Prostori in preslikave

(topološki) (zvezni)

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$a \in \mathbb{R}$ f je zvezna v a

$\forall \varepsilon > 0 . \exists \delta > 0 . \forall x \in \mathbb{R} . \ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

f je zvezna če je zvezna v vseh točkah

Metrični prostor X

$d: X \times X \longrightarrow [0, \infty)$

1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x)$

3) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

(X, d) je metrični prostor

$f: X \longrightarrow Y$

$d_X \qquad d_Y$

$a \in X$

$\forall \varepsilon > 0 . \exists \delta > 0 . \forall x \in D . \ d_X(x,a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$

Izrek: $f:(X,d_X)\longrightarrow(Y,d_Y)$ je zvezna, če $\forall$ odprto množico $U\subseteq Y$ njena praslika $f^*(U)$ je odprta množica v X

$U\subseteq X$ je odprta, če so vse točke v U notranje

$x\in U$ je notranja, če $\exists r>0.\ K(x,r)\subseteq U$

PDD - poorly drawn diagram

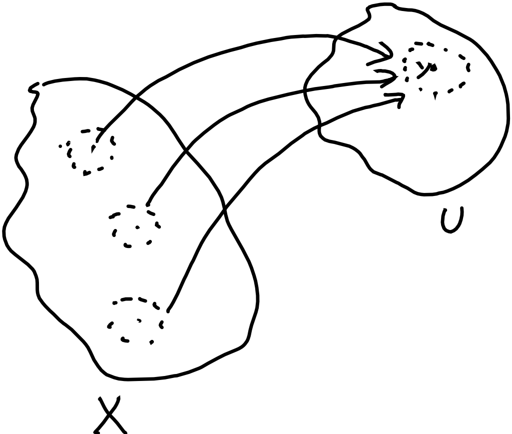
Dokaz:

$$X \xrightarrow{f} Y$$

$U\in Y$

$x\in X$ $\qquad$ $y\in U$ ← notranja točka

$f(x)=y$



Definicija: Funkcija f je zvezna, če je praslika vsake odprte množice odprta

Množica v X je odprta, če je element topologije $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$

$$(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$$

$$f^*(\mathcal{T}_Y) \subseteq \mathcal{T}_X$$

Trditev: (X, d) metrični prostor

Množica $U \subseteq X$ je odprta $\Leftrightarrow$ lahko jo predstavimo kot unijo odprtih krogov

Dokaz:

Vse točke U so notranje

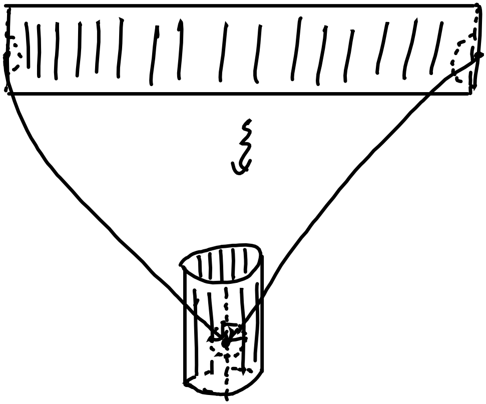
$\forall x \in U. \exists r > 0. K(x, r_x) \subseteq U$

$\Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} K(x, r_x)$

Presek odprtih krogel je odprt

$$\min\{r - d(x,a), r' d(x',a)\}$$

Posledično je presek odprtih množic odprt



$x, \; x-\frac{x^3}{6}, \; x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}, \; x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{7!}, \; \ldots \rightsquigarrow \sin x$

Topološki prostori

Naj bo X poljubna množica

Topologija na X je družina množic $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$,
ki zadošča naslednjim pogojem:

(T0): $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$

T1 : Poljubna unija elementov družine $\mathcal{T}$ je element družine $\mathcal{T}$

T2: Poljuben končni presek elementov $\mathcal{T}$ je jelement $\mathcal{T}$

Elemente $\mathcal{T}$ imenujemo odprte množice

Topološki prostor je množica X z neko topologijo X

Primeri:

- Topologija iz metrike:

  (X, d), $\mathcal{T}_d := \{$vse možne unije odprtih krogel$\}$

  T_2: $\bigcup_{\lambda} K(x_\lambda, r_\lambda) \cap \left(\bigcup_{\gamma} K(x_\gamma, r_\gamma)\right) =$

  $$\bigcup_{\lambda, \gamma} (K(x_\lambda, r_\lambda) \cap K(x_\gamma, r_\gamma))$$

  ni krogla, ampak je unija krogel

  $\mathcal{T}_d$ je topologija, ki je <u>inducirana</u> z metriko d

  $\mathcal{T}$ je <u>metrizabilna</u>, če je porojena z metriko

X, d

$\bar{d}(x, x') := \min\{d(x, x'), 1\}$

$\bar{d}$ je metrika

$\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\bar{d}}$

- X poljubna množica

$\mathcal{T}_{tri} := \{\emptyset, X\}$ je topologija

trivialna topologija

- $\mathcal{T}_{dis} := \mathcal{P}(X)$ vse podmnožice so odprte

diskretna topologija

metrizabilnost $\mathcal{T}_{triv}$, $\mathcal{T}_{dis}$?

$d(x,x')>0$

$\dot{x}$ $\dot{x}'$

$K(x, \frac{d(x,x')}{2}), K(x', \frac{d(x,x')}{2})$

disjunktni

$$d(x,x') = \begin{cases} 0 ; x = x' \\ 1 ; x \neq x' \end{cases}$$ diskretna metrika

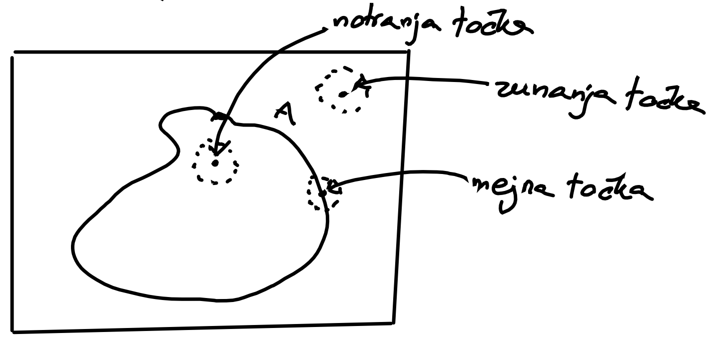
$K(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$

X, topologija je katerakoli

$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$, ki je zaprta za poljubne unije in za končne preseke

$(X, \mathcal{T})$

V metričnih prostorih:



notranjost A = {vse notranje točke}

zaprtje A = notranjost A $\cup$ meja A

A je zaprta, če so vse njene mejne točke elementi A

notranjost: $\operatorname{int}(A)$ $\mathring{A}$

- unija vseh odprtih množic, ki so vsebovane v A

$= \bigcup \{U \in \mathcal{T};\ U \subseteq A\}$ = največja odprta podmnožica A

v topološkem prostoru $(X, \mathcal{T})$ je

$\mathring{A} :=$ največji element $\mathcal{T}$, ki je vsebovan v A

A je zaprta, če je $X - A$ (A^c) $\in \mathcal{T}$

$Z :=$ družina vseh zaprtih množic

$\cup \{A : X - A \in \mathcal{T}\}$

Za Z velja

1) poljuben presek elementov Z je element Z

2) vsaka končna unija elementov Z je element Z

(Z je komplement topologije)

Primer:

- če zahtevamo, da so točke X zaprte množice

$\rightsquigarrow$ končne množice X so zaprte

$$\{A \in P(X);\ |A| < \infty\} \cup \{X\}$$

zadošča zahtevam (1), (2)

torej komplement so topologija na X

$$\mathcal{T} = \{A \in P(X);\ |X - A| < \infty\} \cup \{\emptyset\}$$

topologija končnih komplementov

$\mathcal{T}_{kk}$ ..... topologija končnih komplementov

če X končen $\rightsquigarrow$ $\mathcal{T}_{kk} = \mathcal{T}_{diskretna}$ na X

Zaprtje A := presek vseh zaprtih množic, ki vsebujejo A

= je najmanjša zaprta množica v X, ki vsebuje A

zaprtje A: $cl(A)$ $\bar{A}$

Primer:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$A \subseteq A \cup B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \overline{A \cup B}$

$B \subset A \cup B \Rightarrow \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ $\Longrightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

Jasno je da $A \cup B \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$

zaprta množica

$\overline{A \cup B}$ je najmanjša zaprta množica, torej

$\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$

$\overline{A \cap B} \overset{?}{\longleftrightarrow} \bar{A} \cap \bar{B}$ DN

Meja A : $\operatorname{Fr} A$ $\quad \operatorname{Cl}(A) - \operatorname{int} A$ $\quad \bar{A} - \mathring{A}$

Meja A je vedno zaprta množica

Zvezne preslikave

$(X, \mathcal{T}_X)$ $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologiji

$f: X \longrightarrow Y$ je zvezna če velja

$f^*(\mathcal{T}_Y) \subseteq \mathcal{T}_X$

torej če je praslika vsake odprte množice odprta.

Primer:

- vse zvezne funkcije v smislu metričnih prostorov so zvezne kot funkcije med porojenimi topologijami
- $f:(X,\mathcal{T}_X) \longrightarrow (X,\mathcal{T}_Y)$

  Recimo da $\mathcal{T}_Y$ je trivialna $\mathcal{T}_Y = \{\emptyset, Y\}$

  $\Rightarrow$ f je zvezna

  Recimo da je $\mathcal{T}_X$ diskretna $\Rightarrow$ f je zvezna

$id:(X,\mathcal{T}) \longrightarrow (X,\mathcal{T}')$

  id je zvezna $\Leftrightarrow \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$

- $f:(X,\mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{T}_Y)$ konstantna

  $f(x) = y$ za $\forall x \in X$

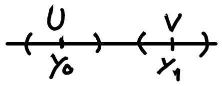
  f je zvezna

  $U \in \mathcal{T}_Y \quad f^*(U) = \begin{cases} X & ; y \in U \\ \emptyset & ; y \notin U \end{cases}$ oboje odprti

- $f:(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{kk}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{evkl})$

  konstante so edine zvezne funkcije

  $y_0, y_1 \in Z_f \quad y_0 \neq y_1$



  $f^*(U), f^*(V)$ sta odprti in disjunktni

  V topologiji končnih komplementov ni disjunktnih nepraznih odprtih množic

  $U, V \in \mathcal{T}_{kk}$ ... odprti, neprazni

  $|X-U| < \infty \quad |X-V| < \infty$

  $U^c \cup V^c$ je končna

  $\parallel$

  $(U \cap V)^c$ je končna

  $U \cap V$ je neprazen, če je X neskončen

Splošneje: X neskončna Y metričen, d

  $(X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_d)$

  edine zvezne funkcije so konstantne

$(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$

$C((X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y))$ .... množica zveznih preslikav

$\overset{\shortparallel}{C(X, Y)}$, $C(X) := C(X, \mathbb{R})$, kjer ma $\mathbb{R}$ $\mathcal{T}_{evk.}$

Prostor X = množica X z neko topologijo

preslikava = zvezna funkcija

zveznost: $f^*(\mathcal{Y}) \subseteq f^*(\mathcal{X})$

Trditev: kompozitum preslikav je preslikava
(zvezna funkcija)

Dokaz: $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{g} (Z, \mathcal{T}_Z)$

$\cancel{f \circ g}$ $g \circ f$

Naj bo $\sigma \subseteq Z$ odprta podmnožica

$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

$\underbrace{f^*(\underbrace{g^*(\sigma)}_{\text{odprta}})}_{\text{odprta}}$ torej $f^*(g^*(\sigma)) \in \mathcal{T}_X$

Trditev:

ekvivalentne izjave: $f : X \to Y$

(1) $\Leftrightarrow$ f je zvezna (praslike odprtih množic so odprte)

(2) $\Leftrightarrow$ praslika f vsake zaprte množice je zaprta

(3) $\Leftrightarrow$ $\overline{f_*(A)} \subseteq f_*(\bar{A})$

Dokaz:

(1) $\Leftrightarrow$ (2)

$A \subseteq Y$

$f^*(A^c) = f^*(A)^c$

A zaprta $\Rightarrow$ A^c odprta $\Rightarrow$ $f^*(A)^c$ odprta $\Rightarrow$ $f^*(A)$ zaprta

(2) $\Leftrightarrow$ (3)

$f^* f_*(A) \supseteq A$

$f_* f^*(B) \subseteq B$

($\Rightarrow$) $\underbrace{f^*(\overline{f_*(A)})}_{\text{zaprta}} \supseteq f^*(f_*(A)) \supseteq A$

zaprto po 2)

A je vsebovana v zaprti množici, potem je tudi $\bar{A}$ vsebovana tam

$f^*(\overline{f_*(A)}) \supseteq \bar{A}$

$\overline{f_*(A)} \supseteq f_*(\bar{A})$

($\Leftarrow$) B zap na Y

$f^*(B)$ je zaprto tj $f^*(B) = \overline{f^*(B)}$

$f_*(\overline{f^*(B)}) \subseteq \overline{f_*(f^*(B))} \subseteq \bar{B} = B$

$\overline{f^*(B)} \subseteq f^*(B) \Rightarrow \overline{f^*(B)} = f^*(B)$

ker je zaprtje kvečjemu večje ali enako

$\blacksquare$

Homeomorfizmi

$f:(X,\mathcal{T}_X) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow (Y,\mathcal{T}_Y)$ je <u>homeomorfizem</u>,

če je f bijekcija in f_* je bijekcija med topologijama

$$f_*:\mathcal{P}(X) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{P}(Y)$$

$$f^*:\mathcal{P}(Y) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{P}(X)$$ sta si inverzni

$f_*(\mathcal{T}_X) \subseteq f_*(\mathcal{T}_Y)$ $\leftarrow$ f^{-1} zvezna

$f^*(\mathcal{T}_X) \subseteq f^*(\mathcal{T}_Y)$ $\leftarrow$ zveznost f

Trditev: Za $f:(X,\mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{T}_Y)$ so ekvivalentne trditve:

1) f je homeomorfizem
2) f je bijekcija, f, f^{-1} sta zvezni
3) f je bijektivna, zvezna in <u>odprta</u>
(slika $\forall$ odprte množice je odprta
($f_*(\mathcal{T}_X) \subseteq f_*(\mathcal{T}_Y)$)
4) f je bijektivna, zvezna in zaprta
(zaprte množice slika v zaprte)

∎

Primeri:

$$[0,1) \cup \{2\} \longrightarrow [0,1]$$

$$x \longmapsto x \quad ; x \in (0,1)$$

$$2 \longmapsto 1 \quad ; x = 2$$

zvezna, bijektivna

inverz ni zvezen

Nekatere zvezne funkcije so avtomatično (kot posledica zveznosti) zaprte oziroma odprte.

