

Uvod

Cilj topologije: Razumeti prostore in preslikave med njimi

preslikava zvezna funkcija

prostori: osnovni interes so metrični prostori

Različne konstrukcije dajo prostore, ki niso nujno metrični ali pa ni takej jasno da so metrični.

Zato si pomagamo s topološkimi lastnostmi.

Konstrukcije prostorov:

- podprostor
- vsota oz disjunktna unija
- produkt $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_{\lambda} = \{ (x_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda} ; x_{\lambda} \in X_{\lambda} \}$

$$\mathcal{B} = \{ U \times V : U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y \}$$

Pride iz tega da so projekcije zvezne

$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_{\lambda}$ opremlimo s najslabkejšo topologijo, da so projekcije zvezne

$$p_{\mu} : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_{\lambda} \longrightarrow X_{\mu} \quad \mu \in \Lambda$$

podbazo sestavljajo $p_{\mu}^{-1}(U_{\mu})$ adpt

$$U_{\mu} \times \prod_{\lambda \neq \mu} X_{\lambda}$$

Bazne množice so $U_{\mu_1} \times U_{\mu_2} \times \dots \times U_{\mu_k} \times \prod_{\lambda \neq \mu_1, \dots, \mu_k} X_{\lambda}$

- kompakтификаcija z 1 točko
- slike prostora pri zvezni preslikavi;
- slike prostora pri zvezni preslikavi
 $f: X \rightarrow Y$ $f(X)$ dobi topologijo iz Y

$$f^*(\{y\}) \subseteq X$$

$\{f^*(\{y\}); y \in Y\}$ razdelitev množice X

To torej deloča ekvivalenčna relacija in vsaka ekvivalenčna relacija deloča tako razdelitev

1. Kvocientni prostori:

1.1 kvocientna topologija

Det: X množica in \sim ekvivalenčna
relacija na X . Za poljuben $x \in X$
označimo $[x] = \{y \in X; x \sim y\}$
ekvivalenčni razred, ki pripada x

Kvocientna množica množica X po \sim
je množica vseh ekvivalenčnih razredov

$$X/\sim := \{[x]; x \in X\}$$

Kvocientna projekcija $q: X \longrightarrow X/\sim$
 $q: x \longmapsto [x]$

Primer: $X = [0, 1]$

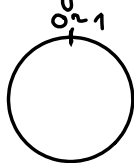
\sim ekvivalenčna relacija določena z
 $0 \sim 1 \quad (1 \sim 0; x \sim x \quad \forall x \in X)$

keko si lahko predstavljamo X/\sim



Naraven model X/\sim je $[0, 1]$

Druga možnost je



Opomba: 1) pri opisu ekvivalenčne relacije bomo običajno nevedli le netrivialne relacije, ki generirajo ekvivalenčno relacijo ob upoštevanju lastnosti ekv. relacije.

2) ekvivalenčne relacije \sim določa razdelitev X na ekvivalenčne razrede. Ta razdelitev označimo z $\mathcal{R} = \{[x] \mid x \in X\} \subseteq \mathcal{P}(X)$
kvocientno množico lahko označimo $X/\sim = X/\mathcal{R}$

3) če \sim določa le en netrivialen ekvivalenčni razred $A \subseteq X$; A ni enojec
potem kvocientno množico označimo z X/A

če je X topološki prostor in
 želimo X/\sim opremiti s topologijo tako
 da bo ta odražala lastnosti prostora X .
 Posebej želimo da je $g: X \rightarrow X/\sim$
 vezna

Ta pogoj topologije na X/\sim ne določa
 enolično

če neka topologija na X/\sim temu
 ustreza, potem ustreza tudi vsaka
 šibkejša. Zato je smiselno X/\sim opremiti
 z najmočnejšo topologijo pri kateri je
 g vezna.

Torej za odprte v X/\sim vzamemo vse,
 ki imajo odprte preslike v X

Def: X topološki prostor, \sim ekv. relacija.

\mathcal{T} topologija na X . Potem jo
kvocienatna topologija na X/\sim

$$\mathcal{T}_\sim = \{ V \subseteq X/\sim ; g^*(V) \in \mathcal{T} \}$$

Opomba: v kvocienatni topologiji velja
 torej $V \text{ odprto v } X/\sim \Leftrightarrow g^*(V) \text{ odprto v } X$

\Rightarrow veznost

\Leftarrow največjost \mathcal{T}_\sim

$$Z \text{ zaprto} \Leftrightarrow g^*(Z) \text{ zaprto}$$

Ali je torej g odprta iz zaprta?

Ne nujno:

Primer:

$$1) X = [0, 1] \quad \mathcal{R} = \{ [0, 1), \{1\} \}$$

$$X_n = \{ [0], [1] \}$$

$$\mathcal{L}_n = \{ \emptyset, X_n, [0] \}$$

$$g^*([0]) = [0, 1) \quad \begin{array}{l} \text{odprta} \vee X \\ n: \text{zaprta} \wedge X \end{array}$$

$$\{ [0] \} \quad n: \text{zaprta}, \text{ je odprta}$$

$$g^*([1]) = \{1\} \quad \text{zaprta}, n: \text{odprta}$$

Ali je g zaprta? Ne

$$g_*([0]) = [0] \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{zaprta} \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ n: \text{zaprta} \end{array}$$

2) $X = [0, 2]$ $[1, 2]$ edini pravi dv. rased

$$X/[1, 2] \simeq [0, 1]$$

$$g: X \longrightarrow X/[1, 2] \quad \text{ni odgla}$$

$$g^*(1, 2) = [1]$$

$$g^*([1]) = [1, 2] \quad \text{ni odgla v } X$$

3) $X = [0, 1]$ $A = X \cap \mathbb{Q}$ $B = X - \mathbb{Q}$

$$X/\{A, B\} = \{[0], [\frac{\sqrt{2}}{2}]\}$$

$$\tau = \{\emptyset, X_{\{A, B\}}\}$$

Def: X množica, \sim ekv. relacija
za $A \subseteq X$ je njeno nasičenje enako

$g^*(g_*(A))$... unija vseh divalencnih
razredov, ki sekojo A

Trditev: za $A \subseteq X$ velja da je
 $g_*(A)$ odprta \Leftrightarrow nasičenje $g^*(g_*(A))$
odprta

Podobno za zaprta.

