+5\cdot 3^2-8=0$$
$$(A+B)\cdot 2+5\cdot 3^3-8-2=1$$

$$A=-37$$
$$B=-25$$

Formalne potenčne vrste / rodovne funkcije

zaporedja nad $\mathbb{C}$

$$(a_n)_{n\geq 0} \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

formalna potenčna vrsta zaporedja $(a_n)_n$

Operacije s formalnimi potenčnimi vrstami:

$(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$

algebra

$$\sum_n a_n x^n + \sum_n b_n x^n = \sum_n (a_n + b_n) x^n$$

$$\lambda \cdot \sum_n a_n x^n = \sum_n \lambda a_n x^n$$

vektorski prostor

$$\left(\sum_n a_n x^n\right)\left(\sum b_n x^n\right) = \sum_n \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$$

$A(x)$ nej bo formalna potenčna vrsta če $\exists$ f.p.v $B(x)$. $A(x)\cdot B(x) = 1$

$(1, 0, 0, \ldots\ldots)$

Trditev: Formalna potenčna vrsta $A(x)$ je obrnljiva $\Leftrightarrow$ ko je $a_0 \neq 0$

Dokaz: $(\Rightarrow)$ Naj bo $A(x)$ obrnljiva:

Torej $\exists B(x)$. $A(x)\cdot B(x) = 1$

$$A(x) = \sum_n a_n x^n$$

$$B(x) = \sum_n b_n x^n \qquad a_0 \cdot b_0 = 1$$

$$a_0 \neq 0$$

$\Leftarrow$ Naj bo $A(x) = \sum_n a_n x^n$; $a_0 \neq 0$

Če je obrnljiva mora obstajati

$B(x) = \sum_n b_n x^n$. $B(x)\cdot A(x) = 1$

$$a_0 \cdot b_0 = 1 \Rightarrow b_0 = a_0^{-1}$$

induktivno trdimo, da $\forall$ b_n $n \geq 0$ $\exists$ in je enoličen

$n-1 \Rightarrow n$

$$(A(x)\cdot B(x))_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0$$

$$a_0 b_n + \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} = 0$$

$$a_0 b_n = -\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$$

$$b_n = \frac{-\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}}{a_0}$$ ← obstaja po indukcijski predpostavki

obstaja in je enoličen

$$\sum_n x^n = (1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x}$$

$$(1+x+\ldots)(1-x) = 1$$

$$\sum_{n\geq 0} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\sum_n \binom{m}{n} x^n = (1+x)^m \qquad m \in \mathbb{N}$$

Če je $(a_n)_n$ zaporedje, ki je rešitev nekega kombinatoričnega problema, potem $\sum a_n x^n$ pravimo rodovna funkcija

$$G(x) = \sum a_n x^n$$

Primer:

$F_0 = 0 \quad F_1 = 1 \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad n \geq 2$

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} F_n x^n$$

$$= \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{F_0} + 1\cdot x + \sum_{n\geq 2} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n =$$

$$= x + x \sum_{n\geq 2} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n\geq 2} F_{n-2} x^{n-2} =$$

$$= x + x \sum_{n\geq 1} F_n x^n + x^2 \sum_{n\geq 0} F_n x^n$$

lahko tudi $n \geq 0$

$$= x + x \sum_{n\geq 0} F_n x^n + x^2 \sum_{n\geq 0} F_n x^n =$$

$$= x + x F(x) + x^2 F(x)$$

$$F(x) = x + x F(x) + x^2 F(x)$$

$$F(x)(1 - x - x^2) = x$$

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$ rodovna funkcija fibonaccijevega zaporedja

Definirajmo

$$A(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

$$A'(x)=\sum_{n\geq 0} n a_n x^{n-1}$$

$$(A(x)\cdot B(x))'=A'(x)\,B(x)+A(x)\cdot B'(x)$$

$$(A(x)\cdot B(x))'=\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k}\right)x^n\right)'=$$

$$=\sum_{n\geq 0}(n+1)\left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n+1-k}\right)x^n$$

$$=\sum_n (n+1)(a_0 b_{n+1}+a_1 b_{n-2}+\dots+a_n b_1+a_{n+1} b_0)x^n$$

$$A'(x)B(x)=\left(\sum_n (n+1)a_{n+1}x^n\right)\left(\sum_n b_n x^n\right)=$$

$$=\sum_n\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}b_{n-k}\right)x^n=$$

$$=\sum_n (a_1 b_n+2a_2 b_{n-2}+\dots+(n+1)a_{n+1}b_0)\,x^n$$

$$A(x)\cdot B'(x)=\sum_n a_n x^n\cdot\sum_n (n+1)b_{n+1}x^n=$$

$$=\sum_n\left(\sum_{k=0}^{n} a_k(n+1-k)b_{n+1-k}\right)x^n=$$

$$=\sum_n\left((n+1)a_0 b_{n+1}+n a_1 b_n+\dots+a_n b_1\right)x^n$$

$$A'(x)B(x)+A(x)B'(x)=$$

$$\sum_n\left((n+1)a_0 b_{n+1}+\dots+(n+1)a_{n+1}b_0\right)=$$

$$=\sum_n (n+1)\left(\sum a_k b_{n+1-k}\right)x^n$$

Reševanje rekurzij z rodovnimi funkcijami

$a_0 = 2 \quad a_1 = 3 \quad a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \quad n \geq 2$

$$G(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 2 + 3x + \sum_{n\geq 2} (2a_{n-1} - a_{n-2}) x^n$$

$$= 2 + 3x + 2x \underbrace{\sum_{n\geq 1} a_n x^n}_{\sum_{n\geq 0} a_n x^n - 2} - x^2 \sum_{n\geq 0} a_n x^n =$$

$$= 2 + 3x + 2x\, G(x) - x^2 G(x) - 4x$$

$$G(x) = 2 - x + 2x\, G(x) - x^2 G(x)$$

$$G(x)(1 - 2x + x^2) = 2 - x$$

$$G(x) = \frac{2-x}{1-2x+x^2} = \frac{2-x}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{A - Ax + B}{(1-x)^2}$$

$A + B = 2$
$-A = -1$
$A = 1$
$B = 1$

$$G(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = (1 + x + x^2 + \ldots)(1 + x + x^2 + \ldots)$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$$

$$G(x) = \sum_{n\geq 0} x^n + \sum_{n\geq 0} (n+1) x^n =$$

$$\sum_{n\geq 0} (n+2) x^n \qquad G(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

$$a_n = n + 2$$

Koraki splošnega reševanja

(nekega kombinatoričnega problema

1. Rešitev problema zapišemo z rekurzivno enačbo
2. Zapišemo rodovno funkcijo zaporedja s pomočjo rekurzivne zveze
3. Z algebra nad rodovnimi funkcijami, rodovno funkcijo razvijemo v vrsto
4. Iz razvoja preberemo rešitev našega začetnega problema

Eksponentne rodovne funkcije

$$(a_n)_{n \geq 0} \longmapsto E(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$$

Catalanova števila

$x_1 \cdots x_n$ Na koliko načinov lahko izračunamo ta produkt, če po vrsti zmnožimo dve zaporedni števili in ju zamenjamo s produktom.

