$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$f \in O(g) . \exists M > 0 . \exists N \in \mathbb{N} . \forall n > N . \ f(n) \leq M g(n)$

množenje $n^3 \rightsquigarrow n^{\log_2 7} \rightsquigarrow n$

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow f \in O(g)}$$

$\forall \varepsilon > 0 . \exists N > 0 . \ x > N . \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon$

$\Rightarrow |f(x)| < \varepsilon |g(x)|$

potem je

$\underset{\substack{\| \\ 1}}{\exists \varepsilon} > 0 . \exists N > 0 . \forall n > N . \ f(n) \leq \varepsilon g(n) \Rightarrow f \in O(g)$

$O(1) \subset O(\ln(\ln(n)))$

$O(\log_2(n)) = O(\log_{10}(n))$

$\log_2(n) = \frac{\log_{10} n}{\log_{10} 2} \in O(\log_{10}(n))$

$\log_{10}(n) = \frac{\log_2 n}{\log_2 10} \in O(\log_2(n))$

kolena

- že celo podjetje (predvsem po kolesarjenju)
- zdaj še po kolesu jemlje na fotky
- sestrična ima obrabljen hrustanec

$$O(1) \subset O(\log(\log n)) \subset O(\log_2(n)) = O(\log_{10}(n))$$

$$\subset O(\sqrt{n}) \subseteq O(\log(n!)) \subseteq O(n\log n) \subseteq O(3^{\ln n})$$

$$\boxed{O(\log_a(n)) \subset O(n^{\varepsilon})}$$

$$\subseteq O(n^2) \subseteq O(2^n)$$

$$\subseteq (2^{2\log n})$$

$$\log(n!) \le \log(n^n) = n\log n$$

$$O(\log(\log(n))) \subseteq O(\log n)$$

$\log(n) < n$ in log inj naraščajoča

$$\log(\log(n)) \le \log(n)$$

$$\log(n) \in O(\sqrt{n})$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} \overset{LH}{=} \frac{1\sqrt{n}}{n\frac{1}{2}} = \ln 2\frac{1}{2\sqrt{n^3}} = 0 \Rightarrow \log(n) \in O(\sqrt{n})$$

$$3^{\ln(n)} = 3^{\frac{\log_3(n)}{\log_3 e}} = = n^{\frac{1}{\log_3 e}} = n^{\varepsilon > 1}$$

$$\sqrt{n} < n < n\log n$$

$$O(n \log n) = O(\log n!)$$

$$\log n! = \sum_{i=1}^{n} \log i$$

$$\log n! > \log\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2}(\log n - \log 2) \approx n($$

$$n \log n < n^2$$

$$n \log n \leq n \cdot n \leq n^2$$

$$O(n^2) \subseteq O(2^n) \subseteq O(2^{n \log n} \subsetneq O(n!)$$

$$2^{\log n^n} = 2^{\frac{\log_2 n^n}{\log_2 10}} = n^{\log_2 10\, n}$$

seznam: n

append: $O(1)^*$

delite(i) $O(n)$ $(n-i)$

copy : $O(n)$

uppdate(i) : $O(1)$

get(i) : $O(1)$

find(a) : $O(n)$

add : $O(n)$

po nes tipična zenim

add(i)	$O(n)$
add(0,n)	$O(n)$ $O(1)$
delete(i)	$O(n)$
delet(0,n)	$O(n)$, $O(1)$
get(i)	$O(1)$
search(x)	$O(n)$

po nes tipična zenim

	čas	prostor
add(i)	$O(n)$	$O(1)$
add(0,n)	$O(n)$ $O(1)$	$O(1)$
delete(i)	$O(n)$	$O(1)$
delet(0,n)	$O(n)$, $O(1)$	$O(1)$
get(i)	$O(1)$	$O(1)$
search(x)	$O(n)$	$O(1)$

Slovar

$O(1)$ vse

algoritem za iskanje maximuma

```
m = seznam[0]
for c in seznam[1:]
    if c > m => m = c
return m
```

