Izidi, dogodki, verjetnost

Primer: V 17. stoletju je bila med italjanskimi kockarji popularna igra na srečo:

Vržemo 3 kocke, stavimo na vsoto pik.

Spraševali so se ali je boljša stava na 9 ali 10.

Kockarji so meli "teorijo":

• Vsota 9:

1 2 6	$3\cdot 2\cdot 1$
1 3 5	$3\cdot 2\cdot 1$
1 4 4	$\frac{2\cdot 2+2}{2}=3$
2 2 5	3
2 3 4	6
3 3 3	1

$12+12+1=25$

Vsota 10:

1 3 6	6
1 4 5	6
2 2 6	3
2 3 5	6
2 4 4	3
3 3 4	3

$4\cdot 6+3=27$

Na podlagi tega so mislili, da sta stavi enakovredni.

Problem je rešil Galileo Galilej (1564-1642)

Napisal je:

111	121		661
112	122		662
113	123		663
114	124	....	664
115	125		665
116	126		666

Na spisku 216 trojic

št trojic z vsoto 9 je 25, tistih z vsoto 10 pa 27

Ω je množica vseh možnih izidov

$$\Omega = \{(i,j,k) ; 1 \leq i,j,k \leq 6\} = \{1,2,3,4,5,6\}^3$$

Primer: 1. Če mešamo n kart je izid permutacija

$\Omega = S_n$ v tem primeru

2. kovanec mečemo n-krat. Dobimo grb ali številko

$\Omega = \{G, \bar{S}\}^n = \{1,2\}^n$ = množica vseh nizov simbolov G in $\bar{S}$ dolžine n

3. kovanec mečemo neskončnokrat Ω = množica vseh neskončnih zaporedij $\Omega = \{G, \bar{S}\}^{\mathbb{N}}$.

Dogodek - V verjetnosti govorimo o dogodkih.

Primer: Vržemo 3 kocke in je vsota 9

Dogodek je podmnožica Ω za katero velja da ima vsak element vsoto 9

Dogodke bomo identificirali s podmnožicami Ω vseh možnih izidov. Tipično jih bomo označevali z $A, B, C, A_1, A_2, \ldots$

Smiselno je pričakovati, da so tudi: A^c, $A \cup B$ dogodki

Definicija - Dogodki so družina podmnožic Ω z lastnostmi:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ je družina podmnožic)
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3. $A_1, A_2, \ldots \Rightarrow \bigcup_k A_k \in \mathcal{F}$

števna unija

Družini $\mathcal{F}$ s temi lastnostmi rečemo σ-algebra

Ω je gotov dogodek

$\emptyset$ je nemogoč dogodek

Izkaže se, da ko govorimo o verjetnosti je najbolje verjetnosti dodeliti dogodkom. Smiselno je pričakovati, da je verjetnost $\Omega = 1$ in verjetnost unije disjunktnih dogodkov pa vsota posameznih verjetnosti

Definicija: Verjetnost je preslikava $P: \mathcal{F} \to [0,1]$ z lastnostmi

1. $P(\Omega) = 1$
2. $0 \leq P(A) \leq 1$
3. če so $A_1, A_2 \ldots$ disjunktni dogodki je $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$

Komentar:

1. Aksiome je postavil A. N. Kolmogorov (1903-1987)
2. Aksiom 3 velja tudi za končne unije

Trojici $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pravimo verjetnostni prostor

Nekaj preprostih posledic aksiomov:

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$$

Naj bosta $A, B \in \mathcal{F}$. Zapišimo

$$A \cup B = \underbrace{(A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)}_{\text{disjunktne}}$$

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B) =$$

$$\left(P(A) = P\big((A \cap B^c) \cup (A \cap B)\big) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B)\right)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Računamo $P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) =$

$$P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) =$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Primer: n parov gre na ples. Vsaka ženska zgrabi enega moškega. Kakšna je verjetnost da nobena ne zagrabi svojega

