

STÖTAR & ÖVERFÖRING

Rapport gällande faktorer som påverkar elasticitet, energibevaring och rörelsemängdsmomentsöverföring i stötar.

Oskar Jonsson (cid: osjon) och Vidar Petersson (cid: vidarp)

Program: Teknisk Fysik.

Kurs: Experimentell fysik 1 - mätteknik, TIF083, del A.

Sammandrag

Denna rapport undersöker kollisioner i en och två dimensioner med fokus på bevarande och fördelning av energi och rörelsemängd samt rörelsemängdsöverföring. I endimensionella kollisioner av ryttare på en luftskena studeras sambandet mellan stötkoefficienten e och den relativa kollisionshastigheten v_{rel} för olika material. Resultaten visar att e minskar när v_{rel} ökar, med olika karaktär beroende på material. I tvådimensionella kollisioner för puckar på ett luftbord analyseras påverkan av kollisionspunkten d mellan två puckar för fördelningen av kinetisk energi, rörelsemängd och rörelsemängdsmomentsöverföring. Resultaten avslöjar att fördelningen av kinetisk energi förändras avsevärt med d , med en ökning av andelen rotationsenergi när d ökar. Dessutom analyseras riktningen på rörelsemängden efter kollisionen i förhållande till kollisionspunkt d . Resultaten ger värdefulla insikter om energi- och rörelsemängdsbevarande i olika dimensioner och har implikationer för tillämpningar som kollisionssimuleringar och beräkningar av planetsystem. Rapporten belyser även vikten av att beakta faktorer som friktion i riktiga kollisionssituationer, vilket kan avvika från idealiska teoretiska modeller.

Nyckelord: kollision, stötkoefficient, energibevaring, elasticitetsgräns

Abstract

This report investigates collisions in one and two dimensions with a focus on the conservation and distribution of energy and momentum, as well as momentum transfer. In one-dimensional collisions of riders on an air track, the relationship between the coefficient of restitution e and the relative collision velocity v_{rel} for different materials is studied. The results show that e decreases as v_{rel} increases, with different characteristics depending on the material. In two-dimensional collisions of pucks on an air table, the impact of the collision point d between two pucks on the distribution of kinetic energy, momentum, and angular momentum transfer is analyzed. The results reveal that the distribution of kinetic energy changes significantly with d , with an increase in the proportion of rotational energy as d increases. Additionally, the direction of momentum after the collision in relation to the collision point d is analyzed. The results provide valuable insights into the conservation of energy and momentum in different dimensions and have implications for applications such as collision simulations and calculations of planetary systems. The report also highlights the importance of considering factors like friction in real collision situations, which may deviate from ideal theoretical models.

Key words: collision, coefficient of restitution, conservation of energy, elastic limit

Innehåll

1	Inledning	1
2	Teori	1
3	Metod	2
3.1	Material och uppställning	2
3.2	Genomförande	4
4	Resultat	4
4.1	En dimension	5
4.2	Två dimensioner	5
5	Diskussion	7
6	Slutsats	8
	Referenser	8
A	Laborationsloggbok	9
B	Dataanalys	9
C	Mätvärden	14
D	Mätutrustning	15
E	Mätosäkerhet	15
F	Peer-granskning	15

1 Inledning

Stöt, eller kollision, är ett fenomen inom klassisk mekanik där kroppar möts och växelverkar under kort tid. Dessa stötar sker i allt från galaxer ner till den mikroskopiska nivån. Därför är det intressant att undersöka hur olika ingående faktorer påverkar stötars egenskaper. Detta arbete syftar speciellt till att presentera hur bevaring och överföring för stötar i olika dimensioner påverkas.

Det övergripande målet med detta arbete är att analysera energi- och rörelsemängdsbevaring för stötar i en och två dimensioner samt rörelsemängdsmomentöverföring i två dimensioner. För att uppfylla detta mål koncentrerar sig detta arbete på att besvara följande två konkretiserade frågeställningar:

- Hur påverkar relativ kollisionshastighet för olika material stötkoefficienten i en en-dimensionell stöt?
- Hur påverkar kollisionspunkten mellan två puckar fördelningen av rörelsemängd, translations- och rotationsenergi samt rörelsemängdsmomentsöverföring i en två-dimensionell stöt?

Genom en kombination av teoretisk analys, experimentell datainhämtning och dataanalys syftar vi till att ge insikter av betydelse inom ovanstående faktorer som styr kollisioner. Dessa insikter kommer att vara av betydelse för tillämpningar inom olika fysikaliska och tekniska områden som till exempel krocksimulationer och beräkning av planetsystem.

2 Teori

Kollisioner mellan kroppar introducerar överföring av rörelsemängd, rörelsemängdsmoment och energi som är centrala inom den klassiska mekaniken. Dessa fenomen beskriver förändring av kroppars translation och rotation i deras rörelsedimensioner och är bevarade ur ett systemspecifikt perspektiv, det vill säga att dessa kroppars förändring av dessa storheter går att förutspå med hjälp av uttryck härledda från Newtons lagar.

Rörelsemängd är en vektorstorhet, betecknat \mathbf{p} , som är vektorprodukten av en kropps massa m och dess hastighetsvektor \mathbf{v} . Rörelsemängden är bevarad i ett slutet system om inga yttre impulser påverkar systemet vilket innebär att ett system av flera kroppars rörelsemängd kan adderas med avseende på varje kropps enskilda rörelsemängd enligt [1]

$$\mathbf{p} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i. \quad (1)$$

Rörelsemängdsmoment är även det en vektorstorhet som beskriver en kropps rotationstillstånd med avseende på dess massfördelning samt vinkelhastighet. Denna storhet beskrivs generellt med uttrycket

$$\mathbf{L}_O = \bar{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_{MC} \times \mathbf{p} \quad (2)$$

där \mathbf{L}_O är rörelsemängdsmomentet kring en godtycklig punkt i systemet, \mathbf{r}_{MC} är ortsvektorn till kroppens masscentrum och \mathbf{p} är kroppens rörelsemängdsvektor. $\bar{\mathbf{I}}$ är kroppens tröghetsmoment med avseende på masscentrum och $\boldsymbol{\omega}$ är kroppens rotationsvektor med avseende på masscentrum. Rörelsemängdsmoment är likt rörelsemängden bevarad i

ett slutet system [1]. Vid analys av enbart rörelsemängdsmoment kring masscentrum kan den förenklade formeln $\mathbf{L}_{MC} = \bar{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}$ användas.

