Listado 5

1. Por invertir en unas acciones en particular, una persona puede obtener ganancias de $4000 con una probabilidad de 0.3; o una pérdida de \$1000 con una probabilidad de 0.7 ¿Cuál es la ganancia que espe$
   $E[X] = \sum x_i * p_i E[X] = (4000)(0.3) + (-1000)(0.7) E[X] = 500\$$
   Se espera una ganancia de 500
   ¿Qué es la esperanza?
   La esperanza matemática es el promedio teórico que se obtendría si el experimento se repitiera muchísimas veces.
   $$E[X] = \sum x_i\, p_i$$
   Discreta
   $$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$
   Continua
2. Suponga que un distribuidor de joyas antiguas está interesado en comprar un collar de oro para el cual las probabilidades son 0.22; 0.36; 0.28 y 0.14 respectivamente, de que la poseedora estaría dispuesta a venderla en
   $250000, en \$150000, al costo \$100000 o con una pérdida de \$150000 ¿Cuál es la utilidad que ella espera?$
   $E[X] = (0.22 * 250000) + (0.36 * 150000) + (0.28 * 100000) + (0.14 * -150000) E[X] = 116000\$$
3. Si la utilidad de un distribuidor , en unidades de
   $1000, en un nuevo automóvil puede considerarse como una variable aleatoria X con función de densidad :$
   $f(x) = 2(1-x), 0 \leq x \leq 1 f(x) = 0, en Otro Caso Encuentre la utilidad promedio por automóvil.$
   $E[X] = \int_0^1 x * 2(1-x) dx E[X] = \frac{1}{3} \frac{1}{3} * 1000 = 333.33\$$
4. Si X representa el resultado cuando se lanza un dado balanceado. Encuentre la esperanza y la varianza de la variable $g(X) = 3X^2 + 4$

$$x \in [1, 2, 3, 4, 5, 6]$$

$$v.a = \frac{1}{6}$$

Esperanza:

x	$g(x) = 3x^2 + 4$
1	7
2	16
3	31
4	52
5	79

x	$g(x) = 3x^2 + 4$
6	112

$E[g(X)] = \frac{1}{6}(7 + 16 + 31 + 52 + 79 + 112)$
$E[g(X)] = 49.5$

Varianza

x	$g(x)^2$
1	$7^2 = 49$
2	$16^2 = 256$
3	$31^2 = 961$
4	$52^2 = 2704$
5	$79^2 = 6241$
6	$112^2 = 12544$

$$Var(g(X)) = E[g(X)^2] - (E[g(X)])^2$$

$$E[g(X)^2] = \frac{1}{6}(49 + 256 + 961 + 2704 + 6241 + 12544) = \frac{18755}{6}$$

$$(E[g(X)])^2 = 49.5^2 = 2450.25$$

$$Var(g(X)) = \frac{18755}{6} - 2450.25$$

$$Var(g(X)) = 675.58$$

Hipotetico

🎲 Supongamos un dado cargado

Digamos que el dado tiene estas probabilidades:

Cara x	**Probabilidad** $P(X=x)$
1	0.05
2	0.10
3	0.15
4	0.20
5	0.25
6	0.25

Estas suman 1, así que es una distribución válida.

Cálculo de la Esperanza de una Variable Continua

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x=1}^{6} g(x) \cdot P(X=x)$$

Si usamos la misma función de antes: $g(X) = 3X^2 + 4$, calculamos:

x	$g(x)$	$g(x) \cdot P(X=x)$
1	7	$7 \cdot 0.05 = 0.35$
2	16	$16 \cdot 0.10 = 1.60$
3	31	$31 \cdot 0.15 = 4.65$
4	52	$52 \cdot 0.20 = 10.40$
5	79	$79 \cdot 0.25 = 19.75$
6	112	$112 \cdot 0.25 = 28.00$

🔍 ¿Qué significa esto?

- La esperanza **ya no es el promedio clásico**, porque los valores tienen **pesos distintos**.
- En este caso, el dado favorece los valores altos (5 y 6), por eso la esperanza sube de 49.5 (caso justo) a 64.75.

---

8. Se sabe que el 30 % de las piezas defectuosas de un proceso de manufactura pueden quedar bien mediante un trabajo de reprocesado

- ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote de seis piezas defectuosas se puedan reprocesar por lo menos tres de ellas?
  Usamos distribución binomial:
  $X \sim \text{Binomial}(n = 6, p = 0.3)$
  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$
  $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(0) + P(1) + P(2)]$
  $P(0) = \binom{6}{0}(0.3)^0(0.7)^6 = 1 \cdot 1 \cdot 0.117649 = 0.1176$
  $P(1) = \binom{6}{1}(0.3)^1(0.7)^5 = 6 \cdot 0.3 \cdot 0.16807 = 0.3025$
  $P(2) = \binom{6}{2}(0.3)^2(0.7)^4 = 15 \cdot 0.09 \cdot 0.2401 = 0.3241$
  $P(X \leq 2) = 0.1176 + 0.3025 + 0.3241 = 0.7442$
  Recordar que:
  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
  entonces:
  $P(X \geq 3) = 1 - 0.7442 = 0.2558$
- ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de ellas se puedan reprocesar?
  $P(0) = \binom{6}{0}(0.3)^0(0.7)^6 = 1 \cdot 1 \cdot 0.117649 = 0.1176$
- ¿Cuál es la probabilidad de que todas ellas se puedan reprocesar?
  $P(2) = \binom{6}{6}(0.3)^6(0.7)^0 = 1 \cdot 0.000729 \cdot 1 = 0.000729$

14. Las piezas de pan de centeno distribuidas a las tiendas locales por una cierta pastelería tienen una longitud promedio de 30 cm. y una desviación estándar de 2 cm. Suponiendo que las longitudes están normalmente distribuidas, ¿Qué porcentaje de las piezas son

- de más de 31.7 cm de longitud?
  Media: $\mu = 30$ cm
  Desviación estándar= $\sigma = 2$ cm
  Distribución: $X \sim N(30, 2^2)$

$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

$Z \frac{31.7 - 30}{2} = 0.85$
$P(X > 31.7) = P(Z > 0.85)$
en la tabla se establece que 0.85 es 0.8023
$P(X > 31.7) = (1 - 0.8023) * 100 = 19.77$

- entre 29.3 y 33.5 cm de longitud?
  Para 29.3: $Z = \frac{29.3 - 30}{2} = -0.35$
  Para 33.5: $Z = \frac{33.5 - 30}{2} = 1.75$
  $P(-0.35 < Z < 1.75) = (P(Z < 1.75) - P(Z < -0.35)) * 100 = 59.97$
- de una longitud menor que 25.5 cm?
  $Z = \frac{25.5 - 30}{2} = -2.25$

aproximadamente 1.22

En la tabla no aparece negativo, por lo que seria 1-valor de la tabla