MetodosNumericosT5

November 27, 2024

1 ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

1.1 MÉTODOS NUMÉRICOS

1.1.1 TAREA 5

David Alejandro Puga Novoa - GR1CC - 27/11/2024

1.1.2 CONJUNTO DE EJERCICIOS

1. Sea $f(x) = -x^3 - \cos x$ y $p_0 = -1$. Use el método de Newton y de la Secante para encontrar p_1. ¿Se podría usar $p_0 = 0$? Para newton, necesitamos la derivada de la función anterior. Como resultado: $f'(x) = -3x^2 + \sin x$

Llamamos a la función Newton con los parámetros que tenemos:

[2]:
```
from scipy.optimize import newton
import math

def fprime(x):
    return -3*x**2 + math.sin(x)

p1 = newton(func = lambda x : -x**3 - math.cos(x), x0 = -1, fprime = fprime)
print(p1)
```

```
-0.8654740331016144
```

Y para la secante no necesitamos la derivada:

[3]:
```
p1 = newton(func = lambda x : -x**3 - math.cos(x), x0 = -1)
print(p1)
```

```
-0.8654740331016144
```

Como punto aproximado es una mala elección por eso para newton implica que en $p_0 = 0$ la derivada sea cero, algo no permitido mientras que en la secante el punto produce complicaciones por la presencia de multiplicaciones para cero.

[4]:
```
p1 = newton(func = lambda x : -x**3 - math.cos(x), x0 = 0)
print(p1)
```

```
-4.998000183473029e-09
```

2. Encuentre soluciones precisas dentro de 10^{-4} para los siguientes problemas.

a) $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$, $[1, 4]$

Con secante podemos obtener:

[5]:
```
p1 = newton(func = lambda x : x**3 - 2*x**2 - 5, x0 = 1, tol = 10e-4, x1 = 4)
print(p1)
```

```
2.6906484961992585
```

b) $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$, $[-3, -2]$

[6]:
```
p1 = newton(func = lambda x : x**3 + 3*x**2 - 1, x0 = -3, tol = 10e-4, x1 = -2)
print(p1)
```

```
-2.879385194736809
```

c) $x - \cos x = 0$, $[0, \frac{\pi}{2}]$

[7]:
```
p1 = newton(func = lambda x : x - math.cos(x), x0 = 0, tol = 10e-4, x1 = math.
    ↪pi/2)
print(p1)
```

```
0.7390834365030763
```

d) $x - 0.8 - 0.2 \sin x = 0$, $[0, \frac{\pi}{2}]$

[8]:
```
p1 = newton(func = lambda x : x - 0.8 - 0.2*math.sin(x), x0 = 0, tol = 10e-4,␣
    ↪x1 = math.pi/2)
print(p1)
```

```
0.9643338835706312
```

3. Use los 2 métodos en esta sección para encontrar las soluciones dentro de 10^{-5} para los siguientes problemas.

a) $3x - e^x = 0$ para $1 \leq x \leq 2$

Primero calculamos la derivada de la función: $3 - e^x$, de esta manera ya podemos usar newton:

[9]:
```
p1 = newton(func = lambda x : 3*x - math.exp(x), x0 = 1,
            fprime = lambda x : 3 - math.exp(x), tol = 10e-5, x1 = 2)
print(p1)
```

```
0.6190612833553127
```

Ahora el segundo método en usar sera el de la secante:

[10]:
```
p1 = newton(func = lambda x : 3*x - math.exp(x), x0 = 1, tol = 10e-5, x1 = 2)
print(p1)
```

```
1.5121345517620621
```

Los dos encontraron raíces diferentes esto es porque newton encontró una fuera del intervalo dado debido a los puntos dados y a su vez la pendiente convergía hacia la izquierda.

b) $2x + 3\cos x - e^x = 0$ para $1 \leq x \leq 2$

Primero calculamos la derivada de la función: $2 - 3\sin x - e^x$, de esta manera ya podemos usar newton:

[11]:
```
p1 = newton(func = lambda x : 2*x + 3*math.cos(x) - math.exp(x),
            x0 = 1,
           fprime = lambda x : 2 - 3*math.sin(x) - math.exp(x),
            tol = 10e-5, x1 = 2)
print(p1)
```

```
1.2397146979752596
```

Ahora el método de la secante:

[12]:
```
p1 = newton(func = lambda x : 2*x + 3*math.cos(x) - math.exp(x),
            x0 = 1, tol = 10e-5, x1 = 2)
print(p1)
```

```
1.2397146920815107
```

4. El polinomio de cuarto grado

$$f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$$

tiene dos ceros reales, uno en $[-1, 0]$ y el otro en $[0, 1]$. Intente aproximar estos ceros dentro de 10^{-6} con:

a) El método de la secante

Para el primer intervalo $[-1, 0]$:

[13]:
```
p1 = newton(func = lambda x : 230*x**4 + 18*x**3 + 9*x**2 - 221*x - 9,
            x0 = -1, tol = 10e-6, x1 = 0)
print(p1)
```

```
-0.04065928497591696
```

Para el segundo intervalo $[0, 1]$:

[14]:
```
p1 = newton(func = lambda x : 230*x**4 + 18*x**3 + 9*x**2 - 221*x - 9,
            x0 = 1, tol = 10e-6)
print(p1)
```

```
0.9623984191155153
```

b) El método de Newton

Primero empezamos sacando su derivada: $920x^3 + 54x^2 + 18x - 221$

Como se solicita un punto medio de estimación inicial, para el primer intervalo $[-1, 0]$ con su mediana -0.5:

[15]:
```
p1 = newton(func = lambda x : 230*x**4 + 18*x**3 + 9*x**2 - 221*x - 9,
            x0 = -0.5,
           fprime = lambda x : 920*x**3 + 54*x**2 + 18*x -221,
            tol = 10e-6)
print(p1)
```

```
-0.04065928831575899
```

Para el segundo intervalo $[0, 1]$ de igual manera usaremos 1

[16]:
```
p1 = newton(func = lambda x : 230*x**4 + 18*x**3 + 9*x**2 - 221*x - 9,
            x0 = 1,
           fprime = lambda x : 920*x**3 + 54*x**2 + 18*x -221,
            tol = 10e-6)
print(p1)
```

```
0.9623984187505414
```

5. La función $f(x) = \tan \pi x - 6$ tiene cero en $(\frac{1}{\pi})$ arcotangente $6 \approx 0.447431543$. Sea $p_0 = 0$ y $p_1 = 0.48$ y use 10 iteraciones en cada uno de los siguientes métodos para aproximar esta raíz. ¿Cuál método es más eficaz y por qué?

a) Método de bisección

Pimero necesitaremos el código para su obtención:

[17]:
```
def sign(x: float) -> int:
    if x > 0:
        return 1
    elif x < 0:
        return -1
    else:
        return 0

from typing import Callable

def bisection(
    a: float, b: float, *, equation: Callable[[float], float], N: int
) -> tuple[float, int] | None:
    i = 1

    assert a < b, "a not lower than b, the interval is not valid."

    assert (
        equation(a) * equation(b) < 0
    ), "The function does not change sign over the interval."

    Fa = equation(a)
    p = a
    for i in range(N + 1):
```

```
        p = a + (b - a) / 2
        FP = equation(p)

        if sign(Fa) * sign(FP) > 0:
            a = p
            Fa = FP

        else:
            b = p

    return p, i
```

Ahora procedemos a usar el método de bisección con los datos dados:

```
[27]: p, i = bisection(a = 0, b = 0.48,
                       equation =  lambda x : math.tan(math.pi*x) - 6,
                      N = 10)
      print(f"Raíz: {p} en {i} iteraciones")
```

```
Raíz: 0.44742187499999997 en 10 iteraciones
```

b) Método de Newton

Como siempre primero necesitamos su derivada: $\pi \sec^2 \pi x$ y usamos el algoritmo,

```
[18]: p1 = newton(func = lambda x : math.tan(math.pi*x) - 6,
                 x0 = 0,
                fprime = lambda x : math.pi*(1/math.cos(math.pi*x))**2,
                maxiter = 10, x1 = 0.48)
      print(p1)
```

```
---------------------------------------------------------------------------
RuntimeError                              Traceback (most recent call last)
Cell In[18], line 1
----> 1 p1 = newton(func = lambda x : math.tan(math.pi*x) - 6,
      2              x0 = 0,
      3             fprime = lambda x : math.pi*(1/math.cos(math.pi*x))**2,
      4             maxiter = 10, x1 = 0.48)
      5 print(p1)

File ~/miniforge3/envs/iccd332/lib/python3.11/site-packages/scipy/optimize/
  ↪_zeros_py.py:391, in newton(func, x0, fprime, args, tol, maxiter, fprime2, x1␣
  ↪rtol, full_output, disp)
    388 if disp:
    389     msg = ("Failed to converge after %d iterations, value is %s."
    390            % (itr + 1, p))
--> 391     raise RuntimeError(msg)
    393 return _results_select(full_output, (p, funcalls, itr + 1, _ECONVERR),␣
  ↪method)
```

```
RuntimeError: Failed to converge after 10 iterations, value is 13.
↪655012218324751.
```

Los errores comentan que la pendiente tiende a converger hacia los valores mínimos.

c) Método de la Secante

Usamos el algoritmo con los parámetros:

[19]:
```
p1 = newton(func = lambda x : math.tan(math.pi*x) - 6,
            x0 = 0, maxiter = 10, x1 = 0.48)
print(p1)
```

```
---------------------------------------------------------------------------
RuntimeError                              Traceback (most recent call last)
Cell In[19], line 1
----> 1 p1 = newton(func = lambda x : math.tan(math.pi*x) - 6,
      2             x0 = 0, maxiter = 10, x1 = 0.48)
      3 print(p1)

File ~/miniforge3/envs/iccd332/lib/python3.11/site-packages/scipy/optimize/
↪_zeros_py.py:391, in newton(func, x0, fprime, args, tol, maxiter, fprime2, x1␣
↪rtol, full_output, disp)
    388 if disp:
    389     msg = ("Failed to converge after %d iterations, value is %s."
    390            % (itr + 1, p))
--> 391     raise RuntimeError(msg)
    393 return _results_select(full_output, (p, funcalls, itr + 1, _ECONVERR),␣
↪method)

RuntimeError: Failed to converge after 10 iterations, value is -3694.
↪358600967476.
```

El resultado al realizar con los 3 métodos es que el método de la bisección es más efectivo en este caso en cuanto a hallar una raíz en la función.

Los métodos newton y secante tienden a manejarse en cuanto a pendiente o a una línea que entre corta el eje x lo que genera que en cálculos se salen del intervalo, destacar tambien que otra razón es la propia función porque no es continua respecto a los reales.

6. La función descrita por $f(x) = \ln(x^2 + 1) - e^{0.4x} \cos \pi x$ tiene un número infinito de ceros.

a) Determine, dentro de 10^{-6}, el único cero negativo.

Utilizamos método de la secante:

[20]:
```python
p1 = newton(func = lambda x : math.log(x**2 + 1) - math.exp(0.4*x)*math.
 ↪cos(math.pi*x),
            x0 = -0.4, tol = 10e-6)
print(p1)
```

```
-0.43414304724770203
```

b) Determine, dentro de 10^{-6}, los cuatro ceros positivos más pequeños.

Por método de la secante:

[21]:
```python
p1 = newton(func = lambda x : math.log(x**2 + 1) - math.exp(0.4*x)*math.
 ↪cos(math.pi*x),
            x0 = 0.5, tol = 10e-6)
print(p1)
```

```
0.4506567478906115
```

[22]:
```python
p1 = newton(func = lambda x : math.log(x**2 + 1) - math.exp(0.4*x)*math.
 ↪cos(math.pi*x),
            x0 = 1.5, tol = 10e-6)
print(p1)
```

```
1.7447380533760186
```

[23]:
```python
p1 = newton(func = lambda x : math.log(x**2 + 1) - math.exp(0.4*x)*math.
 ↪cos(math.pi*x),
            x0 = 2.5, tol = 10e-6)
print(p1)
```

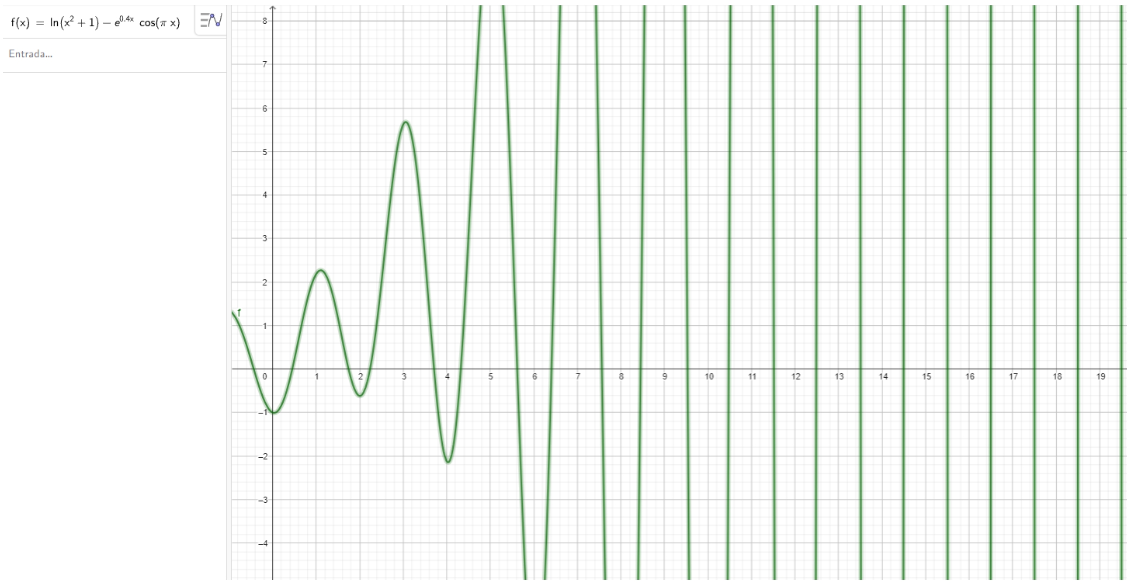
```
2.2383197950776066
```

[24]:
```python
p1 = newton(func = lambda x : math.log(x**2 + 1) - math.exp(0.4*x)*math.
 ↪cos(math.pi*x),
            x0 = 3.5, tol = 10e-6)
print(p1)
```

```
3.7090412014166936
```

c) Determine una aproximación inicial razonable para encontrar el enésimo cero positivo más pequeño de f

Utilizamos geogebra para visualizar la función,



Existen infinitas raíces positivas según el gráfico la función pero podemos observar que las raíces tienden a estar cerca de un número entero 0.5 por lo que podemos usar esto como punto de aproximación para encontrar la enésima raíz de esta función.

La fórmula dada es: $n - 0.5$, tal que n representa una aproximación a la enésima raíz positiva $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Asi que empleamos método de la secante y tenemos:

[25]:
```
p1 = newton(func = lambda x : math.log(x**2 + 1) - math.exp(0.4*x)*math.
 ↪cos(math.pi*x),
            x0 = 24.5, tol = 10e-6)
print(p1)
```

```
24.49988704757148
```

7. La función $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ tiene raíz en $x = 0$.Usando el punto de inicio de $x = 1$ y $p_0 = 5$, $p_1 = 0.5$ para el método de secante, compare los resultados de los métodos de la secante y de Newton. Empezamos con el método de la secante:

[26]:
```
p1 = newton(func = lambda x : x**(1/3) + 1, x0 = 1)
print(p1)
```

```
/tmp/ipykernel_2777/4142060945.py:1: RuntimeWarning: invalid value encountered
in scalar power
  p1 = newton(func = lambda x : x**(1/3) + 1, x0 = 1)
```

```
---------------------------------------------------------------------------
RuntimeError                              Traceback (most recent call last)
Cell In[26], line 1
----> 1 p1 = newton(func = lambda x : x**(1/3) + 1, x0 = 1)
      2 print(p1)
```

```
File ~/miniforge3/envs/iccd332/lib/python3.11/site-packages/scipy/optimize/
↪_zeros_py.py:391, in newton(func, x0, fprime, args, tol, maxiter, fprime2, x1 ␣
↪rtol, full_output, disp)
    388 if disp:
    389     msg = ("Failed to converge after %d iterations, value is %s."
    390            % (itr + 1, p))
--> 391     raise RuntimeError(msg)
    393 return _results_select(full_output, (p, funcalls, itr + 1, _ECONVERR),␣
↪method)

RuntimeError: Failed to converge after 50 iterations, value is nan.
```

Con método de newton debemos obtener la derivada entonces: $\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$.

Llamados a la función de Newton:

[27]:
```
p1 = newton(func = lambda x : x**(1/3), x0 = 1,
            fprime = lambda x : 1 / (3*x**(2/3)))
print(p1)
```

```
/tmp/ipykernel_2777/3932985158.py:1: RuntimeWarning: invalid value encountered
in scalar power
  p1 = newton(func = lambda x : x**(1/3), x0 = 1,
/tmp/ipykernel_2777/3932985158.py:2: RuntimeWarning: invalid value encountered
in scalar power
  fprime = lambda x : 1 / (3*x**(2/3)))
```

```
---------------------------------------------------------------------------
RuntimeError                              Traceback (most recent call last)
Cell In[27], line 1
----> 1 p1 = newton(func = lambda x : x**(1/3), x0 = 1,
      2             fprime = lambda x : 1 / (3*x**(2/3)))
      3 print(p1)

File ~/miniforge3/envs/iccd332/lib/python3.11/site-packages/scipy/optimize/
↪_zeros_py.py:391, in newton(func, x0, fprime, args, tol, maxiter, fprime2, x1 ␣
↪rtol, full_output, disp)
    388 if disp:
    389     msg = ("Failed to converge after %d iterations, value is %s."
    390            % (itr + 1, p))
--> 391     raise RuntimeError(msg)
    393 return _results_select(full_output, (p, funcalls, itr + 1, _ECONVERR),␣
↪method)

RuntimeError: Failed to converge after 50 iterations, value is nan.
```

En ambos casos existe el error de no convergencia esto se genera básicamente por el cero. Además solo existe una única raíz existente para esa función que tiene una pendiente igual a cero 0.