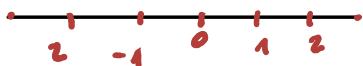
g je odprta, če je nasičenje vsake množice
odprta in zaprta če je nasičenje vsake
množice zaprta

Cilj:

X topološki prostor \sim dv. relacije
če je to mogoče želimo poiskati
nek geometrični model za Y in
kvocient X/\sim in pokazati da je
 $X/\sim \cong Y$

Primer:

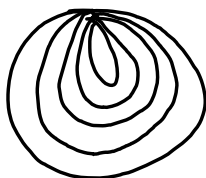
$$X = \mathbb{R} \quad A = \mathbb{Z}$$



$$\mathbb{R} / \sim = ?$$



$$2) \quad X = [0, 1] \quad A = \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$$



v 2) je X kompakten. Po definiciji je g
zveza, zato je X/\sim tudi kompakten
v 1) X/\sim kompakten zato ne vemo ali je
kvocient kompakten

1) ni mogoče uvrstiti v euclidski prostor

1.2 kvocienčne preslikave

Cilj: razumeti preslikave iz kvocienkov

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f = g \circ \pi} & Y \\ \pi \downarrow & & \uparrow g \\ & X/\sim & \end{array}$$

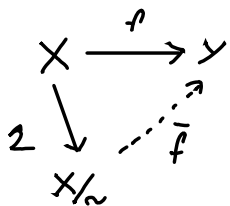


$$\text{če je } x \sim y \text{ v } X \Rightarrow g(x) = g(y) \\ \parallel \quad \parallel \\ [x] = [y]$$

$$\text{in zato je } g(\pi(x)) = g(\pi(y)) \\ \parallel \quad \parallel \\ f(x) \quad f(y)$$

Torej je f konstantna na ekvivalenčnih razredih. tj., ekvivalentne točke slikajo iste

Želimo obratno: za preslikavo $f: X \rightarrow Y$
 iskati pogoj, da določa preslikavo $X/\sim \rightarrow Y$



da diagram komutira

Če naj diagram komutira mora biti f
 konstantna na ekvivalenčnih razredih

$$\forall x, y \Rightarrow f(x) = f(y)$$

$$\bar{f}([x]) := f(x)$$

\bar{f} ... preslikava inducirana s f

Trditveni:

Naj bo X topološki prostor, \sim ekv. relacija

$f: X \rightarrow Y$ zvezna preslikava, ki je konstantna na ekv. razredih. Potem f dobro definira preslikavo $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ za katero velja

$$\bar{f} \circ g = f. \text{ Poleg tega velja}$$

1) f je zvezna $\Rightarrow \bar{f}$ zvezna

2) če je f surjektivna $\Rightarrow \bar{f}$ surjektivna

3) če $\forall x \neq y. f(x) \neq f(y) \Rightarrow \bar{f}$ injektivna

(tj. f loči ekvivalenčne razrede)

Dokaz: (2) in (3) jasno

1) Naj bo f zvezna. Dokazujemo zveznost \bar{f}
Izberemo poljuden $V \in \mathcal{T}_Y$

Ali: je $\bar{f}^*(V) \text{ odg. } \cup X/\sim$

$$f^*(V) \text{ odg.} \Leftrightarrow \underbrace{g^*(\bar{f}^*(V))}_{(f \circ g)^*(V)} \text{ odg. } \cup X$$
$$(f \circ g)^*(V) = f^*(V)$$

Ker je $V \text{ odg. } \wedge v \in Y: \exists f: X \rightarrow Y$ zvezna

je $f^*(V) \text{ odg. } \wedge v \in X$

Zanima nas kdaj bo \bar{f} homeomorfizem

(zveza, bijektivna, zveza, inverz)

(bijektivna f , bijektivna f^*)

\bar{f} je homeomorfizem $\Leftrightarrow \bar{f}$ bijekcija in
paradi bijekcija med topologijama

$\Leftrightarrow \bar{f}$ je bijekcija in $\forall V \subseteq Y, (V \text{ odpr}) \Leftrightarrow \bar{f}^*(V) \text{ odpr}$



$$(V \text{ odpr} \subseteq Y \Leftrightarrow \underbrace{f^*(\bar{f}^*(V))}_{f^*(V)} \text{ odpr})$$

\uparrow
karakterizacija \Leftarrow kvocientnost

Naj bosta X in Y topološki prostora

$$f: X \rightarrow Y$$

f surjektivna in $\forall V \subseteq Y: (V \text{ odpr} \Leftrightarrow f^*(V) \text{ odpr})$

$\Rightarrow f$ imenujemo kvocientne preslikave

Opombe:

1) Po definiciji: kvocientne topologije je kvocientna projekcija kvocientne preslikave

Obratno: Vsako kvocientno preslikavo

$f: X \rightarrow Y$ lahko obravnavamo kot

kvocientno projekcijo pri ekvivalenčni relaciji, določeni z razbitjem X na preslike točk

2) Kvocientna preslikava je vedno zvezna (\Rightarrow) in ~~ni~~ ⁿⁱ nujno odprta niti zapeta (ker še vedno za kvoc. proj.)

3) Implekzija (\Leftarrow) v definiciji kvocientne preslikave je posebna lastnost, tej včasih rečemo kvocient v ožjem smislu. Za zveznost je za upevno enoličnost ~~potrebno~~ ^{potrebno} preveriti le prvo

4) Surjektivna f je kvocientna \Leftrightarrow

$$(\forall Z \subseteq Y: Z \text{ zap} \Leftrightarrow f^*(Z) \text{ zap})$$

Lema: Naj bo $f: X \rightarrow Y$ zveza in surjektivna
če je f odgoda ali zaprta je kvocientna

Dokaz:

Preveriti je treba kvocientnost v obeh
smislu

$\supset_n \subset$

Recimo da je f zaprta

Izberimo poljubno $Z \subseteq Y$ za katero je
 $f^*(Z)$ zaprta v X

$$\underline{Z \cap P \subseteq Y}$$

$f^*(Z)$ zaprta v X in f zaprta

Torej $f_*(f^*(Z)) = Z$ zaprta
 \uparrow
surjektivnost

Izrek: (o prepoznavi kvocienke)

X, Y : top. prostor nekve relacije na X

Naj bo $f: X \rightarrow Y$ kvocienka preslika,

ki nered. evke identifikacije kot \sim

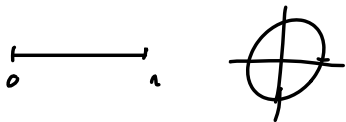
(f_j, f_j konstantne na ev. razredih in jih
looi)

Potem je inducirana preslika $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$
homeomorfem

Primer: $X = [0, 1]$ $0 \sim 1$

Dokažimo: $X/\sim \cong S^1$

Iščemo f kvocientno, ki naredi iste identifikacije kot \sim



$$f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

f je surjektivna in slike v krogu: \circ

Preveriti moramo kvocientnost

inemo zveznost

kvocientnost v ožjem smislu?