(Na koliko načinov lahko postavimo oklepaje)

$a_n \ldots$ iskano število

$a_1 = 1$

$a_2 = 1$

$a_3 = 2$

$a_4 = 5$

$$a_n \quad \begin{matrix} (\ldots) \times x_n \\ (\ldots)(x_{n-1} \times x_n) \\ (x_1(\ldots(x_{n-1} \times x_n))) \end{matrix}$$

$(x_1 \ldots x_k) \cdot (x_{k+1} \ldots x_n)$

zadnji produkt

$a_k \cdot a_{n-k}$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} a_n a_{n-k} \qquad n \geq 2$$

2. korak

$$G(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \quad \text{rodovna funkcija}$$

$$= 0 + 1 \cdot x + \sum_{n \geq 2} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} x^n =$$

$$x + \sum_{n \geq 0} \sum_{i=0}^{n} a_n a_{n-i} x^n = x + G(x)^2$$

$$G(x) = x + G(x)^2$$

$$G(x)^2 - G(x) + x = 0$$

$$G(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$$

$$G(0) = \frac{1 \pm \sqrt{1}}{2} = 0$$

$$G(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$$

$$G(x) = -\frac{1}{2}\left((1-4x)^{\frac{1}{2}} - 1\right)$$

$$(1+a)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k \geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{k} a^k =$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!} =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-3}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{k!}(-1)^{k-1}\frac{1}{2^k} 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-3) \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (k-2)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (k-2)}$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{k!\,2^k} \frac{(2k-2)!}{2^{k-1}(k-1)!} =$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot 2^{k-1}} \binom{2k-2}{k-1}$$

$$G(x) = -\frac{1}{2}\left(\sum \binom{\frac{1}{2}}{k}(-4x)^k - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k\,2^{2k-1}}\binom{2k-2}{k-1}(-4x)^k =$$

$$= \cancel{-\frac{1}{2}}\sum_{k \geq 1} \frac{\cancel{(-1)^{k-1}}}{k \cdot \cancel{2^{2k-1}}}\binom{2k-2}{k-1}\cancel{(-1)^k}\,\cancel{2^{2k}}\,x^k =$$

$$= \sum_{k \geq 1} \underbrace{\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}}_{a_k} x^k$$

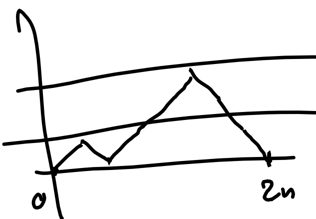
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \ldots\ldots \text{catalanova števila}$$

za eno zamaknemo indeks

$a_n = C_{n-1}$

OEIS

online encyclopedia of integer sequences



II Teorija grafov

Graf G je urejen par $(V(G), E(G))$, kjer je $V(G)$ množica vozlišč in $E(G)$ množica povezav grafa G, kjer je $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$

Primer: $G = (V(G), E(G))$ kjer je

$V(G) = \{x, y, z, w, u, v, t\}$

$E(G) = \{\{x,y\}, \{x,w\}, \{x,v\}, \{x,t\}, \{y,z\}, \{y,u\}, \{u,v\}, \{u,t\}, \{w,t\}, \{u,t\}\}$

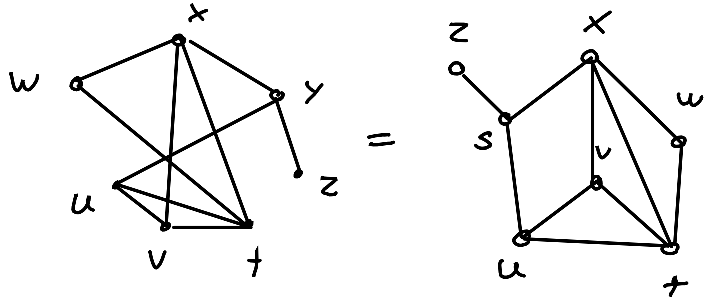
- če ne povemo drugače bo $|V(G)| < \infty$
- $\{u,v\} = uv$ krajši zapis
- $e = uv \in E(G)$ u in v sta krajišči s povezavo e

  u in v sta sosednji vozlišči

  $u \sim v$ u je sosedna z v

  $u \sim_G v$ u je sosedna z v v grafu G

Risba grafa



$G, u \in V(G)$

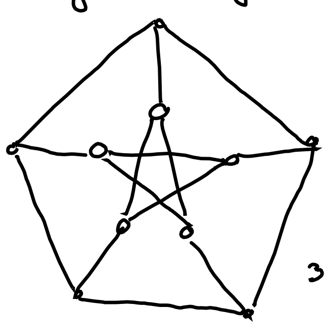
$N_G(u) = \{v ;\ uv \in E(G)\}$

$N_G(u)$ ... soseščina u (sosedna vozlišča)

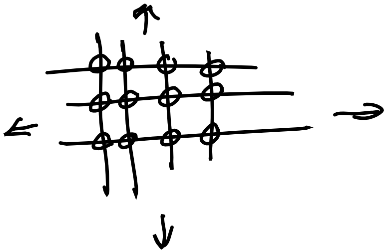
$\deg_G(u) = |N_G(u)|$ ... stopnja vozlišča u

Graf G je regularen, če imajo vsa vozlišča isto stopnjo.
Če je ta stopnja r pravimo da je G r-regularen graf

Primer



3-regularen graf



$V(G) = \{(i,j) : i,j \in \mathbb{Z}\}$

$(i,j) \sim (i',j') \Leftrightarrow |i-i'| + |j-j'| = 1$

k-regularen graf

graf

$G \longmapsto$ matrika sosednosti

$|V(G)| \times |V(G)|$

$A(G)$

$V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$

$$(A(G))_{ij} = \begin{cases} 1 ; & v_i \sim v_j \\ 0 : & \text{sicer} \end{cases}$$

po diagonali ima same ničle

$A(G) = (A(G))^T$

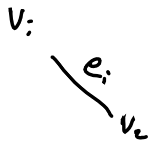
Lema o rokovanju:

Če je G graf, potem je

$$\sum \deg(u) = 2|E(G)|$$

Dokaz:

$$\begin{array}{c|ccccc|} & e_1 & \cdots & e_i & \cdots & e_m \\ \hline v_1 & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & 0 & & \\ v_i & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & 0 & & \\ v_j & & & 0 & & \\ & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\ v_n & & & 0 & & \\ & & & 0 & & \\ & & & 0 & & \end{array}$$



Pri vsaki povezavi obkljukamo

Posledica:
število vozlišč lihe stopnje
danega grafa je sodo

Dokaz:

$$\overbrace{2\cdot|E(G)|}^{\text{sodo}}=\sum_{u}\deg(u)=$$

$$=\underbrace{\sum_{\substack{u \text{ sode}\\ \text{stopnje}}}\deg(u)}_{\text{sodo število}}+\sum_{\substack{u \text{ lihe}\\ \text{stopnje}}}\deg(u) \Rightarrow \sum_{\substack{u \text{ lihe}\\ \text{stopnje}}}\deg(u) \text{ je sodo}$$

Graf H je podgraf G, če je
$V(H)\subseteq V(G)$ in $E(H)\subseteq E(G)$

Podgraf H je <u>vpet</u> če je $V(H)=V(G)$
Podgraf H je <u>porojen</u> ali <u>induciran</u>
če velja $u,v\in V(H)$ $u\underset{G}{\sim}v \Rightarrow u\sim_H v$

Nekaj družin grafov

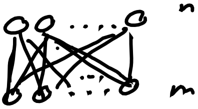
$n \geq 1$: K_n .... <u>polni graf</u> na n vozliščih
(vsa vozlišča so sosednja)

$n \geq 1$: P_n .... <u>pot</u> na n vozliščih

n vozlišč

$n \geq 3$: C_n .... <u>cikel</u> na n vozliščih
P_n + še ena povezava
iz u_n v u