Primeri

$f^{zv}: X^{komp} \longrightarrow Y^{metr.}$ je vedno zaprta

projekcije $X \times Y \longrightarrow X$ je vedno odprta

$p: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gladke z neničelnim odvodom so vedno odprte če obstaja homeomorfizem

$$f: (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$$

X in Y sta <u>homeomorfna</u> $X \approx Y$

Homeomorfnost je ekvivalenčna relacija

Primeri:

$[a,b] \approx [c,d]$
$a<b \qquad c<d$

$f: [0,1] \longrightarrow [a,b]$

$f(x) = a + (b-a)x$

bijektivna, zvezna, inverz je zvezen

$(a,b] \approx (0,1] \approx [0,1)$

vsak končen interval je homeomorfen enemu izmed naslednjih

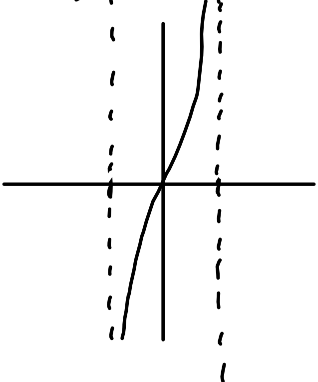
$[0,1] \quad [0,1) \quad (0,1) \approx \mathbb{R}$

$[0,1) \approx [a,\infty)$

$f: (-1,1) \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x}{1-|x|}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|}$$



<u>Topološka lastnost</u> je katera koli:

lastnost prostora, ki se ohranja pri homeomorfizmih

(M,d) $\bar{d}(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$

omejenost, polnost nista topološki lastnosti

$B^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n ; \|\vec{x}\| \leq 1\}$

enotska n-krogla

$\mathring{B}^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n ; \|\vec{x}\| < 1\}$ odprta enotska n-krogla

$S^{n-1} : \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n ; \|\vec{x}\| = 1$

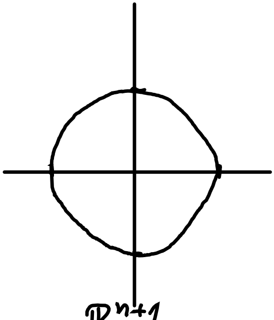
(n-1) enotska sfera

Lokalno v okolici vsake točke zgleda kot $\mathbb{R}^{n-1}$ ravnine

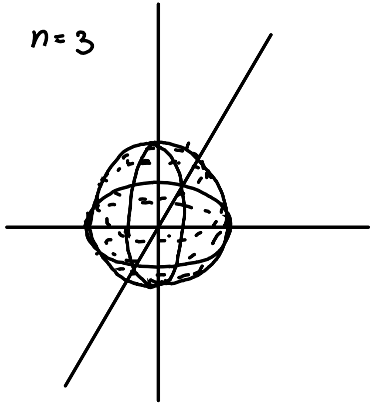
$$f : \mathring{B}^n \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n$$

$$f(x) = \frac{\vec{x}}{1 - \|\vec{x}\|} \quad ; \text{inverz } f^{-1}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{1 + \|\vec{x}\|}$$

$n=2$



$n=3$

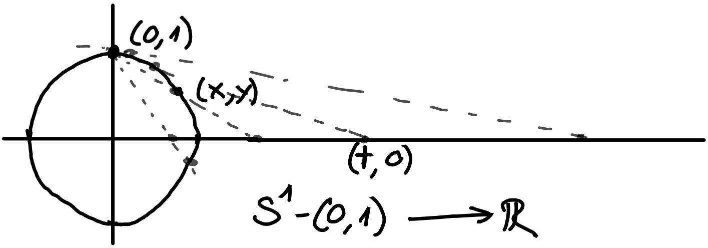


$\mathbb{R}^{n+1}$

$\cup\!|$

ena točka

$S^n - \{tč\} \approx \mathbb{R}^n$



$$S^1 - (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$(0,1)$ (x,y) $(t,0)$ ležijo na isti premici

$$t = \frac{x}{1-y}$$

$$f^{-1}(t) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1} \right)$$

$$f : S^n - \{(0, \dots, 0, 1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_1 \dots \dots x_{n+1}) \longmapsto \frac{x_1 + \dots + x_n}{1 - x_{n+1}}$$

$$f : (\underset{\in \mathbb{R}^n}{\vec{x}}, x_{n+1}) \longmapsto \frac{\vec{x}}{1 - x_{n+1}}$$

$$f^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n - \{(\vec{0}, 1)\}$$

$$\vec{x} \longmapsto \left(\frac{2\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2+1}, \frac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1} \right)$$

Taki prostori so $\overset{S^n}{\text{n-razsežne}}$ mnogoterosti

Baze in predbaze

$(X, \mathcal{T})$

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ je baza $\mathcal{T}$, če lahko vse elemente $\mathcal{T}$ lahko zapišemo kot unije elementov $\mathcal{B}$

Standardni primer

V metričnem prostoru (X, d) so krogle baza

Dovolj je če vzamemo samo majhne krogle (npr z radijem $\frac{1}{n}$)

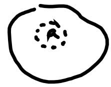
$(X, \mathcal{T}_{dis})$ vsaka baza vsebuje vse enojčke

Trditev

$(X, \mathcal{T}_X)$ in $\mathcal{B}_X$ baza $\mathcal{T}_X$

$(Y, \mathcal{T}_Y)$ in $\mathcal{B}_Y$ baza $\mathcal{T}_Y$

1) $A \subseteq X$ je odprta $\Leftrightarrow$
$\forall a \in A. \exists B \in \mathcal{B}_X.\ a \in B \subseteq A$



2). $f: X \longrightarrow Y$ naj bo poljubna funkcija.

f je zvezna $\Leftrightarrow f^*(\mathcal{B}_Y) \subseteq \mathcal{T}_X$

f je odprta $\Leftrightarrow f_*(\mathcal{B}_X) \subseteq \mathcal{T}_Y$

Dokaz 2)

$(\Longrightarrow)$ ✓

$(\Longleftarrow)$ Naj bo $U \in \mathcal{T}_Y$

$U = \bigcup_\lambda B_\lambda \quad ; B_\lambda \in \mathcal{B}_Y$

$f^*(U) = f^*\left(\bigcup_\lambda B_\lambda\right) = \bigcup_\lambda \underbrace{f^*(B_\lambda)}_{\in \mathcal{T}_X} \in \mathcal{T}_X$

$U \in \mathcal{T}_X \quad U = \bigcup_\lambda B_\lambda \quad B_\lambda \in \mathcal{B}_X$

$f_*(U) = f_*\left(\bigcup_\lambda B_\lambda\right) = \bigcup_\lambda \underbrace{f_*(B_\lambda)}_{\in \mathcal{T}_Y} \in \mathcal{T}_Y$

$\blacksquare$

Primer:

$f: S^1 \longrightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C}$ (enotska kompleksna števila)

$f(z) = z^2$

f je odprta

Lahko preslikamo okolico vsake točke

$x \in X$, $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{J}$ je lokalna baza okolice X, če za $\forall$ odprto okolico U, ki vsebuje x $\exists B \in \mathcal{B}_x . x \in B_x \subseteq U$

običajno privzamemo, da so elementi $\mathcal{B}$ okolica X

Če je $\mathcal{B}$ baza $\mathcal{J}$, potem je $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} ; x \in B\}$ je lokalna baza okolice x. Obratno $\mathcal{B} := \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$

Standardni primer v (X, d) je

$\{K(x,r) ; r \in \mathbb{R}\}$ lokalna baza pri X

$\mathcal{B}$ $\quad \mathcal{T} = \{$unije elementov $\mathcal{B}\}$

Ali je $\mathcal{T}$ topologija?

$\mathcal{T}$ je očitno zaprta za poljubne unije

$U, V \in \mathcal{T}$ $\quad U \cap V = (\bigcup B_\lambda) \cap (\bigcup B'_\mu) =$

$U \to \bigcup_\lambda B_\lambda \quad B_\lambda \in \mathcal{B}$

$V \to \bigcup_\mu B'_\mu \quad B'_\mu \in \mathcal{B}$

$= \bigcup_{\lambda,\mu} \underbrace{B_\lambda \cap B'_\mu}_{\text{presek dveh elementov}}$

če družina $\mathcal{B}$ vsebuje končne preseke, potem tudi $\mathcal{T}$ vsebuje končne preseke, je $\mathcal{T}$ topologija

prestrog pogoj. Zadošča če je vsak končen presek elementov $\mathcal{B}$ unija elementov $\mathcal{B}$

Trditev:

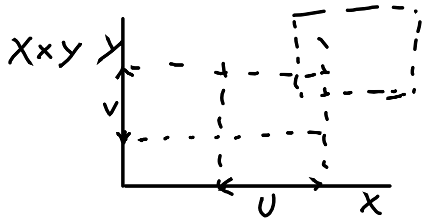
$\mathcal{B}$ je družina podmnožic X

$\mathcal{T} := \{\text{unija elementov } \mathcal{B}\}$

Potem

$$\mathcal{T} \text{ je topologija na } X \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \mathcal{B} \text{ je pokritje } X \\ 2)\ \text{za poljubna} \\ \quad A, A'' \in \mathcal{B} \\ \quad x \in A \cap A'' \\ \quad \exists A''.\ x \in A'' \subseteq A \cap A' \end{cases}$$

$(X, \mathcal{T}_X) \quad (Y, \mathcal{T}_Y)$



$\mathcal{T}_{X\times Y}$ produktna topologija je topologija, ki je generirana z bazo elementov $U \times V$ kjer $U \in \mathcal{T}_X$ $V \in \mathcal{T}_Y$

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$$

ustreza pogoju za bazo

$$
\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "pr_X"] \arrow[dr, "pr_Y"'] & X \quad \mathcal{T}_X \\
& Y \quad \mathcal{T}_Y
\end{tikzcd}
$$

Projekciji sta zvezni

$U \in \mathcal{T}_X$

$pr^{-1}(U) = U \times Y \in \mathcal{T}_{X \times Y}$

Projekciji sta odprti.

$pr_X(U \times V) = U$

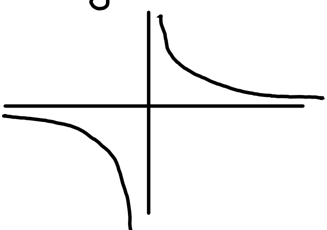
Zato so projekcije odprte

Ali so zaprte?

$pr_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

A je zaprta

$A :=$ graf $f(x) = \frac{1}{x}$



$pr_1 A = \mathbb{R} - \{0\}$
ni zaprta

Naj bo $\mathcal{P}$ poljubna družina podmnožic X. Kaj je najmanjša topologija na X, ki vsebuje $\mathcal{P}$

Družina vseh končnih presekov elementov $\mathcal{P}$ ustreza pogoju 2 iz trditve

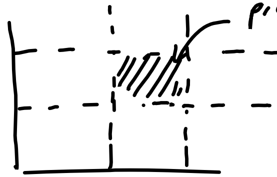
Če je $\mathcal{P}$ pokritje X, potem je $\mathcal{T}$ topologija, ki jo kot baza generira vse končne preseke elementov $\mathcal{P}$

Pravimo, da je $\mathcal{P}$ predbaza topologije $\mathcal{T}$

Primer:

Produktna topologija na $X \times Y$ je najmanjša topologija, za katero sta projekciji pr_X in pr_Y zvezni

$$P = \{pr_X^*(U) \quad U \in \mathcal{T}_X, \quad pr_Y^*(V) \quad V \in \mathcal{T}_Y\}$$



To je definicija produktne topologije za produkte poljubno mnogo faktorjev

Trditev:

$(X, \mathcal{T}_X)$ $\quad (Y, \mathcal{T}_Y)$

$\mathcal{P}$ naj bo neka predbaza za $\mathcal{T}_Y$

$f: X \longrightarrow Y$ je zvezna $\Longleftrightarrow f^*(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{T}_X$

Dokaz:

$\Rightarrow$

$\Leftarrow \quad f^*\left(\bigcap_{1}^{n} \mathcal{P}_i\right) = \bigcap_{1}^{n} f^*(\mathcal{P}_i) \in \mathcal{T}_X$

$\blacksquare$

Pozor: tako ne moramo testirati odprtosti preslikav

Trditev:

X, Y, Z prostori

$f: X \to Y \times Z$ je zvezna $\Leftrightarrow$

$\hookrightarrow (f_Y, f_Z)$

f_Y, f_Z sta zvezni

tj. funkcija v produkt je zvezna $\Leftrightarrow$

njene komponente so zvezne

Dokaz:

$(\Rightarrow)$ $f_Y = pr_Y \circ f$

$f_Z = pr_Z \circ f$ kompozitum zveznih funkcij

$(\Leftarrow)$ Po prejšnji trditvi je dovolj pogledati

$f^*(P)$ $(P = U \times Z \cup Y \times V)$

$f^*(U \times Z) = \{x \in X \mid f(x) \in U \times Z\} =$

$= \{x \in X \mid (f_Y(x), f_Z(x)) \in U \times Z\} =$

$= \{x \in X \mid f_Y(x) \in U\} = f_Y^*(U)$

$f^*(Y \times V) = f_Z^*(V)$

$\blacksquare$

Baze in predbaze

1. aksiom števnosti:

   $\mathcal{T}$ ima števne lokalne baze

   Za $\forall x \in X$. $\exists$ družina okolic x $U_1, U_2, \ldots$

   (števno) $\forall U \ni x$. $\exists x \in U_n \subseteq U$

   $(X, \mathcal{T})$ je 1-števen — definicija

2. aksiom števnosti:

   $\mathcal{T}$ ima števno bazo

   $(X, \mathcal{T})$ je 2-števen

ni aksiom ampak v resnici def

Primeri:

- $(X, \mathcal{T})$ ima lahko tudi končno bazo
  Sled: $\mathcal{T}$ je končna
- obratno če je X končna $\Rightarrow \mathcal{T}$ končna
  $\Rightarrow$ in avtomatično 1,2-števna
- metrični prostori so 1-števni
  x, $\{K(x, \frac{1}{n})\}$
- neštevna množica z diskretno topologijo je 1-števna, ampak ne morebiti 2-števna

Jasno 2-števnost $\Rightarrow$ 1-števnost

Trditev: $(X,\mathcal{T})$ je 1-števen:

1) $\forall A \subseteq X$ je $\bar{A} = L(A) = \{x ;\ x$ je limita zaporedja v $A\}$

2) $f : (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ je zvezna $\Leftrightarrow f(L_X(A)) \subseteq L(f_*(A))$

Dokaz: $A \subseteq L(A) \subseteq \bar{A}$

$\bar{A} \subseteq L(A)$

$x \in \bar{A}$ $\quad U_1, U_2, \ldots$ števna baza okoli za x

Vzamemo $x_1 \in U_1 \cap A$, $x_2 \in U_2 \cap A, \ldots$

2) DN

$\blacksquare$

Primer:

$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{evkl})$ je 2-števna

$\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$ je števna in

Definicija

$(X,\mathcal{T})$ je separabilen če v X obstaja števna gosta podmnožica

$\mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n$

separabilnost + 1-števnost $\overset{?}{\Longrightarrow}$ 2-števnost

NE :(

Očitno: 2-števnost implicira separabilnost

Trditev:

V metričnih prostorih je separabilnost ekvivalentna 2-števnosti

Dokaz:

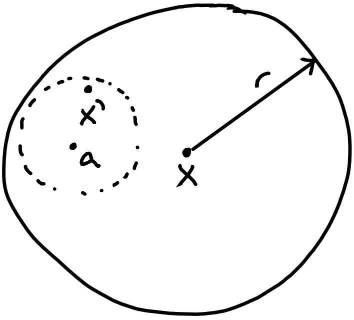
Separabilnost + metričnost implicira 2-števnost

A naj bo števno gosta

$\{K(a,r)\,;\, a \in A,\ r \in \mathbb{Q}\}$ je baza

Dovolj je dokazati, da je vsaka krogla unija krogel.

$K(x,r)$ je poljubna krogla



$$\delta = \frac{r - d(x,x')}{3}$$

Izberemo $a \in A$, da je

$$d(x',a) < \frac{r-d(x,x')}{3}$$

Izberemo racionalno št $g \in \mathbb{Q}$

$$\delta < g < 2\delta$$

$$x' \in (a,g) \subseteq K(x,r)$$

Primer:

$C([0,1])$

Weierstrasov izrek: $\forall$ zvezno funkcijo lahko enakomerno aproksimiramo s polinomi.

Vsak polinom lahko enakomerno aproksimiramo z racionalnim polinomom.

Torej $C([0,1])$ je separabilen (in metričen) sledi da je 2-števen

Podprostori

$(X, \mathcal{T})$ $A \subseteq X$

$$\mathcal{T}_A := \{ A \cap U \,;\, U \in \mathcal{T} \}$$

$\mathcal{T}_A$ je topologija na A

T1) $U_\lambda \in \mathcal{T}_A$ $\quad U_\lambda = U_\lambda' \cap A \quad U_\lambda' \in \mathcal{T}$

$$\bigcup U_\lambda = \bigcup (U_\lambda' \cap A) = \underbrace{\left(\bigcup U_\lambda'\right)}_{\in \mathcal{T}} \cap A \in \mathcal{T}_A$$

T2) Na isti nacin

$\mathcal{T}_A$ je inducirana/podedovana topologija na A in $(A, \mathcal{T}_A)$ je podprostor $(X, \mathcal{T})$

Primeri:

- evklidska topologija na $\mathbb{R}$ je induciranа z evklidsko topologijo na $\mathbb{R}^2$

- d metrika na X $\quad A \subseteq X$

$$\begin{array}{ccccc} (X,d) & \rightsquigarrow & (X, \mathcal{T}_d) & \rightsquigarrow & (A, (\mathcal{T}_d)_A) \\ \downarrow & & & & \parallel \\ (A, d_A) & \rightsquigarrow & (A, \mathcal{T}_{(d_A)}) & & \end{array}$$

$$B \subseteq A \subseteq (X, \mathcal{T})$$
$$\mathcal{T}_B = (\mathcal{T}_A)_B$$

- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{evk})$

$\cup$

$\mathbb{N}$ $\quad$ inducirana topologija je diskretna

Trditev: zaprte množice v $\mathcal{T}_A$ so preseki A z zaprtimi podmnožicami v X

Dokaz:

F zaprta v $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow F \cap A$ je zaprta v $(A, \mathcal{T}_A)$

$$F = X - U;\ U \in \mathcal{T} \Rightarrow F \cap A = (X - U) \cap A = A - \underbrace{U \cap A}_{\in \mathcal{T}_A}$$

$\Leftarrow$ B je zaprta v $(A, \mathcal{T}_A)$

$$B = A - \underbrace{U \cap A}_{\in \mathcal{T}_A} = A \cap \underbrace{(X - U)}_{\text{zaprt}}$$

$\mathcal{B}$ je baza za $\mathcal{T}$

$\mathcal{B}_A = \{A \cap U \; : U \in \mathcal{B}\}$ je baza A

$(X,\mathcal{T})$ 1,2-števen $\Rightarrow$ $(A,\mathcal{T})$ je 1,2-števen$\big) \big\}$

Topološka lastnost je dedna, če iz tega da ima $(X,\mathcal{T})$ lastnost sledi: da jo imajo vsi podprostori

Diskretnost in trivialnost topologije so dedne

Separabilnost ni dedna

Odprt podprostor separabilnega prostora je separabilen trdAte: $X \supseteq A \supseteq B$

$$Cl_A B = Cl_X B \cap A$$

$$Int_A B \supseteq Int_X B \cap A$$

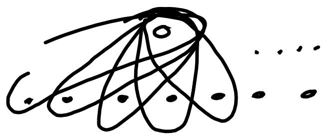
$$Fr_A B \subseteq Fr_X B \cap A$$

z^{zz}

VIDA SPI

Separabilnost ni dedna

neštevna množica z diskr. topologijo



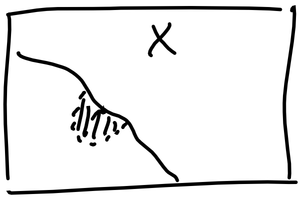
X neštevna $a \in X$ $\mathcal{T} := \{U \subseteq X ; a \in U\} \cup \{\emptyset\}$

očitno: $\{a\}$ je gosta v X

Topologija ki jo $\mathcal{T}$ inducira na

$X - \{a\}$ je diskretna ki ni:

(če bi bil števen bi bila cela množica gosta števna v množici)



A

$B = A \cap U$ ← odp v X

$A^{odp} \subseteq X \wedge B^{odp} \subseteq A \Rightarrow B^{odp} \subseteq X$

$A^{zap} \subseteq X \wedge B^{zap} \subseteq A \Rightarrow B^{zap} \subseteq X$

$B = A \cap F \quad F^{zap} \subseteq X$

inkluzija

$(A, \mathcal{T}_A) \xhookrightarrow{i} (X, \mathcal{T}) \xrightarrow{f \text{ zvezna}} (Y, \mathcal{T}')$

zveznost i $\Leftrightarrow$ $i^*(U) \quad U \in \mathcal{T}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \| $

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad U \cap A \in \mathcal{T}_A$

inkluzija je zvezna

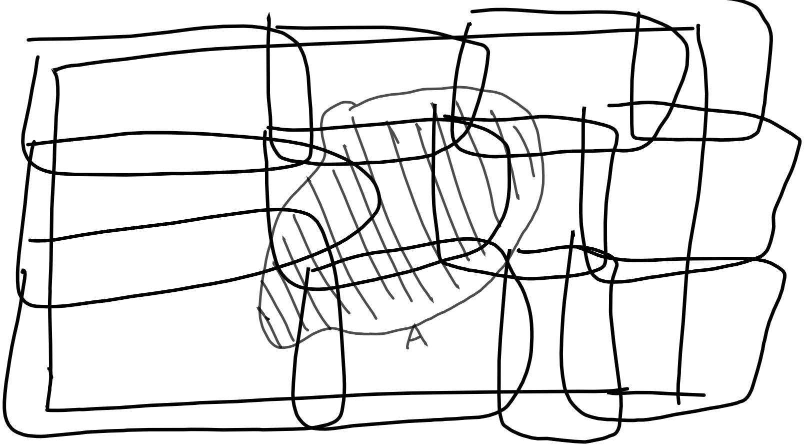
$\mathcal{T}_A$ je najmanjša topologija na A za katero je inkluzija zvezna

$f \circ i$ zvezna

$\|$

$f|_A$ zožitev f na A

Zožitev zvezne funkcije je zvezna



Trditev:

a) $\{X_\lambda\}$ odprto pokritje X

$A \subseteq X$, $A \cap X_\lambda$ odp za $\forall \lambda \Leftrightarrow A$ odp v X

b) $\{X_\lambda\}$ zaprto in lokalno končno pokritje X

$A \subseteq X \wedge A \cap X_\lambda$ zap za $\forall \lambda \Leftrightarrow A$ zap v X

lokalno končno pokritje:

$\forall x \in X \ \exists U^{odp} \ni x$, $X_\lambda \cap U \neq \emptyset$ za končno mnogo indeksov λ

Dokaz:

a) $\Rightarrow$ $A = \bigcup_\lambda X_\lambda \cap A$ je unija odprtih množic

torej je A odprta

b) $X - A$ je odprta

$x \in A$. $\exists U \ni x$ ki seka končno mnogo X_λ

$X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n} \rightsquigarrow$

$U - \underbrace{X_{\lambda_1} \cap A}_{zap} - \underbrace{X_{\lambda_2} \cap A}_{zap} - \dots$ je odprta

okolica X, ki ne seka A torej $A^{zap} \subseteq X$

Izrek

$\{X_\lambda\}$ pokritje X, ki je bodisi odprto ali lokalno končno zaprto

$f: X \to Y$ je zvezna $\Leftrightarrow$ $f|_{X_\lambda}$ zvezna za $\forall\lambda$

Alternativno

$\{f_\lambda : X_\lambda \to Y\}$ zvezne in usklajene na presekih ($f_\lambda|_{X_\lambda \cap X_{\lambda'}} = f_{\lambda'}|_{X_\lambda \cap X_{\lambda'}}$ za poljuben λ, λ')

Potem obstaja natanko ena preslikava

$f: X \to Y$ da $f|_{X_\lambda} = f_\lambda$

Dokaz: $f_\lambda / X_\lambda \cap X_{\lambda'} = f_{\lambda'} / X_\lambda \cap X_{\lambda'}$

zagotavlja da je $f: X \to Y$ enolično definirana s $f(x) := f_\lambda(x)$ za $x \in X_\lambda$

f je zvezna

Če imam odprto pokritje, potem

$U \overset{odp}{\subseteq} Y$ $f^*(U) = \bigcup_\lambda f^*(U) \cap X_\lambda =$

$= \bigcup_\lambda (f|_{X_\lambda})^*(U)$

$\uparrow$

zvezna

$\underbrace{\quad}$ odp v $X_\lambda \Rightarrow$ odp v X

$\underbrace{\quad}$ $\Rightarrow$ odprta v X

$\{X_\lambda\}$ zaprto: $F \overset{zap}{\subseteq} Y$

$f^*(F) \cap X_\lambda = (f|_{X_\lambda})^*(F)$

↳ zaprta

↳ zvezna

$\underbrace{\quad}$ zaprta

uporabimo točko b

$f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$

$f(n) := n$ ← vložena

$g(n) = \begin{cases} 0 & ; n = 0 \\ \frac{1}{n} & ; n \neq 0 \end{cases}$ ← ni vložena

$f : (X, \mathcal{J}) \to (Y, \mathcal{J}')$ je vložitev, če je

$f : (X, \mathcal{J}) \to (f(X), \mathcal{J}_{f(X)})$ homeomorfizem

potrebni pogoj: f je zvezna injekcija

pogoj ni zadosten:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

zvezna injekcija, ki ni vložitev

Trditev: $f: X \to Y$ zvezna injekcija

a) $f_*(X)$ odp v $Y \Rightarrow$

f je vložitev $\Longleftrightarrow$ $f: X \to Y$ odprta
(odprta vložitev)

b) $f_*(X)$ zap v $Y \Rightarrow$

f je vložitev $\Longleftrightarrow$ $f: X \to Y$ zaprta
(zaprta vložitev)

Topološke lastnosti

- Zaporedje v $\mathbb{R}^n$ ima največ eno limito

Hausdoffova lastnost

- vsako omejeno zaporedje v $\mathbb{R}^n$ ima konvergentno podzaporedje (Bolzano-Weistrassov izrek); v ozadju je dejstvo, da je vsaka omejena podmnožica v $\mathbb{R}^n$ vsebovana v kompaktni

- (Bolzanov izrek o vmesni vrednosti)

  $f^{zv}: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(a) \cdot f(b) < 0$

  $\Rightarrow$ f ima ničlo

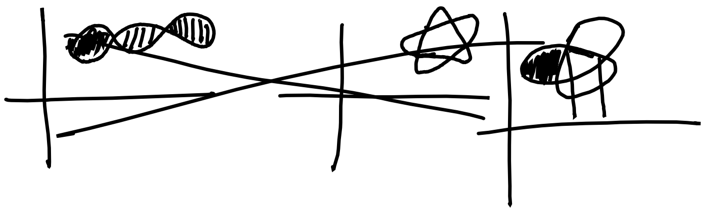
  je posledica povezanosti intervala $[a,b]$

- Cantorjev izrek (princip sendviča)

  Presek padajočega zaporedja zaprtih intervalov je neprazen

(Baireov izrek)

Metrični prostor, ki je števen in brez izoliranih točk ne more biti poln



Topološke lastnosti

- ločljivost
- povezanost
- kompaktnost
- Hausdorffova lastnost ($\mathcal{T}$ ostro loči različne točke)

  $(\exists U, V \in \mathcal{T} : U \ni x, V \ni y . \ U \cap V = \emptyset$

$\mathcal{T}$ ostro loči A in B, če $\exists U, V \in \mathcal{T}$

$$A \subseteq U, B \subseteq V \quad U \cap V = \emptyset$$

$\mathcal{T}$ loči A in B če

$$A \subseteq U \quad B \subseteq V$$

$$U \cap B = \emptyset \ \wedge \ A \cap V = \emptyset$$

- trivialna: ne loči
- diskretna: ostro loči dve disjunktni množici

- $A \rightsquigarrow \bar{A}$ točke, ki jih $\mathcal{T}$ ne loči od A

Primer: vsi metrični prostori so Hausdorffovi

Jkk na neskončni množici X odprte množice se vedno sekajo

Trditev: Ekvivalentne so naslednje izjave

(1) X je Hausdorffov

(2) $x \neq y \Rightarrow \exists U^{odp} \ni x \,.\, y \notin \overline{U}$

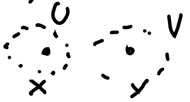
(ekvivalentno $\bigcap_{x \in U} \overline{U} = \{x\}$)

(3) $\Delta_X : \{(x,x) \in X \times X\}$ je zaprta v $X \times X$

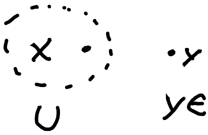
diagonala v produktu X

Dokaz

$(1) \Leftrightarrow (2)$

$(\Rightarrow)$ 

$\rightsquigarrow y$ ni v zaprtju U

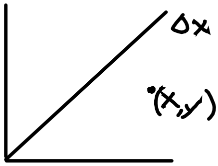
$\Leftarrow$ 

$y \in \overline{U}$

$\overline{U}^c$ je okolica y

$U \cap \overline{U}^c = \emptyset$

$(1) \Leftrightarrow (3)$



$\Rightarrow$ $(x,y) \notin \Delta_X \Rightarrow x \neq y \Rightarrow \exists U, V \,.\, U \cap V \neq \emptyset$

$U \times V \ni (x,y)$ in neseka diagonale

$\Leftarrow$ $x \neq y \Rightarrow (x,y) \notin \Delta_X \Rightarrow \exists$ bazična škatlasta okolica $U \times V$, ki vsebuje (x,y) in neseka diagonale

$x \in U \quad y \in V \quad U \cap V = \emptyset$

Izrek: Naj bo Y Hausdorffov

(1) Končne množice Y so zaprte
($\Leftrightarrow$ točke so zaprte

(2) Zaporedje v Y ima največ eno limito

(3) $f,g : X \longrightarrow Y$ zvezni:

$\{x\in X;\ f(x)=g(x)\}$ je zaprta v X

(4) $f,g : X \xrightarrow{\text{zvezno}} Y \quad A \overset{\text{gosta}}{\subseteq} X$

$$f|_A = g|_A \Rightarrow f = g$$

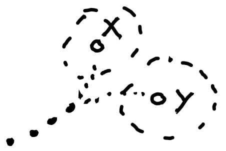
(5) graf preslikave $f : X \xrightarrow{(\text{zvez})} Y$ je
zaprta podmnožica v $X\times Y$

(vedno mišljeno zvezno če ne reče drugače

Dokaz:

(1) $\forall y \neq x.\ \exists U.\ y\in U \wedge x\notin U$

(2)



(3) $X \xrightarrow{(f,g)^{zv}} Y\times Y \quad \{x;\ f(x)=g(x)\} =$

$= (f,g)^*(\Delta_Y)$

zaprt

zvezna praslika zaprte je zaprta

(4)

$f|_A = g|_A \Leftrightarrow f|_{\bar A} \overset{=}{} g|_{\bar A} \Leftrightarrow f = g$

$\bar A = X$

(5) $\Gamma_f = \{ (x,y)\in X\times Y;\ f(x) = y\}$

graf je množica ujemanja za

funkciji $f\circ pr_X$ in pr_Y

$X\times Y \to Y$

in je zaprta po točki 3

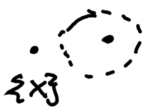
X je Fréchetov, če topologija loči različne točke

Primeri:

- Hausdorffov $\Rightarrow$ Fréchetov
- trivialni prostori niso Frechetovi

Trditev: X je Frechetov $\Leftrightarrow$ enojci so zaprti ($\mathcal{J}$ je Frechejeva $\Leftrightarrow$ $\mathcal{J}_{kk} \subseteq \mathcal{J}$

Dokaz: $\Rightarrow$



$\Leftarrow$ $\quad y \in X - \{x\}$ je odp

$x \in X - \{y\}$ je odp

∎

Trditev: Hausdorffova in Fréchetova lastnost sta dedni in multiplikativni (ohranjata se pri produktih (X, Y imata lastnost $\Rightarrow X \times Y$ ima lastnost))

Dokaz

<u>Hausdorffova je dedna</u>

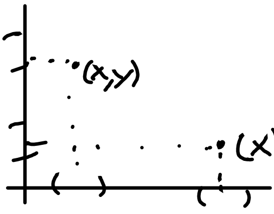
$A \subseteq X$

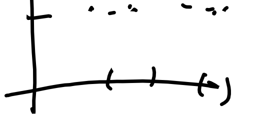
$a \neq b \quad a, b \in X$

$\exists U, V$ odp v X: $a \in U, b \in V \wedge U \cap V = \emptyset$

$\rightsquigarrow (A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$

<u>Hausdorffova je multiplikativna</u>





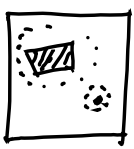
$U \times V \cap U' \times V' = \emptyset$ deluje tudi če $x = x'$ ali $y = y'$

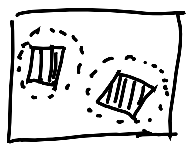
Za Fréchetovo lastnost enako, samo spustimo strogost

X je regularen topološki prostor, če je Fréchetov in topologija ostro loči točke od zaprtih množic

da so točke zaprte

X je normalen, če je Frechetov in topologija močno loči (disjunktne) zaprte množice





Normalnost $\Rightarrow$ regularnost $\Rightarrow$ Hausdorfova lastnost $\Rightarrow$ Frechtetova lastnost

Primer

- $\mathcal{T}$ je Hausdorffova, $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T} \Rightarrow$
  $\mathcal{T}'$ je Hausdorffova

  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{evk})$

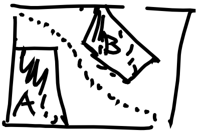
  $\mathcal{T}'$ naj bo najmanjša, da $\mathcal{T}_{evk} \subseteq \mathcal{T}'$
  in $\mathbb{Q} \in \mathcal{T}'$

  $\mathcal{T}'$ je Hausdorffova, vendar točke
  0 ne moremo ostro ločiti od
  $\mathbb{Q}^c$ (zaprta množica)

Ker je $\mathbb{R}$ edina odprta množica, ki
vsebuje $\mathbb{Q}$

Trditev: Vsak metrični prostor je normalen

Dokaz: Frecheteva lastnost ✓



$U := \{x \in X ; d(x,A) < d(x,B)\}$

$V := \{x \in X ; d(x,A) > d(x,B)\}$

$A \subseteq U \quad B \subseteq V$

$U \cap V = \emptyset$

U in V odprti

- $x \in U$

$d(x,A) < d(x,B)$

$r = \frac{d(x,B) - d(x,a)}{2}$

$K(x,r) \subseteq U$

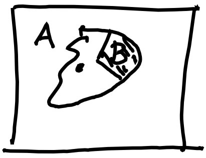
Trditev:

1) X je regularen $A \subseteq X \Rightarrow A$ regularen
(regularnost je dedna)

2) X normalen $A^{zap} \subseteq X \Rightarrow A$ je normalen

Dokaz:

1)



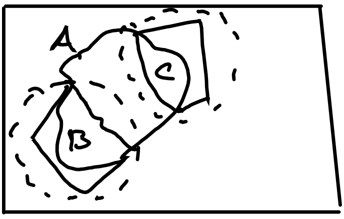
$\exists B'^{\,zap} \in X.\ B = A \cap B'$

$\exists U$ in V odp v X

$U \ni x$ $\quad V \supseteq B'$

$A \cap U$ in $A \cap V$ ostra ločita x in B'

2)



Ampak B' in C' se lahko sekata :(

A zap $\Rightarrow B, C$ zap v $A \Rightarrow B, C$ zap v X

BU

T_0. $\forall x, y_{x \neq y}\ \exists U \in \mathcal{J}.\ x \in U \land y \notin U$ (Kolmogorov)

T_1: $\forall x, y \in X_{x \neq y}.\ \exists U, V \in \mathcal{J}\ x \in U \land x \notin V \land y \in V \land y \notin U$ (Fréchetova lastnost)

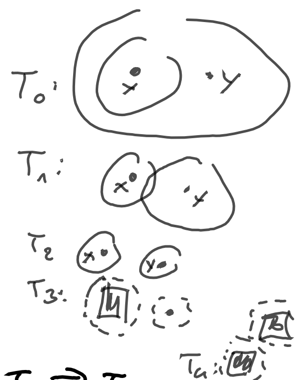
T_2: $\forall x, y_{x \neq y} \in X\ \exists U, V \in \mathcal{J}.\ x \in U, y \in V\ \ U \cap V = \emptyset$

T_3: $\forall x \in X, A^{zap}, x \notin A.\ \exists U, V.\ x \in U, A \subseteq V.\ U \cap V = \emptyset$

T_4 $\forall A^{zap}, B^{zap} \subseteq X.\ A \cap B = \emptyset.\ \exists U, V \in \mathcal{J}.\ A \subseteq U, B \subseteq V.\ U \cap V = \emptyset$

regularnost ($T_3 + T_1$)

normalnost ($T_4 + T_1$



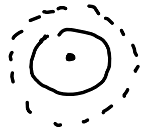
$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$

$T_4 + T_1 \Rightarrow T_3 + T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$

od tedaj dalje so prostori vedno T_2

Trditev:

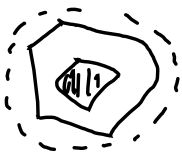
Prostor $(X,\mathcal{T})$ je T_3 $\Longleftrightarrow$



$\forall x \in U \in \mathcal{T}.\ \exists V \in \mathcal{T}.\ x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$

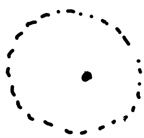
Prostor $(X,\mathcal{T})$ je T_4 $\Longleftrightarrow$

$\forall A^{zap} \subseteq U \in \mathcal{T}.\ \exists V \in \mathcal{T}.\ A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$



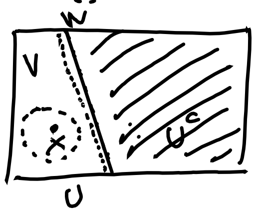
Dokaz

$\Rightarrow$



Uporabimo definicijo T_3 na x, U^c

$\exists V, W.\ x \in W, A \subseteq V \quad W \cap V = \emptyset$



$\overline{V}$ ne seka U^c

$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$

$\Leftarrow$ $x, A^{zap} \not\ni x$

A^c $(\cancel{A^{zap}})^c$ je okolica x

$x \in A^c \quad \exists V \quad x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq A^c$

$W := \overline{V}^c \rightsquigarrow W^{odp} \supseteq A \quad V \cap W \neq \emptyset$

Drugi dokaz je analogen

Trditev: T_3 je multiplikativna

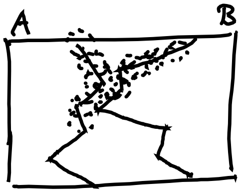
Posledica: Regularnost je multiplikativna (za T_1 že vemo da je)

DN

Izrek (izrek Tihonova)

$(X,\mathcal{T})$ je regularen in 2-števen $\Rightarrow (X,\mathcal{T})$ je normalen

Dokaz:



$x \in A.\ \exists U^{odp} \ni x.\ \overline{U} \cap B = \emptyset$

$\exists \mathcal{B}$ števna baza za $\mathcal{T}$

$\forall y \in B.\ \exists V \in \mathcal{B}\ y \in V.\ \overline{V} \cap A = \emptyset$

Ločili samo A od B, ampak ne ostro

$U_1, U_2, U_3, \dots$ odprte pokrivajo A

$\overline{U_i} \cap B = \emptyset$

$V_1, V_2, V_3, \dots$ odprte, pokrivajo B $\overline{V_i} \cap A = \emptyset$

$U_1' = U_1 - \overline{V_1}$

$U_2' = U_2 - \overline{V_1} - \overline{V_2}$

$V_1' := V_1 - \overline{U_1}$

$V_2' = V_2 - \overline{U_1} - \overline{U_2}$

$V_3' := V_3 - \overline{U_1} - \overline{U_2} - \overline{U_3}$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{odprte}}$

Pokrivaja A

še naprej

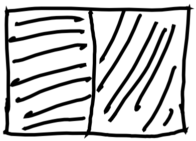
$U = \bigcup U_i' \supseteq A$

$V = \bigcup V_i' \supseteq B$

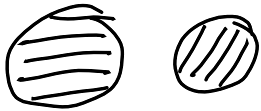
$U \cap V = \emptyset$

Povezanost

Wadova jezera (Lakes of Wade)



skupna meja



ni skupne meje

Vsak je odprt

Definicija: Prostor $(X,\mathcal{T})$ je nepovezan, če obstajata odprti množici $A,B\in\mathcal{T}$, da sta A,B neprazni, disjunktni in pokrivata cel prostor

$$X = A + B$$ ← pomeni disjunktni in pokrijeta cel prostor

$(X,\mathcal{T})$ je povezan, če ni nepovezan

Trditev: ekvivalentno:

1) $(X, \mathcal{T})$ je nepovezan

2) obstajata neprazni disjunktni zaprti podmnožici A, B $X = A + B$

3) obstaja prava, neprazna odprto zaprta podmnožica $A \subset X$

4) $\exists$ zvezna surjektivna preslikava
$$f: X \longrightarrow (\{0,1\}, \mathcal{T}_{dis})$$

X je povezen $:=$ ne obstaja (netrivialni) razcep na dve odprti množici

$\iff$

ne obstaja (netrivialni) razcep na dve zaprti množici

$\iff$

ne obstaja netrivialna odprto-zaprta množica

$\iff$

ne obstaja zvezna surjekcija

$$X \to \{0, 1\}$$

Izrek: $X \subseteq \mathbb{R}$ je povezana $\Leftrightarrow$ X je interval

Dokaz:

Značilnost intervala $a, b \in I$, $a < b$

$\forall\ a \le c \le b \Rightarrow c \in I$

X ni interval $\Rightarrow \exists a < b < c.\ a, b \in X,\ c \notin X$

$$X = \underset{a \in \uparrow}{X \cap (-\infty, c)} \amalg \underset{b \in \uparrow}{X \cap (c, \infty)}$$

netrivialni razcep na dve odprti podmnožici

$\Leftarrow$ X intervali, ki ima netrivialni razcep na dve odprto-zaprti podmnožici

$$X = U \amalg V$$

$a \in U$, $b \in V$, $a < b$

$c = \sup \{x \in \mathbb{R} \mid [a, x) \subseteq U\}$ $\quad c < b$

$c \in X$ $\quad c \in U$, ker je U zaprta

U je odprta $\rightsquigarrow$ $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subseteq U$ $\quad \times$

Izrek:

① $f^{zv}: X \to Y$ $\quad$ X je povezan $\Rightarrow f_*(X)$ je povezan

Torej: povezanost je topološka lastnost

② Naj bo $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ družina podmnožic v X

$\bigcap A_\lambda \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup A_\lambda$ je povezana

③ Produkt povezanih je povezan

④ Če za poljubna $a,b\in X$ obstaja pot od a do b (pot v X je $\gamma: [0,1] \xrightarrow{\text{zvezna}} X$
$\gamma(0)=a$ $\gamma(b)=b$)

$\Rightarrow X$ je povezan

⑤ Če je $A\subseteq X$ povezana, $A\subseteq B\subseteq \bar{A}$
$\Rightarrow B$ je povezana

Dokaz:

① $Y = U^{odp} + V^{odp}$ netrivialni razcep

$f^*(U)+f^*(V)=X$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{sur} & \{0,1\} \\ {\scriptstyle sur}\uparrow f & & \\ X & & \end{array} \quad \Rightarrow X \text{ je razcep}$$

②

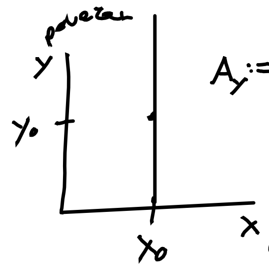
$\bigcap A_\lambda \ni a$

$s^{zv}: \bigcup A_\lambda \twoheadrightarrow \{0,1\}$

$s(a)$ je 0 ali 1

$\rightsquigarrow \forall\lambda\ s_*(A_\lambda)=\{0\}$

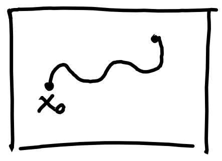
$\Rightarrow s_*(\bigcup A_\lambda) = \{0\} \Rightarrow s$ ni surjektivna

③ 

$A_y := \{x_0\}\times Y \cup X\times\{y\}$

Unija je povezana, ker imata neprazen presek. Unija vsebuje (x_0,y_0)

Uporabimo točko 2

④ 

Recimo da X ni povezan. Potem obstaja zvezna surjekcija v $\{0,1\}$

$\exists a,b.\ s(a)=0,\ s(b)=1$

$\exists\gamma: [0,1]\to X$ $\gamma(0)=a$ $\gamma(1)=b$

$[0,1]\xrightarrow{\gamma} X \xrightarrow{s}\{0,1\}$

$s\circ\gamma$ je zvezna surjekcija, ~~ker je~~

$\times$ ker je interval povezan

⑤ $B = U^{odp}+V^{odp}$ odprte v B neprazne

$A = A\cap U + A\cap V$

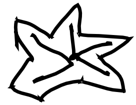
odprte v A $\quad$ odprte v A

Neprazni, ker je B pod zaprtjem A

Primeri:

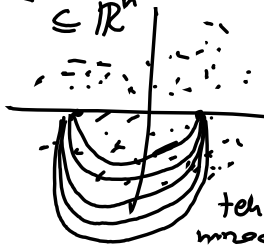
Vsaka konveksna podmnožica v $\mathbb{R}^n$ je zvezna

Vsaka zvezda je povezana



Komplement števne množice v $\mathbb{R}^n$ $n>1$ je povezan

$Q^{\text{števna}} \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad a,b \in \mathbb{R}^n - Q$



teh lokov je neštevno mnogo ker je Q samo števno ostaja veliko poti samo iz $\mathbb{R}^n - Q$ da sta a,b povezana

Za $n>1$ $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$

Recimo nasprotno

$f: \mathbb{R}_0 \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n$

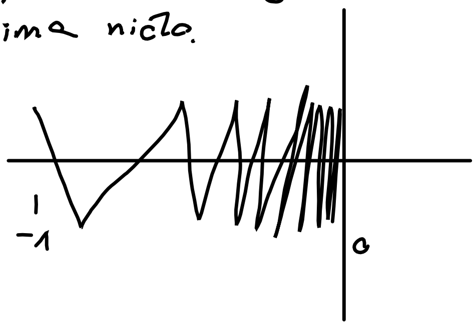
$f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{f(0)\}$

nepovezan $\qquad$ povezan

Izrek o vmesni vrednosti:

$f^{zv}: X^{pov} \longrightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f_x(X) = $ interval

posebej: Če zaloga vrednosti vsebuje pozitivne in negativne vrednosti, potem f ima ničlo.



$f: [-1,0] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$f_*([-1,0)) =: L$ povezane

$\overline{L} = L \cup \{0\} \times [-1,1]$ je povezana ker je zaprtje od L povezane

vendar ne obstaja pot med $(-1,1)$ in katerokoli točko na $\{0\} \times [-1,1]$

Dokaz:

Privzemimo:

$(\gamma_1,\gamma_2) = \gamma : [0,1] \longrightarrow \overline{L}$

$\gamma(0) = (-1,1)$

$\gamma(1) = (0,0)$

$\gamma_1^*(0) \subseteq [0,1]$

$m := \min \gamma_1^*(\{0\})$

$[0,1] \longrightarrow \overline{L}$

$[0,m) \longrightarrow L$

γ ni zvezna v m

na $\forall$ okolici $(m-\varepsilon, m+\varepsilon)$ zavzame γ_2 vse vrednosti med -1 in 1 v nasprotju z zveznostjo γ_2

Prostor X je povezan s potmi, če med poljubnima $a, b \in X$ dosteja pot v X od a do b

Trditev:

X pot s potmi $\Rightarrow$ X povezan

$\Leftarrow$ ne velja nujno

Komponente

$x \in X$

$C(x) :=$ Unija vseh povezanih podmnožic celega X, ki vsebujejo x

Trditev: lastnosti komponent

1) $x \in C(x)$
2) $C(x)$ je povezana
3) $C(x)$ je maksimalna povezana podmnožica
4) $C(x)$ je zaprta v X

Primer:

- v diskretnem prostoru so komponente točke
- komponente $\mathbb{Q}$ so tudi točke, ker so edine povezane podmnožice $\mathbb{R}$ intervali
- X je <u>povsem nepovezan</u>, če so komponente X enojci

Trditev:

$f^{zv}: X \longrightarrow Y$

$C(x)$ komponenta $X \Rightarrow$

$f_*(C(x)) \subseteq C(f(x))$ komponenta v Y

Trditev: Komponente tvorijo particijo X na disjunktne podmnožice

Dokaz:

$C(x_1) \cup C(x_2) \cup \dots$

$C(x_1) \cap C(x_2) \neq \emptyset \Longrightarrow C(x_1) = C(x_2)$

$C(x_1) \subseteq C(x_1) \cup C(x_2)$

povezano

$x \sim x' \iff \exists A^{pov} \subseteq X .\ x, x' \in A$

komponente so ekvivalenčni razredi

komponente $\mathbb{Q}$ so enojčki, za zaprte vendar niso odprte

Če X ima končno mnogo komponent so komponente odprte, ker je vsaka komplement unije ostalih

X je <u>lokalno povezan</u>, če ima $\forall x \in X$
$\forall U \ni x .\ \exists V^{pov} .\ x \in V \subseteq U$ (če za $\forall$ okolico x obstaja manjša povezana okolica)

Oziroma X ima bazo iz povezanih množic

X je <u>lokalno povezan s potmi</u>: če ima bazo iz množic, ki so povezane s potmi

Primer:

- Odprte mn. v $\mathbb{R}^n$ so lokalno povezane (s poti)
- $\mathbb{Q}$ ni lokalno povez.
- diskretni prostor je lokalno povezan ni pa povezan

- povezan, ni pa lokalno povezan:

v velikem je povezana, lokalno pa ni

Trditev:

X lokalno povezan $\Rightarrow$ komponente X so odprte

X lokalno povezan $\Leftrightarrow$ komponente $\forall$ odprte množice v X so odprte

Dokaz: $(\Rightarrow)$ $U \overset{odp}{\subseteq} X$ baza iz povezanih množic za X

$\rightsquigarrow$ dobimo bazo iz povezanih za U

$(\Leftarrow)$ $\mathcal{B} = \{$komponente odprtih množic v X$\}$

odprte po privzetku

povezane ker so komponente

baza, ker je vsaka odprta množica unija svojih komponen

$\blacksquare$

Ta je Peanifikacija prostora, $(\Leftarrow)$ naredimo s tem močnejšo bazo

Trditev:

Če je X lokalno povezan s potmi, potem so komponente X = komponente X za povezanost s potmi:

Dokaz:

X, C komponenta od X

morda ima C več potnih komponent

C' potna komponenta za C

ker je X lokalno povezan s potmi

$\Rightarrow$ potne komponente so odprte

C' je komplement unije ostalih potnih komponent $\rightsquigarrow$ C' je komplement odprte množice $\Rightarrow$ C' je zaprta

C' je odprta in zaprta v C, ki je povezana in neprazna $\Rightarrow$ $C' = C$

Posledica:

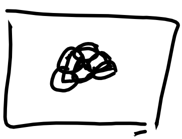
X je lokalno povezan s potmi: $\Longrightarrow$
(X je povezan $\Leftrightarrow$ X je povezan s potmi:)

Posledica: Odprte množice v $\mathbb{R}^n$ so povezane $\Leftrightarrow$ ko so povezane s potmi:

Kompaktnost

Prostor X je *kompakten*, če v vsakem odprtem pokritju obstaja končno podpokritje

- dovolj je gledati pokritja z baznimi okolicami
- Kompaktnost podprostora $A \subseteq X$ lahko testiramo na odprtih pokritjih v X



Primer

- vsaka končna množica je kompaktna
- | | | | | ||||||..... $\{x_1, x_2, \dots\} \cup \{x\}$ je kompaktna

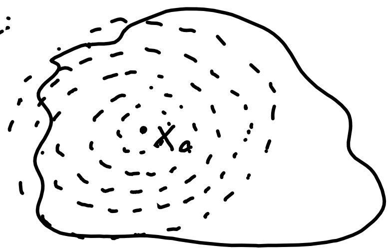
  limita

- $\mathbb{R}$ ni kompakten

Trditev:

V metričnih prostorih je vsaka kompaktna množica omejena

Dokaz:



$K(x_0, 1) \subseteq K(x_0, 2) \dots$

$\bigcup K = X$

če $\exists$ končno podpokritje, potem so vse točke vsebovane v največji krogli

Ranek

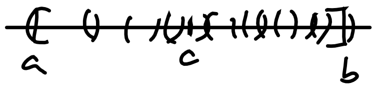
Kaske på kompetanse

Rokos

Vinke på hal

Izrek: $[a,b]$ je kompakten

Dokaz



$\mathcal{U}$ odprto pokritje za $[a,b]$

$c := \sup\{x \mid [a,x] \text{ ima končno podpokritje v } \mathcal{U}\}$

$c \in U \in \mathcal{U}$

$\exists \varepsilon > 0.\ (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subseteq U$

$[a, c-\frac{\varepsilon}{2}]$ ima končno podpokritje

$\{U_1, \dots, U_n\} \rightsquigarrow \{U_1, \dots, U_n, U\}$ je končno

podpokritje za $[a, c+\frac{\varepsilon}{2}]$

če $c<b$ dobimo protislovje

Trditev: Zvezna slika kompakta je kompakt

Dokaz: $f^{zv} : X \xrightarrow{\text{sur. hom}} Y$ Y je kompakten

$\mathcal{U}$ .... odprto pokritje za ~~X~~ Y

$\{f^*(U) \; ; \; U \in \mathcal{U}\}$ je odprto pokritje za X

$\{f^*(U_1) \dots f^*(U_n)\}$ končno pokritje za X

$U_1 \dots U_n$ ... končno pokritje za Y

Trditev: Zaprta podmnožica kompakta je kompaktna

Dokaz:

$\mathcal{U}$ ... pokritje A z odprtimi v X

$\underbrace{\mathcal{U} \cup \{X-A\}}$

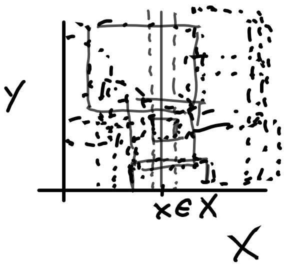
odprto pokritje X

X ima končno podpokritje $U_1, \dots, U_n$

Če je $U_i = X-A$ vzamemo ven, ostane končno podpokritje za A

Izrek: X, Y kompaktna $\Rightarrow X \times Y$ kompakten

Dokaz: Naj bo $\mathcal{U}$ poljubno pokritje $X \times Y$ s škatlami:



$\{x\} \times Y$

$\mathcal{U} = \{U_\lambda \times V_\lambda ;\ U_{odp,\lambda} \subseteq X\ \ V_{odp,\lambda} \subseteq Y\}$

obstajajo $\{U_{\lambda_1} \times V_{\lambda_1} \dots U_{\lambda_n} \times V_{\lambda_n}\}$ ki pokrive $\{x\} \times Y$

je odprto

$U_x := U_{\lambda_1} \cap \dots \cap U_{\lambda_n}$ (najožji pas)

$U_x \times Y$ ima končno podpokritje

$\{U_x \mid x \in X\}$ je odprto pokritje za X

$\{U_{x_1} \dots U_{x_n}\}$ je končno podpokritje

Vsak izmed stolpcev $U_{x_1} \times Y \dots U_{x_n} \times Y$ je pokrit s končno mnogimi škatlami iz $\mathcal{U}$, torej je to končno podpokritje

Posledica: $X_1 \dots X_n$ komp $\Rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ kompakten

Opomba: Poljuben produkt kompaktov je kompakt

Posledica: $\forall$ zaprta in omejena podmnožica v $\mathbb{R}^n$ je kompakt

Dokaz: $X^{\text{omejena}} \Rightarrow X \subseteq [a,b]^n$

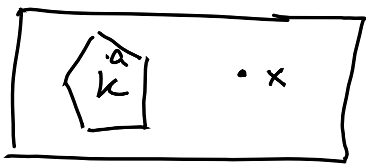
$\hookrightarrow$ kompaktna

$X^{\text{zaprta}} \Rightarrow X$ kompaktna

Trditev:

$X^{\text{Hausdorffov}}$, $K^{\text{komp.}} \subseteq X \Rightarrow K$ zaprt v X

Dokaz



$\forall a \in K.\ \exists U_a, V_a.\ a \in U_a, x \in V_a.\ U_a \cap V_a = \emptyset$

$\{U_a \mid a \in K\}$ so odprto pokritje kompakta K

$\rightsquigarrow \{U_{a_1}, \dots, U_{a_n}\}$ končno podpokritje

$V_{a_1} \cap V_{a_2} \cap \dots \cap V_{a_n}$ so odprta okolica

točke x, ki ne seka K

komplement je odprt ∎

Opomba: S tem prejšnjim dokazom smo dokazali, da $\forall$ Hausdorffova topologija ostro loči točke od kompakta

Izrek (Heine-Borel-Lebesgue)

Podmnožica v $\mathbb{R}^n$ je kompaktna $\Leftrightarrow$ ko je zaprta in omejena

Opomba:

M metričen.

Zaprte krogle so kompaktne $\Leftrightarrow$ velja Heine-Borel-Lebesgue izrek za ta prostor

Posledica:

$X^{komp} \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow \forall f^{zv} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ je omejena

ter zavzame minimum in maksimum

Dokaz:

$f_*(X)$ je kompakt v $\mathbb{R}$, torej omejen, torej ima inf in sup, ker je zaprt sta inf in sup elementa zaloge vrednosti, torej sta minimum in maksimum

Trditev: v kompaktu ima $\forall$ neskončna množica stekališče

Dokaz: Naj bo $X \overset{\text{komp}}{\supseteq} A$ brez stekališča

$\forall x \in X.\ \exists U_x \ni x.\ U_x \cap A$ je končna za X.

$\{U_x \mid x \in X\}$ odprto pokritje za X

$\rightsquigarrow U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ pokritje za X (in za A)

$\rightsquigarrow A$ je končna

$\blacksquare$

Posledica: (Bolzano-Weierstrass)

Vsako omejeno zaporedje v $\mathbb{R}^n$ ima konvergentno podzaporedje

Dokaz: $x_1, x_2, x_3, \ldots \subseteq [a,b]^n$

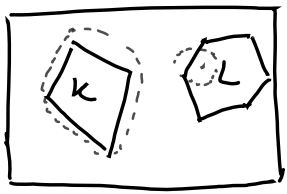
ločimo → množica elementov zaporedja je končna (vsaj kateri se ponovi neskončnokrat. konstantno podzaporedje je konvergentno.

→ množica elementov je neskončna, ima stekališče, ki je limita nekega podzaporedja

Izreki:

Prostor ki je kompakten in Hausdorffov je normalen

Dokaz:



$\forall x \in L . \exists U_x, V_x . K \subseteq U_x$

$x \in V_x . \ U_x \cap V_x = \emptyset$

$\{V_x \mid x \in L\}$ je odprto pokritje za L ker je L kompakten $\exists V_{x_1}, \dots, V_{x_n}$ končno podpokritje $U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_n}$ je odprta okolica za K in $V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}$ je odprta okolica za L in sta si disjunktni.

S tem smo dokazali, da $\forall$ Hausdorffova topologija ostro loči kompakte.

$X^{\text{kompakten, Hausdorffov}}$

$A, B^{\text{zap. disjunktni}} \subseteq X \Rightarrow A, B$ kompaktni

$\exists U, V^{\text{odp}} . \ A \subseteq U, B \subseteq V . \ U \cap V = \emptyset$

$X^{\text{komp.}}$: $\forall$ odp pokritje $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ $\bigcup U_\lambda = X$

$\exists$ podpokritje $\{U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n}\}$

$$\Longleftrightarrow$$

$\{U_\lambda^c\}_{\lambda\in\Lambda}$ zaprtje $\bigcap_\lambda U_\lambda^c = \emptyset$

$\exists$ $U_{\lambda_1}^c \cap \dots \cap U_{\lambda_n}^c = \emptyset$

Trditev: X je kompakten $\Leftrightarrow$ v $\forall$ družini

zaprtih podmnožic s praznim presekom

obstaja končna poddružina, katere presek

je tudi prazen

Dokaz

Posledica (Cantorjev izrek)

X^{komp} $\overset{\text{zap}}{F_1} \supseteq \overset{\text{zap}}{F_2} \supseteq \ldots$

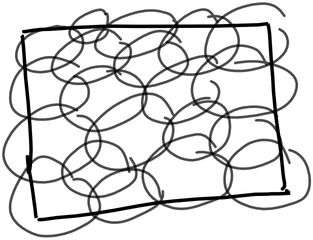
padajoče zaporedje zaprtih nepraznih podmnožic

$\Longrightarrow \bigcap F_i \neq \emptyset$

Dokaz: Če bi veljalo, da je $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$, potem bi imeli neko končno poddružino $F_{i_1} \ldots F_{i_n}$ ki bi imela prazen presek $= F_{i_n}$

$\times$

Cilj: $f^{zv} \; X^{komp, metr} \longrightarrow Y^{metr} \Rightarrow f$ enakomerno zvezna



~~Trditev~~ Def: če je $\mathcal{U}$ odprto pokritje za X, $\lambda > 0$ je ~~Lebesgueovo~~ Lebeguevo število pokritja $\mathcal{U}$, če $\forall$ podmnožica s premerom $< \lambda$ leži v celoti v enem elementu $\mathcal{U}$

Trditev: za $\forall$ odprto pokritje kompaktnega metričnega prostora vsebuje Lebeguevo število

Dokaz:

$\mathcal{U}$ odprto pokritje za X^{komp}

$U_1 \dots U_n$ končno podpokritje

$$\forall x \in X \; \max\{d(x, U_1^c)\, d(x, U_2^c) \dots d(x, U_n^c)\} =: f(x)$$

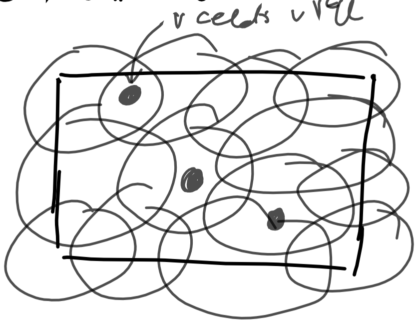
f je zvezna: $X \xrightarrow{komp} \mathbb{R}$ $\quad f > 0$

f zavzame minimum $\quad \lambda = \min f(x) > 0$

∎

Lebesgueva lema

$X^{\text{komp, metr}}$, za $\forall$ odprto pokritje $\mathcal{U}$ $\exists$ Lebesguevo število $\lambda > 0$, da je $\forall$ množica z $\operatorname{diam} < \lambda$ vsebovana v nekem elementu $\mathcal{U}$



Posledica:

$f \overset{zv}{:} X^{\text{komp, metr}} \longrightarrow Y^{\text{metr}}$

je enakomerno zvezna

Dokaz:

$\varepsilon > 0$. Y pokrijemo s kroglami: $\{K(y, \frac{\varepsilon}{2}) \mid y \in Y\}$

$\rightsquigarrow \{f^{-1}(K(y, \frac{\varepsilon}{2})) \mid y \in Y\}$ so pokritje X

$\delta :=$ lebesguejevo število tega pokritja

$d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon$

(ker sta v isti krogli)

$\blacksquare$

X je lokalno kompakten če ima $\forall$ točka X kompaktno okolico

Tj. $\forall x \in X.\ \exists K^{komp} \subseteq X.\ x \in \operatorname{Int} K$

Privzetek: $X^{hausdorffov}$ je lokalno kompakten, ko ima topologija baze iz relativno kompaktnih odprtih množic

(njeno zaprtje je kompaktno)

Zgled

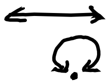
- $\forall$ kompakten je lokalno kompakten
- $\mathbb{R}^n$ je lokalno kompakten
- diskreten prostor je lokalno kompakten
- $\mathbb{Q}$ ni lokalno kompakten

Trditev:

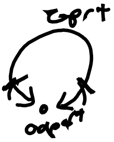
X lokalno kompakten in Hausdorfov

$\Rightarrow$ X regularen

$X^{\text{poljuben}} \cup \{\infty\}$ ← pač ena točka



$= X^+$



$(X, \mathcal{T}) \rightsquigarrow (X^+, \mathcal{T}^+)$

$\mathcal{T}^+ = \mathcal{T} \cup \underbrace{\text{okolice točke } \infty}$

vse množice oblike

$\{\infty \cup K^c \mid K \text{ je kompakt v } X\}$

$\mathcal{T}^+$ je topologija na X^+

· rutinsko preverjanje

X^+ je kompakten

$\mathcal{U}$ odprto pokritje za X^+

$\infty \in U \in \mathcal{U}$

U^c je kompakt in ima končno podpokritje iz $\mathcal{U}$

X^+ ... kompaktifikacija z eno točko oz kompaktifikacija Aleksandrova

Opazimo eno trditev naprej →

X lokalno kompakten, Hausdorfov $\rightsquigarrow$

X^+ kompakten, Hausdorfov $\rightsquigarrow$

X^+ normalen (torej regularen) $\rightsquigarrow$

X regularen, ker je regularnost dedna

Primer:

- X števna diskretna $\Longrightarrow X^+ \approx \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} \cup \{0\}$
- $X = (0,1) \Rightarrow X^+ \approx S^1$
- $\mathbb{Q}^+$ ni hausdorffov

. . . . - - - - -

- stisne vsebljizinoste točke

Trditev:

X lokalno kompakten, Hausdorffov $\Leftrightarrow$

X^+ je kompakten, Hausdorffov

Dokaz:

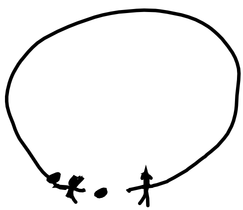
$x, x' \in X$

$x \in X$, ∞

$x \in \mathrm{Int}\, X$ $\quad K^{\text{komp}} \subseteq X$

$\mathrm{Int}\, K$, $K^c \cup \{0\}$ odprti disjunktni v X^+

$\mathrm{Int}\, K \ni x$, $\quad K^c \cup \{0\} \ni \infty$



Izrek: (Baireov izrek)

X lokal. komp, Hausdorffov

(velja tudi za polne metrične prostore)

$F_1, F_2, F_3 \dots$ zaporedje zaprtih množic s prazno notranjostjo

$\Rightarrow F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \dots$ ima tudi prazno notranjost

Temu rečemo Baireova lastnost

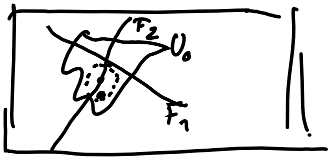
Dokaz:

$U_0^{odp} \subseteq X$

$x_1 \in U_0 - F_1$

$\rightsquigarrow \exists U_1 . \overline{U_1}$ kompaktna . $x_1 \in U_1$

$U_1 \cap F_1 = \emptyset$



$\exists x_2 \in U_1 - F_2 . \exists U_2 . \overline{U_2}$ komp . $x_3 \in U_2$

$\overline{U_1} \supseteq \overline{U_2} \supseteq \overline{U_3} \supseteq \dots$ padajoče zaporedje kompaktov, $\bigcap \overline{U_i} \neq 0$

$\rightsquigarrow U_0$ ni pokrit z $\{F_i\}$

(vsaj ena točka iz U_0 ni v $\{F_i\}$)

∎

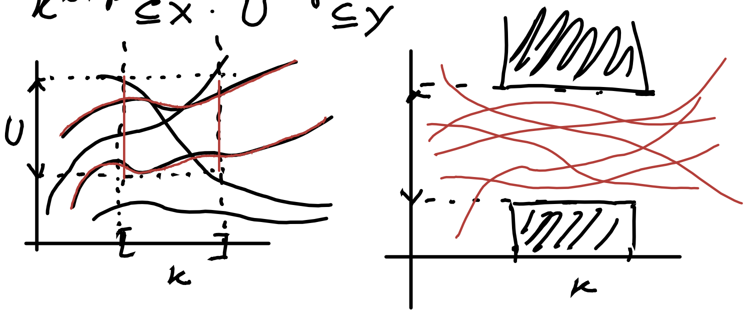
Prostori preslikav

X, Y prostora

$\rightsquigarrow C(X,Y)$ množica, ki jo opremimo z neko topologijo (prostori Soboleva)

$$\langle K, U\rangle := \{f \overset{zv}{:} X \to Y \mid f(K) \subseteq U\}$$

$K^{\text{komp}} \subseteq X \cdot U^{\text{odp}} \subseteq Y$



$$\langle K, U\rangle \subseteq C(X,Y)$$

Kompaktno odprta topologija je topologija ki jo generira predbaza $\{\langle K, U\rangle ; K^{\text{komp}} \subseteq X, U^{\text{odp}} \subseteq Y\}$ (co-topologija)

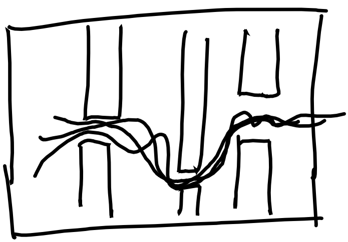
$C(X,Y)$

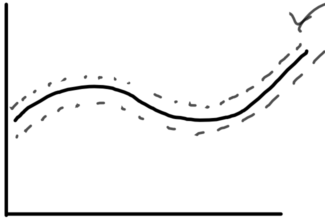
predbaza: $\{\langle K,U\rangle \mid K \overset{komp}{\subseteq} X,\ U \overset{odp}{\subseteq} Y\}$

$$\langle K,U\rangle := \{f: X\to Y \ ;\ f(K)\subseteq U$$

$\mathcal{T}_{co}$ .... kompaktno odprta topologija na $C(X,Y)$

$\mathcal{T}_{co}$ ustreza „topologiji enakomerne konvergence na kompaktih





To je bazna odprta množica

Baze:

$$\langle f, K, \varepsilon \rangle = \{ g : X \to Y^{\text{metr}} \mid d_Y(g(x), f(x)) < \varepsilon \text{ za } \forall x$$

$$\mathcal{B} = \{ \langle f, K, \varepsilon \rangle \mid f \in C(X,Y);\ K^{\text{komp}} \subseteq X,\ \varepsilon > 0$$

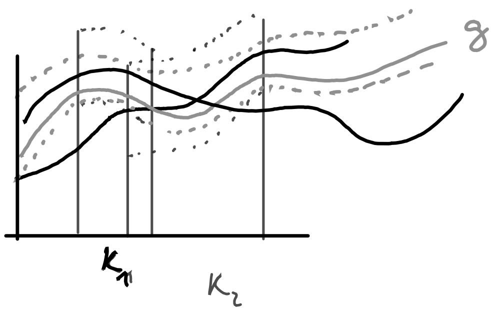
Trditev: Y metričen $\Longrightarrow$ J_{CO} = top. enakomerne konvergence na kompaktih

Dokaz

$\{\langle f, K, \varepsilon \rangle\}$ je res baza

Recimo da je presek neprazen

$$\langle f_1, K_1, \varepsilon_1 \rangle \cap \langle f_2, K_2, \varepsilon_2 \rangle \ni g$$



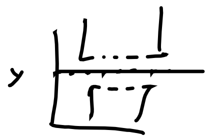
$$\left\langle g, K_1 \cup K_2, \min\left\{ \varepsilon_1 - \max_{x \in K_1} \{ d(f_1(x), g(x)) \},\ \varepsilon_2 - \max \{ d(f_2(x), g(x)) \} \right\} \right\rangle$$

Pokritje: očitno

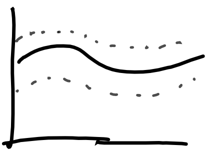
$\supseteq$

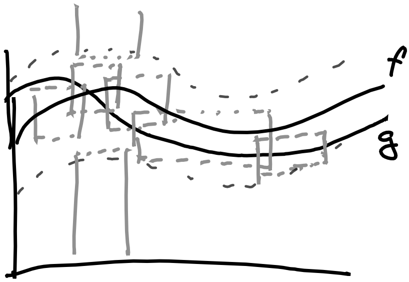
$\mathcal{T}_{co} \subseteq \mathcal{T}_{e,k,k}$

$\langle K, K(y,\varepsilon)\rangle = \langle C_y, K, \varepsilon\rangle$



$\mathcal{T}_{ekk} \subseteq \mathcal{T}_{co}$





$c \in K \quad U_c = \{x \in K \mid d(f(x), g(c)) < (\varepsilon - d(f(c) - g(c)))\}$

$\rightsquigarrow \exists$ končno podpokritje za K

dobimo $U_{c_1}, \dots, U_{c_n}$ za K

← zaprto v K

$f\, \cancel{g} \in \langle \overline{U}_{c_1} \cap K_1, K(\cancel{g}\,f(c_1), \frac{\varepsilon}{2})\rangle \cap \dots \langle \overline{U}_{c_n} \cap K, K(\cancel{g}\,f(c_n), \frac{\varepsilon}{2})\rangle$

je baznica v $\mathcal{T}_{co}$ $\subseteq \langle f, K, \varepsilon\rangle$

lahko ali pa samo?

Dokazujemo da v vsaki bazni množici ostaja bazna množica

$\{C(X,Y), \mathcal{T}_{co}\}$

$$i: Y \hookrightarrow C(X,Y)$$

$y \longmapsto c_y$ - konstantna funkcija pri y

<u>i je vložitev</u>

$i^* \langle K,U\rangle = U \quad \langle K,U\rangle \cap i(Y)$

Y lahko gledamo kot podprostor v $C(X,Y)$

Trditev:

a) $C(X,Y)$ je Hausdorffov $\Leftrightarrow$ Y je Hausdorffov

b) $C(X,Y)$ je regularen $\Leftrightarrow$ Y je regularen

Dokaz: $f,g \in C(X,Y)$ $\quad f \neq g$

$\exists x.\ f(x) \neq g(x)$

Naj bosta $U,V \overset{\text{odp}}{\subseteq} Y$

$f(x) \in U$, $f(y) \in V$ $\quad U \cap V = \emptyset$

$$\underset{\substack{\cup\!\!\!\shortmid \\ f}}{\langle \{x\}, U \rangle} \qquad \underset{\substack{\cup\!\!\!\shortmid \\ g}}{\langle \{x\}, V \}}$$

$\blacksquare$

b) DN.

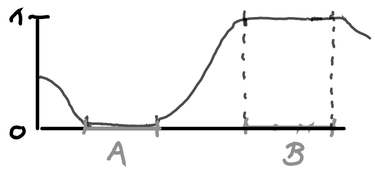
Preslikave na normalnih prostorih

Kdaj obstajajo nekonstantne preslikave $f: X \longrightarrow Y$
($\mathbb{R}$)

Izrek: (Urisonova Lema)

X je $T_4 \iff$ za $A, B^{zap} \subseteq X, A \cap B = \emptyset$.

$\exists f^{zv}: X \longrightarrow [0,1].\ f_*(A) = 0\ \ f_*(B) = 1$



Dokaz:

($\Leftarrow$) Topologija ostro loči disjunktne zaprte množice

A, B zap $A \cap B = \emptyset$

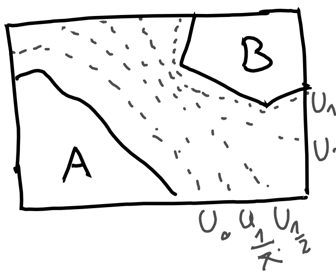
$f^{zv} X \to [0,1]\ \ f_*(A) = 0\ \ f_*(B) = 1$

$f^*([0, \frac{1}{2})) = U \supseteq A$

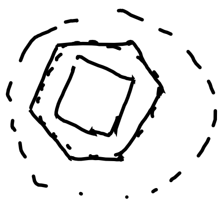
$f^*((\frac{1}{2}, 1]) = V \supseteq V$

$U \cap V = \emptyset$

($\Rightarrow$)



$A^{zap} \subseteq U^{odp}$



$\exists V.\ A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$

$U_1 = X - B$

$A \subseteq U_1 \quad \exists U_0.\ A \subseteq U_0 \subseteq \bar{U}_0 \subseteq U_1$

$\bar{U}_0 \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \bar{U}_{\frac{1}{2}} \subseteq U_1$

$\bar{U}_0 \subseteq U_{\frac{1}{4}} \subseteq \bar{U}_{\frac{1}{4}} \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \bar{U}_{\frac{1}{2}} \subseteq U_{\frac{3}{4}} \subseteq \bar{U}_{\frac{3}{4}} \subseteq U_1$

$U_{\frac{1}{8}}$ $U_{\frac{3}{8}}$ $U_{\frac{5}{8}}$ $U_{\frac{7}{8}}$

$\leadsto \{U_r \mid r$ je dvojiški ulomek $(r = \frac{k}{2^n})\}$

odp v X $\quad r < s \Rightarrow \bar{U}_r \subseteq U_s$

$$f(x) := \begin{cases} \inf\{r \mid x \in U_r\}; & x \notin B \\ 1; & x \in B \end{cases}$$

$f: X \longrightarrow [0,1] \quad f(A) = 0,\ f(B) = 1$

f je zvezna

$x \in X.\ f(x) \in (0,1)$

$\varepsilon > 0$

$f(x) - \varepsilon < r < f(x) < s < f(x + \varepsilon)$

dvojiška ulomka

$U_s - \bar{U}_r$ je neprazna odprta množica v X

(X, d) metrika

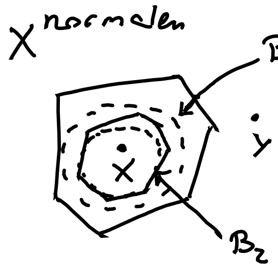
A, B zap, disj $\subseteq X$

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)} \text{ je zvezna}$$

$f(A) = 0$

$f(B) = 1$

Cilj: Pokazati da prostor, ki je normalen in drugi števen je metrizabilen



zaprta

$X - B_1 \ni y$

$\exists f: X \longrightarrow [0,1]$

$f(\overline{B_2}) = 0 \quad f(X - B_1) = 1$

To lahko naredimo za poljubni bazični okolici $B_1 \subseteq \overline{B_1} \subseteq B_2$

V 2-števnem normalnem prostoru dostaja števen nabor takih funkcij

$f_1, f_2, f_3, \ldots$

vsaki točki priredimo zaporedje

$x \in X \longmapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots)$

$\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$d(x_i, y_i) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$

Pogoj da je ta metrika definirana je da se omejimo na zaporedja, za katere je $\sum x_i^2 < \infty$ "kvadratno sumabilna zaporedja"

standardna oznaka l^2

l^2 = metrični prostor s kvadratom sumabilnih zaporedij in z evklidsko metriko

$f: X \longrightarrow l^2$

$f(x) = \left(f_1(x), \frac{f_2(x)}{2}, \frac{f_3(x)}{3}, \ldots\right)$

$\sum \ldots \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots < \infty$

f je vložitev (je homeomorfizem na sliko)

injektivnost: $\exists_i\, f_i(x) \neq f_i(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

zveznost:

Topologija na l^2 je produktna DN

f je zvezna $\Leftrightarrow$ ~~kadar~~ je zvezna na komponentah

$(f_1, f_2, \ldots)$ Tega je zvezna

zveznost inverza

...

Izrek: (Urisonov metrizacijski izrek)

X normalen, 2-števen $\Rightarrow$ X je metrizabilen

Posledica:

X regularen, 2-števen $\Rightarrow$ X je metrizabilnost

(ker reg+2števnost $\Rightarrow$ norm.)

Pravzaprav

X 2-števen $\Rightarrow$ (X regularen $\Leftrightarrow$ X metrizabilen)

Nagata smirnov

$X^{norm} \supseteq A, B$ disj. zap.

disjunktna unija

$$
\begin{tikzcd}
 & f: A \amalg B \arrow[dl] \arrow[d, hook] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{R} \\
0 & X \arrow[r, dashed] & 1 \quad F \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}
$$

Dokazali bomo Tietzejev izrek

Tietzejev izrek:

Naj bo $A^{\text{zap}} \subseteq X^{\text{norm}}$

$f : A \longrightarrow J^{\text{interval}} \subseteq \mathbb{R}$

$\exists F : X \longrightarrow J$ razširitev f da ta diagram

tj $F/_A = f$ komponira

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & J \\ X \arrow[ur, dashed, "F"'] & \end{tikzcd}$$

razširitev

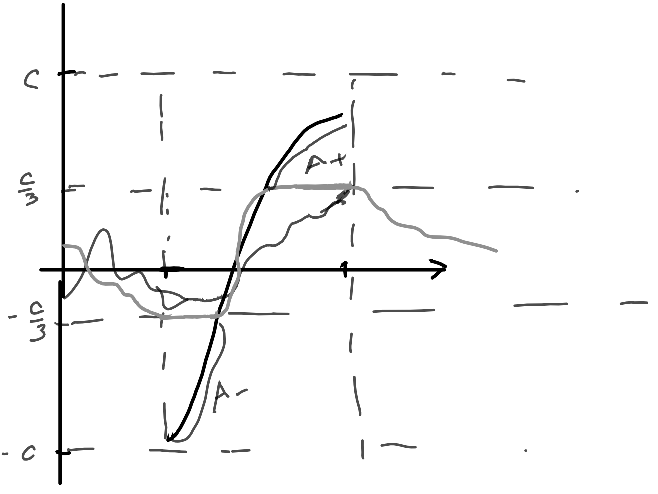
$F \circ i = f$

Lema:

$A^{zap} \subseteq X^{norm}$, $f: A \to [-c, c]$

$\exists h. X \longrightarrow [-\frac{c}{3}, \frac{c}{3}]$

$|h(x) - f(x)| \leq \frac{2}{3}c$ za $\forall x \in A$



Dokaz:

$A_+ := \{x \in A \mid f(x) \geq \frac{c}{3}\}$

$A_- := \{x \in A \mid f(x) \leq \frac{c}{3}\}$

obe zaprti v X

h naj bo Urisonova funkcija

$h: (X, A_-\ A_+) \longrightarrow ([-\frac{c}{3}, \frac{c}{3}], -\frac{c}{3}, +\frac{c}{3})$

Dokaz Tietzeovega izreka

$f^{zv}: A^{zap} \longrightarrow [-1, 1]$ BŠZS

Po lem: $\exists h_1 : X \longrightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

$|f - h_1| \leq \frac{2}{3}$ na A

$f - h_1 : A \longrightarrow [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$

po lem: za $c = \frac{2}{3}$

$\exists h_2 : X \longrightarrow \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right]$

$|f - h_1 - h_2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$

Nadaljujemo $h_1 h_2 \ldots$

$F = h_1 + h_2 + h_3 + \ldots : X \longrightarrow [-1, 1]$

konvergira za $\forall X$

$F/A = f$

$\blacksquare$

$f : X \to \mathbb{R}$

nosilec $f := [f \neq 0] = \overline{f^{*}(\mathbb{R} - \{0\})}$

$\nwarrow$ zaprtje tega kjer je $f \neq 0$

$\{U_1, \dots, U_n\}$ odprto pokritje za X

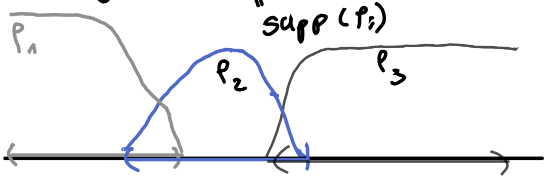
<u>Razčlenitev enote</u> podrejena pokritju $\{U_1, \dots, U_n\}$

je nabor $\rho_1, \dots, \rho_n : X \to [0,1]$

$\rho_1 + \dots + \rho_n = 1$

$(\rho_1(x) + \dots + \rho_n(x) = 1$ za $\forall x)$

in velja $\underset{\text{supp}(\rho_i)}{\overset{\|}{\text{nosilec}}}(\rho_i) \subseteq U_i$



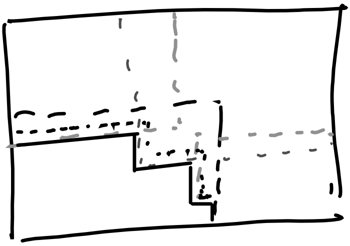
Izrek:

X^{norm} $\{U_1 \dots U_n\}$ odp pokritje

Obstaja razčlenitev enote podrejene temu pokritju

Dokaz:

1. korak



skrčimo do pokritja

$\{V_1, \dots V_n\}$ $\overline{V_i} \subseteq U_i$

$A_1 \overset{zap}{=} X - U_2 - \dots U_n \subseteq U_1$

$\exists V_1^{odp}: A_1 \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq U_1$

$\{V_1, U_2 \dots U_n\}$ je odprto pokritje

ponovimo

Dobimo $\{V_1 \dots V_n\}$

Vse to skupaj naredimo še enkrat

Dobimo $\{W_1 \dots W_n\}$ odprto pokritje

$W_i \subseteq \overline{W_i} \subseteq V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$

$\rho_i : X \longrightarrow [0,1]$

$\underset{*}{\rho_i}(\overline{W_i}) = 1 \quad \rho_i(X - V_i) = 0$

$\rho = \rho_1 + \dots + \rho_n$ je povsod > 0

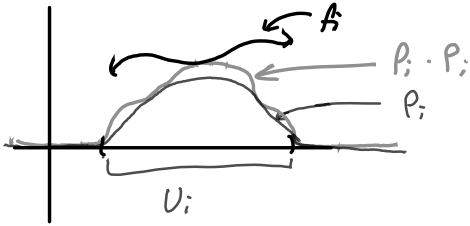
$\frac{\rho_1}{\rho}, \frac{\rho_2}{\rho}, \dots, \frac{\rho_n}{\rho}$ se seštejejo v 1

zvezne so

nosilec $\frac{\rho_i}{\rho}$ = nosilec $\rho_i \subseteq U_i$

$f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_i \cdot \rho_i \ (x) = \begin{cases} f_i(x) \cdot \rho_i(x) & \text{za } x \in U_i \\ 0 ; & x \in X - \operatorname{supp}(\rho_i) \end{cases}$$



$f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R} \quad i \in \{1, \dots, n\}$

razčlenitev enote podrejena $\{U_i\}$

$\rightsquigarrow f := f_i \rho_i + \dots f_n \cdot \rho_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$

Primer: X kompakten, T_2 in

$\forall$ točka ima okolico, ki je izomorfna $\mathbb{R}^n$

(n-razsežna mnogoterost)

Potem X lahko vložimo v nek evklidski prostor.

Obstaja pokritje $U_1, \dots U_n$

$$U_i \underset{f_i}{\xrightarrow{\cong}} \mathbb{R}^n$$

Izberemo razčlenitev enote $\rho_1, \dots \rho_n$

$$f := (\underbrace{\rho_1, \dots \rho_m}_{\mathbb{R}_{m \cdot 1}}, \underbrace{f_1 \cdot \rho_1, \dots f_m \rho_m}_{\mathbb{R}^n_{m \cdot n}}) : X \to \mathbb{R}^{m(n+1)}$$

f je zvezna ker so vse koordinate zvezne

f je injektivna $f(x) = f(y)$, $\rho_i(x) = \rho_i(y) > 0$

$f_i(x) = \rho_i(y) \Rightarrow x = y$

f je vložitev ker slika iz kompakta v T_2

Stone-Weierstrasov izrek

Weierstrasov izrek: Polinomi so gosti v $\mathcal{C}[a,b]$

Tj. vsako zvezno funkcijo lahko poljubno enakomerno aproksimiramo s polinomi)

Bernsteinovi polinomi

$$1 = ((1-x)+x)^n =$$
$$= (1-x)^n + \binom{n}{1}(1-x)^{n-1}x + \dots + \underbrace{\binom{n}{i}(1-x)^{n-i}x^i}_{B_{n,i}(x)} + \dots + x^n$$

$B_{n,i}(x)$ ↳ Beinsteinov (n,i) polinom

de razdeniter ende, ki ni podrejena drobemu področja

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) := \sum_{i=0}^{n} f\left(\tfrac{i}{n}\right) \cdot B_{n,i}(x)$$

$f_n(x)$ konvergirajo k $f(x)$

Dokaz:

f zvezna. $M := \max\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$

$$f_n(x) - f(x) = \left(\sum f\left(\tfrac{i}{n}\right)\cdot B_{n,i}(x)\right) - \left(f(x)\cdot \sum B_{n,i}(x)\right)$$

$$= \sum_i^n \left(f\left(\tfrac{i}{n}\right) - f(x)\right) B_{n,i}(x)$$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sum_i \left|f\left(\tfrac{i}{n}\right) - f(x)\right| B_{n,i}(x) =$$

$\forall \varepsilon > 0.\ \exists \delta > 0.\ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$

izberemo $\varepsilon \to \delta$ (enakomerne zveznost polinomov)

$$= \underbrace{\sum_{i:|x-\frac{i}{n}|<\delta} \underbrace{\left|f\left(\tfrac{i}{n}\right) - f(x)\right|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} \cdot B_{n,i}(x)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \sum_{i:|x-\frac{i}{n}|\geq\delta} \left|f\left(\tfrac{i}{n}\right) - f(x)\right| B_{n,i}(x)$$

$$\sum_{i:|x-\frac{i}{n}|\geq\delta} \underbrace{\left|f\left(\tfrac{i}{n}\right) - f(x)\right|}_{\leq 2M} \cdot B_{n,i}(x) \leq 2M \sum_{|x-\frac{i}{n}|\geq\delta} B_{n,i}(x)$$

$$\boxed{\text{Velja: } \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{x-i}{n}\right)^2 \cdot B_{n,i}(x) = \frac{x(1-x)}{n}}$$

$$\leq 2M \sum_i \frac{\left(\frac{i}{n} - x\right)^2}{\delta^2} \cdot B_{n,i}(x) \leq \frac{2M}{\delta^2} \frac{x(1-x)}{n} \leq$$

$$\leq \frac{2M}{\delta^2 n} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ za dovolj velik } n$$

■

M. Stone:

$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$

$\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ je algebra

$f_1, f_2, f_3, \ldots$

Najmanjša unitarna podalgebra $\mathcal{C}(X, A)$, ki vsebuje $f_1, f_2, f_3, \ldots$ je sestavljena iz

$p(f_{i_1}, \ldots, f_{i_n})$ p polinom n spremenljivk

f_{i_k} so iz nabora

Izrek (Stone-Weierstrasov izrek)

Če je $A \subseteq \mathcal{C}(X^{\text{normalen}})$ unitarna podalgebra, ki $\underbrace{\text{loči točke}}$, potem je
$\mathcal{C}(X) = \bar{A}$

↳ v C-O topologiji

↳ $\forall x \neq x' \in X$
$\exists f \in A . f(x) \neq f(x')$

Če je v A vsaj ena injektivna funkcija, potem A loči točke
sin x in cos x ne ločite vseh točk (na intervalu $(0, 2\pi)$), ampak skupaj jih

Dokaz

$k(t) = \sqrt{t}$ je enakomerna limita polinomov (na $[0,1]$) po Weierstrasovem izreku

- $\underbrace{f \in A, ^{f>0} \sqrt{f}} \in \bar{A}$ (A ... algebra)
  (A podalgebra $\Rightarrow \bar{A}$ podalgebra)
- $|f| = \sqrt{f^2} \in \bar{A}$ (f poljubna)
- $f, g \in A$ $\quad \max(f,g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$

$$\min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$$

$\Rightarrow$ $3>0 . \left|\sqrt{t} - (a_0 + a_1 t + \dots a_k t^k)\right| < \varepsilon$
M max f na kompaktu
. . . . . ??

- $\max\{f_1, \dots, f_n\}$ $\in \bar{A}$
- $\min\{f_1, \dots, f_n\}$ $\in A$

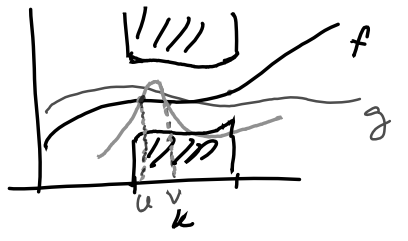
$x \neq x' . \exists g : X \to \mathbb{R}$ $g(x) \neq g(x')$

$\Rightarrow \forall a, b \; \exists h \in A . h(x) = a \quad h(x') = b$

$$h(t) := a + \frac{b-a}{g(x') - g(x)}(h(t) - h(x))$$

$f \in \mathcal{C}(X)$, $\langle f, K, \varepsilon \rangle$ ... bazična okolica

Iščemo $g \in A \cap \langle f, K, \varepsilon \rangle$



$\forall u, v \in K$ izberemo
$h_{u,v} : X \to \mathbb{R}$
$h_{u,v}(u) = f(u) \quad h_{u,v}(v) = f(v)$

Pri fiksnem u definiramo
$U_v := \{x \in K \mid h_{u,v}(x) < f(x) + \varepsilon\}$
je okolica v
$\{U_v\}$ je odprto pokritje K $U_{v_1}, \dots U_{v_n}$
$h_u := \min\{h_{u,v_1}, \dots, h_{u,v_n}\}$
Dobimo funkcijo ki ne gre višje od $f(x) + \varepsilon$

$\forall u$ definiramo $V_u := \{x \in K . h_u(x) > f(x) - \varepsilon\}$
$u \in$
$\{V_u \mid u \in K\}$ so odprto pokritje K
$V_{u_1} \dots V_{u_n}$ je končno podpokritje
$h := \max\{h_{u_1} \dots h_{u_n}\} \in \bar{A}$
Torej bo h znotraj okolice