Dovolj je odprto ali zaprto?

- f je zvezna, ker je elementarna
- f je kvocientna v ožjem smislu, ker je zaprta, saj slike iz kompaktnega v hausdorffu
- f je hom. na dv. razredih

$$f(0) = (1, 0)$$

$$f(1) = (1, 0)$$

$$0 \sim 1 \Rightarrow f(0) = f(1)$$

f bo ekvivalentne razrede:

interval $[0, 1)$ se izje slike na

krožnico, zato smo f različne vrednosti ne razredili dv. razredil

izrek $\xRightarrow{f} \bar{f} X/\sim \rightarrow S^1$ je homeomorfizem

✓ 4.3

zámek prebranj

$$X \cong Y$$

Trditev $X/\sim_x \cong Y/\sim_y$ (\sim_y in \sim_x sta
 vsklajeni: $(y_1 \sim y_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) \sim f^{-1}(y_2))$)

Dleč

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow q_x & & \downarrow q_y \\ X/\sim_x & \xrightarrow{F} & Y/\sim_y \end{array}$$

homeomorfizem
 kvocientov preslikave

F grof kvocienta

Po definiciji: A sl. kv. ohr. rel. v X v

ohv. rel. v Y

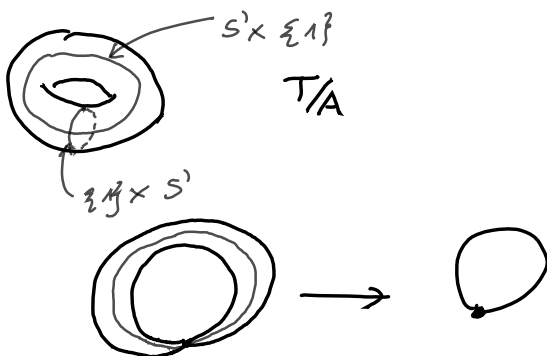
Torej $q_y \circ f$ naredi iste identifikacije
 kot q_x

$\Rightarrow q_y \circ f$ inducira homeomorfizem $F: X/\sim_x \rightarrow Y/\sim_y$

Primer:

Naj bo $1 \in S^1 \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}^2$

$A = S^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times S^1 \subseteq S^1 \times S^1 = T$ torus



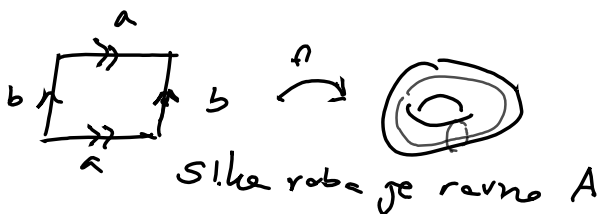
Najbrž je kvocient S^2

Ideja: torus prerežemo vzdolž A , da dobimo kvadrat z identifikacijami na robu

$$X = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$f: X \rightarrow S^1 \times S^1$$

$$f(x, y) = (\underbrace{\cos 2\pi x, \sin 2\pi x}_{e^{i2\pi x}}, \underbrace{\cos 2\pi y, \sin 2\pi y}_{e^{i2\pi y}})$$



$$B := f^{-1}(A) = \partial I^2 \dots \text{rob kvadrata}$$

če nadaljujemo tako da A stisnemo v točko to ustrezajo identifikacijam na kvadratu, ki celotni rob stisnemo v točko

$$I^2 \xrightarrow{p} I^2/B \text{ kvocientna projekcija}$$

$$\text{vemo da } \boxed{I^2} \cong \mathbb{B}^2$$

$$B = \partial I^2$$

$$\partial^1 = \partial \mathbb{B}^2$$

$$\downarrow p$$

$$\downarrow \downarrow$$

$$I^2/B \cong \mathbb{B}^2/S^1 \cong S^2$$

$$\Rightarrow S^2 \cong T/A$$

Deljivost topoloških lastnosti

Def: topološka lastnost \mathcal{L} je deljiva,
če za $\forall X \in \mathcal{L}, \forall \sim$ ekv. rel. $X/\sim \in \mathcal{L}$

Ekvivalentno: \mathcal{L} je deljiva, če se ohranja
pri kvocienčnih preslikavah

Trditve:

1) Deljive so naslednje lastnosti

- kompaktnost, povezanost (s patni), lokalna povezanost (s patni), separabilnost, diskretnost, trivialnost

2) Nedeljive so:

- lokalna kompaktnost, 1- in 2-števnost, separabilne lastnosti, metričnost, popolna nepovezanost

Dokaz:

komp., pov. in sep. se ohranja z veznosjo

lokalna povezanost s patni.

lok. povezan \Leftrightarrow komponente vsake odprte množice so odprte

$$X, \sim \quad \forall \emptyset \neq U \subseteq X, \sim$$

$$V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_{\lambda} \quad V_{\lambda} \text{ so komponente za povezanost}$$

V_{λ} so odprte

$$g: X \rightarrow Y \quad \text{kont.}$$

$$g^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} g^{-1}(V_{\lambda}) \text{ je odprta v } X$$

P- preobrazba je X lok. po. \Leftrightarrow vsake

so komponente $g^{-1}(U)$ odprte v X

Naj bo W poljubna komponenta $g^{-1}(U)$

Ker je V povezana in g vezan \Rightarrow

$$g(W) \subseteq V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_{\lambda}$$

$$\text{Torej, } g(W) \subseteq V_{\lambda} \text{ za nek } \lambda \in \Lambda$$

$$\Rightarrow W \subseteq g^{-1}(V_{\lambda})$$

$\Rightarrow g^{-1}(V_{\lambda})$ je ena komponent

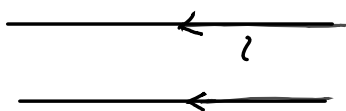
za povezanost $\Rightarrow g^{-1}(V_{\lambda})$ je

odprta $\Leftrightarrow V_{\lambda}$ so odprte

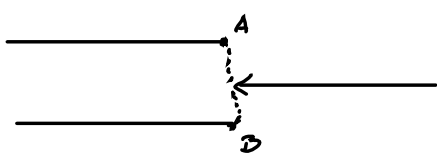


2) separabilne lastnosti:

$$T_2: X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$$



Relacija $\sim (x, 0) \sim (x, 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$