Den totala kinetiska energin för en kropp definieras enligt

$$T_{\text{tot}} = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 \quad (3)$$

där parametrarna är de storheter som tidigare definierats i ekvation (1) och (2) för en godtycklig kropp fast utan sina vektoregenskaper vilket leder till att T inte har någon riktning utan enbart är en skalär [1].

I ett slutet system är energin enbart bevarad i idealfallet. Detta innebär att i en ideal stöt mellan två kroppar är den totala energi för systemet konstant. I praktiken är en stöt däremot oftast inelastisk och en energiförlust sker på grund av exempelvis plastisk deformation, värme eller ljud. Elasticiteten för en endimensionell stöt beskrivs av stötkoefficienten enligt

$$e = \frac{v'_{\text{rel}}}{v_{\text{rel}}} \quad (4)$$

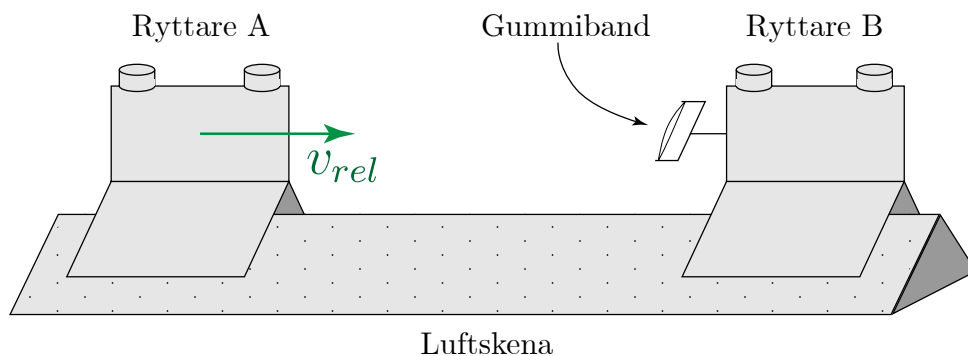
där v'_{rel} är relativa hastigheten omedelbart efter och v_{rel} omedelbart före kollision. Stötkoefficient med kvot 1 representerar således en perfekt elastisk stöt. I allmänhet betraktas e för stöt mellan två kroppar som en konstant beroende på deras material [1]. Dock visar en mer rigorös analys att även kollisionshastighet påverkar e [2]. För hårda material bestämmer deras elasticitetsgräns den högsta spänning de tål utan att deformeras plastiskt. För små kollisionshastigheter är spänningarna i materialet under elasticitetsgränsen och således uppträder materialet helt elastiskt i likhet med en fjäder och all energi bevaras. Om spänningarna däremot överstiger elasticitetsgränsen kommer enbart en del av energi bevaras, resten förloras till deformation. I kollisioner är impulsen i materialet proportionerligt med v . Teoretiskt konvergerar därför e för alla material i 1 för små kollisionshastigheter [1].

3 Metod

Den experimentella datainsamlingen bestod av två olika uppställningar för att tillsammans svara på de två respektive frågeställningarna. I del 1 undersöktes stötar i en dimension och deras stötkoefficient. I del 2 utvidgades undersökningen till två dimensioner och även fördelning av energi, rörelsemängd och rörelsemängdsmoment i två dimensioner undersöktes. Nedan redovisas det material, uppställningar och tillvägagångssätt som användes.

3.1 Material och uppställning

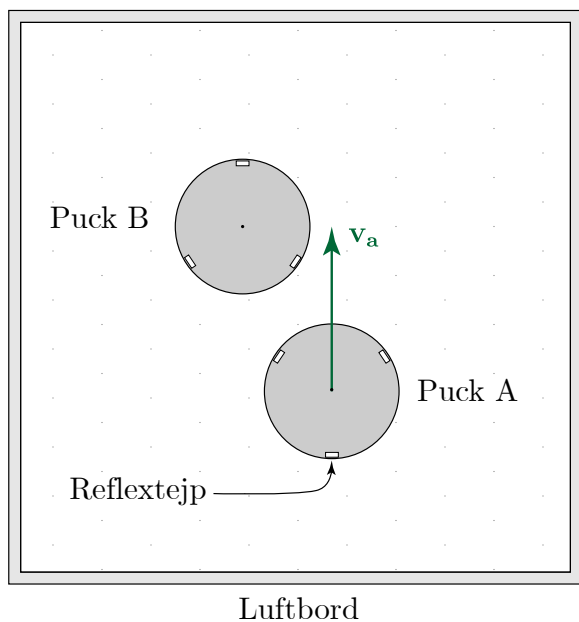
För del 1 användes ryttare av metall på en luftskena för att modellera endimensionella stötar, enligt figur 1. Luftskenan var av modell Pasco physics airtrack (SF-9214) och var hopkopplad med en luftfläkt av modell Frederiksen Air Blower 1970,70. Ovanpå själva ryttarna som gled längs luftskenan placerades två metallvikter och reflextejp för att mäta ryttarnas position med ett kamerasystem. De extra vikterna placerades på toppen i syfte att förskjuta masscentrum uppåt och därmed minska impulsmomentet i stötarna och således motverka oönskad rörelse i \hat{z} -led. I den ena mätserien försågs även en av ryttarna med en anordning bestående av en klyka med gummiband. Detta för att undersöka hur materialet i kollisionspunkten påverkar stötkoefficienten.



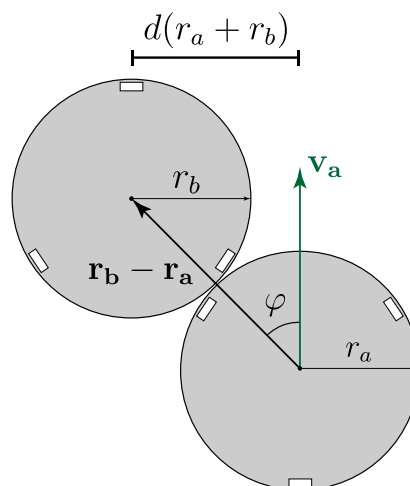
Figur 1: Försöksuppställningen för endimensionella stötar. Två ryttaire på en luftskena kolliderade med relativ hastighet v_{rel} . I första mätserien utgjordes deras kontaktpunkt av ett uppspant gummiband. I den andra skedde kollisionen metall mot metall.