$O(n), O(1)$

---

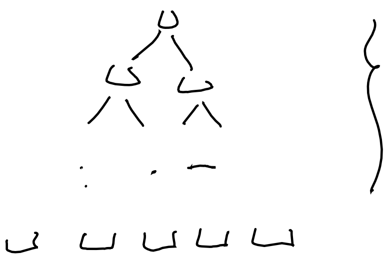
seznam n

seznam.sort $\quad O(n\log n) \quad O(1)$

seznam[-1]

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}^{n} i = O(n^2)$$

Rekurzivno: seznam na dva dela



$\log n$ globina

čas je lahko $O(\log n)$ z procesorjem n procesorjev

lahko pa je tudi $O(\frac{n}{\log n})$ procesorjev in je še vedno hitreje

Bitne operacije

- bitand $\&$
- bitor $|$
- bitxor $\wedge$
- bitnot $!, \sim$
- bitshiftleft $<<$
- bitshift right $>>$

v jezikih

$\&\&$

$||$

$!=$

not

7: 111

9: 1001

$$\begin{array}{r} 111 \\ 1001 \\ \hline 1 \end{array} \;\&$$

$$\begin{array}{r} 0111 \\ 1001 \\ \hline 1111 \end{array} \;|$$

$$\wedge \begin{array}{r} 111 \\ 1001 \\ \hline 1110 \end{array}$$

$$! \begin{array}{r} 111 \\ \hline 0 \end{array} \qquad ! \begin{array}{r} 1001 \\ \hline 110 \end{array}$$

$$<< \begin{array}{r} 111 \\ \hline 1110 \end{array} \qquad << \begin{array}{r} 1001 \\ \hline 10010 \end{array} \qquad 9 >> 2 \begin{array}{r} 1001 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$a \oplus b \oplus b = a$$

a\b	0	1
0	$0 \oplus 0 = 0$	$1 \oplus 1 = 0$
1	$1 \oplus 0 = 1$	$0 \oplus 1 = 1$

a…bit

$$
\begin{array}{rl}
 & a_n \ldots\ldots a_2 a_1 a_0 \\
\& & [0\ldots 01\, 0\ldots 0\, 0\, 0\, 0] \leftarrow \text{maske} \\
\hline
 & 0\ldots\ldots a_i \ldots\ldots 0
\end{array}
$$

if $(\underbrace{a \,\&\, \text{mask}}_{>0 \text{ zero True}})$

maske $= 1 \ll i$

$$
\begin{array}{rl}
1.) & [0\ldots\ldots 0] \\
\hline
\sim & [1\ldots\ldots 1] \\
\hline
\gg n-i & [0\ldots\ldots 1\ldots 1]
\end{array}
$$

$\sim((\sim 0) \ll i)$

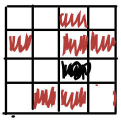
$(1 \sim i) - 1$

funkcija sprejme a, i

$a_n \dots a_1 0 \longrightarrow a_n \dots 1 \dots a_1 a_0$

```
def f(a,i):
    mask := 1<<i
    return a | mask
```

```
def f'(a,i)
    mask := ~(1<<i)
    return a & mask
```



10 mesta

n= 0 0 1 0 ¦ 1 0 1 1 ¦ 0 0 0 0 ¦ 0 1 1 0 ¦ 1 0 1 0

levo: n-1
desno: n+1
gor: n-4
dol: n+4

```
def levopojdi(a)
    maskp = (1 << 4) - 1
    p = a & maskp
    mask = ~(1 << 20 - p10 + 1)
    return (a & mask) - 1
```

```
a = a & mask
a = (a>>4)<<4
return a | p
```

def fib(n):

```
prv = 1
drv = 1
for i in range(n)
    drv = drv'
    drv += prv
    prv = drv'
return drv
```