A in B nimata več disjunktnih delov

1-števnost

$$X = [0, 1] \times \mathbb{N} \quad A = \{0\} \times \mathbb{N}$$



$$X/A = \text{point} \quad X/A \text{ ni enašteven}$$

Dokaz s protislovjem:

Recimo da jo ima

$$a = g(A) = g(\{0\} \times \mathbb{N}), \text{ ne!}$$

Recimo da jo

\forall $U \subseteq X/A$ U ni odprta



Trditelj: X top. pr. \leadsto ekv. relacija na X

$X/\sim \in T_1 \Leftrightarrow$ ekvivalenčni razredi v X
so zaprti

Dokaz:

$X/\sim \in T_1 \Leftrightarrow$ točke v X/\sim so zapte

$$\Leftrightarrow g^{-1}(t_0) \underset{\text{z.p.}}{\subseteq} X$$

1.3 Topolaské grupe in delovanje

Def: Topolaska grupa je grupa G , ki je opremljena s topologijo, glede na katero sta množenje

$$m: G \times G \rightarrow G$$

$$(g, h) \mapsto gh$$

in invertiranje

$$\text{inv}: G \rightarrow G$$

$$g \mapsto g^{-1}$$

zem:

Opomba: Poznamo že primer topolaste algebre

$$(C(X), \tau_{co})$$

Ki bomo večinoma delali mod $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

ki so topolasti obsegi, obstajajo še drugi npr. končni obsegi: $(\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_p)$ ki jih običajna opremimo z diskretno topologijo p -adichne, ki so nepolnitet \mathbb{Q} v p -adichni metriki

$$\frac{m}{n} = p^k \frac{m_1}{n_1} \quad m_1, n_1 \text{ tuja } p \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left\| \frac{m}{n} \right\|_p = p^{-k}$$

Primeri

1) G poljubna grupa opremljena z diskretno topologijo je tudi grupa

2) G top. grupa $H \leq G \Rightarrow$
 H z inducirano topologijo je tudi top. grupa

3) $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{H}, +)$ so top. grupe

(\mathbb{R}^*, \cdot) , (\mathbb{C}^*, \cdot) , (\mathbb{H}^*, \cdot) so tudi top. grupe

norma je **multiplikativna** ko:

$$\mu, \lambda \in \mathbb{F} \quad \|\mu\lambda\| = \|\mu\| \cdot \|\lambda\|$$

Posebej sledi, da so enotske sfere
zaprte za množenje

(S^0, \cdot) (S^1, \cdot) (S^3, \cdot) so topološke
grupe
" $\{\pm 1\}$

kaj pa S^2 ? Ne!

Neglejši dokaz z uporabo algebrizirane
topologije

5) Naj bodo $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ grupe

Poten je $\prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ opremljena z operacijami:

po komponentah in produktno topologijo
tudi topološka grupa

Npr: $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C} \dots$ Cantorjeva množica

6) Topološke grupe linearnih izomorfizmov

$F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$

$GL_n(F) = \{\text{lin. izomorf. } F^n \rightarrow F^n\}$

$$= \{A \in F^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$$

.... splošne linearne grupe

$$(A, B) \mapsto A \cdot B \quad \text{zveza}$$

$$A \mapsto A^{-1} \quad \text{kudi zveza}$$
$$= \frac{1}{\det A} \tilde{A}$$

Se veči: To je **Liejeva grupa** ..., gladka
množica in operaciji sta gladki

Enako velja za vse standardne podgrupe:

$$SL_n(F) \dots \det = 1$$

nad \mathbb{R} :

$$O_n \dots \text{ortogonalna} \quad AA^T = I$$

$$SO_n \dots \text{specialna ortogonalna} \quad A^{-1} = A^T$$

nad \mathbb{C} :

$$U_n \dots \text{unitarna} \quad AA^H = I$$

$$SU_n \dots \text{specialna unitarna}$$

nad \mathbb{H}

$$Sp_n \dots \text{symplektična grupa} \quad AA^H = 1$$

$$(\text{sred. } \det = 1)$$

Trditev: Naj bo G top. grupa
 $a \in G$.

leva (oz desna) translacija za a je

$$L_a: G \rightarrow G$$

$$g \mapsto ag$$

$$R_a: G \rightarrow G$$

$$g \mapsto ga$$

sta homeomorfizma

Dokaz:

$$R_a: G \xrightarrow{\cong} G \times \{a\} \subset G \times G \xrightarrow{\pi} G$$

$$g \mapsto (g, a) = (ga) \mapsto ga$$

kompozicija zveznih je zvezna ~~zvezna~~

inverz: R_a^{-1}

$$R_a^{-1}(R_a(g)) = R_a^{-1}(ga) = (ga)a^{-1} = g(aa^{-1}) = g$$

Posledica

Top. grupa G je homogen prostor, tj. za

poljuben $x, y \in G$. \exists homeom. $h: G \rightarrow G$, $h(x) = y$

Dokaz: $L_{yx^{-1}}$ ali $R_{x^{-1}y}$

Dat:

Maj bo X top. prost. in G top. grupa

(levo) **delovanje** grupe G na prostor X

je zveza preslikave $p: G \times X \rightarrow X$

$$(g, x) \mapsto p(g, x) = g \cdot x$$

za katero velja:

$$\uparrow) ex = x \quad \forall x \in X$$

$$b \cdot (a \cdot x) = (ba) \cdot x \quad \forall x \in X, \forall a, b \in G$$

V tem primeru rečemo da je X G -prostor

Opomba: kot v primeru grupe, delovanje določa translacijo ki je homeomorfizem prostora X

$$L_a: X \rightarrow X$$

$$x \mapsto a \cdot x$$

Ampak v splošnem X ni homogen za delovanje grupe G :

za polj $x \in X$ je

$$G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\} \text{ orbita točke } x \text{ in}$$

ta v splošnem ni ves X

Tone; delovanje G na X določa dv. relacijo
 na X za katera so ekvivalentni;
 razredi orbite delovanja;

$$x \sim y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists g \in G, g \cdot x = y$$

$$[x] = \{ y \mid \exists g \in G, g \cdot x = y \}$$

Za poljubnem $x \in X$ je $G_x = \{ g \in G \mid g \cdot x = x \}$
 stabilizatorska podgrupa elementa x