För del 2 användes istället ett luftbord med två metallpuckar, enligt figur 2, för att undersöka stötar i två dimensioner. Luftbordet kopplades i sin tur till samma luftfläkt som i del 1. Utanpå puck A placerades ett gummiband i syfte att öka friktionen mellan kontaktytorna vid stötarna. Ovanpå vardera puck placerades även tre bitar reflextejp för att mäta position och rotation. Bitarna placerades på randen för att möjliggöra numerisk beräkning av masscentrums translation och rotation med hög precision.

Utöver utrustningen för respektive uppsställningen användes även ett motion capture system från Qualisys av modell Oqus 300 monterat i taket för att mäta objektens position över tid med upplösning 10^{-6} m. Kamerasystemets uppdateringsfrekvensen valdes till 500 Hz för att erhålla högre upplösning i tid och med större noggrannhet bestämma kollisionsögonblicket.



(a) Uppställningen för de tvådimensionella stötarna av puckar på luftbord. Puck A kolliderade med initialhastighet v_a i puck B. Längs puckarnas ränder placerades reflextejp.



(b) Kollisionsparametrar för puckarna. Utskrivna är den icke-normaliserade kollisionspunkten $d(r_a + r_b)$, hastighetsvektorn v_a , Ortsvektorn mellan masscentran $\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a$, relativa vinkeln φ och radierna r_a och r_b .

Figur 2: Försöksuppställning för de tvådimensionella stötarna på luftbordet sedd ovanifrån och deras kollisionsparametrar.

3.2 Genomförande

Innan mätningarna genomfördes kalibrerades bordets och skenans lutning samt deras lufttillförsel för att minimera icke önskvärd energipåverkan i systemet. Kontaktytor torkades sedan av med desinfektionsdukar för att avlägsna ytbeläggningar av smuts och tejprester. Även kamerasystemet kalibrerades med tillhörande kalibreringsutrustning tills en residual runt $2 \cdot 10^{-4}$ m erhöles. I både del 1 och 2 mättes objektens relevanta konstanter innan med mätutrustning från labbsalen, se tabell D.3. I del 1 mättes massorna och i del 2 mättes massorna och radierna, se tabell C.1 och C.2.

I första mätserien för del 1 monterades klykan med gummiband på ryttare B. Därefter placerades de på luftskenan och skickades iväg för hand mot varandra drygt 50 gånger med godtyckligt varierad relativ hastighet. För varje stöt startades en ny mätning med kamerasystemets mjukvara, Qualisys Tracking Manager (QTM), som löpande registrerade ryttarnas position. I den andra mätserien genomfördes samma procedur efter att klykan monterats av så att ryttarnas metallsidor blev ny kontaktpunkt.

Utifrån den erhållna positionsdatan beräknades den relativa kollisionshastigheten v_{rel} innan kollisionen samt stötkoefficienten e med datanalis i *Python*, se listing 1 i bilaga B. Koefficienten beräknades genom att ta medelvärde av v_{rel} under 0,2 sekunder innan och efter stöten för att sedan dividera dem enligt ekvation (4).

I del 2 placerades puckarna på luftbordet där puck A sköts för hand mot den stillastående pucken B. Detta skedde drygt 50 gånger där vinkel och träffpunkt varierades godtyckligt. Utifrån den insamlade positionsdatan från markörerna på randen beräknades initialt puckarnas masscentrums translation och rotation numeriskt, se bilaga B tabell 2. Utifrån det beräknades därefter puckarnas translationshastighet \mathbf{v}_i , vinkelhastighet ω_i , rörelsemängd \mathbf{p}_i , rörelsemängdsmoment \mathbf{L}_{MC_i} och kinetiska energi T_i numeriskt enligt dataanalysen i bilaga B och teorin i avsnitt 2. För att besvara frågeställningen om bevaring och fördelning innan och efter stöt studerades enbart medelvärde av parametrarna 0,2 sekunder innan och efter kollisionstillfälle. Kollisionspunkten d definierades däremot som det normerade avståndet mellan masscentran vinkelrät mot hastighetsvektorn i kollisionen. Kvoten beräknades enligt

$$d = \frac{\sin(\varphi) \|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a\|}{(r_a + r_b)}. \quad (5)$$

utifrån parametrarna redovisade i figur 2b.

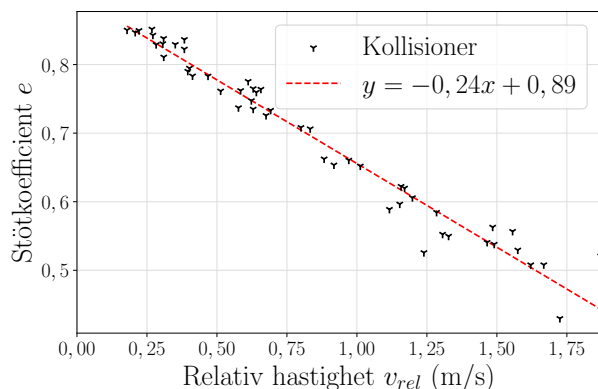
Innan varje mätserie påbörjades genomfördes även en referensmätning av påverkan från eventuell friktion och luftströmmar. Objektet sköts över kollisionområdet på luftskenan respektive luftbordet för att sedan numeriskt beräkna påverkan.

4 Resultat

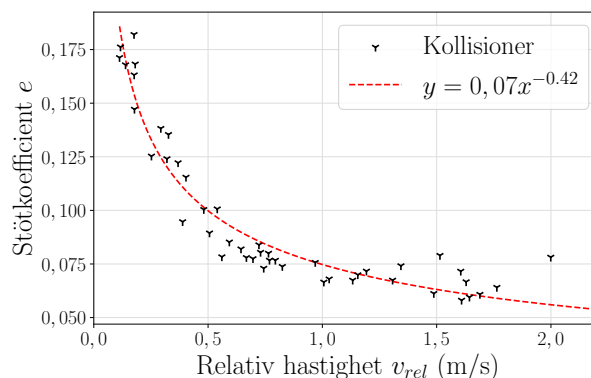
Nedan presenteras resultaten för samtliga mätserier beskrivna i avsnitt 3.2 i form av figurer och regressionsanalyser. I varje mätserie registrerades drygt 50 mätpunkter där den relativa hastigheten v_{rel} för ryttarna varierades i det endimensionella fallet och förhållandet mellan puckarnas centrum d enligt ekvation (5) i fallet med två dimensioner. Behandling av rådatan görs enligt dataanalys i bilaga B för att få relevanta parametrar till figurerna.