$O(drv) = 1{,}6^{i} = 1{,}6^{n}$

velikost

št bitov za $drv = \log_2 1{,}6^{i}$

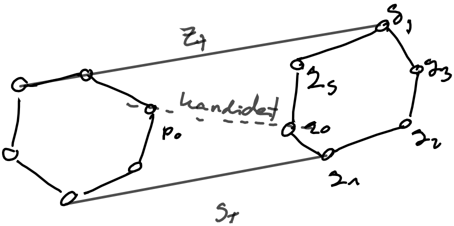
$= O(i)$

assign $= O(n)$

$\sum v_1 + v_2 + v_3 = \sum_{i=1}^{n} 3O(i) = O(n^2)$

TRIE - prefix tree

Y españa



$Z_t = p_i\, q_j$

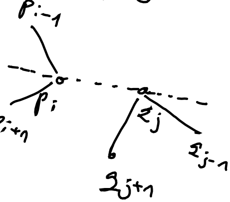
$S_t = p_a\, q_b$

Združena ovojnica brez rob tisto

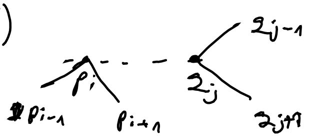
Kako do Z_t

$Z_t = p_0 q_0$

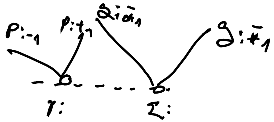
while Z_t ni zgornja tangenta

i) 

V tem primeru nastavimo $p_i = p_{i-1}$ $(i = i-1)$

ii) 

$j = j+1$

iii) 

Če je spodnja tangenta, dvignemo oba $i += 1$ $j += 1$

Bla bla bla

Če pozicija ni  narediš $+= 1$

Predstave grafov

- Matrika sosednjosti $A = [a_{ij}]$; $a_{ij} = \begin{cases} 1; & i \text{ in } j \text{ povezana} \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$
- slovar { vozlišče : [povezave do vozlišča] }

{ v: [u for u in next(v)] for v in G }

opomba: če vozlišča označimo od 0 do n-1, namesto slovarja uporabimo seznam

ideja DFS:

1. izberemo začetno vozlišče in ga shranimo v obiskane
2. izberemo soseda, ki še ni bil obiskan. označimo obiskanega
3. premaknemo se v soseda

ideja BFS:

1. izberemo začetno vozlišče in ga damo v obiskane
2. obiščemo vsakega soseda in jih damo v obiskane, ter naredimo seznam vseh sosedov sosedov
3. obiščemo vse sosede sosedov ...... isto kot 2.

from collections impart deque ← dubble ended que

O(1) add(x) (doda nadesno)

O(1) pop(x) (vzemi desno)

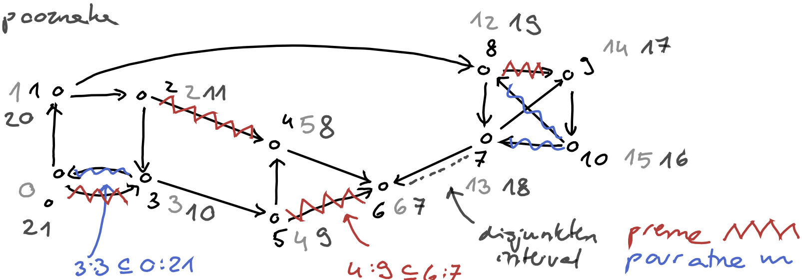
O(1) popleft(x) (vzemi levo)

```
def DFS(G,s):
    n = len(G)
    obiskani = [False]*n
    sklad = deque([S])
    while sklad:

        v = sklad.pop()
        if not obiskani[V]      ← standardna struktura
            for u in G[V]:
                if obiskani[u] == False:
                    sklad.add(u)
            obiskani[V] = True
```

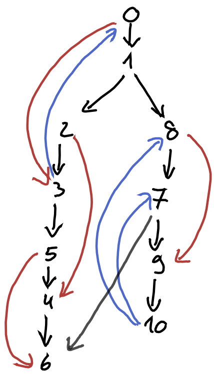
```
def BFS(G,s):
    n = len(G)
    obiskani = [False]*n
    vrsta = deque([S])
    while vrsta:

        v = vrsta.popleft()
        if not obiskani[V]
            for u in G[V]:
                if obiskani[u] == False:
                    vrsta.add(u)
            obiskani[V] = True
```