Velja: $G \cdot x \xrightarrow{\text{bij}} G/G_x$

Trditve:


Naj, top. grupa G deluje na top. prostor X .
Potem je kvocienarna projekcija $q: X \rightarrow X/G$
v prostor orbit odprta

Dokaz:

Preveriti moramo da je nasicenje v
odprte m.n. v X odprto v X :

$$U^{oor} \subseteq X$$

$$\begin{aligned} q^{-1}(q(U)) &= \bigcup_{x \in U} G \cdot x = \{ g \cdot x \mid g \in G, x \in U \} \\ &= \bigcup_{g \in G} \{ g \cdot x \mid x \in U \} = \bigcup_{g \in G} L_g(U) \end{aligned}$$

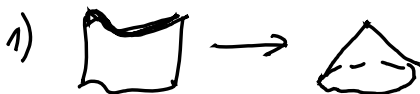
Ker je U^{oor} in L_g homeo. slike odpr. v. odr.
za to je $L_g(U)$ odprta, ~~ker~~ zato tudi
unija het odprta 

1.4 Konstrukcije kvocienata

1) X top. pr.

stažen nad X : $CX := X \times I / \sim$
 \sim je relacija $(x, 0) \sim (x, 1)$

2) suspenzija X : $\Sigma X := X \times [-1, 1] / \sim$
 \sim je relacija $(x, -1) \sim (x, 1)$



Trditveni:

$$CS^n = B^{n+1}$$

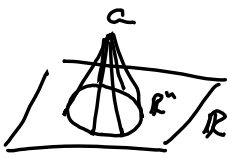
$$ZS^n = S^{n+1}$$

Opomba:

$$\text{za } X \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$1) \quad \mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\text{za poljubni } a \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$



Definiramo
linearni stožec
nad X kot unijo
vseh deljic

$$\{[a, x] \mid x \in X\}$$

Vse te deljice se paroma
sekaejo v točki a

$L_a X \dots$ linearni stožec

$L_a X$ je kot množica enake CX .

topologije ima enako če je X kompakten

2) Simetrični produkt

X top. prostor $n \in \mathbb{N}$

$$X^n = X \times \dots \times X$$

simetrična grupa S_n deluje na X^n s

permutacijami: faktorijel in kvocient pri tem
deluje je simetrični produkt

$$S^n X = X^n / S_n$$

Primer:

$$X = [0, 1] = I \quad n = 2$$

$$I^2 \quad \begin{array}{|c|} \hline (x,y) \\ \hline (y,x) \\ \hline \end{array} \quad (x,y) \sim (y,x)$$

$$S^2 I \simeq \triangle$$

3) Limite prostorov

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} X_4 \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\lim} (X_n, f_n) = \left(\coprod_{n=1}^{\infty} X_n \right) / \sim$$

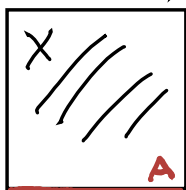
$$x_i \in X_i; \quad x_j \in X_j$$

$$x_i \sim x_j, \text{ če } \exists k > i, j \text{ da je}$$

$$f_k \circ \dots \circ f_{i+1} \circ f_i(x_i) = f_k \circ \dots \circ f_j(x_j)$$

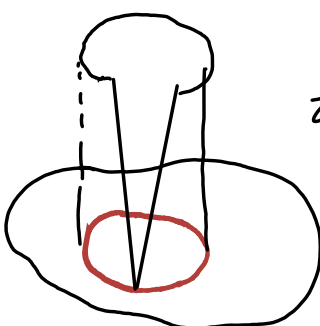
4) Zlepek

$$X, Y, \text{ top. pr } A \subseteq X; \quad f: A \rightarrow Y$$



$$\text{Zlepek } X \text{ in } Y \text{ vsote } f \text{ je } X \cup_f Y = (X \sqcup Y) / \sim$$

$$\begin{array}{ccc} a \sim f(a) \\ A & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$



Zlepek

Ekvivalenčni razredi:

$$[x] = \{x\} \quad x \in X - A$$

$$[y] = \{y\} \quad y \in Y - f(A)$$

$$[y] = f^*(\{y\}) \cup \{y\} \quad y \in f(A)$$

Primes

1) $A \subseteq X$

$v = \{x, y\}$

$f: A \rightarrow Y$ konst. preslikova

$X \cup_f Y \approx X/A$

2) Maj bo $f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ homeo

$B^n \cup_f B^n \approx S^n$

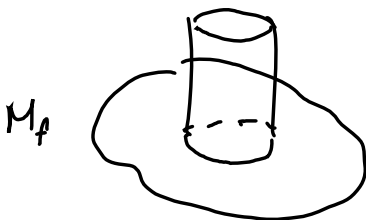
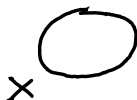


3) Maj bo $f: X \rightarrow Y$ zveza

Preslikavn: cilindar je zlepek

$M_f = X \times I \cup_f Y$

$f: X \times \{0\} \rightarrow Y$



Izrek: (normalnost zlepek)

X, Y normalne prostora

$A \subseteq X$ zaprt $f: A \rightarrow Y$ zveza

Potem je zlepek $X \sqcup_f Y$ normalen

Dokaz:

normalnost: $T_1 + T_2$

$g: X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$ kvocienčni proj

Netrivialni: elw. razredi so oblike

$$f^*(y) \cup \{x\}, y \in f^*(A)$$

T_1 : kvocienčni je $T_1 \Leftrightarrow$ elw. razredi zaprti

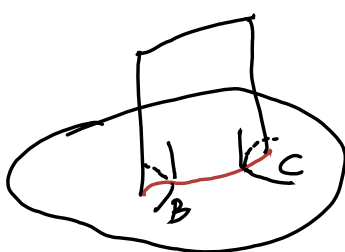
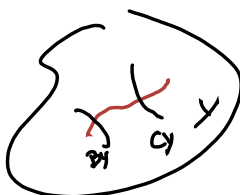
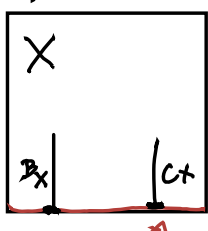
(ker sta X, Y T_1 so točke zapte)

ker je f zveza in so točke zapte je tudi $f^*(\{y\})$ zaprt zato so vsi elw. razredi zaprti