Alternativno: naključno izberemo permutacijo n elementov, vse permutacije imajo enako vrjetnost ($\frac{1}{n!}$). Kakšna je verjetnost da permutacija nima fiksnih točk

$A = \{$permutacija nima fiksnih točk$\}$

$A_i = \{$ženska i izbere moškega $i\}$; $i \in [n]$

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{$vsaj ena ženska izbere svojega moškega$\}$

$$A = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c$$

Velja $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} A_i - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} P(A_i \cap A_j) + \dots - \dots$

$+ (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots A_n)$

$$P(A_i) = \frac{1}{n}$$

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

$\vdots$

$$P(\text{vsi } \cap) = \frac{1}{n!}$$

$$P(A) = 1 - n \cdot \frac{(n-1)}{n!} + \binom{n}{2}\frac{(n-2)}{n!} - \binom{n}{3}\frac{(n-3)!}{n!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} =$$

$$= \frac{n!}{n!} - \frac{n!\ (n-2)!}{(n-2)!\ 2!\ n!} \dots$$

$$= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \dots$$

$$P(A) \approx e^{-1}$$

Izrek 1.1. Načelo vključitev in izključitev

Naj bodo $A_1 \dots A_n$ dogodki.

velja $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$

$+ (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap A_{\cdot} \cap A_n)$

Dokaz: indukcija

$n=2$ vemo

$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}) =$

$\sum P(A_i) - \sum_{i<j} (P(A_i \cap A_j)) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots A_n)$

$+ P(A_{n+1}) - P(A_i \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i) =$

$\dots$ ✓

Lema 1.2:

če so $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \dots$ dogodki je vrjetnost

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

ii) če so $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ dogodki je

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} A_n$$

Dokaz: Dovolj dokazati eno točko, druga sledi

i) definiramo $B_i = A_{i+1} - A_i$

Dogodki B_i so disjunktni. Velja $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$

A_1 je disjunkten z B_i

$$P(\cup A_i) = P(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = P(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) =$$

$$= P(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(A_{i+1}) - P(A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Prva Borel-Cantellijeva lema

Lema 1.3. Naj bodo $A_1, A_2, \ldots$ dogodki in

$\bar{A} = \{\omega \in \Omega ; \omega$ je vsebovana v ∞ dogodkih $\} =$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \right)$$

Če je $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$ je $P(\bar{A}_i) = 0$

Dokaz

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1 \cup A_2 - A_1 \cup A_3 - (A_1 \cup_2) \cup \ldots) =$$

disjunktni dogodki

$$= P(A_1) + P(A_2 - A_1) + P(A_3 - (A_2 \cup A_1)) + \ldots$$

Iz aksiomov sledi: $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$ Bonferonijeva neenačba

definiramo $B_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \qquad B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$

Po lemi 1.1 verjetnost $P(\bar{A}) = \lim_{n \to \infty} P(B_n) = \lim_{n \to \infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right)$

$$\leq \lim_{n \to \infty} \sum_{m=n}^{\infty} P(A_m) = 0$$

1.2 Pogojne verjetnosti, neodvisnost

Primer: Vrnimo se k galilejevemu primeru

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^n$

Recimo da vemo, da je na prvi kocki dvojka

vsota 9: 216 225 234 243 252 261

vsota 10: 226 235 244 253 262

Še vedno je smiselen privzetek, da so te trojice enako verjetne

$$P(\underbrace{\text{vsota } 9}_{A_1} \mid B) = \frac{6 / 216}{36 / 216} = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$$

← verjetnost vsote 9 v pogoju B

$$P(\underbrace{\text{vsota } 10}_{A_2} \mid B) = \frac{5 / 216}{36 / 216} = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)}$$

Definicija: Naj bo B dogodek z verjetnostjo $P(B) > 0$ in **pogojna verjetnost** dogodka A glede na B je

