Semaine 1 - Logique

Informatique fondamentale

présenté par

Revekka Kyriakoglou

le

25 janvier 2023

Plan du cours

L'objectif de ce cours est d'introduire quelques notions théoriques indispensables de l'informatique :

- Introduction à la logique
- Logique Booléenne
- Théorie des ensembles
- Relations et Quantificateur
- Relations d'ordre
- Fonctions
- Langages et Expressions régulières
- Automates
- Machine de Turing
- Complexité

Evaluation

Ce cours sera noté comme suit :

1. contrôle soutenu
2. petites interogations
3. examen

Formule :

$$\max(\text{exam}, \textit{moyenne}(\text{exam}, \max(\text{contrôle sout.}, \text{petites intero})))$$

Pourquoi étudier l'informatique fondamentale ?

Pourquoi étudier l'informatique fondamentale ?

L'informatique fondamentale est le langage de l'informatique.

Pourquoi étudier l'informatique fondamentale ?

L'informatique fondamentale est le langage de l'informatique.

Il faut la maîtriser pour travailler dans de nombreux domaines,

Pourquoi étudier l'informatique fondamentale ?

L'informatique fondamentale est le langage de l'informatique.

Il faut la maîtriser pour travailler dans de nombreux domaines,

- la science des données,
- l'apprentissage automatique,
- le génie logiciel,
- création de jeux.

Pourquoi étudier l'informatique fondamentale ?

L'informatique fondamentale est le langage de l'informatique.

Il faut la maîtriser pour travailler dans de nombreux domaines,

- la science des données,
- l'apprentissage automatique,
- le génie logiciel,
- création de jeux.

Les énigmes mathématiques sont souvent utilisées pour **les entretiens** !

Logique

Dictionnaire Larrouse :

> ***Logique :*** *Science du raisonnement en lui-même, abstraction faite de la matière à laquelle il s'applique et de tout processus psychologique.*

Logique

Dictionnaire Larrouse :

Logique : *Science du raisonnement en lui-même, abstraction faite de la matière à laquelle il s'applique et de tout processus psychologique.*

La science qui étudie les principes du raisonnement correct s'appelle **logique**.

Proposition

Les propositions sont utilisées afin de décrire ou de dénoter ce qui est le cas.

Exemple

- *« Cette phrase contient cinq mots. »*
- *« Tous les humains ont trois têtes. »*

Proposition

Les propositions sont utilisées afin de décrire ou de dénoter ce qui est le cas.

Exemple

- *« Cette phrase contient cinq mots. »*
- *« Tous les humains ont trois têtes. »*

La 1ère phrase est vraie, tandis que la 2nd est fausse.

Une proposition est une affirmation qui peut être

- soit vraie,
- soit fausse ;

elle doit être l'une ou l'autre, et ne peut pas être les deux et ce n'est pas une question d'opinion.

Exemple

Considérons les propositions suivantes :

1. *Il y a des extraterrestres qui vivent dans l'espace,*
2. 5 *est un entier naturel,*
3. $\frac{1}{2}$ *est un entier naturel.*

Exemple

Considérons les propositions suivantes :

1. *Il y a des extraterrestres qui vivent dans l'espace,*
2. 5 *est un entier naturel,*
3. $\frac{1}{2}$ *est un entier naturel.*

Plus précisément,

1. Nous ne savons pas encore si c'est vrai ou faux.
2. **Vrai** : 5 est un entier naturel,
3. **Faux** : $\frac{1}{2}$ est un entier naturel.

Une proposition est dite primitive si sa vérité ne « dépend »pas de celle d'une proposition plus simple,
c'est-à-dire qu'elle ne peut pas être « décomposée »en éléments plus simples.

Une proposition est dite primitive si sa vérité ne « dépend »pas de celle d'une proposition plus simple,
c'est-à-dire qu'elle ne peut pas être « décomposée »en éléments plus simples.

Exemple

- 5 *est un entier naturel,*
- $\frac{1}{2}$ *est un entier naturel.*

Une proposition est dite primitive si sa vérité ne « dépend »pas de celle d'une proposition plus simple,
c'est-à-dire qu'elle ne peut pas être « décomposée »en éléments plus simples.

Exemple

- 5 *est un entier naturel,*
- $\frac{1}{2}$ *est un entier naturel.*

Chaque proposition primitive peut être représentée par un nom et elle a une valeur de vérité,

- soit vrai
- ou faux.

- Nous pouvons nier une proposition primitive, c'est-à-dire faire la proposition opposée et ainsi inverser sa valeur de vérité.