T_2 : Urisanova kupa:

~~zveza~~ $T_2 \Leftrightarrow$ vsaj ena od X, Y množici iščena uvisanova funkcija

Naj bosta $B, C \subseteq Z$ disjunktni, zaprta, neprazni:



$$\begin{aligned} \text{Naj bo } B_X &= g^*(B) \cap X & C_X & \text{ podobno} \\ B_Y &:= g^*(B) \cap Y & C_Y & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Te množice so zaprti } B_X \cap C_X &= \emptyset \\ B_Y \cap C_Y &= \emptyset \end{aligned}$$

ker je Y T_2 obstaja Urisanova funkcija $f_Y: Y \rightarrow [0, 1]$

$$f_Y|_{B_Y} = 0 \quad f_Y|_{C_Y} = 1$$

Definirajmo $\psi: B_X \cup C_X \cup A \rightarrow [0, 1]$

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in B_X \\ 1 & ; x \in C_X \\ f_Y(f(x)) & ; x \in A \end{cases}$$

ψ je dobra definirana

Po tistem istem razlogu lahko ψ razširimo do zveze

$f_X: X \rightarrow [0, 1]$ ki je uvisanova funkcija

Funkcij: f_X in f_Y pa skupaj določata

istano uvisovano funkcijo na zlepek Z

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \overset{x}{X} \sqcup \overset{y}{Y} \\ \downarrow \varepsilon \end{array} & \xrightarrow{f_X \sqcup f_Y} & I = [0, 1] \\ & \searrow \varphi & \\ & Z = X \cup_f Y & \end{array}$$

Če $x \in X$ $y \in Y$ je $x \sim y \Leftrightarrow y = f(x) \in f(A)$

$$f_X(x) = \psi(x) = f_Y(f(x)) = f_Y(y)$$

\Rightarrow inducirana funkcija obstaja in ker sta

f_X, f_Y zvezi je tudi inducirana zveza

$\Rightarrow \varphi$ je uvisovana saj je $f_X|_B = 0$ $f_Y|_C = 1$

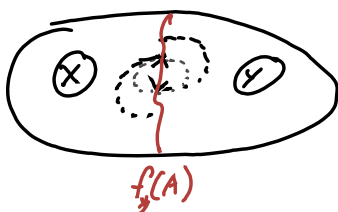
Trditvi: $A^{\text{top}} \subseteq X$; $f: A \rightarrow Y$

Označimo $Z = X \cup_f Y$

1) če $z \in X, Y$ z-števna je tudi z z-števna

2) če sta $X, Y \in T_2$ je tudi $Z \in T_2$

Dokaz



Naj bo $B_X = \{U_n; n \in \mathbb{N}\}$ baza za X

$B_Y = \{V_m; m \in \mathbb{N}\}$ baza za Y

Za poljubna $n, m \in \mathbb{N}$ naj bo

$$W_{n,m} = (U_n \cap A) \cap f^*(V_m \cap f_*(A))$$

$W_{n,m} \neq \emptyset$ je ovedena odprta v A zato

$$\exists W_{n,m}^X \subseteq U_n \text{ in } W_{n,m}^X \cap A = W_{n,m}$$

$$\exists W_{n,m}^Y \subseteq V_m \text{ in } W_{n,m} \cap f^*(A) = f(W_{n,m}^Y) \text{ odprta v } f_*(A)$$

Naj bo

$$B = \{g(U_n); U_n \in B_X; U_n \cap A = \emptyset\} \cup$$

$$\cup \{g(V_m) \mid V_m \in B_Y; V_m \cap f_*(A) = \emptyset\} \cup$$

$$\cup \{g(W_{n,m}^X \cup W_{n,m}^Y) \mid W_{n,m} \neq \emptyset\}$$

B je števna

Krožice v B so odprte, ker so U_n, V_m in

$W_{n,m}^X \cup W_{n,m}^Y$ nasizene odprte, če se razločijo v del. krožice B

Potrebni moramo se da je neke mn. v krož. top. pr. Zunija mreži iz B .

Za to je dovolj pokazati da za vsako tako mrežo $D \subseteq Z$ in vsako točko $d \in D$.

$$\exists \text{ mn. } W \in B: d \in W \subseteq D$$

$g^*(d)$ lahko ena točka v X ali Y ali pa

vsebuje več točk. eno v A in njeno slika v Y

Latino pride:

$$g^*(d) = \{x\} \subseteq X$$

$$x \in g^*(D) \cap X^{\text{odprta}} \subseteq X$$

$$\text{ker } x \in A \text{ je } x \in g^*(D) \cap X \cap A^{\text{odprta}}$$

$$\exists U_n \in B_X \text{ da je } x \in U_n \subseteq g^*(D)$$

$$\text{zato je } g(x) = d \in g(U_n) \cap B$$

$$\bullet g^*(d) = \{y\} \subseteq Y \quad y \in f(A) \quad \text{pobeno kot zgornji}$$

$$d \in g(V_m) \subseteq D$$

$$\bullet g^*(d) = \{x, y\} \quad x \in A \quad y \in f(A)$$

$$\exists x \exists U_n \in B_X: x \in U_n$$

$$\exists y \exists V_m \in B_Y: y \in V_m$$

$$\Rightarrow x = f^*(y) \in f^*(V_m)$$

$$\Rightarrow x \in W_{n,m}$$

$$\Rightarrow W_{n,m}^X \subseteq g^*(D) \quad W_{n,m}^Y \subseteq g^*(D)$$

$$\Rightarrow \{d \in g(U_{n,m}^X \cup W_{n,m}^Y)\} \subseteq D$$

2) $X, Y \in T_2 \Rightarrow Z \in T_2$



se je vse, ene ne le meji, nima problem

1.5 Projekтивni prostori

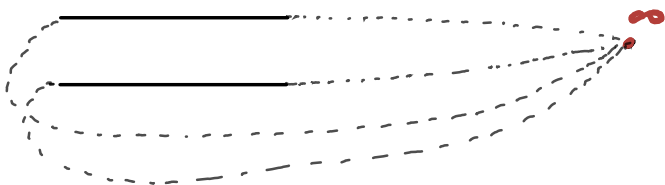
V ravninski evklidski geometriji za medsebojno lego dveh premic nastopita dve možnosti:

- se sekata v natanko eni točki
- sta vzporedni

Zato je včasih v dokazih potrebno obravnavati dve možnosti.