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Primer: Vzemimo družine s tremi otroki.
Možnosti so $\Omega = \{MMM, MMŽ, MŽM, ŽMM, MŽŽ, ŽMŽ, ŽŽM, ŽŽŽ\}$

Privzemimo da imajo vsi izidi vrjetnost $\frac{1}{8}$

i) $P(2Ž \mid \text{v družini sta otroci obeh spolov}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$$= \frac{\frac{3}{8}}{\frac{6}{8}} = \frac{1}{2}$$

ii) $P(\text{vsaj en otrok je } Ž \mid \text{ -||- }) = 1$

Primer: Na internetu lahko najdete naslednjo igro na srečo: Imamo 12 ploščic.

1 1 1 1 2 2 3 D S S S S

Ploščice se v igri obrnejo in naključno permutirajo igralec obrača ploščice od leve proti desni, do prvega S
Izplačilo je vsota števk $\cdot 2$ če je vidna ploščica D

Primer: 2 3 D 1 S $\rightsquigarrow 6 \cdot 2 = 12$

Kolikšna je vrjetnost da vidimo D

$$\binom{12}{5}\binom{7}{4,2,1} \qquad \text{vse: } \binom{12}{4,1,4,2,1}$$

$$\frac{\dfrac{\cancel{12!}\,\cancel{7!}}{5!\,\cancel{7!}\,\cancel{4!}\,\cancel{2!}}}{\dfrac{\cancel{12!}}{4!\,\cancel{4!}\,\cancel{2!}}} = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$$

Definicija: Nabar (Konzen ali Steven)

$\{H_1, H_2, \dots\}$ je particija Ω, če je $\bigcup_i H_i = \Omega$

in $H_i \cap H_j = \emptyset$ za $\forall i \neq j$

$$\boxed{P(A)} = P(A \cap \Omega) = P(A \cap \bigcup_i H_i) = P\left(\bigcup (A \cap H_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap H_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(H_i)\, P(A \cap H_i)}{P(H_i)} = \boxed{\sum_{i=1}^{\infty} P(A|H_i) P(H_i)}$$

To je formula za popolno vrjetnost

$A = \{$ možnost da vidimo D $\}$

$H_k = \{$ prvi $\boxed{S}$ se pojavi na ktem mestu $\}$

$P(A|H_1) = 0$

$$P(A|H_4) = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{8}{4}}$$

$$P(A|H_k) = \frac{\binom{7}{k-2}}{\binom{8}{k-1}} = \frac{\frac{7!}{(k-2)!(\cancel{9-k})!}}{\frac{8!}{(k-1)!(\cancel{9-k})!}} = \frac{k-1}{8}$$

$$P(H_1) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n)} = P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1}) \cdot P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

$$\ldots = \boxed{P(A_n \mid A_1 \ldots \cap A_{n-1}) \cdot P(A_{n-1} \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-2}) \cdot \ldots P(A_2 \mid A_1) P(A_1)}$$

V našem primeru $A_1 = \{$ prva kartica $\neq [S]\}$

$A_k = \{$ prvih k kartic $\neq [S]\}$

$$H_k = A_1 \cap \ldots \cap A_k$$

$$P(H_k) = P(A_1) P(A_2 \mid A_1) \ldots \ldots P(A_k \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1}) =$$

$$= \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \ldots \cdot \frac{8-k+1}{12-k+1} = 4 \cdot \frac{8!\,(12-k)!}{12!\,(8-k+1)!}$$

seštejemo:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{9} P(A \mid H_k) P(H_k) = \ldots = \frac{1}{5}$$

Primer: V posodi imamo b belih in r rdečih kroglic. Igralca A in B igrata naslednjo igrico. Začne A in izbira kroglice naključno, dokler ne izbere druge barve. Zadnjo kroglico vrne v posodo. Potem je B na vrsti. Igro ponavljata dokler eden ne izbere zadnje.
Kolikšna je vrjetnost da je zadnja bela

