Semaine 2 - Algèbre de Boole

Informatique fondamentale

présenté par

Revekka Kyriakoglou

le

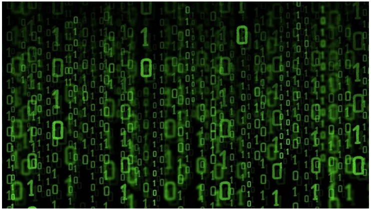
01 fevrier 2023

Plan du cours

Algèbre booléenne

Le langage de l'ordinateur :

Les ordinateurs ne comprennent pas le langage humain. Grâce au logiciel modern, l'utilisateur ne le sait pas, mais aux niveaux les plus bas de votre ordinateur, tout est représenté par un signal électrique binaire : 1 ou 0.



Binaire-Décimale

Le binaire est un système numérique de base 2.

Question

Qu'est-ce que le système décimal ?

Binaire-Décimale

Le binaire est un système numérique de base 2.

Question

Qu'est-ce que le système décimal ?

Formule de conversion binaire-décimale :

Binary Number = $(d_{n-1} \dots d_2 d_1 d_0)_2$

$$(\text{Decimal Number})_{10} = (d_0 \times 2^0) + (d_1 \times 2^1) + \cdots + (d_{n-1} \times 2^{n-1})$$

Binaire-Décimale

Le binaire est un système numérique de base 2.

Question

Qu'est-ce que le système décimal ?

Formule de conversion binaire-décimale :

Binary Number = $(d_{n-1} \ldots d_2 d_1 d_0)_2$

$$(\text{Decimal Number})_{10} = (d_0 \times 2^0) + (d_1 \times 2^1) + \cdots + (d_{n-1} \times 2^{n-1})$$

Exemple

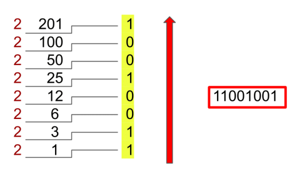
$$(11001011)_2 = (203)_{10}$$

Décimale-Binaire

Conversion décimale-binaire : Repeated Division-by-2 Method

Exemple

$(201)_{10} = (11001001)_2$

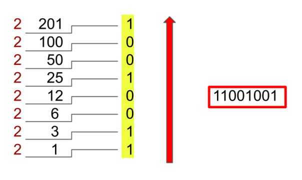


Décimale-Binaire

Conversion décimale-binaire : Repeated Division-by-2 Method

Exemple

$(201)_{10} = (11001001)_2$



Question

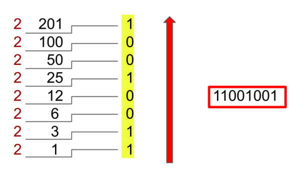
Transformez $(156)_{10}$ en binaire :

Décimale-Binaire

Conversion décimale-binaire : Repeated Division-by-2 Method

Exemple

$(201)_{10} = (11001001)_2$



Question

Transformez $(156)_{10}$ en binaire :

$(156)_{10} = (10011100)_2$

Addition de nombres binaires

Addition

L'addition de nombres binaires se fait en ajoutant les chiffres à partir du côté droit des nombres, de la même manière que nous additionnons deux ou plusieurs nombres en base 10.

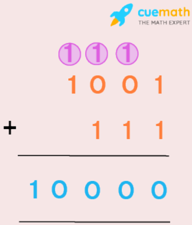
Addition de nombres binaires

Addition

L'addition de nombres binaires se fait en ajoutant les chiffres à partir du côté droit des nombres, de la même manière que nous additionnons deux ou plusieurs nombres en base 10.

Exemple

$(1001)_2 + (111)_2 = (10000)_2$



Question

Faites l'addition $(110)_2 + (1010)_2 + (1001)_2$

Question

Faites l’addition $(110)_2 + (1010)_2 + (1001)_2 = (11001)_2$

$$\begin{array}{rccccc} & & & 1 & & \\ & & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ + & & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Multiplication de nombres binaires

Multiplication

Pour résoudre un problème de multiplication binaire, nous devons suivre le même processus de multiplication et d'addition que nous utiliserions avec les nombres décimaux.

Multiplication de nombres binaires

Multiplication

Pour résoudre un problème de multiplication binaire, nous devons suivre le même processus de multiplication et d'addition que nous utiliserions avec les nombres décimaux.

Nous devos comprendre comment fonctionne l'addition avec les nombres binaires ! ! !

Multiplication de nombres binaires

Multiplication

Pour résoudre un problème de multiplication binaire, nous devons suivre le même processus de multiplication et d'addition que nous utiliserions avec les nombres décimaux.

Nous devos comprendre comment fonctionne l'addition avec les nombres binaires ! ! !

Exemple

$(1010)_2 \times (1111)_2 = (10010110)_2$

Multiplication de nombres binaires

Multiplication

Pour résoudre un problème de multiplication binaire, nous devons suivre le même processus de multiplication et d'addition que nous utiliserions avec les nombres décimaux.

Nous devos comprendre comment fonctionne l'addition avec les nombres binaires !!!

Exemple

$(1010)_2 \times (1111)_2 = (10010110)_2$

Question

Faites la multuplication $(110)_2 \times (101)_2$

Multiplication de nombres binaires

Multiplication

Pour résoudre un problème de multiplication binaire, nous devons suivre le même processus de multiplication et d'addition que nous utiliserions avec les nombres décimaux.

Nous devos comprendre comment fonctionne l'addition avec les nombres binaires ! ! !

Exemple

$(1010)_2 \times (1111)_2 = (10010110)_2$

Question

Faites la multuplication $(110)_2 \times (101)_2 = (011110)_2$

Division de nombres binaires

Division

La division binaire s'effectue à l'aide de **soustractions** et de **décalages**, comme la division décimale.

Le bit du quotient est :

- 1 si on peut soustraire le diviseur,
- sinon il est 0.

Division de nombres binaires

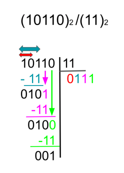
Division

La division binaire s'effectue à l'aide de **soustractions** et de **décalages**, comme la division décimale.

Le bit du quotient est :

- 1 si on peut soustraire le diviseur,
- sinon il est 0.

Exemple



Expression booléenne

Pour simplier l'écriture,

- on notera l'opération booléenne **ET** multiplicativement,
- on notera l'opération booléenne **NON** par un accent plat,
- on notera l'opération booléenne **OU** additivement.

Question

Transformez $(a \wedge b) \vee \neg c$:

Expression booléenne

Pour simplier l'écriture,

- on notera l'opération booléenne **ET** multiplicativement,
- on notera l'opération booléenne **NON** par un accent plat,
- on notera l'opération booléenne **OU** additivement.

Question

Transformez $(a \wedge b) \vee \neg c$:

$ab + \overline{c}$

Tables de vérité

Les tables de vérité de disjonction et de conjonction peuvent être transformés en tables d’addition et tables de multiplication.

Tables de vérité

⚠ Les tables de vérité de disjonction et de conjonction peuvent être transformés en tables d'addition et tables de multiplication.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

a	0	1
$\overline{a}$	1	0

Propriétés

- Associativité : $((a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c)$ et $(ab)c = a(bc) = abc$
- Commutativité : $a + b = b + a$ et $ab = ba$
- Distributivité : $a(b + c) = ab + ac$ et $a + (bc) = (a + b)(a + c)$
- Idempotence : $a + a + \cdots + a = a$ et $aa \dots a = a$
- Élément neutre : $a + 0 = 0 + a = a$ et $a1 = 1a = a$
- Absorption : $0a = 0$ et $1 + a = 1$
- De Morgan : $\overline{(a + b)} = \overline{a} + \overline{b}$
- Involution : $\overline{\overline{a}} = a$
- Tiers-exclus : $a + \overline{a} = 1$
- Non-contradiction : $a\overline{a} = 0$

Autres opérations binaires

- Implication : $a \Rightarrow b = \overline{a} + b$
- Equivalence : $a \Leftrightarrow b = (\overline{a} + b)(\overline{b} + a)$

Autres opérations binaires

- Implication : $a \Rightarrow b = \overline{a} + b$
- Equivalence : $a \Leftrightarrow b = (\overline{a} + b)(\overline{b} + a)$

$\Rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\Leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

Fonctions booléennes

Definition

Une fonction booléenne est une fonction qui a n variables ou entrées et qui ne suppose que 0 ou 1 dans sa sortie.

Fonctions booléennes

Definition

Une fonction booléenne est une fonction qui a *n* variables ou entrées et qui ne suppose que 0 ou 1 dans sa sortie.

Les *n* variables ou entrées implique qu'il existe . . . combinaisons possibles de variables.

Fonctions booléennes

Definition

Une fonction booléenne est une fonction qui a n variables ou entrées et qui ne suppose que 0 ou 1 dans sa sortie.

Les n variables ou entrées implique qu'il existe 2^n combinaisons possibles de variables.

Exemple

La fonction booléenne associée avec la formule $(P \wedge Q) \vee R$ *est :*

$$f(a, b, c) = a.b + c$$

avec $a \in P, b \in Q, c \in Q.$

Fonctions booléennes

⚠ Nous pouvons créer la table de vérité de la fonction.

Fonctions booléennes

Nous pouvons créer la table de vérité de la fonction.

Exemple

La fonction booléenne associée avec la formule $(P \wedge Q) \vee R$ *est :*

$$f(a,b,c) = a.b + c$$

a	b	c	$f(a,b,c)$
0	0	0	...
0	0	1	...
0	1	0	...
0	1	1	...
1	0	0	...
1	0	1	...
1	1	0	...
1	1	1	...

Fonctions booléennes

Nous pouvons créer la table de vérité de la fonction.

Exemple

La fonction booléenne associée avec la formule $(P \wedge Q) \vee R$ *est :*

$$f(a,b,c) = a.b + c$$

a	b	c	$f(a,b,c)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Minterms et Maxterms

Terme somme (Sum terms)
est une fonction composée uniquement de sommes.

Terme produit (Product terms)
est une fonction composée uniquement de produits.

Maxterm
de n variables est une somme de variables dans laquelle chacune apparaît exactement une fois sous forme vraie ou complémentée.

Minterm
de n variables est un produit des variables dans lequel chacune apparaît exactement une fois sous forme vraie ou complémentée.

- Toute fonction booléenne peut s'exprimer par une expression booléenne constituée de **la somme des minterms** qui correspondent à chaque **sortie à** 1 dans sa table de vérité.

- Toute fonction booléenne peut s'exprimer par une expression booléenne constituée de **la somme des minterms** qui correspondent à chaque **sortie à** 1 dans sa table de vérité.

- Toute fonction booléenne peut s'exprimer par une expression booléenne constituée du **produit des maxterms** qui correspondent à chaque **sortie à** 0 dans sa table de vérité.

MERCI !