$n, m \geq 1$ $K_{n,m}$ ..... <u>polni dvodelni graf</u>

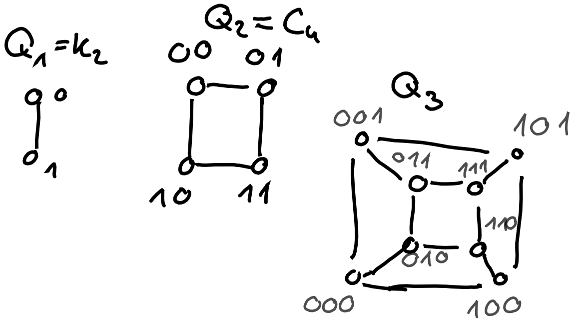


$n \geq 1$ Q_n ..... <u>n kocka</u>

$V(Q_n) = \{0,1\}^n =$
$\{b_1 \ldots b_n \,;\, b_i \in \{0,1\}\}$

$|V(Q_n)| = 2^n$

$b_1 \ldots b_n \sim b_1' \ldots b_n' \equiv \exists! i \in [n]$
$b_i \neq b_i'$



n sosedov

$$\sum \deg = 2|E|$$

$$2^n \cdot n = 2|E|$$

$$E(Q_n) = 2^{n-1} \cdot n$$

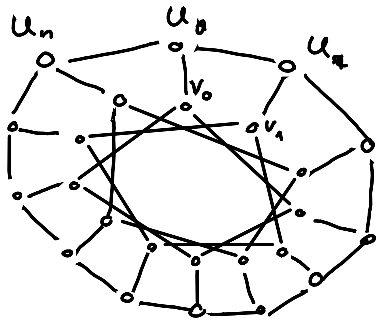
$P_{n,k}$ $k \leq \frac{n}{2}$ .... posplošeni petersenovi grafi

vozlišča: $\{u_0, \ldots, u_{n-1}\} \cup \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$

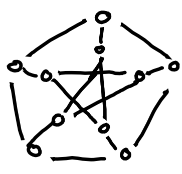
povezave: $\{u_i u_{i+1}, \forall i \in Z_n\} \cup$

$\{u_i v_i ; \forall i \in Z_n\} \cup$

$\{v_i v_{i+k} ; \forall i \in Z_n\}$



če sta n in k tuji je našli le ena zanke



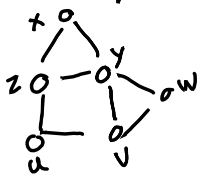
Petersonov graf

P_{52}

Sprehodi in poti v grafih

G graf.

Sprehod v G je zaporedje vozlišč grafa G $v_0, v_1, \dots, v_k$, tako da je $v_i v_{i+1}$ povezava grafa G za $\forall i \in \{0, \dots, k\}$



$y, x, y, x, z, x, y, w, v, w$

Sprehod je enostaven, če so vse njegove povezave paroma različne

z, y, v, w, y, x

Pot v grafu je sprehod s samimi različnimi vozlišči

Če začetek sprehoda = konec sprehoda je to sklenjen sprehod

enostaven sklenjen sprehod

Cikel v grafu sklenjen sprehod s samimi različnimi vozlišči

$v_0 v_k$ sprehod .... sprehod od v_0 do v_k

Lema 1: Če v grafu G obstaja u,v-sprehod, obstaja tudi u-v pot

Dokaz. Naj bo $u = u_0, u_1, \dots, u_k = v$ sprehod
če so vsi u_i paroma različni imamo iskano u,v pot
Sicer $\exists i,j.\ \overset{i<j}{i \neq j}.\ u_i = u_j$

Potem je $u = u_0, \dots, u_i, u_{j+1}, \dots, u_k = v$
spet u,v sprehod

po končnem številu korakov tega dobimo
u,v pot

Lema 2: če v grafu G obstajata dve različni u,v poti, potem ima G vsaj en cikel

Dokaz: Naj bosta P,Q različni u,v poti

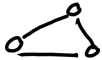
Naj bo w prvo vozlišče na P in na Q tako da naslednje vozlišče ni več skupno

izberemo w' ki je naslednje prvo skupno vozlišče. imamo cikelj

Lema 3: Če v grafu G obstaja sklenjen sprehod lihe dolžine, obstaja v G tudi cikel lihe dolžine

Dokaz. Naj bo Q sklenjen sprehod dolžine $2k+1$

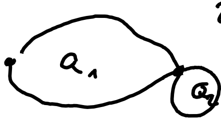
indukcija po k

$k = 1 \Rightarrow$  sklenjen sprehod dolžine 3 C_3

indukcijski korak:

Če je Q cikel potem očitno

če ni cikel se dve vozlišči ponovite



2 sklenjena sprehoda dva sta krajša

$$\underset{\text{liho}}{|Q|} = |Q_1| + |Q_2|$$

vsaj ena je liha

obstaja cikel lihe dolžine

Graf G je povezan, če vsak par vozlišč $u, v \in V(G)$ obstaja u,v sprehod (ekvivalentno: u,v pot)

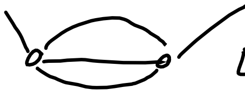
Različni podgrafi grafa, ki so povezani so <u>komponente grafa</u>

$\Omega(G)$.... št komponent grafa

$\Omega(G)=1 \iff$ graf je povezan

Inačice koncepta „graf"

lahko dopuščamo vzporedne povezave in zanke



$E(G) = \{\{u,v\}, \{v,u\}, \dots\}$

vzporedne povezave

$\{u,u\}$

Graf je <u>enostaven</u> če nima nič od tega

$G = (V(G), E(G), w)$ kjer je $w : V(G) \to \mathbb{R}$ ...uteženi graf

$G = (V(G), E(G), \ell)$ kjer je $\ell : E(G) \to \mathbb{R}$ ...omrežje

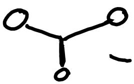
Usmerjeni grafi ali: digrafi

$$E(G) \subseteq V(G) \times V(G)$$

$$(u,v) \in E(G)$$

$$E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$$

Hipergrafi



– ena povezava

Razdalja v grafih in dvodelni graf

G povezan

$u,v \in V(G)$ Razdalja $d_G(u,v)$ med u in v je št povezav na najkrajši u,v poti

$$d_G(u,v) = 0 \iff u = v$$

$$d_G(u,v) = 1 \iff uv \in E(G)$$

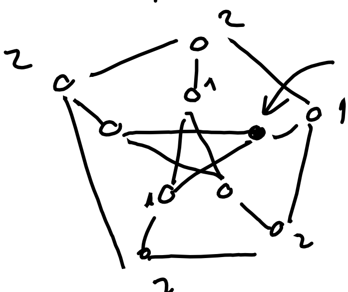
$(V(G), d_G)$ je metrični prostor

<u>Ekscentričnost $ecc_G(u)$</u> vozlišča u je

$$\max_{v \in V(G)} d_G(u,v) = \max\{d(u,v) ; v \in V(G)\}$$

<u>Premer</u> grafa je $\operatorname{diam}(G) = \max_{u \in V(G)} ecc(u)$

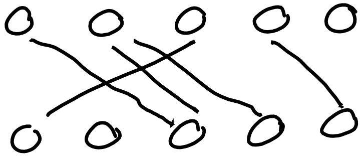
$$= \max_{u,v} d_G(u,v)$$



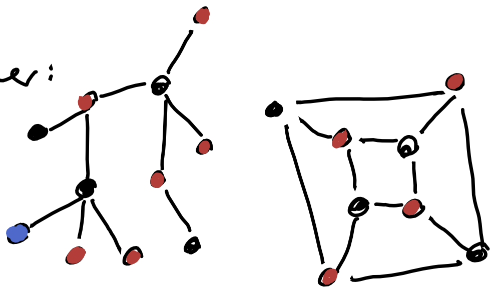
$ecc(u) = 2$

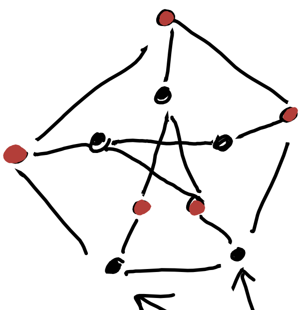
$\operatorname{diam}(P_{5,2}) = 2$

Definicija: Graf je dvodelen, če obstaja razdelitev $V(G) = V_1 \cup V_2$, tako da velja $uv \in E(G) \Rightarrow u \in V_1, v \in V_2$



Primer:



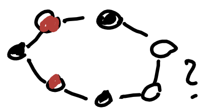


dva črna soseda, ter ej ni dvodelen graf

Izrek: Graf G je dvodelen $\Leftrightarrow$ G ne vsebuje lihih ciklov

Dokaz:

$\Rightarrow$ če G vsebuje lih cikel



($\Leftarrow$) vzemimo poljuben graf, ki je brez lihih ciklov

BŠZS je G povezan

x naj bo poljubno vozlišče

$V_1 = \{u \in V(G) ; d_G(x,u) \text{ je sodo}\}$

$V_2 = \{u \in V(G) ; d_G(x,u) \text{ je liho}\}$

$x \in V_1$ $\quad V(G) = V_1 \cup V_2$

če dokažemo da znotraj V_1 in znotraj V_2 ni povezav bo G dvodelen

$u, v \in V_1$

Ločimo:

- $d(x,u) \neq d(x,v)$; BŠZS $d(x,u) < d(x,v)$

  če $uv \in E(G)$ potem $d(x,v) = d(x,u)+1$

  To ne more biti ker se $d(x,u)$ in $d(x,v)$ razlikujeta vsaj za 2
- $d(x,u) = d(x,v)$

  P naj bo najkrajša xu-pot

  Q naj bo najkrajša xv-pot

  $|P| = |Q|$

  $P - uv - Q$ je sklenjen sprehod lihe dolžine $(2|P|+1)$

  Potem lahko od nekje pravi da G premore lih cikel

  $\times$

Minilo je 25 minut in mi smo povedali en (1) izrek

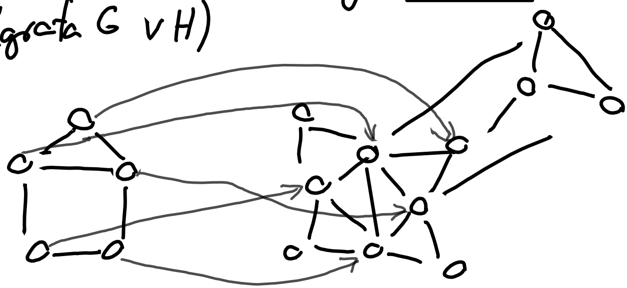
Morfizmi grafov

G, H grafa, preslikava $f: V(G) \to V(H)$ je homomorfizem, če velja:

$$uv \in G \Rightarrow f(u)f(v) \in E(H)$$

$$u \sim_G v \Rightarrow f(u) \sim_H f(v)$$

Injektivni homomorfizem je <u>vložitev</u> (grafa G v H)

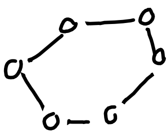


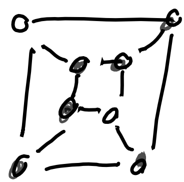
G dvodelen $\Rightarrow \exists f$ homomorfizem. $f: G \to K_2$

Vložitev G v H je izometrična, ~~ko~~ če velja

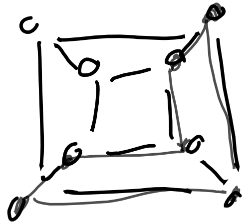
$\forall u,v \in G: d_G(u,v) = d_H(u,v)$

Primer





je izometrična



ni izometrična

$f: V(G) \to V(H)$ je izomorfizem, če je

1.) f bijekcija

2). f je homomorfizem

3). f^{-1} je homomorfizem

2 pravi: f slika povezave v povezave

3. pravi: f slika nepovezave v nepovezave

Grafa sta izomorfna, če $\exists$ izomorfizem med njima. $G \cong H$

$\mathcal{G}$.... množica grafov

izomorfnost je ekvivalenčna relacija

$\mathcal{G}/_{\cong}$

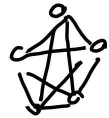
Avtomorfizem je izomorfizem $G \to G$

$Aut(G) = \{ \varphi \ ; \ \varphi \text{ je aut za } G \}$

je grupa za ~~operacija~~ $\circ$

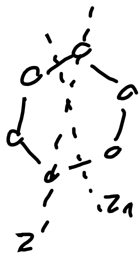
Primeri

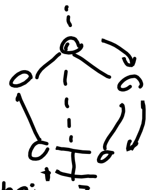
$\mathrm{Aut}(K_n) \cong \mathrm{Sym}([n])$



$\mathrm{Aut}(P_n) \cong \mathbb{Z}_2$

$\mathrm{Aut}(C_n) =$





za lihe:

r komponiranje

z za vsako vozlišče

Operacije z grafi in povezanost

G graf

$v \in V(G)$: $G-v$ graf brez vozlišča

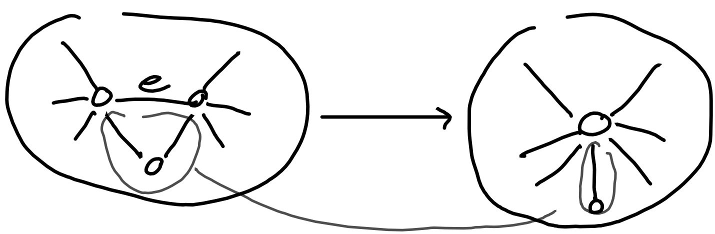
$e \in EG$: $G-e$ graf brez povezave

$X \subseteq V(G)$: $G-X$ graf brez vseh vozlišč iz X

$F \subseteq E(G)$: $G-F$ graf brez vseh ~~vozlišč~~ povezav iz F

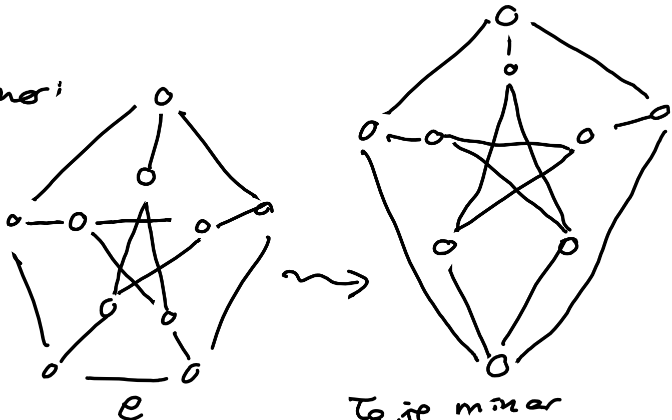
$e \in E(G)$: G/e .... skrčitev grafa G po e

(Dobimo jo tako, da identificiramo krajišči povezave e in odstranimo morebitne večkratne povezave)



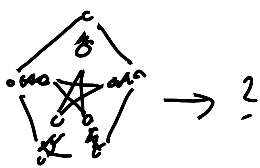
Graf H je <u>minor grafa</u> G, če ga lahko dobimo iz nekega podgrafa grafa G s skrčitvijo nekaj povezav

Primer:



To je minor Petersenovega grafa

DN minor



Velja: graf H je minor grafa G $\Longleftrightarrow$ ko ga dobimo iz G z zaporedjem operacij:

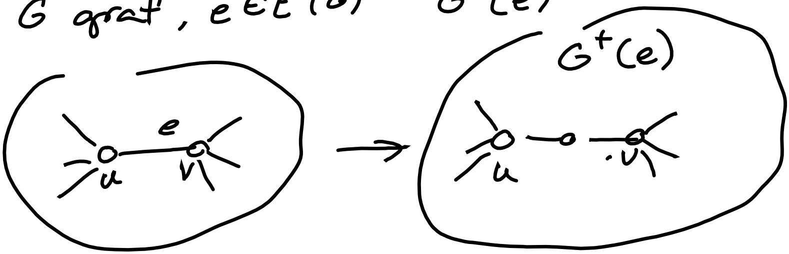
- odstrani vozlišče
- odstrani povezavo
- skrči povezavo

v poljubnem vrstnem redu

<u>Subdivizija</u> povezave e je

zamenjava povezave s potjo dolžine 2

G graf, $e \in E(G)$ $\quad G^+(e)$

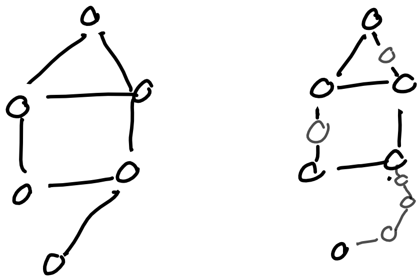


Graf H je subdivizija grafa G, če

H lahko dobimo iz G z zaporedjem

subdivizij povezav

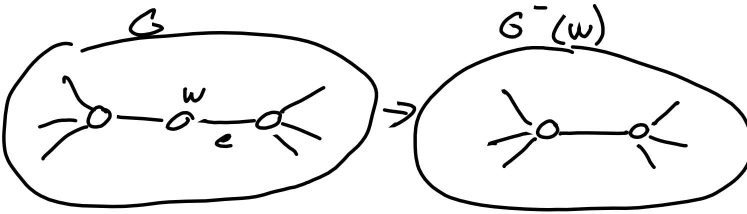
G:



Torej: vsako povezavo lahko nadomestimo z neko potjo in vse te poti so paroma disjunktne po povezavah

Grafa G in H sta homeomorfna, če obstaja graf X tak da sta G in H subdiviziji grafa X

Obratna operacija od subdivizije povezave je glajenje vozlišča stopnje 2

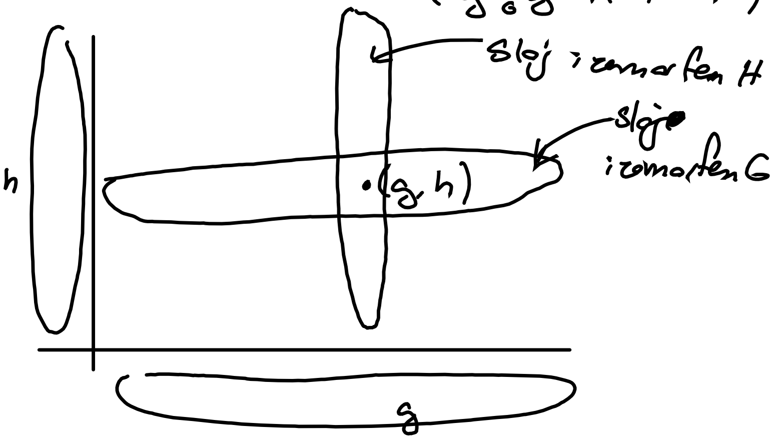


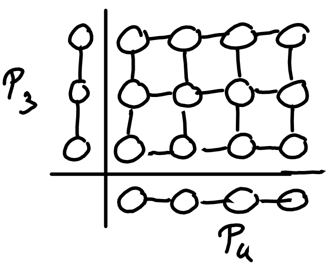
Lahko kot skrčitev povezave e

Kartezični produkt: $G \square H$

$$V(G \square H) = V(G) \times V(H)$$

$$(g,h) \sim_{G\square H} (g',h') \iff (g = g' \wedge h \sim_H h') \vee (g \sim_G g' \wedge h = h')$$





$= P_4 \square P_3$

$G \square K_1 = G$

$G \square H = H \square G$

$G \square (H \square K) = (G \square H) \square K$

$(\mathcal{G}, \square, \cup)$ je pol kolobar

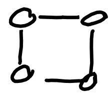
vsi grafi

disjunktna unija

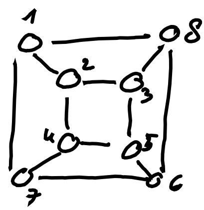
$G^{n,\square} = \underbrace{G \square G \square G \square \dots \square G}_{n\text{-krat}}$

$K_2^{n,\square}$:

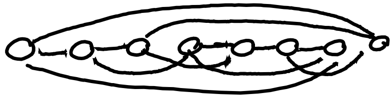
$K_2^{2,\square} = K_2 \square K_2$

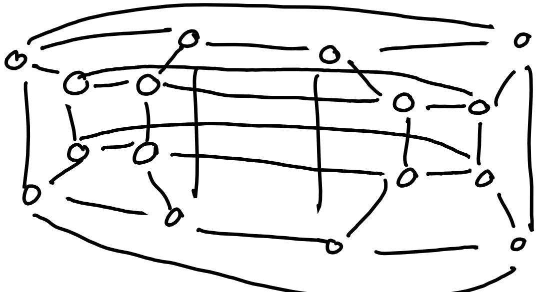


$K_2^{3,\square} = K_2 \square K_2 \square K_2 =$



$K_2^{4,\square}$:





Vozlišče u grafa G je <u>prerezno</u>, če je $\Omega(G-u) > \Omega(G)$

komponente (več grafa)

Povezava f grafa G je <u>prerezna</u> ali <u>most</u>, če je $\Omega(G-f) > \Omega(G)$

Množica vozlišč S je <u>prerez</u>, če je $\Omega(G-S) > \Omega(G)$

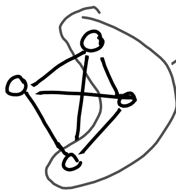
Množica preslikav F je povezavni prerez, če je $\Omega(G-F) > \Omega(G)$

Graf G je k-povezan, če ima vsaj $k+1$ vozlišč in nima prerezov moči $< k$

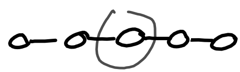
Povezanost grafa G: $\kappa(G)$ Kappa, je največji k za katerega je G k-povezan

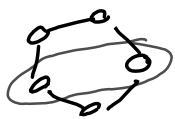
Primer

$\kappa(K_n) = n-1$

 → vzamemo stran

$\kappa(K_1) = 0$ (pri čemer je K povezan graf)
(poseben primer)

$\kappa(P_n) = 1$ 

$\kappa(C_n) = 2$ 

$\kappa(G) \leq \delta(G)$

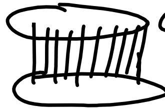
← minimalna stopnja.

(Vzamemo eno vozlišče in ga izoliramo)

$\kappa(Q_3) = 3$

$\kappa(Q_n) = n$ (DN/vaje)

Ideja: $Q_n = Q_{n-1} \square K_2$

Q_n:  Q_{n-1}

Q_{n-1}

$u, v \in V(G)$. u,v-poti P in Q sta <u>notranji-disjunktni</u>, če je $V(P) \cap V(Q) = \{u, v\}$

Izrek: (Whitney)

Graf G je 2-povezan $\Leftrightarrow$ $\forall$ par vozlišč u in v grafa G. $\exists$ dve notranje-disjunktni uv poti

2-povezan $\equiv k \geq 2$

Dokaz:

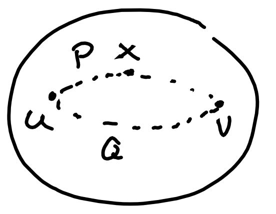
$\Leftarrow$: $\forall u,v$ $\exists$ notranji disjunktni u,v-poti

<u>G je 2-povezan</u> $\Leftrightarrow$ nima prereza moči 1

<u>$x \in V(G)$: $\{x\}$ ni prerez</u>

<u>$G - x$ je povezan</u>

$u, v \in V(G-x)$



Po predpostavki $\exists$ notranje disjunktni poti P in Q

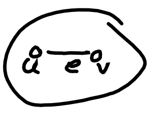
$x \in P \Rightarrow x \notin Q$

Torej $G-x$ povezan, ker še vedno lahko najdemo pot Q

($\Rightarrow$) Naj bo G 2-povezan. $u, v \in V(G)$

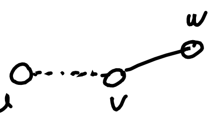
obstoj notranjih-disjunktnih poti dokazujem z indukcijo po $d_G(u,v)$

$d_G(u,v) = 1$



<u>e ni most</u>

če bi bil most dobimo 2 komponenti



Ker je $|V(G)| \geq 3$ $\exists$ sosed w od u ali sosed od v

Potem je v prereza vozlišče $*$

Pokazali smo da je $G-e$ povezan

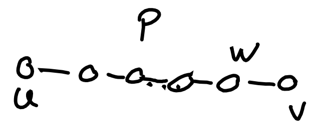
za to obstaja v $G-e$ pot P

$Q = e$

$d(u,v) = k \geq 2$

Naj bo P najkrajša u,v pot

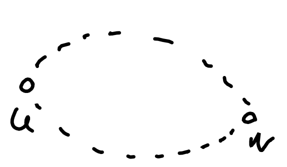
in w sosed od v na P



$w \neq v$. $w \neq u$

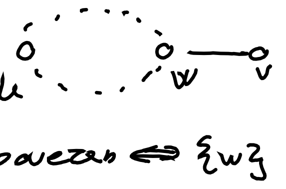
$d(u,w) = k-1$

Po indukcijski predpostavki obstajata notranje disjunktni u,w-pot Q_1 in Q_2



1. primer $v \in V(Q_1) \cup V(Q_2)$

2. Primer:



G je 2-povezan $\Leftrightarrow$ $\{w\}$ ni prerez

torej $\exists$ u,v pot v $G-w$ ji rečemo R

Naj bo w' zadnje vozlišče na R v smeri od u do v, ki leži na $Q_1 \cup Q_2$

BŠZS je na $w' \in Q_1$

R_1: $u \xrightarrow{Q_1} w' \xrightarrow{R} v$

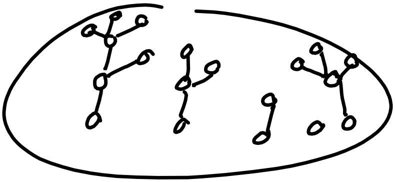
R_2: $Q_2 \cup w \rightarrow v$

R_1 in R_2 sta notranji-disjunktni u-v poti

Drevesa

Gozd je graf brez ciklov

Drevo je povezan gozd



Gozd ~~sestavlen~~ sestavljen iz petih dreves

List je vozlišče stopnje 1

Lema 1: Naj bo T drevo z vsej dvema vozliščema. Potem T premore list.

Dokaz: $v \in V(T)$. Če je $\deg(v) = 1$ ✓

Če ne ima vsej še enega soseda in to je nov sosed. Ker nimamo ciklov

DN: imamo vsej dva lista

Lema 2: Če je T drevo je

$$|E(T)| = |V(T)| - 1$$

Dokaz: indukcija po $V(T)$

Baza: 0

$$0 = 1 - 1 \checkmark$$

indukcijski korak:

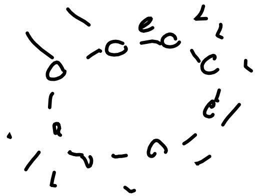
$$T, \ |V(T)| \geq 2 \qquad \exists \text{ list } v \text{ v } T$$

$$\underbrace{|E(T-v)|}_{E(T)-1} = \underbrace{|V(T-v)|}_{|V(T)|-1} - 1$$

$\blacksquare$

Lema 3: Če je G-povezan in $e \in E(G)$ leži na nekem ciklu, potem je $G-e$ povezan graf

Dokaz:



$u,v \in V(G-e) = V(G)$

G povezan $\Rightarrow \exists\, u,v$ pot P v G

i) $e \in P$: takoj je P tudi pot v $G-e$

ii) $e \in P$:

v P nadomestimo e s potjo dela cikla

dobimo u,v-sprehod ✓

$\blacksquare$

Lema: G je povezan graf, potem je

$|E(G)| \geq |V(G)| - 1$

DOKAZ: kombinacija leme 2 in 3

Izrek: za graf G so ekvivalentne:

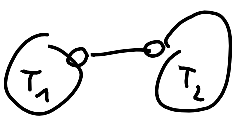
1) G je drevo
2) za $\forall$ par vozlišč v G. $\exists$ enolična pot med njima
3) G je povezan in vsaka povezava je most
4) G je povezan in ~~st povezav je st~~ ~~vozlišč st~~ $|E(G)| = |V(G)| - 1$

Dokaz:

$1 \Rightarrow 2$
če bi imeli dve poti med vozliščema, potem G ima cikel

$2 \Rightarrow 3$: če ni most, potem 

$3 \Rightarrow 4$:



za T_1 in T_2 velja $|E G| = |V(G)| - 1$

$4 \Rightarrow 1$
uporabimo lema 4, 3

Def. <u>Vpeto drevo</u> grafa, ki je vpet podgraf, ki je drevo

Trditev: Graf je povezan $\Leftrightarrow$ vsebuje vpeto drevo

Dokaz: ...

$\tau(G)$ .... št vpetih dreves grafa G

Primer:

$$\tau(C_n) = n$$

$\tau($  $) = 8$

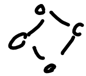
G/e .... skrčitev povezave e

Sedaj ja obravnavamo tako da nastalih vzporednih ne odstranimo

Trditev: Če je povezava grafa G, potem je $J(G) = J(G-e) + J(G/e)$

Dokaz:

....

$J(G-e)$  4

$G-e$

G graf. Laplaceova matrika $L(G)$

$V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$

$L(G)$ je $n \times n$ matrika

$$L(G)_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & i = j \\ -\text{št. povezav med } v_i \text{ i } v_j & \end{cases}$$

Izrek $J(G) =$ det matrike, ki jo dobimo iz $L(G)$ tako da zbrišemo vrstico in stolpec nekega vozlišča

Primer:

$$L(K_n) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & & \vdots \\ \vdots & & n-1 & \vdots \\ & & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{bmatrix}$$

$$J(K_n) = \det(L(K_{n-1}))$$

$$\begin{vmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -n & n & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & n & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ -n & 0 & \cdots\ 0 & n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & n & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & n \end{vmatrix} = n^{n-2}$$

Izrek (Cayly): $J(K_n) = n^{n-2}$

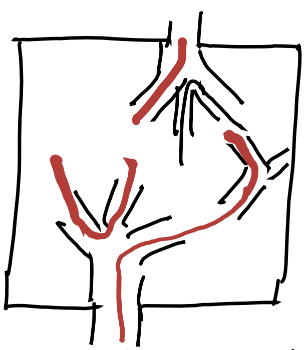
Eulerjevi in Hamiltonovi grafi

Sprehod v grafu je eulerjev, če je enostaven in prehodi vse povezavi

Sklenjen eulerjev sprehod očitno

Graf je eulerjev, če premore sklenjen eulerjev sprehod

Ali se lahko sprehodimo skozi park, da gremo po vsaki poti natanko enkrat



v vsakem križišču je vozlišče in vozlišča sta si sosednja, če sta si križišča sosednja (a povezan sprehod

Rešitev (če obstaja) je eulerjev sprehod od vhoda do izhoda

Torej če je graf eulerjev mora imeti nujno vsa vozlišča sode stopnje

Izrek: Graf G je Eulerjev $\Leftrightarrow$

je povezan in vsa vozlišča so sode stopnje

Dokaz: ($\Rightarrow$) Eulerjev je vedno povezan

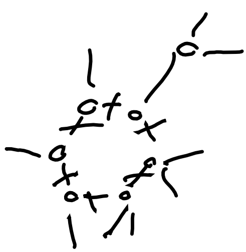
sodost vozlišča: opazujemo poljuben Eulerjev obhod

($\Leftarrow$) G, povez

indukcija po $|E(G)|$: baza: cikli

G naj bo en cikel C

$H = G - E(C)$



H ima vozlišča sode stopnje

zato je po indukcijski predpostavki vsaka komponenta od H eulerjev graf

Eulerjev obhod v G konstruiramo takole

C gre vzdolž cikla in vsakič ko pridemo do komponente H ki je nismo prehodili: jo prehodimo

Izrek: Povezan graf premore eulerjev sprehod $\Leftrightarrow$ ko ima kvečjemu dve vozlišči lihe stopnje

Fleury-jev algoritem: Poišče eulerjev obhod v poljubnem eulerjevem grafu takole:

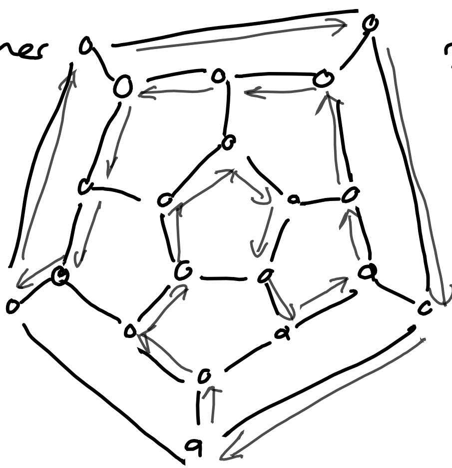
- začnemo v poljubnem vozlišču
- za sabo brišemo povezave, ki smo jih prehodili
- na vsakem koraku izberemo poljubno povezavo, pri tem pazimo le na to, da na most gremo le v primeru, če ni druge možnosti

Def: <u>Hamiltonov cikelj</u> grafa je cikel, ki vsebuje vsa vozlišča grafa

<u>Hamiltonova pot</u> je pot v grafu, ki vsebuje vsa vozlišča.

Graf je Hamiltonov če premore Hamiltonov cikel

Primer



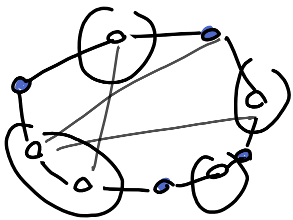
Dodekaeder

Izrek: Naj bo G Hamiltonov graf in

$X \subseteq V(G)$

Tedaj je $\Omega(G-X) \leq |X|$

Dokaz: G Hamiltonov, torej



— X množica

v isti komponenti bojo

Primer:

$K_{n,m}$ je Hamiltonov $\iff n=m$

$n<m$: $\cancel{X}$ $X=$ 

$n<m \Rightarrow K_{n,m}$ ni Hamiltonov, ker

izrek: (ore)
če je G povezan graf in ∀ par

nesosednjih vozlišč $u v$ velja

$\deg(u) + \deg(v) \geq V(G)$

Potem je G Hamiltonov

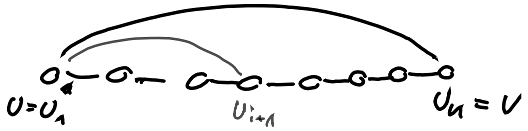
Dokaz: (metoda najmanjšega protiprimera

Recimo da izrek ne velja
Med vsemi protiprimeri izberemo takega,
ki ima najmanj vozlišč
Med vsemi takimi pa izberimo protiprimer, ki
ima največ povezav

G ni poln graf
Naj bosta $u, v \in V(G)$ $uv \notin E(G)$

H graf: v G dodamo povezavo uv
ker $|E(H)| \geq |E(G)|$ je H hamiltonov
(H ni protiprimer)

Naj bo C Hamiltonov cikel v H.
$uv \in C$ ker drugače bi $C \in G$

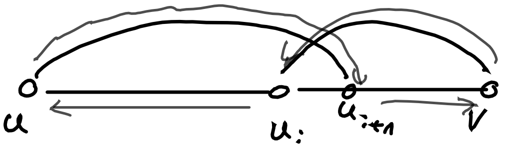


$U = \{u_i : u u_{i+1} \in E_G\}$ predhodniki sosedov u-ja
$V = \{u_j : v u_j \in E(G)\}$ sosedi

$|U| = \deg u$
$|V| = \deg v$

$|U \cup V| + |U \cap V| = |U| + |V|$

$v = u_n \notin V \notin U$ torej $|U| < n$ $|V| < n$
$\Rightarrow \exists u_i \in |U \cap V|$



$\times$

Ravninski grafi

Graf je ravninski, če ga lahko narišemo v ravnini tako, da se povezave ne križajo

Ravninski graf je skupaj z ustrezno risba v ravnini vložen v ravnino

Lica vložitve so sklenjena območja omejena s ciklom

$F(G)$.... množica lic

Dolžina lica F ($\ell(F)$)... št povezav, ki mejijo na lice F

Ožina ($g(G)$) je dolžina najkrajšega cikla v G

velja za grafe vložene v ravnino

- $\sum_{F \in F(G)} l(F) = 2|E(G)|$

- Enostavna sklenjena krivulja razdeli ravnino na dva dela: notranjost in zunanjost krivulje (in rob)

- Če ima G vsaj en cikel in je vložen v ravnino

$$|E(G)| \geq \frac{g(G)}{2} \cdot |F(G)|$$

- $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 1 + \Omega(G)$

- G povezan: $|E(G)| \leq \frac{g(G)}{g(G)-2}(|V(G)|-2)$

- G povezan: $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$

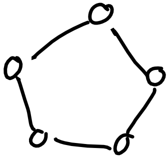
- G povezan in nima trikotnikov:

$$|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$$

- G je ravninski $\Leftrightarrow$ ne vsebuje podgrafa, ki je subdivizija K_5 ali $K_{3,3}$

- G je ravninski $\Leftrightarrow$ K_5 V $K_{3,3}$ nista njegova minorja

Barvanje vozlišč grafa



$G = (V(G), E(G))$ graf

funkciji $c: V(G) \longrightarrow \mathbb{N}$ pravimo

barvanje (vozlišč) grafa G

k-barvanje je $c_k : V(G) \longrightarrow [k]$

Dobro barvanje grafa G predpiše krajiščema vsake povezave različni barvi: $(\forall uv \in E(G)): c(u) \neq c(v)$

Graf je **k-pobarljiv**, če zanj obstaja neko dobro k-barvanje

Najmanjšemu številu k za katerega je graf k-pobarljiv pravimo **kromatično število** grafa G in ga označimo z $\chi(G)$

Primer

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 3 & n \text{ je lih} \\ 2 & n \text{ je sod} \end{cases}$$

$$\chi(P_n) = \begin{cases} 1 ; & n=1 \\ 2 ; & \text{sicer} \end{cases}$$

$$\chi(K_n) = n$$

$$\chi(\text{dvodelni}) = 2$$

Definicija:

k-barvanje grafa G je razbitje množice $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \ldots V_k$ kjer so V_i neodvisne množice (točke niso povezane med sabo) za $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$.

Množica V_i se imenujejo i-ti barvni razred grafa G

Požrešni algoritem

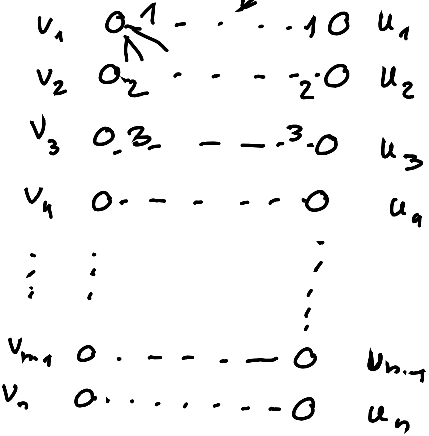
VHOD: G
izhod: Barvanje

1. Razvrstimo vozlišča graf G v nek poljuben vrstni red $v_1, v_2 \dots v_n$
2. Barvamo po vrsti vozlišča iz zgornjega seznama tako da vsako vozlišče prejme najmanjšo možno barva, ki je niso prejeli sosedi vozlišča, ki ga v tistem koraku barvamo

Primer: $K_{n,n}$ - popolna prirejanje

teh povezav ni

ostale so



Gremo po zaporedju $v_1 u_1 v_2 u_2 \ldots$

... n barv

Če gremo po zaporedju

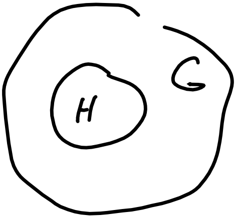
$v_1 v_2 \ldots v_n u_n \ldots u_1$ imamo 2 barvi

Vedno lahko najdemo zaporedje z najmanj barvami:

Dokaz: Vzemimo barvne razrede

$V_1, V_2 \ldots V_k$

in gremo po zaporedju kjer so najprej vozlišča iz V_1, nato V_2 ....



Ugotovitev:

$H \subseteq G$ potem $\chi(H) \leq \chi(G)$

$\omega(G)$ .... moč največje klike oziroma polnega grafa znotraj grafa G

Posledica: $\chi(G) \geq \omega(G)$

Trditev: Naj bo G graf. Potem je

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Dokaz:

Pobarvajmo graf G s požrešnim algoritmom. Na vsakem koraku ima vozlišče ze največ deg v pobarvanih sosedov kar pomeni; da zanj vedno ostane ena prosta barva

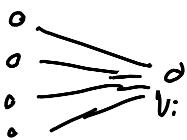
Naj bodo $v_1, \dots, v_n$ vozlišča grafa G in d_i stopnja vozlišča v_i $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Potem velja

$$\chi(G) \leq \max(\min_{i \in [n]} \{d_i, i-1\}) + 1$$

Dokaz: Pobarvajmo G s požresno metodo, kjer uporabimo vrstni red barvanja $v_1 v_2 \dots v_n$

Na i-tem koraku:



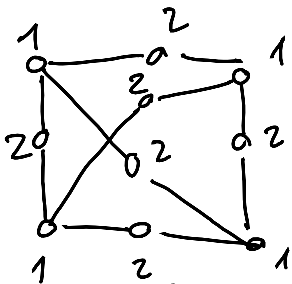
že pobarvana

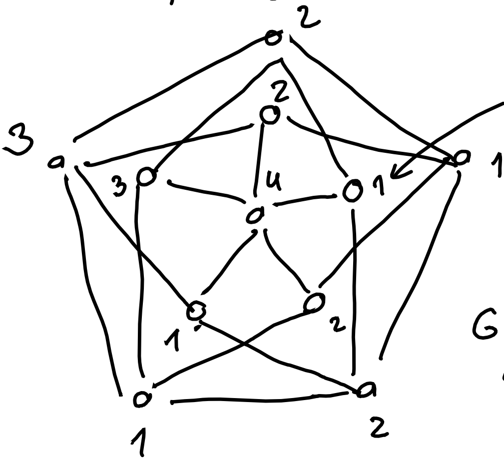
če so vsi sosedje že pobarvani: $d_i + 1$

še niso vsi: $i - 1 + 1 =$;

Torej $\min\{d_i, i-1\}$

ker gremo po vseh vozliščih pobarvamo vsa vozlišča

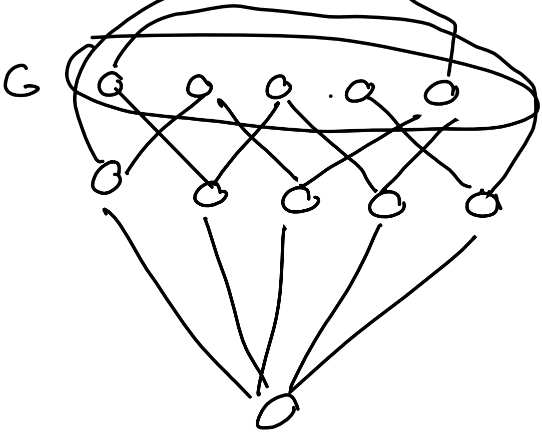




edino možno
če želimo
s 3
barvami

Grötzsch
graf

Konstrukcja Mycielskiego



Izrek: (Brooks):

Naj bo G povezen različen od K_n ali C_n (n liho) potem je $\chi(G) \leq \Delta$

Barvanje povezav

$c: E \to [k]$ <u>k-barvanje povezav</u>

$uv, uw \in E \Rightarrow c(uv) \neq c(uw)$

$\chi'(G)$ ... kromatični indeks grafa

$\chi(G)$ ... kromatično število grafa

$\chi(G) \geq \Delta(G)$

Izrek: (Vizing) za ∀ graf velja

$$\chi'(G) \in \{\Delta(G), \Delta(G)+1\}$$

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$$

graf je <u>razreda I</u>, če je $\chi'(G) = \Delta(G)$

razreda II, če je $\chi'(G) = \Delta(G)+1$

Izrek: K_n je razreda I $\Leftrightarrow$ n je sodo

Dokaz:

n lih: $n = 2k+1$

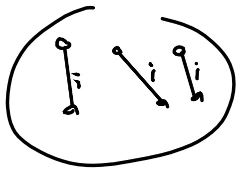
K_{2k+1} pobarvamo z $2k+1$ barvami tako

. . . . (~~z vsako povezavo~~ ~~zaobnemo dve vozlišči~~, ...)

$\chi'(K_{2k+1}) \le 2k+1$

$\chi'(K_{2k+1}) \geq 2k+1$

Pobarvamo K_{2k+1} z $2k$ barvami:



z barvo i pobarvamo manj kot k ~~...~~ povezav

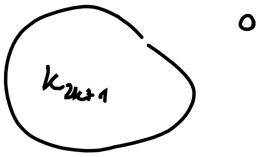
$\Rightarrow$ pobarvali smo manj kot $\le 2k \cdot k$ povezav

$$|E(K_{2k+1})| = \binom{2k+1}{2} = \frac{(2k+1)(2k)}{2}$$

$\Rightarrow \quad \chi'(K_{2k+1}) > 2k$

$\chi'(K_{2k+1}) = \Delta(K_{2k+1}) + 1 = 2k+1$

n sod



dodamo K_{2k+1} še eno vozlišče

kot opisano

js sm zgubljena

$\Rightarrow \chi'(K_{2k}) \le 2k-1$

$\geq$

$2k-1 \quad = \quad \Delta$

Izrek:
dvodelni grafi so razreda I

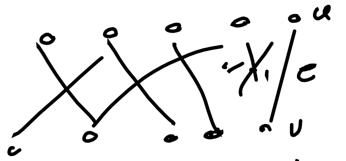
Dokaz: G naj bo dvodelen
$\chi'(G) = \Delta G$

indukcija po $|E(G)|$

BŠZS G povezan

1 ✓

G:



$H = G - e$

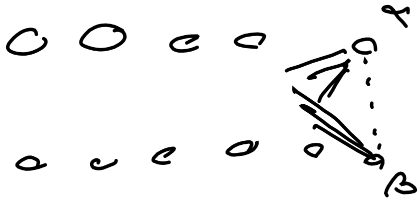
Po indukcijski predpostavki
je $\chi'(H) = \Delta(H)$

H pobarvano s $\chi'(H) = \Delta(H)$ barv

$\deg_H(u) < \Delta(G) = \Delta H$
$\deg_H(v) < \Delta(G) = \Delta H$

ce predpostavimo da u,v nista nasičena

H:

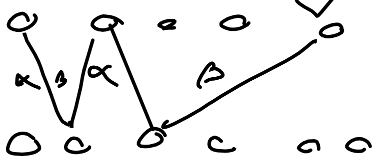


α barv: ki manjka ; α, β

$\alpha = \beta \Rightarrow$ e pobarvamo z α

$\alpha \neq \beta$

Yay!



∃ povezava od u, da je β [illegible]
lahko imamo pot ven te barve in cik cak. Enkrat se mora ustaviti
Nato zamenjamo vse α in β med seboj
!2 pot pobarvamo uv z α