-Predoznake
-pooznake

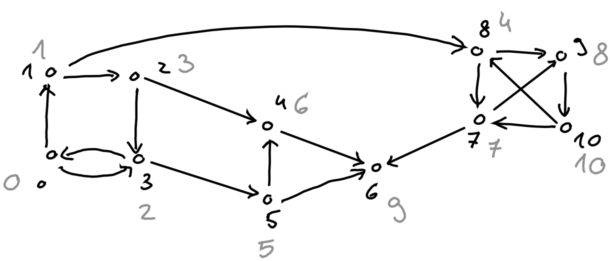
DFS

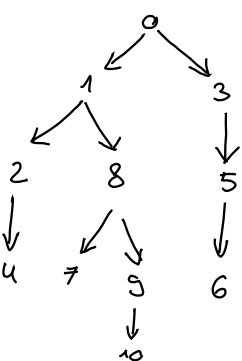


~~BFS~~

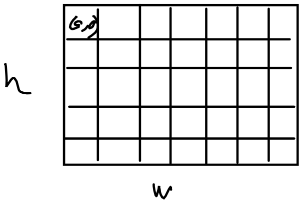


BFS





Razvij pristop za delo z grafi, ki so mreže



$\#$ vozlišč $= h \cdot w$ (celice)

4-sosednost

$(i,j) \sim (i \pm 1, j)$
$(i,j) \sim (i, \pm j)$

```
smeri = [(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)]
def get-sosedi(i,j):
    return [(i+a, j+b) for (a,b) in smeri]
```

G neusmerjen graf

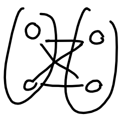
Algoritem Da če graf dvodeln, ne sicer

$V(G) = A \sqcup B$ -bipartcija na dva dela, tako da

med

$\Leftrightarrow$

kako lahko pobarvama $V(G)$ tako, da vozlišča vedno dobijo drugo barvo.

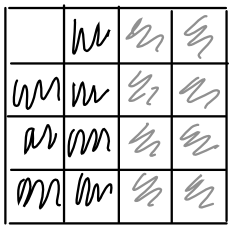


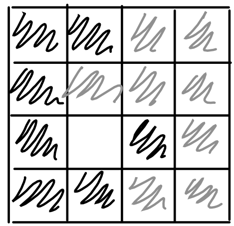
```
from collections import deque
def je_dvodeln(G)
    n = len(G)
    bave = [None]*2
    vrsta = deque([S])

    barva[0]=0
    while not vrsta.empty:
        u = vrsta.popleft()
        trb = barva[u]
        for v in G[u]
            if barva[v]==None
                vrsta.push(v)
                barva[v] = trb %2
            elif barva[v]== trb
                return False
return True
```

= obiskani

```
def pot_do_najk (G)
    n=len(G)
    razdalje =[None]*n
    pred = [None]*n
    razdalja[0]=0
    vrsta.add(0)
    while not vrsta.empty
```

3 Mreža 4x4 7 rdečimi 8 modrimi polji 1 prazn





Zanima nas najmanjše število potez ~~...~~ iz A v B

poljubni pozicija

Vsaka konfiguracija je svoje vozlišče

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{pozicija bele}}$ $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{rdeče in modre}}$

4 biti   16 bitov

Sosedi:

razen na robu

pozicija bele $(\pm 1 \vee \pm 4) \wedge$ povsod ista ker

razen v pozicijah bele, tam pa mora biti ista barva

28.11

Zwen: pomembno

5. 12

Dijkstrov algoritem

vhod: G usmerjen/neusmerjen graf, povezavno utežen, uteži so nenegativne,
$w: E(G) \to \mathbb{R}_+$

začetno vozlišče s (lahko še končno vozlišče)

izhod ⇒ razdalja najkrajše poti od s od vseh ostalih vozlišč

- začnemo v s $d(s)=0$
- pogledamo sosede od s in izberemo tistega, ki je „najbližji" $d(u)=w(u)$
- ostale sosede damo na prioritetno vrsto v obliki $(d(s)+w(v), v)$
- naprej iz vrste

za dvojiško kopico

$$O(|V|+|E|+\underbrace{|E|}_{\text{koliko jih je na prioritetni vrsti}}(\overbrace{\underbrace{\text{zahtevnost dodajanja}}_{O(1)}}^{\log(E)}+\overbrace{\underbrace{\text{zahtevnost brisanja}}_{O(E)}}^{\log(E)}))$$