4.1 En dimension

I figur 3 presenteras mätserier för uppställning 1 där v_{rel} varierar på x-axeln och den beräknade stötkoefficienten från ekvation (4) på y-axeln. I figur 3a användes det gummiband som visas i figur 1 som kontaktpunkt vilket visar ett linjärt samband mellan v_{rel} och e . Detta samband visas med hjälp av regressionslinjen $y = -0,24x + 0,89$ som har ett R^2 -värde på 0,96. Figur 3b behandlar istället ryttarna utan gummibandet som kontaktpunkt vilket istället visar ett potenssamband enligt regressionslinjen $y = 0,07x^{-0,42}$ som har ett R^2 -värde på 0,93.



(a) Stötkoefficient beroende på v_{rel} för ryttare med gummiband som kontaktpunkt.

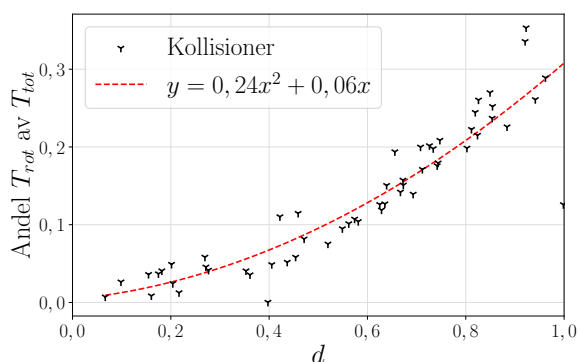


(b) Stötkoefficient beroende på v_{rel} för ryttare med ryttarnas metall som kontaktpunkt.

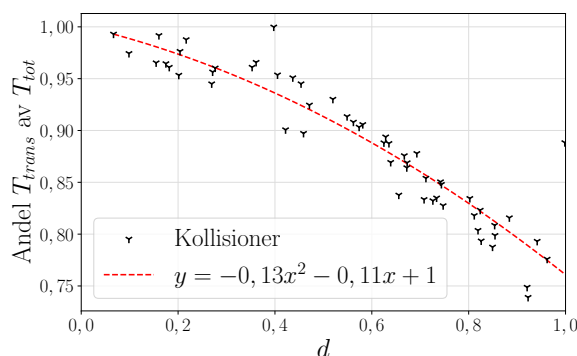
Figur 3: Stötkoefficienter för kollisioner av ryttare i en dimension. Notera minskningen av e i samband med att v_{rel} ökar.

4.2 Två dimensioner

I figur 4 visas fördelningen av rotation samt translationsenergi av den totala energin för systemet beroende av d , där d är det normerade avståndet mellan masscentran vinkelrät mot hastighetsvektorn i kollisionssögonblicket, enligt uppställningen i figur 2a.



(a) Andel rotationsenergi av total energi för kollisioner mellan puckar i två dimensioner beroende på d .

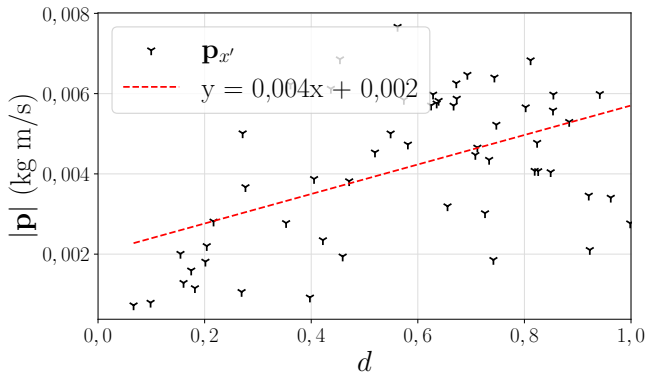


(b) Andel translationsenergi av total energi för kollisioner mellan puckar i två dimensioner beroende på d .

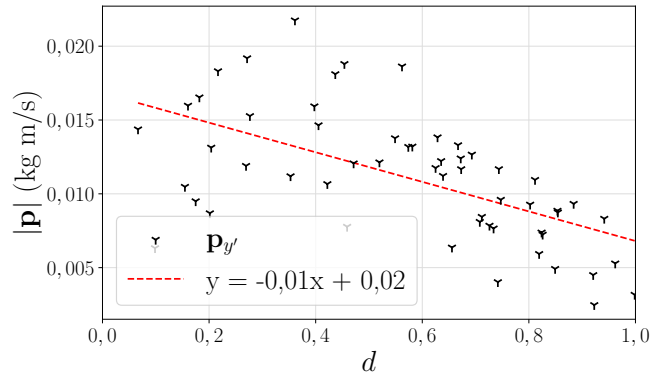
Figur 4: Andel rotations- och translationsenergi för två puckar med avseende på d . Notera sambandet mellan rotations- samt translationsenergi och d genom figurernas motsatta trender. Regressionslinjerna har R^2 -värde på 0,85 respektive 0,86.

Med hjälp av både figur 4a och figur 4b syns sambandet att rotationsenergin för systemet ökar i samband med att d ökar och att translationsenergin för systemet ökar när d minskar.

I figur 5 visas rörelsemängden i x' -led och y' -led för puck B med avseende på hastighetsvektorn för puck A som nollställe i ett nydefinierat koordinatsystem med hastighetsvektorn för puck A som utgångspunkt.



(a) Rörelsemängd för puck B i x' -led beroende av d . Notera sambandet mellan rörelsemängden och d .

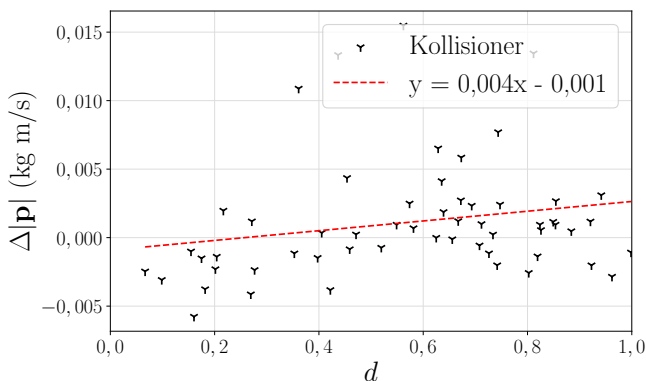


(b) Rörelsemängd för puck B i y' -led beroende av d . Notera sambandet mellan rörelsemängden och d .

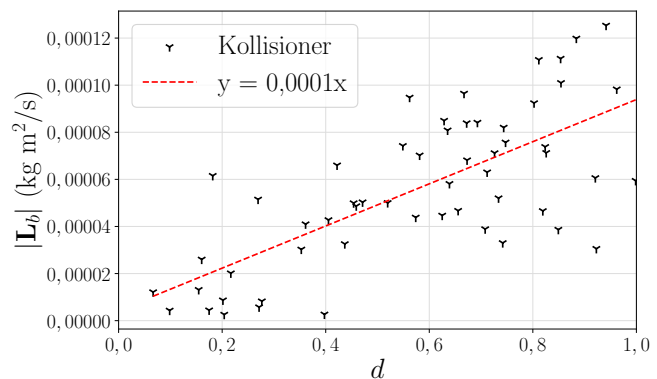
Figur 5: Rörelsemängdskomponenter beroende av d i ett nydefinierat koordinatsystem med puck A:s hastighetsvektor som utgångspunkt. Notera figurernas motsatta trender. Regressionslinjerna har R^2 -värde på 0,25 respektive 0,35.

Med hjälp av figur 5a och figur 5b syns sambandet mellan rörelsemängden i x' -led och y' -led i relation till d .

I figur 7 visas differensen för den absoluta rörelsemängden för hela systemet före och efter kollision beroende av d där många punkter är centrerade runt 0. I figur 7 visas istället det absoluta rörelsemängdsmomentet för puck B beroende av d där det syns att L_b ökar i samband med att d ökar.



Figur 6: Rörelsemängdsbevaring med avseende på d . Notera mätvärdernas centrerung kring 0. Regressionslinjen har ett R^2 -värde på 0,05.



Figur 7: Rörelsemängdsmomentet för puck B L_b med avseende på d . Notera ökningen av rörelsemängdsmoment när d ökar. Regressionslinjen har ett R^2 -värde på 0,51.

Felanalysen av resultaten består både av felfortplantningen av mätvärdena, redovisade i bilaga E, och referensmätningarna av objektens friktion. Referensmätningarna när varje puck och ryttare gled över ytan utan kollision visade att medelvärdet för ΔT under 0,4 s var $4,8 \cdot 10^{-4}$ J för ryttare A, $2,9 \cdot 10^{-4}$ J för ryttare B, $3,6 \cdot 10^{-5}$ J för puck A och $4,2 \cdot 10^{-5}$ J för puck B.

5 Diskussion

Baserat på de redovisade resultaten i del 1 kan det tydligt konstateras att gummi överlag är ett mer elastiskt material jämfört med metall. Samtidigt minskar elasticitetskoefficienten e när den relativa hastigheten v_{rel} ökar för båda materialen. Med höga R^2 -värden på 0,96 och 0,93 kan vi också påvisa att mätvärdena i stor utsträckning följer de anpassade funktionerna från regressionsanalysen. Det är intressant att notera hur sambandet varierar beroende på materialet. Det är svårt att entydigt förklara varför gummi uppvisar en linjär relation medan metallen följer en potensrelation enbart utifrån den presenterade teorin. En möjlig förklaring är att gummibandet har en betydligt högre elasticitetsgräns än metallen. Det innebär att det befinner sig inom sitt elastiska område inom det undersökta intervallet av v_{rel} främst förlorar energi till värme istället för att undergå plastisk deformation som metallen gör. Detta resonemang stärks av den tydliga utplaningen av e för metallen vid $v_{\text{rel}} > 0,6$ m/s. Det verkar som att materialet når sin elasticitetsgräns inom detta intervall.

I del 2 undersöks flera aspekter av den tvådimensionella kollisionen med fokus på den initiala frågeställningen. Från mätdata om fördelningen av kinetisk energi framgår tydligt att rotations- och translationsenergi korrelerar med d . Ju längre ut mot kanten puckarna träffar varandra, desto större blir rotationsenergens andel av den totala kinetiska energin. Mätvärdena överensstämmer i hög grad med de anpassade funktionerna och ger höga R^2 -värden på 0,84 och 0,86. Det observerade sambandet går dock emot det teoretiska idealfallet där impulser från puckkollisioner enbart påverkar translation eftersom impulsen skall vara riktad vinkelrätt mot kontaktytan genom masscentrum. Ytterligare en intressant observation är att rotationsenergens andel inte överstiger cirka 30% även när d närmar sig 1. En högst trolig förklaring är förekomsten av friktion mellan kontaktytorna vid kollisionsoögonblicket, vilket ger upphov till en tangentiell kraft och därmed en impuls parallellt med kontaktytan och således även ett impulsmoment. Detta impulsmoment ökar rimligen med d eftersom puck A:s rörelsemängdsvektor har en större komponent i tangentiell riktning till kollisionssytan då. Impulsmomenten förklarar sambandet med rotationsenergin, medan den tangentiella impulsen förklarar varför translationsenergin fortfarande utgör cirka 70% av den totala energin när den vinkelräta impulsen minskar för stora d .

Det är också värt att notera att inte bara rotationsenergens andel ökar med d , utan även det absoluta rörelsemängdsmomentet för puck B, som kan ses i figur 7. Dock har korrelationen ett lägre R^2 -värde på 0,51. Svagheten i korrelationen kan möjligen förklaras av det faktum att rotationshastigheten för puck B också är beroende av rotationshastigheten för puck A innan kollisionen. Denna parameter kunde inte hållas konstant och kan sannolikt vara ansvarig för bruset i mätdata.

Ytterligare en aspekt som analyseras är riktningen på rörelsemängdsvektorn för puck B efter stöt i förhållande till d . Figur 5a och 5b visar hur puck B:s rörelsemängdsvektor delas upp i en vinkelrät och en parallell komponent i förhållande till puck A:s rörelsemängdsvektor före kollisionen. Parametern $p_{x'}$ mäter i grunden hur mycket puck B avviker åt sidan efter kollisionen. Även om korrelationen är svag med R^2 -värde på 0,25 och 0,35, stödjer det den intuitiva insikten att ju längre från centrum av kollisionen puckarna kolliderar, desto mer

avvikelse uppstår i sidled. Svagheten i sambandet kan troligtvis förklaras på samma sätt som för den kinetiska energin, genom impulser som verkar tangentiellt med kontaktytan och då påverkar riktningen.

Angående bevaring av rörelsemängd bekräftar resultatet teorin. I figur 6 syns ingen tydlig trend och R^2 -värdet för regressionsanalysen är 0,05. Differensen av rörelsemängd innan och efter stöt ligger även runt 0, vilket bekräftar Newtons lagar om bevaring för slutna system.

Datainsamlingens riktighet bör även betraktas som god då mätvärdena har en relativt låg felmarginal och att energipåverkan i referensmätningarna från bordet var liten och systematisk vilket gör att påverkan på sambandet blir försumbart.

6 Slutsats

Sammanfattningsvis har detta arbete undersökt stötar i både en och två dimensioner med avseende på energi- och rörelsemängdsbevaring samt fördelningen av energi och rörelsemängd. I endimensionella stötar visade resultaten att stötkoefficienten e minskar med ökad relativ hastighet v_{rel} och att detta samband varierar beroende på materialet som används. Gummi visade sig ha en linjär relation mellan e och v_{rel} , medan metallen uppvisade ett potenssamband. Detta kan troligen förklaras av skillnader i elasticitetsgräns mellan materialen.

I två-dimensionella stötar visade resultaten att fördelningen av kinetisk energi förändras beroende av kollisionspunkten d . Rotationsenergins andel ökar med ökad d , medan translationsenergins andel minskar. Detta samband kan troligen kopplas till friktion vid kollisionssögonblicket och resulterande tangentiella impulser. Rörelsemängden i x' - och y' -led för puck B påverkas också av d , och det observerades att rotationsrörelsen i puck A påverkar rörelsemängden i puck B efter kollisionen. Dessutom ökar det absoluta rörelsemängdsmomentet för puck B med ökad d .

Dessa resultat ger insikter om hur energi- och rörelsemängdsbevaring fungerar i olika dimensioner och hur fördelningen av energi och rörelsemängd påverkas av kollisionsparametrar. Denna kunskap kan vara värdefull inom olika fysikaliska och tekniska områden, inklusive krocksimulationer och beräkning av planetsystem. Det är viktigt att notera att friktionens påverkan på kollisioner i praktiken kan vara betydande och kan ge upphov till avvikelser från ideala teoretiska modeller.

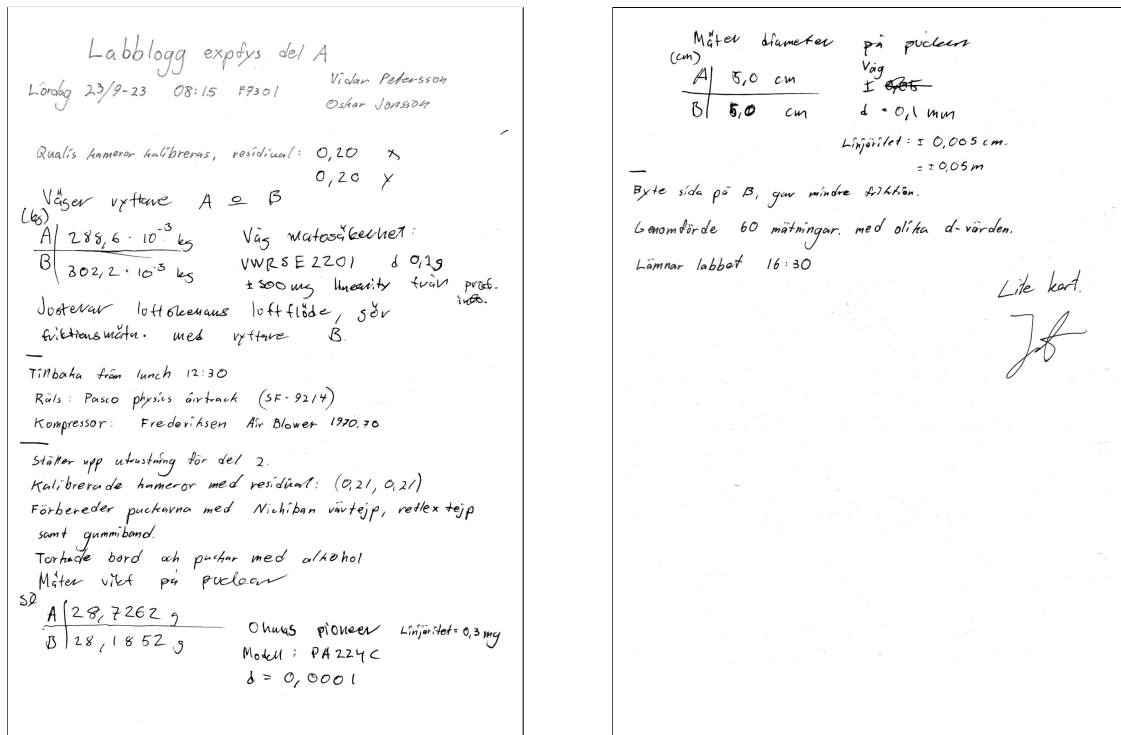
Utvecklingsmöjligheterna för detta arbete ligger främst i att bättre förklara orsaken till de observerade sambanden och resultaten teoretiskt. I framtida undersökningar för del 1 bör fler ingående parametrar observeras. Exempelvis kan energiförluster i form av värme och ljud mätas. I del 2 kan en skjutbanordning användas för att säkerställa att kollisionshastighet och rotation innan stöten hålls konstant när d varieras.

Referenser

- [1] J. L. Meriam, L. G. Kraige och J. N. Bolton, *Engineering mechanics: dynamics*. John Wiley & Sons, 2020.
- [2] R. L. Jackson, I. Green och D. B. Marghitu, "Predicting the coefficient of restitution of impacting elastic-perfectly plastic spheres," *Nonlinear Dynamics*, årg. 60, s. 217–229, 2010.

A Laborationsloggbok

I figur 8 kan laborationsloggboken som fördes vid laborationstillfället 2023-09-23 ses.



Figur 8: Laborationsloggbok signerat av handledare.

B Dataanalys

Denna bilaga presenterar den kod som ligger till grund för dataanalysen i arbetet. Koden använd för del 1 presenteras i listing 1 och för del 2 i listing 2 och 3.

Listing 1: Kod för dataanalys av del 1. Kod för generering av figurer har uteslutits.

```

1 import pandas as pd
2 import numpy as np
3 import os
4
5 # Constants for the experiment
6 hz = 500 # Cameras' capture rate in Hz
7 interval = 0.2 # Time interval in seconds
8 mass_a = 0.2886 # Mass of object A in kg
9 mass_b = 0.3022 # Mass of object B in kg
10
11 # Define a class for a rider
12 class Rider:
13     def __init__(self, x, y, mass):
14         # Convert coordinates from millimeters to meters since the
15         # camera measures in mm
16         x, y = x / 1000, y / 1000
17         self.pos = np.column_stack((x, y)) # Position
18         self.v = np.column_stack((np.gradient(x) * hz, np.gradient(y) *
19         # Velocity vector
20         self.p = np.column_stack(

```

```

19         (np.gradient(x) * hz * mass, np.gradient(y) * hz * mass)
20     ) # Momentum vector
21
22     # Directory containing data files
23     dir = "DATA//raw//del1//metall"
24
25     e_list = []
26     v_rel_list = []
27
28     # Loop through all measurement series and calculate relative velocity
29     ↪ and elasticity
30     for entry in os.listdir(dir):
31         if entry.endswith(".tsv"):
32             f_name = os.path.join(dir, entry)
33
34             # Read the data from the TSV file, skipping 11 rows
35             df = pd.read_csv(f_name, delimiter="\t", skiprows=11)
36
37             # Create Rider instances for object A and B
38             rider_a = Rider(df["a X"], df["a Y"], mass_a)
39             rider_b = Rider(df["b X"], df["b Y"], mass_b)
40
41             # Calculate relative velocity
42             v_rel = abs(rider_a.v - rider_b.v)
43             v_rel = np.linalg.norm(v_rel, axis=1) # Calculate the
44             ↪ magnitude of the relative velocity vector
45
46             # Find the frame index when collision occurs
47             collision_frame = np.argmin(np.linalg.norm(rider_a.pos -
48             ↪ rider_b.pos, axis=1))
49             print(collision_frame)
50
51             # Calculate elasticity
52             e = abs(
53                 np.mean(v_rel[collision_frame + 1 : collision_frame +
54                 ↪ int(interval * hz)])
55                 / np.mean(v_rel[collision_frame - int(interval * hz) :
56                 ↪ collision_frame - 1])
57             )
58
59             # Check conditions for recording data
60             e_list.append(e)
61             v_rel_list.append(np.mean(v_rel[collision_frame - int(0.2 * hz)
62             ↪ : collision_frame]))
63
64     # Save the collected data to a new CSV file
65     data = {
66         "v_rel": v_rel_list,
67         "e": e_list
68     }
69
70     pd.DataFrame(data).to_csv("DATA/del1_final_gummi.csv", index=False)

```

Listing 2: Kod för numerisk beräkning av dels vilken puck mätpunkterna tillhörde och dels beräkning av masscentrums translation och rotation utifrån mätpunkternas rotation och translation i del 2.

```

1 import pandas as pd
2 import numpy as np
3 from sympy import Point, Circle, atan2, pi
4 import os
5 import matplotlib.pyplot as plt
6
7 # Constants for the experiment
8 hz = 500 # Camera's update frequency in Hz
9 mass_a = 0.0287262 # Mass of object A in kg
10 mass_b = 0.0281852 # Mass of object B in kg
11 radius_a = 0.0025 # Radius of object A in meters
12 radius_b = 0.0025 # Radius of object B in meters
13
14 # Function to calculate circle center and angle over time from three
    ↪ points
15 def circle_center(p1, p2, p3):
16     center_x = []
17     center_y = []
18     angle = []
19     for e1, e2, e3 in zip(p1, p2, p3):
20
21         d1, d2, d3 = Point(e1[0], e1[1]), Point(e2[0], e2[1]),
            ↪ Point(e3[0], e3[1]) # Extract x, y positions from each
            ↪ point
22
23         # Determine the center of the circle
24         p_center = Circle(d1, d2, d3).center
25
26         center_x.append(p_center.x.evalf())
27         center_y.append(p_center.y.evalf())
28
29         angle_p = atan2(d1.y - p_center.y, d1.x - p_center.x) #
            ↪ Calculate angle between points and circle center
30
31         # Normalize the angle to [0, 2*pi)
32         if angle_p < 0:
33             angle_p += 2 * pi
34
35         angle.append(angle_p.evalf())
36     return (center_x, center_y, angle)
37
38 dir = "DATA//raw//del12/"
39
40 for entry in os.listdir(dir):
41     if entry.endswith(".tsv"):
42         f_name = os.path.join(dir, entry)
43         print(f_name)
44
45         # Import TSV data from QTM
46         df = pd.read_csv(f_name, delimiter="\t", skiprows=11)
47         df.replace(0.0, np.nan, inplace=True)
48         df.drop("Unnamed: 18", axis=1, inplace=True)
49
50         # Extract and convert points from mm to meters

```

```

51     p1 = np.column_stack((df["New 0000 X"], df["New 0000 Y"])) /
        ↪ 1000
52     p2 = np.column_stack((df["New 0001 X"], df["New 0001 Y"])) /
        ↪ 1000
53     p3 = np.column_stack((df["New 0002 X"], df["New 0002 Y"])) /
        ↪ 1000
54     p4 = np.column_stack((df["New 0003 X"], df["New 0003 Y"])) /
        ↪ 1000
55     p5 = np.column_stack((df["New 0004 X"], df["New 0004 Y"])) /
        ↪ 1000
56     p6 = np.column_stack((df["New 0005 X"], df["New 0005 Y"])) /
        ↪ 1000
57
58     points = np.array([p2, p3, p4, p5, p6])
59
60     # Calculate distances using NumPy
61     distance = np.sqrt(np.sum((points[:, 0] - p1[0]) ** 2, axis=1))
62
63     # Find the indices of the two closest coordinates
64     two_closest_indices = np.argsort(distance)[:2]
65     not_a = np.setdiff1d(np.array([0, 1, 2, 3, 4]),
        ↪ two_closest_indices)
66
67     # The two closest points belong to one circle, the rest belong
        ↪ to the other circle
68     a1 = p1
69     a2 = points[two_closest_indices[0]]
70     a3 = points[two_closest_indices[1]]
71     b1 = points[not_a[0]]
72     b2 = points[not_a[1]]
73     b3 = points[not_a[2]]
74
75     # Calculate the centers and angles for both circles
76     center_a_x, center_a_y, angle_a = circle_center(a1, a2, a3) #
        ↪ For puck A
77     print("Puck A done")
78     center_b_x, center_b_y, angle_b = circle_center(b1, b2, b3) #
        ↪ For puck B
79     print("Puck B done")
80
81     # Save the calculated data to a CSV file
82     data = {
83         "c_a_x": center_a_x,
84         "c_a_y": center_a_y,
85         "ang_a": angle_a,
86         "c_b_x": center_b_x,
87         "c_b_y": center_b_y,
88         "ang_b": angle_b,
89     }
90
91     out_name = dir + "/centers/" + entry + ".csv"
92     pd.DataFrame(data).to_csv(out_name, index=False)

```

Listing 3: Kod för numerisk beräkning av puckarnas tillstånd innan och efter kollision. Kod för generering av figurer har uteslutits.

```

1 import pandas as pd
2 import numpy as np
3 from sympy import pi
4 import os
5
6 # Constants for the experiment
7 hz = 500 # Camera update frequency
8 mass_a = 0.0287262 # Mass of object A in kg
9 radius_a = 0.025 # Radius of object A in meters
10 mass_b = 0.0281852 # Mass of object B in kg
11 radius_b = 0.025 # Radius of object B in meters
12
13 # Create a class for discs and calculate all relevant parameters
14 class Disk:
15     def __init__(self, x, y, mass, radius, angle_df):
16         inertia = 0.5 * mass * radius ** 2 # Moment of inertia
17         angle = np.array(angle_df) # Create a new instance of the
            ↪ dataframe
18
19         # Compensate for the jump in arctan
20         for i in range(len(angle) - 1):
21             if angle[i + 1] - angle[i] > 3:
22                 for j in range(i + 1, len(angle)):
23                     angle[j] -= 2 * pi
24             elif angle[i + 1] - angle[i] < -3:
25                 for j in range(i + 1, len(angle)):
26                     angle[j] += 2 * pi
27
28         v_x = np.gradient(x) * hz
29         v_y = np.gradient(y) * hz
30         omega = np.gradient(angle) * hz
31
32         self.pos = np.column_stack((x, y)) # Position vector
33         self.omega = omega # Angular velocity
34         self.v = np.column_stack((v_x, v_y)) # Velocity
35         self.p = np.column_stack((v_x * mass, v_y * mass)) # Linear
            ↪ momentum
36         self.l = inertia * omega # Angular momentum
37         self.t = (
38             np.sqrt(v_x ** 2 + v_y ** 2) ** 2 * mass * 0.5 + 0.5 *
            ↪ inertia * omega ** 2
39         ) # Kinetic energy
40         self.a = np.column_stack(
41             (np.gradient(v_x), np.gradient(v_y))
42         ) # Acceleration
43
44 dir = "DATA//raw//del2//centers/"
45
46 interval = 0.2 #seconds
47
48 for entry in os.listdir(dir):
49     if entry.endswith(".csv"):
50         f_name = os.path.join(dir, entry)
51         print(f_name)
52
53         df = pd.read_csv(f_name)

```

```

54
55     center_a_x = df["c_a_x"]
56     center_a_y = df["c_a_y"]
57     center_b_x = df["c_b_x"]
58     center_b_y = df["c_b_y"]
59     angle_a = df["ang_a"]
60     angle_b = df["ang_b"]
61
62     # Create objects
63     disk_a = Disk(center_a_x, center_a_y, mass_a, radius_a,
64                  ↪ angle_a) # Create object for puck A
65
66     disk_b = Disk(center_b_x, center_b_y, mass_b, radius_b,
67                  ↪ angle_b) # Create object for puck B
68
69     collision_f = np.argmin(np.linalg.norm(disk_a.pos - disk_b.pos,
70                  ↪ axis=1)) # Frame index of collision
71
72     # Ensure that disk B is the stationary disk, correct if names
73     ↪ are swapped
74
75     if (
76         np.linalg.norm(disk_a.v, axis=1)[collision_f - 100]
77         < np.linalg.norm(disk_b.v, axis=1)[collision_f - 100]
78     ):
79         disk_a, disk_b = disk_b, disk_a
80
81     d_vector = (disk_b.pos - disk_a.pos)[collision_f]
82     v_vector = disk_a.v[collision_f - 2]
83
84     theta = np.arccos(
85         np.dot(d_vector, v_vector)
86         / (np.linalg.norm(d_vector) * np.linalg.norm(v_vector))
87     ) # Angle between velocity and difference vector
88
89     dist = (
90         np.sin(theta) * np.linalg.norm(d_vector) / (radius_a +
91         ↪ radius_b)
92     ) # Calculate d, which is [0,1] the collision point to be
93     ↪ varied

```

C Mätvärden

Tabell C.1: Uppmätta konstanter av ryttarna i del 1.

Objekt	Massa
Ryttare A	$0,2886 \pm 0,0001$ kg
Ryttare B med gummiband	$0,3022 \pm 0,0001$ kg
Ryttare B utan gummiband	$0,2982 \pm 0,0001$ kg

Tabell C.2: Uppmätta och beräknade konstanter av puckarna 2.

Objekt	Massa	Radie
Puck A	$0,028\,726\,2 \pm 0,000\,000\,1\text{ kg}$	$0,0250 \pm 0,0005\text{ m}$
Puck B	$0,028\,185\,2 \pm 0,000\,000\,1\text{ kg}$	$0,0250 \pm 0,0005\text{ m}$

D Mätutrustning

Tabell D.3: Översikt över den mätutrustning som användes för att mäta objekten.

Instrumenttyp	Modellnamn	Mätte	Upplösning	Linjäritet
Våg	VWR (SE2201)	Ryttarna	10^{-4} kg	$\pm 3 \cdot 10^{-4}\text{ kg}$
Våg	Ohaus Pioneer (PA224C)	Puckarna	10^{-7} kg	$\pm 3 \cdot 10^{-7}\text{ kg}$
Skjutmått	Okänd	Puckarna	$5 \cdot 10^{-5}\text{ m}$	-
Motion capture	Qualisys Oqus 300	Alla	10^{-6} m	-

E Mätosäkerhet

För storheterna i figurerna beräknas i denna bilaga deras mätosäkerhet med hjälp av insamlade värden på mätutrustning samt medelvärde av samtlig insamlad data för att få fram felfortplattningen för varje enskild storhet. Detta sker enligt formeln

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right) \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right) \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right) \sigma_c^2 + \dots$$

där funktionen $f = f(a, b, c, \dots)$ är uppbyggd av flera variabler med ett eget osäkerhetsvärde.

Tabell E.4: Beräknad felfortplattning för storheter.

Storhet	Felfortplattning
e	4,56%
v_{rel}	1,23%
T	4,32%
d	5,12%
\mathbf{p}	3,45%
\mathbf{L}	3,81%

F Peer-granskning

Sammanfattning av återkoppling från grupp 13: Stavfel och syftningsfel i inledning, metod och teori.

Vidtagna åtgärder: Korrigerade stavfel och syftningsfel i inledning, metod och teori.