BÀI 4: CÁC VẤN ĐỀ VỀ ĐỊNH THỨC

Mục tiêu:

- *Khái niệm và các tính chất, tính toán, quy tắc Cramer.*
- *Sử dụng sympy để tính toán hình thức các công thức đại số.*
- *Các ứng dụng của định thức.*

Nội dung chính:

1. Định thức và các tính chất

Định thức là giá trị liên quan đến một ma trận vuông. Định thức chứa nhiều thông tin của một ma trận như mối quan hệ giữa các vector tạo nên ma trận đó. Ví dụ: với ma trận khả nghịch (có ma trận nghịch đảo) thì định thức sẽ khác 0. Với ma trận 2x2, định thức được tính theo công thức:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Một cách tổng quát, theo định nghĩa, với ma trận A vuông $n \times n$ phần tử, kí hiệu của định thức $\det(A)$ hoặc $|A|$ được tính toán theo công thức:

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

Theo đó, để tính định thức một ma trận bất kỳ, chúng ta phải thực hiện các bước sau:

- Bước 1: Phát sinh tập $\mathrm{S_n} = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ là các hoán vị của tập $\mathrm{X} = \{1,2, \ldots, n\}$.
- Bước 2: Ban đầu đặt giá trị định thức bằng 0.
- Bước 3: *Lặp:* Với mỗi $\sigma_i \in S_n$, tính toán dấu $\mathrm{sgn}(\sigma_i)$. Sau đó tính toán giá trị định thức cộng dồn các giá trị: $sgn(\sigma_i).\mathrm{a}_{1\sigma_i(1)} \mathrm{a}_{2\sigma_i(2)} \ldots \mathrm{a}_{n\sigma_i(n)}$

Tất nhiên, công thức này mang tính định nghĩa chứ không hiệu quả trong việc tính toán, biến đổi trong thực hành.

- **Các tính chất của định thức ma trận:**

Dưới đây tóm tắt lại một số tính chất khác của định thức:

- Tính chất 1: định thức của ma trận đơn vị I bằng 1, nghĩa là:

$$det\, I = 1$$

- Tính chất 2: nếu thay đổi vị trí 2 dòng của ma trận thì dấu của định thức sẽ thay đổi.
- Tính chất 3a: Nếu nhân một dòng với giá trị thực t thì định thức của ma trận sẽ tăng lên t lần:

$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

- Tính chất 3b: Tính tuyến tính:

$$\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

- Tính chất 4: Nếu ma trận có 2 dòng giống nhau, như vậy định thức của ma trận đó bằng 0.

- Tính chất 5: Với 2 dòng khác nhau, lấy hiệu 2 dòng k lần thì giá trị định thức vẫn không đổi.

[Đọc thêm] Chứng minh:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c-ka & d-kb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ ta & tb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - t\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

- Tính chất 6: Ma trận tồn tại 1 dòng 0 thì định thức sẽ bằng 0.
- Tính chất 7: Định thức của ma trận hình tam giác bằng tích của các số trên đường chéo.
- Tính chất 8: $\mathbf{det\,AB} = (\mathbf{det\,A})(\mathbf{det\,B})$. Suy ra:

$$det\ A^{-1} = \frac{1}{detA}$$

- Tính chất 9: định thức ma trận chuyển vị bằng ma trận gốc: $\det A^{T} = \det A$

[Đọc thêm] Chứng minh: Ma trận A được viết thành tích 2 ma trận L (ma trận tam giác dưới) và U (ma trận tam giác trên) thì:

$$A = L\,U \rightarrow |A| = |L||U|$$

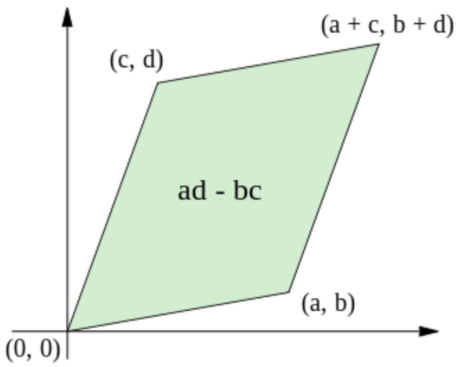
Do ma trận L và U là ma trận tam giác nên:

$$|L||U| = |U^T||L^T|$$

Với ma trận L có đường chéo bằng 1 nên định thức của L sẽ bằng 1. Do đó, còn lại ma trận nên ta dễ dàng có kết luận: $|A| = |A^T|$ (đpcm).

Biểu diễn hình học định thức

Giá trị định thức được hình dung như diện tích của hai vector (a,b) và (c,d) như hình sau:



Diễn giải: Biểu diễn định thức cùng với ma trận 2x2

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Định thức (det) của ma trận M là:

$$det_M = ad - bc$$

Từ định nghĩa, dễ dàng thấy, giá trị định thức bằng 0 khi $ad = bc$.

Khi giá trị định thức âm, điều này có liên quan đến ý nghĩa về hướng của đối tượng hình học.

Với hình học, điều này sẽ tương ứng với diện tích bằng 0, nghĩa là: 2 đường thẳng ab và cd nằm trùng với nhau. Nói cách khác, vector (a, b) sẽ bằng một tỉ lệ với vector (c, d).

2. Định thức và ma trận khả nghịch

Mối liên hệ giữa ma trận khả nghịch A (bậc n, hay $n \times n$) và ma trận nghịch đảo, gọi là A^{-1} là tích $AA^{-1} = I_n$ I_n là ma trận đơn vị cấp n.

- **Ma trận hệ số kép (ma trận cofactor):**

Cho ma trận A (bậc n), gọi ma trận C (bậc n) là ma trận hệ số kép với các giá trị

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

Với ma trận A_{ij} là ma trận $(n-1) \times (n-1)$ từ ma trận A bằng cách loại bỏ các phần tử trên dòng i và cột j.

- **Ma trận liên hợp adj (ma trận adjoint):**

Ma trận liên hợp adj là chuyển vị của ma trận hệ số kép.

- **Ma trận nghịch đảo A^{-1}:**

Định lý: Từ ma trận A khả nghịch (invertable matrix), chúng ta có thể tìm được ma trận A^{-1} bằng công thức tính toán thông qua định thức của A như sau:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Với ma trận 2x2, sinh viên cần nhớ các giá trị sau:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow adj(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3. Quy tắc Cramer

Quy tắc Cramer được đặt tên theo nhà toán học Gabriel Cramer (1704 – 1752), người sử dụng định thức để giản hệ tuyến tính n phương trình n có ẩn số. Quy tắc này ứng dụng với hệ có nghiệm duy nhất (nếu có nghiệm). Theo đó, ví dụ hệ Cramer với hệ 2 phương trình tuyến tính 2 ẩn như sau:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2.$

Chúng ta sẽ có nghiệm:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \text{ và } x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \text{ với điều kiện } a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0.$$

Ở dạng ma trận, 2 nghiệm trên được biểu diễn như sau:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Nếu đặt $|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ và $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Khi đó, ta có: $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$ và $x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$

Sinh viên thực hành giải hệ hai phương trình tuyến tính bằng Python:

- **Hệ hai phương trình tuyến tính bậc 1:**

$4x_1 - 2x_2 = 10,$

$3x_1 - 5x_2 = 11.$

>>> **import** numpy **as** np

>>> A = np.array([[4, -2],[3, -5]])   # khai báo ma trận A

>>> A1 = np.array([[10, -2],[11, -5]])

>>> A2 = np.array([[4, 10],[3, 11]])

>>> **from** scipy **import linalg** *# lưu ý: hàm tính định thức của ma trận là scipy.linalg.det(A)*

>>> detA = linalg.det(A)   # tính định thức cho ma trận A

>>> detA1 = linalg.det(A1)

>>> detA2 = linalg.det(A2)

>>> print (detA, detA1, detA2)

………………………………………………………… ← Sinh viên điền kết quả kiểm tra

>>> if (detA != 0):

    x1 = detA1 / detA

    x2 = detA2 / detA

    print ("Hai nghiệm của phương trình là: ", x1, x2)

………………………………………………………… ← Sinh viên điền kết quả kiểm tra

Sinh viên sử dụng hàm **tinhtoan_dinhthuc()** tính toán các định thức A, A1, A2:

>>> ………………………………………………………… ← Sinh viên viết các lệnh

>>> ………………………………………………………… ← Sinh viên viết các lệnh

>>> ………………………………………………………… ← Sinh viên viết các lệnh

- **Hệ ba phương trình tuyến tính bậc 1:**

Giải hệ sau bằng 2 phương pháp:

- Sử dụng hàm det() của lớp linalg của thư viện scipy.
- Sử dụng hàm **tinhtoan_dinhthuc()** viết bên trên

$$-x + 2y - 3z = 1$$
$$2x - 2y + z = 3$$
$$3x - 4y + 4z = 2$$

Thực hiện: Khai báo các ma trận (np.array(…)):

>>> ………………………………………………………… ← Sinh viên viết các lệnh

>>> ………………………………………………………… ← Sinh viên viết các lệnh
>>> ………………………………………………………… ← Sinh viên viết các lệnh

- Tính toán giải theo lệnh **det**() của lớp **linalg** trong thư viện **scipy** và in nghiệm:

>>> ………………………………………………………… ← Sinh viên viết các lệnh
>>> ………………………………………………………… ← Sinh viên viết các lệnh
>>> ………………………………………………………… ← Sinh viên viết các lệnh
>>> x, y, z = detX/det, detY/det, detZ/det ……………….. # tính toán x, y, z
>>> print (“Nghiệm của phương trình: ”, “x=”, x, “y=”, y, “z = “, z)

- Tính toán giải theo lệnh **tinhtoan_dinhthuc()** và in nghiệm:

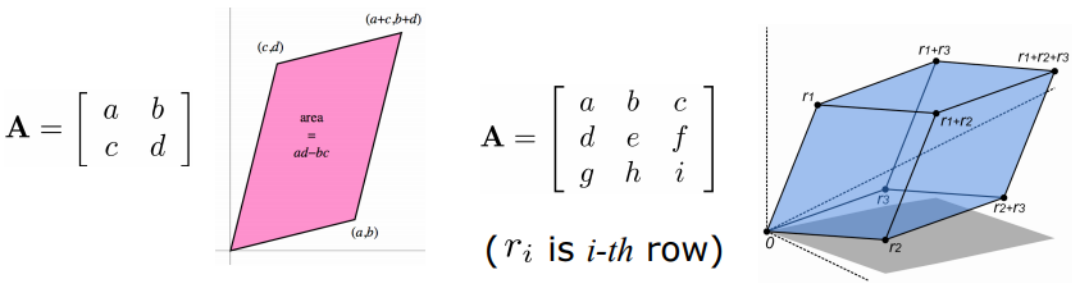
>>> ………………………………………………………… ← Sinh viên viết các lệnh
>>> ………………………………………………………… ← Sinh viên viết các lệnh
>>> ………………………………………………………… ← Sinh viên viết các lệnh
>>> x, y, z = detX/det, detY/det, detZ/det ……………….. # tính toán x, y, z
>>> print (“Nghiệm”, “x=”, x, “y=”, y, “z = “, z)

Với hệ n ẩn, n phương trình tuyến tính bậc 1 $Ax = b$, mỗi nghiệm sẽ là thương của 2 định thức: định thức của ma trận A_i và định thức của ma trận A với A_i là ma trận hình thành từ ma trận A thay thế cột thứ i bằng vector b^T.

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

Với $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, điều kiện là: $det(A) \neq 0$.

4. Bài toán ứng dụng 1: Tính diện tích đa giác, thể tích và các phương trình đường, mặt.

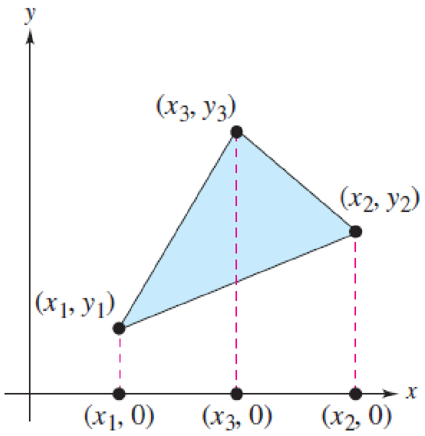


Tính toán định thức có thể áp dụng để tính diện tích của tam giác trong mặt phẳng. Giả định tam giác được cho bởi 3 điểm $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, khi đó, diện tích của tam giác ABC là:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $y_i > 0$ và $x_1 \leq x_3 \leq x_2$.

Trường hợp (x_3, y_3) nằm phía trên đoạn nối giữa hai điểm (x_1, y_1) và (x_2, y_2) (như hình), thì chúng ta sẽ có 3 hình thang.



Hình thang 1: Giới hạn bởi các điểm: $(x_1, 0)$, (x_1, y_1), (x_3, y_3), $(x_3, 0)$.

Hình thang 2: Giới hạn bởi các điểm: $(x_3, 0)$, (x_3, y_3), (x_2, y_2), $(x_2, 0)$.

Hình thang 3: Giới hạn bởi các điểm: $(x_1, 0)$, (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_2, 0)$.

Như vậy, dễ dàng thấy được diện tích của tam giác chính hiệu tổng hai diện tích hình thang đầu tiên với hình thang thứ 3.

Công thức thể hiện là:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)$$
$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2)$$
$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Lưu ý 1: do diện tích là một đại lượng dương nên chúng ta có thể biện luận thêm một số giá trị của định thức:

- Định thức bằng 0: nghĩa là 3 điểm sẽ có sự phụ thuộc tuyến tính, nghĩa là chúng sẽ thẳng hàng.
- Định thức âm: do việc tính toán hiệu diện tích các hình thang nên giá trị này cần đổi dấu để được diện tích dương.

Lưu ý 2: có thể giải thích bằng cách tính ½ diện tích hình bình hành (bằng tích vector)

Ví dụ: Tính diện tích tam giác của 3 điểm sau A(1, 0), B(4,3), C(2,2)

- Tính diện tích tam giác:

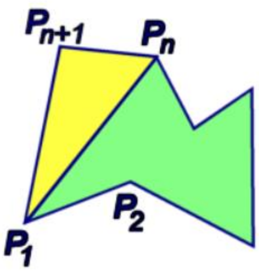
```
[Bằng gói Sympy]

>>> import sympy as sp
>>> TG = sp.Matrix([[1, 0, 1],[4, 3, 1], [2, 2, 1]])
>>> 1/2*TG.det()
```

Kết quả diện tích tam giác là:

……………………..

- **Ứng dụng 1: Tính diện tích đa giác gồm n điểm (x_i, y_i):**

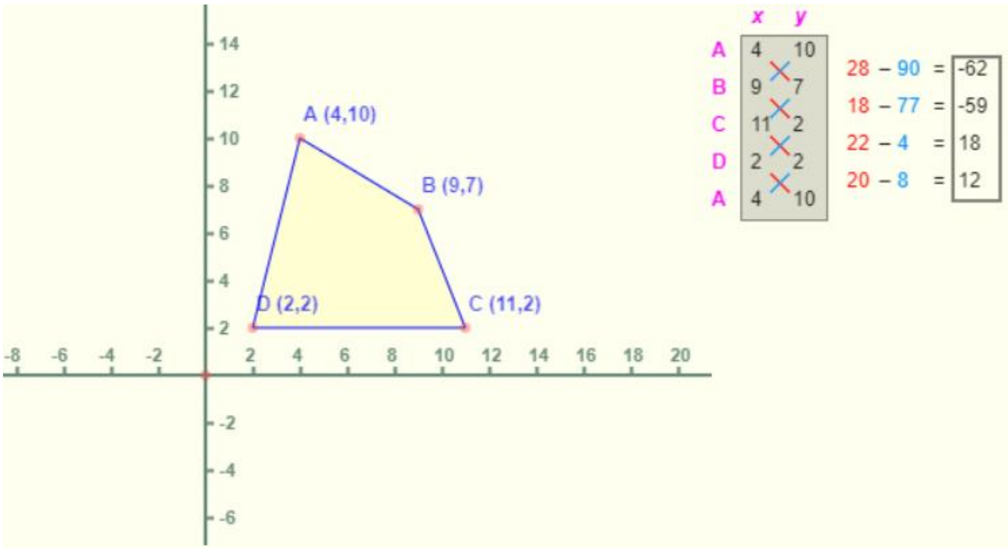
Bài toán: Cho một đa giác lồi (polygon) P có n đỉnh (xi, yi). Hãy:



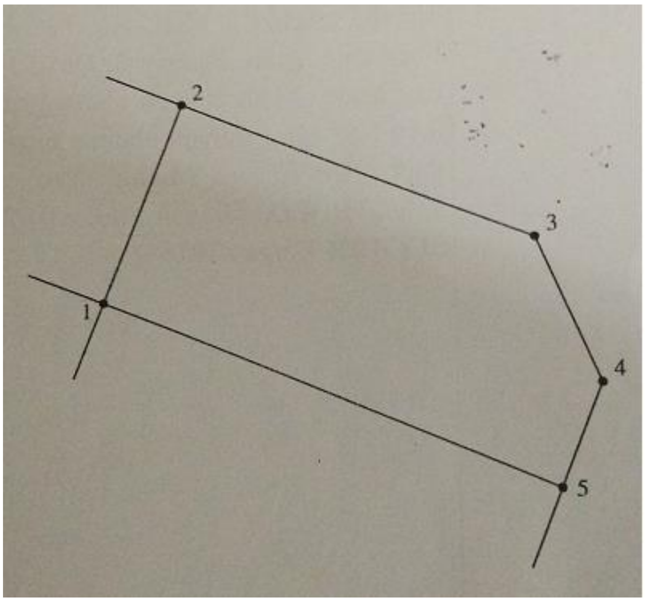
Tính toán diện tích đa giác có n điểm. *Gợi ý: Diện tích đa giác bằng tổng các diện tích của các tam giác ghép thành nên đa giác đó.*

$$Diện\ tích_P = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} .. + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{x_n} & \boldsymbol{y_n} \\ \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{y_1} \end{vmatrix}\right)$$

Minh họa:



Thực hành: Sinh viên hãy viết các câu lệnh Python để tính toán diện tích của n=5 điểm trong thửa đất dưới đây:

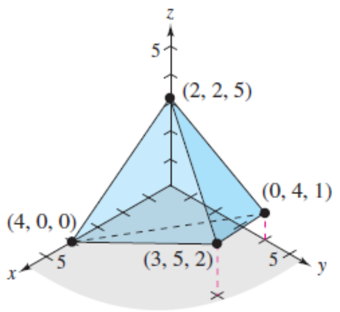


BẢNG KÊ TỌA ĐỘ

Điểm	X(mét)	Y(mét)
1	1181128.25	603263.70
2	1181136.18	603266.68
3	1181130.97	603279.69
4	1181125.77	603281.91
5	1181122.06	603280.42

- ***Ứng dụng 2:*** **Mở rộng bài toán tính diện tích thành thể tích hình tứ diện:**

Hãy tính thể tích của một tứ diện gồm bốn điểm (0, 4, 1), (4, 0, 0), (3, 5, 2) và (2, 2, 5).



Gợi ý: Thể tích là giá trị dương bằng $\frac{1}{6}$ giá trị định thức của ma trận bậc 4.

$$V = \mp\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Giải:

```
>>> M = Matrix([[0, 4, 1, 1], [4, 0, 0, 1], [3, 5, 2, 1], [2, 2, 5, 1]])
>>> 1/6*M.det()
```

Giải bằng Sympy:

```
>>> M = Matrix([[0, 4, 1, 1], [4, 0, 0, 1], [3, 5, 2, 1], [2, 2, 5, 1]])
>>> M.det()
```

$$-72$$

```
>>> 1/6*M.det()
```

$$-12$$

```
>>>
```

Sinh viên kết luận: Thể tích của tứ diện là:………………………...

- **Ứng dụng 3: Kiểm 4 điểm nằm trên một mặt phẳng trong không gian ba chiều.**

Gợi ý: 4 điểm nằm trên mặt phẳng thì thể tích tứ diện bằng 0.

- **Ứng dụng 4: Phương trình mặt phẳng**

Hãy viết phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm (-1, 3, 2), (0, 1, 0), (-2, 0, 1).

Gợi ý: *Phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm là định thức:*

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Giải:

Lệnh thực thi:

Bước 1: Tham chiếu các thư viện và khai báo các biến

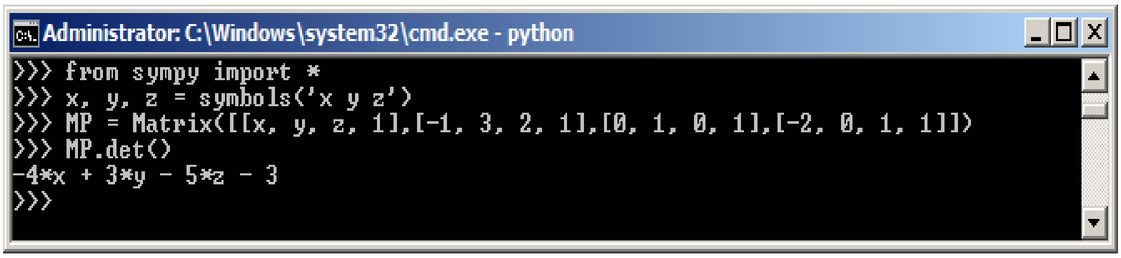
```
>>> from sympy import *  # lúc này ta sử dụng trực tiếp thư viện
>>> x, y, z = symbols('x y z')
```

Bước 2: Khởi tạo ma trận:

```
>>> MP = Matrix([[x, y, z, 1],[-1, 3, 2, 1],[0, 1, 0, 1],[-2, 0, 1, 1]])
```

Bước 3: Thực thi

```
>>> MP.det()
```



Sinh viên hãy viết phương trình mặt phẳng:

……………………………………………………………………………………………..

5. Bài toán ứng dụng 3: Tính quỹ đạo của hành tinh/vệ tinh

Đọc thêm: Ứng dụng đại số tuyến tính để tính quỹ đạo hành tinh xung quanh Mặt trời. Theo định lý Kepler thứ 1, các hành tinh xoay quanh hệ mặt trời theo quỹ đạo Ellipse. Gọi mặt trời (hoặc Trái đất) là 1 tâm của Ellipse (tâm thứ 2 là một tâm ảo), khi đó, quỹ đạo của hành tinh/vệ tinh được xác định thông khi biết 5 tọa độ của hành tinh/vệ tinh.

Công thức tổng quát đối với 1 ellipse là:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Khi đó, 6 giá trị a, b, c, d, e, f được xác định thông qua định thức:

$$\begin{bmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{bmatrix}$$

Hãy sử dụng gói Sympy để tính toán quỹ đạo các ellipse.

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

Câu 1: Hãy viết chương trình để tính các ma trận:

a. Ma trận hệ số kép (cofactor matrix).
b. Ma trận liên hợp (adjoint matrix).

Từ một ma trận A nxn cho trước.

Câu 2: Hãy xây dựng ma trận tính quỹ đạo của một vật thể xoay theo quỹ đạo đường tròn.

Gợi ý: Chỉ cần 3 điểm thay vì 5 điểm khi tính quỹ đạo Ellipse nên ma trận tính định thức là ma trận bậc 5 (với cột cuối cùng là 1).

Viết minh họa bằng một chương trình sử dụng gói Sympy (sinh viên tự viết) để tìm các phương trình từ các điểm biết được của đường tròn.

Hướng dẫn: Định thức của phương trình đường tròn qua 3 điểm là:

$$\begin{bmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$