Želeli bi, da je situacija vedno enaka.

Torej da se poljubni premici sekata v natanko eni točki



To naredimo tako, da dodamo točko v ∞ na ta način da vsakemu snopu vzporednih premic, ki je skupna vsem premicam v snopu

Vsek snop vzporednih premic deli svojo neskončnost

Izkaže se da se v dobljenem projektivnem prostoru (projektivna ravnina \mathbb{RP}^2) poenostavi tudi opis stožnic

$$\mathbb{RP}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{ \text{premise v } \mathbb{R}^2 \} // \leftarrow \text{vzporednost}$$

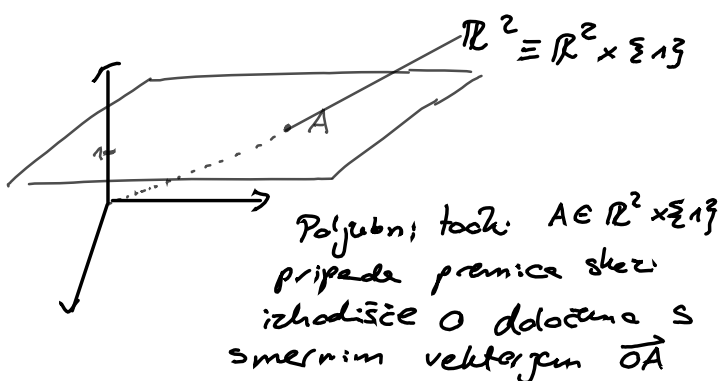
• kakšna je topologija na \mathbb{RP}^2

Dodeli smo neskončno točk v neskončnosti

Ali te točke sestavljajo kak geometrijski objekt

Ali \mathbb{RP}^2 izgleda enako v okolici ∞ točk kot v okolici končnih

Točke v \mathbb{RP}^2 lahko opišemo na enak način



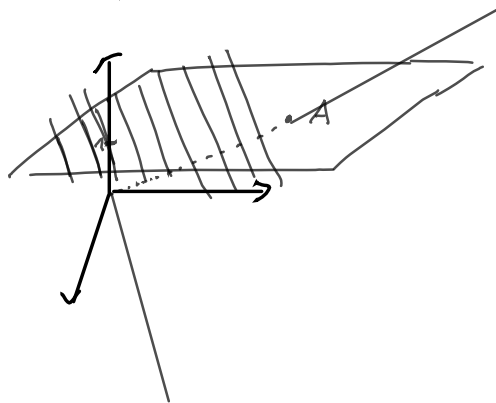
Točka A je edino presečišče te premice z ravnino $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$

Na ta način dobimo bijekcijo med točkami:

na $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$ in premicami skozi O v \mathbb{R}^3 ki:

ne ležijo na ravnini: $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$

Pramice skozi $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ pa so v korespondenci s snopi vzporednih premic na $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$



Torej je $\mathbb{RP}^2 = \{ L; L \text{ 1-dim lin. prostor v } \mathbb{R}^3 \}$

$$\mathbb{RP}^2 = \{ L - \{0\}, L \text{ 1-dim lin. prostor v } \mathbb{R}^3 \}$$

↑
paroma disjunktni, njihova unija je $\mathbb{R}^3 - \{0\}$

To razbitje $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ določa ekvivalenčno relacijo.

Ekvivalentni razredi so 1-dimenzionalni linearni podprostorji brez izhodišča

$$x, y \in L - \{0\} \iff \exists \lambda \neq 0. y = \lambda x$$

$$L - \{0\} = \{ \lambda x; x \in \mathbb{R}^x \}$$

||
[x]

To je orbita delovanja \mathbb{R}^x na $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ z množenjem s skalarji

$$\mathbb{RP}^2 = \frac{\mathbb{R}^3 - \{0\}}{x \sim \lambda x} = \frac{\mathbb{R}^3 - \{0\}}{\mathbb{R}^x}$$

↑
prostor orbit pri delovanju grupe \mathbb{R}^x

Def: Naj bo $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ in naj bo $n \in \mathbb{N}_0$

Projektivni prostor dimenzije n nad obsegom F je

$$\mathbb{P}^n := \frac{F^{n+1} - \{0\}}{x \sim \lambda x; \lambda \in F^\times} = \frac{F^{n+1} - \{0\}}{F^\times}$$

opremljen s kvocienčno topologijo.

Opomba: enako bihko naredimo za poljubni topološki obseg

Trditev:

Naj bo $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ $n \in \mathbb{N}_0$

FP^n je homogen prostor

(t.j. za poljubne $x, y \in FP^n$. \exists h homom FP^n . $h(x) = y$)

Dokaz:

$$\begin{array}{ccc} F^{n+1} - \{0\} & \xrightarrow{H} & F^{n+1} - \{0\} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ FP^n & \xrightarrow{h} & FP^n \\ [v] = x^\vee & \xrightarrow{h} & y^\vee = [w] \end{array}$$

za H bomo izbrali linearni izomorfizem
k v slika v w

v dopolnimo do baze F^{n+1}

v, v_1, v_2, \dots, v_n

w dopolnimo do baze F^{n+1}

w, w_1, \dots, w_n

za H vzamemo prehodno preslikavo,
ki slika baze vektore v baze vektore
(z istim indeksom)

H je homeomorfizem $\Rightarrow g \circ H$ je kvocientna
 $g \circ H$ naredi iste identifikacije kot g

(stisne premice v točke, H pa je bijekcija
med premicami:

\Rightarrow inducirane preslikava h je homeo

in $h(x) = h([v]) = g(H(v)) = g(w)$

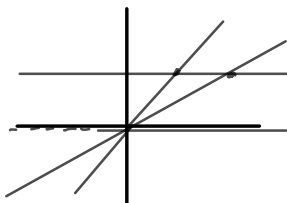
Primeri:

$$1) F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$$

$$FP^0 = F^1 - \{0\} / F^x = F^x / F^x = \{*\}$$

$$2) FP = ?$$

$$FP^1 = F^2 - \{0\} / F^x$$

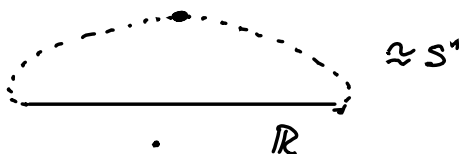


Zdi se da je

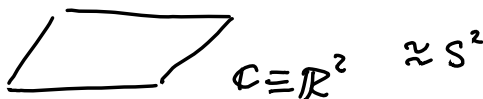
$FP^1 = F \cup \{0\}$ kompaktifikacija z 1 točko