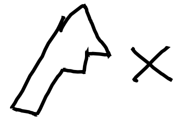
PQ seznam

$$= O(|V|+|E|+E(\log E)) = O(E\log E + V)$$

Lahko tudi: $O(V^2)$

Dvojiška kopica

- levo poravnano dvojiško drevo
- lastnost kopice: vrednost
  vsakega starša $\leq$ min vrednosti
  oben otrok



V korenu je najmanjši element, ampak
to ni iskalno drevo

Osnovne operacije

dodaj(x)

briši (izbriše minimum)

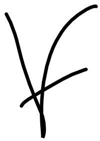
dodaj:

dodamo ga na zadnje mesto in dvigujemo
gor, dokler ne zadošča lastnosti kopice

briši:

vzamemo koren in ga izbrišemo.

Najbol spodnji desni element prestavimo
v koren in potem ga bublamo dol



12.12

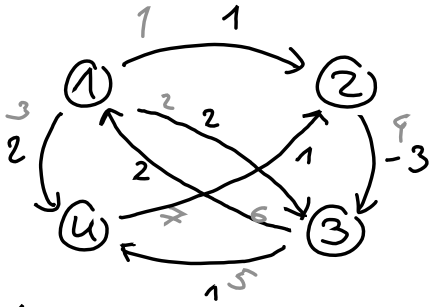
Bellman-Ford

vhod: graf G (usmerjen, utežen), zač. vozlišče
↳ dovolimo negativne povezave
↳ ne dovolimo negativnih ciklov

izhod: seznam d_z dolžinami najkrajših poti od s do ostalih vozlišč.

Ideja: (n-1)-krat relaksiramo vsako povezavo

```
def f(G,s):
    d = [∞]*n          n... št vozlišč
    d[s] = 0
    for _ in range(n-1):
        for (u,v,w) in E(G):
            if d[v] > d[u]+w:      } relaksacija
                d[v] = d[u] +w     } povezave
    return d
```



	0	1	2	3	4
1	0	0	0	0	0
2	∞	1	1	1	0
3	∞	2	-2	-2	-2
4	∞	2	2	-1	-1

po tem vemo, da je nekje negativni cikel

Tu bi se moralo končati

2) Floyd Warshallov algoritem

a) $D_k(i,j)$ ..... dolžina najkrajše poti od i do j,

ki vsebuje le notranja vozlišča $1, \dots, k$

$$D_0(i,j) = \begin{cases} \omega(i,j) & ; \exists (i,j,\omega) \\ \infty & ; \text{sicer} \end{cases}$$

$$D_k(i,j) = \min\{D_{k-1}(i,j), D_{k-1}(i,k) + D_{k-1}(k,j)\}$$

$D_n(i,j)$ je najkrajša pot

če je $D_n(i,i) < 0$ potem Graf vsebuje negativen cikel

čas je $O(n^3)$ n... št vozlišč

Velika igra z odprtim svetom ima na različnih lokacijah tržnice, kjer lahko kupujemo in prodajamo surovine

npr.: 10 železa za 1000 lesa

Ker se tržnice nahajajo na različnih delih sveta, kjer so pokrajine različne, se lahko menjalni tečaji razlikujejo

Surovino X bi radi zamenjali za čim več surovine Y. Kako bi to naredili?

Vozlišča so vse možne surovine

$X_1 \to X_2 \Leftrightarrow \exists T.\ T(X_1, X_2)$

T ... tržnica

$\mathcal{T}$ ... množica tržnic

$$w(X_1, X_2) = \max_{T \in \mathcal{T}} \left\{ \begin{array}{l} r(X_1, X_2) \text{ menjalni tečaj} \\ r(X_1, X_2) \end{array} \right.$$

iščemo pot od X v Y, kjer je produkt uteži na povezavah čim večji

$w(X_1, X_2) \Rightarrow -\log(w(X_1, X_2))$