Primer (od primera) 

5 možnosti: H_1 BBR ● ●●

H_2 BR ○●●●

H_5 RRRB ○○

H_4 RRB ○○●

H_3 RB ○○○●

$A = \{$ zadnja rdeča je bela

$P(A|H_1) = 0$ $\qquad P(A|H_2) = ?$

$P(A|H_3) = \frac{1}{2}$ $\qquad P(A|H_4) = ?$

$P(A|H_5) = 1$

K_1 BBR ●

K_2 BR ●○

K_3 RB ○○

$K_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$

$K_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$

$K_3 = \frac{1}{3} \cdot 1$

$$P(K_1)P(A|K_1) + P(K_2)P(A|K_2) + P(K_3)P(A|K_3) =$$

$$\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

sklepamo da je odgovor vedno $\frac{1}{2}$

Indukcija na števila kroglic (ki so različnih barv)

Izberemo particijo: $H_k = \{k$ belih in rdeča$\}$ $k \in [b]$

$K_j = \{j$ rdečih in bela$\}$ $j \in [r]$

Particija: $\{K_j, H_i\}$

Indukcijska predpostavka: trditev velja za $b+r=2$ (za $b=1$ in $r=1$) Indukcijska predpostavka: trditev velja za vse posode $z < r+b$ kroglic različnih barv. Verjetnost da je zadnja bela (A) je $\frac{1}{2}$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{b} P(A|H_i) \cdot P(H_i) + \sum_{j=1}^{n} P(A|K_j) \cdot P(K_j) =$$

ena bo 0 $P(H_b)$

$$= \sum_{i=1}^{b-1} \frac{1}{2} P(H_i) + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{2} P(K_j) + 1 P(K_r) =$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left(P(H_1) + \dots P(H_b) + P(K_1) + \dots + P(K_r)\right)}_{=1} + \frac{1}{2} P(K_r) - \frac{1}{2} P(H_b)$$

$$P(H_b) = \frac{b}{b+r} \cdot \frac{b-1}{b+r-1} \cdot \ldots = \frac{b!\,r!}{(b+r)!}$$

$$P(K_r) = \frac{r}{b} \cdot \frac{r-1}{b-1} \cdot \ldots = \frac{r!\,b!}{(b+r)!}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

Primer: Paradoks viteza denergja

2 igri naslečo:

1. mečemo 4 kocke, zmagamo če pade vsaj enkrat šestica

2. mečemo dve kocki 24 krat, zmagamo če pade vsaj enkrat dvojna šestica

$P(A|B) = P(A)$ interpretiramo kot neodvisnost A in B

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A\cap B) = P(A)\cap P(B)$$

Kdej so A, B, C neodvisni. Vsak par bi moral biti neodvisn in $A\cap B$ neodvisn od C

$$P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B\cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

$\{A_i\}_{i\in I}$ so neodvisni, če so v vseki končni dolžine m podružini dogodgi neodvisni. torej da velja

$$\forall n<m,\ \pi\in S_m.\quad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_{\pi(i)}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_{\pi(i)})$$

$A_i = \{$ na i-tem metu ni 6 $\}$ $\quad i \in [6]$

$$\{\text{zmagamo}\}^c = \bigcap_{i=1}^{6} A_i$$

Dogodki so med sabo neodvisni

$$P(\{\text{zmagamo}\}^c) = P\left(\bigcap_{i=1}^{6} A_i\right) = \prod_{i=1}^{6} P(A_i) = \frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{1296}$$

2)

$A_i = \{$ v i-tem metu ne dobimo dvojne ~~e~~ šestice $\}$

$$P(1^c) = P\left(\bigcap A_i\right) = \prod_{i=1}^{24} P(A_i) = \frac{35^{24}}{36^{24}} =$$

$P(1) = 0{,}4914 \qquad P(2) = 0.5177$