Pogoji za metriko

1. $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a=b$
2. $d(a,b) = d(b,a)$
3. $d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$ ✓

Topologija

1. zaprtost za poljubne unije
2. zaprtost za končne preseke ✓

Baza

1. je pokritje
2. Presek dveh baznih je unija baznih

✓

zveznost $f^*(\mathcal{B}_y) \in \mathcal{T}_x$

- lahko preverimo na bazi

$\Leftrightarrow f^*(z^{zap}) = \text{zaprta} \Leftrightarrow f_*(\overline{A}) \subseteq \overline{f_*(A)}$

- lahko preverjamo na predbazi

$V \in P \quad f^*(V) \in \mathcal{T}_x$ ✓

odprtost

- lahko preverjamo na bazi ✓

Homeomorfizem:

f bijekcija $\wedge$ f_* bijekcija

f^* in f_* sta si inverzni

- zvezna odprta bijekcija

$\Leftrightarrow$ zvezna zaprta bijekcija

Topološka lastnost ... lastnost, ki se ohranja pri homeomorfizmih

- diskretnost
- metrizabilnost
- separabilnost
- 1-števnost, 2-števnost
- povezanost
- kompaktnost
- T_0, T_1, T_2, T_3, T_4

NE:

- omejenost
- polnost

Dednost:

- diskretnost in trivialnost NE
- metrizabilnost
- 1-števnost
- 2-števnost
- T_1, T_2, T_3, regularnost

- seperabilnost

($A^{odp} \subseteq X \Rightarrow A$ je seperabilen)

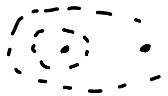
- normalnost

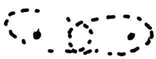
($A^{zap} \subseteq X \Rightarrow A$ je normalen)

Multiplikativnost

- T_1, T_2, T_3

- ostro loči 
- loči 

T_0: $\forall x,y.\ \exists U\in J.\ x\in U \land y\notin U$ 
(kolmogorov)

T_1: $\forall x,y.\ \exists U,V\in J.\ x\in U,\ y\in V,\ x\notin V,\ y\notin U$
(Frécht) 

T_2: $\forall x,y.\ \exists U\in J.\ x\in U,\ y\in V,\ U\cap V=\emptyset$ 
(Hausdorf)

T_3: $\forall x.\ \forall A^{zap}\ x\notin A.\ \exists U,V.\ x\in U, A\subseteq V.\ U\cap V=\emptyset$

T_4: $\forall A^{zap}, B^{zap}.\ A\cap B=\emptyset.\ \exists U,V\in J.\ A\subseteq U, B\subseteq V,$
$U\cap V=\emptyset$

Podbaza $\mathcal{P}$, če velja: $\bigcup \mathcal{P} = X$

$\mathcal{B} = \{\bigcap \mathcal{U} ; \mathcal{U} \subseteq \mathcal{P} \wedge \mathcal{U} \neq \emptyset \wedge |\mathcal{U}| \neq \infty\}$

(družina vseh končnih presekov elementov $\mathcal{P}$)

- generira najmanjšo topologijo, kjer so $U \in \mathcal{P}$ odprte

Pokritja:

- $\{X_\lambda\}$ odprto pokritje za X
  $A \subseteq X . (\forall \lambda . A \cap X_\lambda$ odp $\Leftrightarrow A$ odp v $X)$
- $\{X_\lambda\}$ zaprto lokalno končno pokritje X
  $A \subseteq X . (\forall \lambda . A \cap X_\lambda$ zap $\Leftrightarrow A$ zap v X
- $\{X_\lambda\}$ odprto ali lokalno končno pokritje X
  f zvezna $\Leftrightarrow f|_{X_\lambda}$ zvezna

Vložitev: $f : X \to Z_f$ je homeomorfizem

Z_f odp $\Rightarrow$ (f je vložitev $\Leftrightarrow f$ odprta)

Z_f zap $\Rightarrow$ (f je vložitev $\Leftrightarrow f$ zaprta)

Izreki:

- $f = (f_y, f_z) : X \longrightarrow Y \times Z$

  f je zvezna $\Leftrightarrow$ f_y, f_z sta zvezni

- X je 1-števen. $\forall A \subseteq X . \bar{A} = L(A)$ limite zaporedij $\vee A$

  $\wedge$ (f je zvezna $\Leftrightarrow f_*(L(A)) \subseteq L(f_*(A))$)

- odprt podprostor separabilnega prostora je seperabilen

- $B \subseteq A \subseteq X$

  $Cl_A B = Cl_X B \cap A$

  $Int_A B \supseteq Int_X B \cap A$

  $Fr_A B \subseteq Fr_X B \cap A$

- števen metrični prostor brez izoliranih točk ne more biti poln

- Frechtov $\Leftrightarrow$ enojci so zaprti

Implikacije:

- 2-števnost $\Rightarrow$ 1-števnost
- 2-števnost $\Rightarrow$ seperabilnost
- seperabilnost + metričnost $\Rightarrow$ 2-števnost
- metričnost $\Rightarrow$ Hausdorffovost
- Hausdorffov $\Rightarrow$ Fréchtov
- Normalnost $\Rightarrow$ regularnost $\Rightarrow$ Hausdorf $\Rightarrow$ Frecht
- $\mathcal{J}$ hausdorf $\wedge$ $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}'$ $\Rightarrow$ $\mathcal{J}'$ hausdorf
- metričnost $\Rightarrow$ normalnost
- $T_4 + T_1 \Rightarrow T_3 + T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$
- regularnost (T_3+T_1) + 2-števnost $\Rightarrow$ normalnost