(za zdaj se uganja)

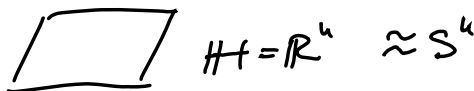
$$\mathbb{R}P^1$$



$$\mathbb{C}P^1$$



$$\mathbb{H}P^1$$



$$d = \dim_{\mathbb{R}} F = \begin{cases} 1 & F = \mathbb{R} \\ 2 & F = \mathbb{C} \\ 4 & F = \mathbb{H} \end{cases}$$

$$FP^1 = S^d$$

(3) $\mathbb{R}P^2$ je neka sklenjena ploskev, ki pa

ni S^2

Trditelj: $\mathbb{F}P^n$ ima pokritje z $n+1$ odprtimi množicami, k. so homeo. $\mathbb{F}^n \cong \mathbb{R}^{d,n}$

Dokaz: $\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\}$ $U_i = \{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^{n+1}; x_i \neq 0 \}$
 $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \quad i \in \{0, \dots, n\}$

U_i je odprta za $\forall i: \{U_0, \dots, U_n\}$ so torej

odprto pokritje za $\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\}$

ker so U_i nasičene so $g_*(U_i)$ odprti $\subseteq \mathbb{F}P^n$
in tvorijo odprto pokritje

$$g_*(U_i) \cong \mathbb{F}^n$$

Dava!j je dokazati za $i=0$:

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{f} & \mathbb{F}^n \\ \downarrow g_0 & \searrow \tilde{f} & \\ g_*(U_0) & & \end{array}$$

$$\lambda(x_0, \dots, x_n) = (\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

$$f(x_0, \dots, x_n) = (x_0^{-1}x_1, \dots, x_0^{-1}x_n)$$

f slika ekvivalentne točke v iste

$$\begin{aligned} f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) &= (x_0^{-1} \lambda^{-1} \lambda x_1, \dots, x_0^{-1} \lambda^{-1} \lambda x_n) \\ &= (x_0^{-1} x_1, \dots, x_0^{-1} x_n) \end{aligned}$$

f je zvezna

ker je U_0 odprta je g_0 kvocienčna
zato f zvezna $\Rightarrow \tilde{f}$ zvezna

Da je \tilde{f} zvezna homeo. sledi iz obstoja
inverzne zvezne preslikave

$$\text{Naj bo } G: \mathbb{F}^n \rightarrow g(U_0)$$

$$G(w_1, \dots, w_n) = g(1, w_1, \dots, w_n) \text{ zvezna}$$

in očitno inverzna \tilde{f}

Posledica: $FP^n \in T_2$

Dokaz:

$$x, y \in FP^n ; x \neq y$$

$$x = [V] \quad V = (v_0, \dots, v_n)$$

1) $v_i \neq 0 \text{ za } i \in \{0, \dots, n\}$

$$\Rightarrow \exists U_i \text{ za } v_i \Rightarrow x \in \mathcal{G}_*(U_i) \text{ za } v_i$$

Ampek za $y \exists$ vsaj en j da je $y \in \mathcal{G}_*(U_j)$

$$\text{Torej } x, y \in \mathcal{G}_*(U_j) \approx FP^n = \mathbb{R}^n$$

x in y imata v $\mathcal{G}_*(U_i)$ disjunktni

okolici in ker je $\mathcal{G}_*(U_j)$ odprta v FP^n
imata okolici v celnem prostoru

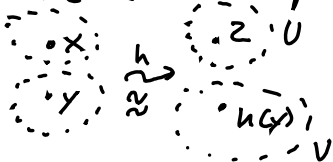
2) Splošen primer:

po homogenosti FP^n lahko x s homeo.

h preslikamo v \mathbb{Z} , ki ima vse komponente

nenizalne

po 1) \exists disjunktni okolici



$h^*(U)$ in $h^*(V)$ sta disjunktni okolici x in y

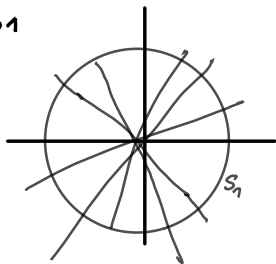
Zanimajo nas top. lastnosti FP^n

Če $n \geq 1$ je $FP^{n+1} \setminus \{0\} \Rightarrow FP^n$ pavčan

FP^{n+1} lok. pavčan $\Rightarrow FP^n$ lok. pavčan

Pokažeti želimo da so FP^n kompaktni:

RP^1



v F^k označimo
enotsko sfero $S(F^k)$
 $= \{x \in F^k; \|x\|=1\}$

$$F = \mathbb{R} \Rightarrow S^{k-1}$$

$$F = \mathbb{C} \Rightarrow S^{2k-1}$$

$$F = \mathbb{H} \Rightarrow S^{4k-1}$$

Ker je F topološki obseg množenje z
enotskimi skalarji ohranja enotsko sfero $S(F^k)$,
zato delovanje F^x na $F^{n+1} \setminus \{0\}$ (množenje
s skalarji) določa delovanje $S(F)$ na
enotsko sfero na $S(F^{n+1})$

$$S(F) = \begin{cases} S^0 & F = \mathbb{R} \\ S^1 & F = \mathbb{C} \\ S^3 & F = \mathbb{H} \end{cases}$$

$$\text{Trditaj: } \mathbb{F}P^n \approx S(\mathbb{F}^{n+1})/S(\mathbb{F})$$

Dalje:

$$\begin{array}{ccc}
 S(\mathbb{F}^{n+1}) & \hookrightarrow & \mathbb{F}^{n+1} - \{0\} \\
 \downarrow p & \searrow f_{\text{noc}} & \downarrow \cong \\
 S(\mathbb{F}^{n+1}/S(\mathbb{F})) & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{F}P^n
 \end{array}$$

f naravno je identifikacija kot p

$\Rightarrow f$ je homeo

Pokažemo, da so $\mathbb{F}P^n$ kompaktni: