$$\frac{|fl(x)-x|}{|x|} \le \frac{1}{2} b^{1-t}$$

osnovna zaokrozitvena napaka

$$|f(x+\delta_x)-f(x)| \approx |f'(x)|\,\delta_x$$

Potem je $|f'(x)|$ je absolutna obcutljivost f v x

Nelinearne enačbe

2.1. Uvod

Iščemo rešitve $f(x)=0$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C} \to \mathbb{C}$)

Situacija glede števila rešitev

a): $e^x + x = 0$: 1 rešitev

b) $x^3 - 5x + 1 = 0$: 3 rešitve

c) $x + \tan x = 0$: ∞ rešitev

d) $x^2 + 1 = 0$: 0 rešitev (2 rešitvi v $\mathbb{C}$)

Naj bo f zvezno odvedljiva v okolici α in $f(\alpha)=0$

$f'(\alpha) \neq 0$: α je enostavna ničla

$f'(\alpha) = 0$: α je večkratna

$$f'(\alpha) = \dots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(m)}(\alpha) \neq 0 \Rightarrow \alpha \text{ je } m\text{-kratna ničla}$$

Kaj lahko povemo o občutljivosti ničel?

Naj bo α enostavna ničla $f \in \mathcal{C}^1$

$f'(\alpha) \neq 0$

Naj bo x približek za ničlo α $|f(x)| \leq \varepsilon$

$$\varepsilon > |f(x) - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f(\alpha)}| = f'(\xi)|x-\alpha| \approx f'(\alpha)|x-\alpha| \lesssim \varepsilon$$

$$|x - \alpha| \lesssim \frac{\varepsilon}{f'(\alpha)}$$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{|f'(\xi)|}$ je občutljivost te ničle

Vemo da je občutljivost račune funkcije enaka $|f'(\alpha)|$

$$\alpha = f^{-1}(0) \qquad {f^{-1}}'(0) = \frac{1}{f'(\alpha)}$$

Naj bo α dvojna ničla

$$f'(\alpha)=0 \quad f''(\alpha)\neq 0$$

$$\overset{\varepsilon}{f(x)} = \overset{0}{f(\alpha)} + \overset{0}{f'(\alpha)}(x-\alpha) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-\alpha)^2 \Rightarrow$$

$$x-\alpha \lessapprox \sqrt{\frac{2\varepsilon}{|f''(\alpha)|}} = \sigma(\sqrt{\varepsilon})$$

Wilkinsonov primer:

$$f(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-20)$$

$$\tilde{f}(x) = f(x) - 2^{-23}x^{15}$$

občutljivost je pri večji ničli bolj ali manj enaka.
Nismo zmotili desne strani $f(x)=\varepsilon$ ampak celo funkcijo

$$f(\alpha)=0 \quad f,g \in \mathcal{C}^\infty$$

$$h(x,\varepsilon) = f(x) + \varepsilon g(x)$$

$$f'(\alpha)\neq 0$$

Po izreku o implicitni funkciji obstaja $x(\varepsilon)$ da je $h(x(\varepsilon),\varepsilon)=0$; $x(0)=\alpha$

$$h(\alpha,0)=0$$

$$x(\varepsilon) = \alpha + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2 + \dots$$

zanima nas k_1

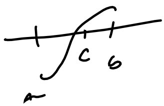
$$h(\alpha + k_1\varepsilon + \dots, \varepsilon) = \underset{\overset{\parallel}{0}}{h(\alpha,0)} + \underset{\overset{\parallel}{f'(\alpha)}}{h_x(\alpha,0)}(k_1\varepsilon + \dots) + \underset{\overset{\parallel}{g(\alpha)}}{h_\varepsilon(\alpha,0)}\varepsilon$$

$$\Rightarrow k_1 = -\frac{g(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

2.2 Bisekcija

Izrek: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezna in $f(a)f(b)<0$
potem obstaja $\xi\in(a,b)$ kjer je $f(\xi)=0$

Dokaz:



zaporedje zaprtih intervalov

Algoritem:

$e=b-a$
while $e>\varepsilon$
  $e=\frac{e}{2}$, $c=a+e$
  if sign$(f(a))$ = sign$(f(c))$:
    $a=c$
  else:
    $b=c$

ne preverjamo če je $f(c)=0$ ker je to redek dogodek

Zakaj e?
če bi bilo $c=\frac{a+b}{2}$ in while $|a+b|<\varepsilon$
se lahko nikoli ne konča, ker sta a in b lahko sosednji števili čez nekaj časa in ε je premajhen