Kvocientni prostori

Definicije

- kvocientna projekcija $q : x \longmapsto [x]$
- $\mathcal{T}_\sim$ je najmočnejša topologija, da je q zvezna

$$\mathcal{T}_\sim = \{ V \subseteq X_\sim \, ; \, q^*(V) \in \mathcal{T} \}$$

- Opomba: kvocientna projekcija ni nujno odprta ali zaprta
- nasičenje A : $q^*(q_*(A))$ – unija vseh ekv. razredov, ki sekajo A
- f surjektivna $\wedge$ $(\forall V \overset{odp}{\subseteq} Y \iff f^*(V) \overset{odp}{\subseteq} X)$
  $\Rightarrow$ f je kvocientna
- lastnost je deljiva če se iz poljubnega topološkega prostora prenese na njegov kvocientni prostor
  (Lastnost se ohranja pri kvocientni preslikavi

Trditve

- $q_*(A)$ odprta $\iff$ $q^*(q_*(A))$ odprta
- $q_*(A)$ zaprta $\iff$ $q^*(q_*(A))$ zaprta
- q odprta $\iff$ nasičenje vsake množice je odprto
- q zaprta $\iff$ nasičenje vsake množice zaprto
- $(x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)) \Rightarrow$ f določa inducirano preslikavo $\bar{f}: X/_\sim \to Y$
- f zvezna $\Rightarrow$ $\bar{f}$ zvezna

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X/_\sim \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

- f surjektivna $\Rightarrow$ $\bar{f}$ surjektivna
- f sur $\Rightarrow$ (f kvocientna $\iff$ ($Z \overset{zap}{\subseteq} Y \iff f^*(Z) \overset{zap}{\subseteq} X$))
- f kvocientna in loči ekv. razrede $\Rightarrow$ $\bar{f}$ homeo.
- f zvezna in sur. f odp $\vee$ f zap $\Rightarrow$ f kvocientna
- X kompakt, Y Hausdorffov $\Rightarrow$ $f: X \to Y$ je zaprta
- f, g kvocientni $\Rightarrow$ $g \circ f$ kvocientna
- $g \circ f$ kvocientna $\wedge$ f, g zvezni $\Rightarrow$ g kvocientna
- h homeomorfizem, $x_1 \sim x_2 \iff h(x_1) \sim h(x_2)$ $\Rightarrow X/_\sim \cong Y/_\sim$
- X metričen kompakt $\Rightarrow \exists f: C \to X$. f kvocientna
- R razčlenitev prostora X.
  $X/_R \in T_1 \iff$ členi R so zaprte v X

Vložitve

Möbiusov trak v poln torus $S^1 \times B^2$

$$f : [0,1]^2 \longrightarrow S^1 \times B^2$$
$$(x,y) \longmapsto \left(e^{2\pi i x}, e^{\pi i x}(2y-1)\right)$$

je kvocientna

Poln torus v $\mathbb{R}^3$

$$\varphi : S^1 \times B^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\big((x,y),(z,w)\big) \longmapsto w(0,0,1) + (z+2)(x,y,0)$$

Deljive lastnosti

- kompaktnost
- povezanost (s potmi)
- diskretnost
- trivialnost
- separabilnost
- lokalna povezanost

Nedeljive lastnosti

- T_0, T_1, T_2, T_3, T_4
- lokalna kompaktnost
- 1-števnost
- 2-števnost
- metrizabilnost
- popolna nepovezanost

Topološke grupe in delovanja

Definicije

- G je topološka grupa, če je množenje in invertiranje zvezno
- p-adična števila: p-adična metrika:

$$\left|\frac{m}{n}\right| = p^{-k} \quad \text{če} \quad \frac{m}{n} = p^k \frac{a}{b} \; ; \; a, b \text{ tuji s } p$$

- Lijeve grupe - topološke grupe, ki so hkrati gladke mnogoterosti in operacije so gladke preslikave
- Levo delovanje grupe G na X je zvezna preslikava $\varphi : G \times X \longrightarrow X$ za katero velja
  - $e \cdot x = x \quad \forall x \in X$
  - $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x \quad \forall a, b \in G, \forall x \in X$

Trditve

- Leva translacija $L_a : G \longrightarrow G$ $\quad g \longmapsto ag$
  je homeomorfizem
- $\forall a,b \in G. \exists h$ homeo. $h: G \longrightarrow G.\ h(a) = b$
- f delovanje $f_a(x) = f(a,x)$ je homeomorfizem X
- Delovanje grupe G na X določa ekv. relacijo na X

  $$x \sim y \iff \exists g \in G,\ y = g \cdot x$$

  $G \cdot x = \{ g \cdot x \,;\, g \in G \}$ so ekv razredi
- $G \curvearrowright X$. q kvocientna projekcija $: X \to X/G$ je odprta
- $CS^n \cong B^{n+1}$, $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$

Konstrukcije kvocientov, projektivni prostori

Definicije

- stožec nad X: $CX := X \times [0,1] / X \times \{1\}$
- suspenzija nad X: $\Sigma X := X \times [-1,1] / X \times \{-1\}, X \times \{1\}$
- simetrični produkt: $S^n X := X^n / S_n$
- limita prostorov $X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \dots$

  $$\lim (X_n, f_n) := \coprod_{n=1}^{\infty} X / \sim$$

  kjer je $x \in X_i$, $y \in X_j$.

  $$x \sim y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : f_n(\dots(f_i(x)) = f_n(\dots(f_j(y))$$

- zlepek: $X \cup_f Y := X \amalg Y / a \sim f(a) \ \forall a \in A \qquad f : A \to Y$
- projektivni prostor dim n nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$

  $$\mathbb{F}P^n := (\mathbb{F}^{n+1} - \{0\}) / (x = \lambda x, \lambda \in \mathbb{F}^*) = (\mathbb{F}^{n+1} - \{0\}) / \mathbb{F}^*$$

Trditve

- X, Y normalna A zap, f zvezna $\Rightarrow X \cup_f Y$ normalen
- $A \overset{zap}{\subseteq} X$, f zaprta vložitev $\Rightarrow$
    - X, Y 2-števna $\Rightarrow X \cup_f Y$ 2-števna
    - $X, Y \in T_2 \Rightarrow X \cup_f Y \in T_2$
- $\forall u, v \in \mathbb{F}P^n$. $\exists h$ homeo: $\mathbb{F}P^n \to \mathbb{F}$. $h(u) = v$
- $S(\mathbb{R}^n) = S^{n-1}$, $S(\mathbb{C}^n) = S^{2n-1}$, $S(\mathbb{H}^n) = S^{4n-1}$
- $q: \mathbb{F}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{F}P^n$ kvocientna proj. je odprta
- $\mathbb{F}P^n \cong S(\mathbb{F}^n)/S(\mathbb{F})$
- $\mathbb{F}P^n$ kompakten, lok. komp., povezan s potmi, lokalno povezan s potmi in 2-števen
- $\mathbb{R}P^n \cong S^n/S^0 \cong S^n/\{1,-1\} = S^n/_{x \sim -x}$

...