- Nous pouvons nier une proposition primitive,
  c’est-à-dire faire la proposition opposée et ainsi inverser sa valeur de vérité.

- Nous pouvons combiner des propositions primitives de différentes manières, en utilisant des opérateurs logiques comme
  - non,
  - ou,
  - et

  et ainsi obtenir des propositions composées.

Negation Logique

En logique, la négation (également appelée complément logique) est une opération qui transforme une proposition P en une autre proposition "non P", écrite :

- $\neg P$
- $\sim P$
- $\overline{P}$

Negation Logique

En logique, la négation (également appelée complément logique) est une opération qui transforme une proposition P en une autre proposition "non P", écrite :

- $\neg P$
- $\sim P$
- $\overline{P}$

Exemple

Soit q la proposition,

- *Chris a 20 ans.*

Alors, la négation de q, $\neg q$, est,

- *Chris n'a pas 20 ans.*

Puisque p est une proposition, elle a deux valeurs possibles,

- vrai,
- faux.

Puisque p est une proposition, elle a deux valeurs possibles,

- vrai,
- faux.

Question

Alors, la négation de p, $\neg p$, est

- faux quand . . .
- vrai quand . . .

Exemple

Soit q la proposition,

- *Chris a 20 ans.*

Alors, la négation de q, $\neg q$, est,

- *Chris n'a pas 20 ans.*

Les éléments suivants sont des propositions primitives :

Exemple

Soit p_1 et p_2 les deux propositions suivantes,

- p_1 : *La lune n'est pas un satellite de la terre,*
- p_2 : *Les chiens ne peuvent pas voler.*

Les éléments suivants sont des propositions primitives :

Exemple

Soit p_1 et p_2 les deux propositions suivantes,

- p_1 : *La lune n'est pas un satellite de la terre,*
- p_2 : *Les chiens ne peuvent pas voler.*

La proposition p_1 est Faux mais la proposition p_2 est Vrai.

Table de vérité

Une table de vérité est un tableau comportant plusieurs colonnes. Les valeurs des cellules de ce tableau sont appelées valeurs de vérité :

- V pour vrai,
- F pour faux.

P	$\neg P$
Vrai	Faux
Faux	Vrai

TABLE – Table de vérité de $\neg P$.

Colonnes de gauche : définissent les valeurs de vérité de différentes propositions.
Colonne de droite : indique la valeur de vérité de l'expression logique.
Colonnes au centre du tableau : précisant des calculs intermédiaires.

Conjonction logique

Conjonction logique

La conjonction est une opération mise en œuvre par le connecteur binaire **et**.

Le connecteur de la conjonction de p et q est noté :

- soit $\&$,
- soit $\wedge$.

Conjonction logique

La conjonction est une opération mise en œuvre par le connecteur binaire **et**.
Le connecteur de la conjonction de p et q est noté :

- soit $\&$,
- soit $\wedge$.

Question

Quand pensez-vous que la conjonction $p \wedge q$ est vrai ?

Conjonction logique

La conjonction est une opération mise en œuvre par le connecteur binaire **et**.
Le connecteur de la conjonction de p et q est noté :

- soit &,
- soit $\wedge$.

Question
Quand pensez-vous que la conjonction $p \wedge q$ est vrai ?

Si à la fois p est vrai et q est vrai.

L'interprétation du connecteur $\wedge$ peut être faite par une table de vérité.

L'interprétation du connecteur $\wedge$ peut être faite par une table de vérité.

Pour deux propositions p et q. Il existe quatre paires possibles :

1. vrai et vrai,
2. ...
3. ...
4. ...

Donc, la table de vérité a ...lignes.

L'interprétation du connecteur $\wedge$ peut être faite par une table de vérité.

Pour deux propositions p et q. Il existe quatre paires possibles :

1. vrai et vrai,
2. ...
3. ...
4. ...

Donc, la table de vérité a ...lignes.

P	Q	$P \wedge Q$
Vrai	Vrai	...
Vrai	Faux	...
Faux	Vrai	...
Faux	Faux	...

Exemple

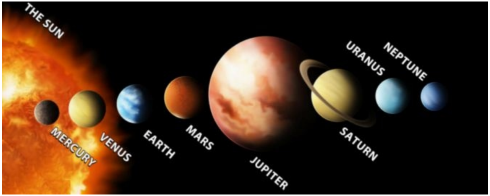
Soit p_1 *et* p_2 *les propositions,*

- p_1 : *La lune est un satellite de la terre,*
- p_2 : *la Terre est la troisième planète par ordre d'éloignement au Soleil.*

La conjonction $p_1 \wedge p_2$ *est :*

? ...

? *Vrai ou Faux ?*



Exemple

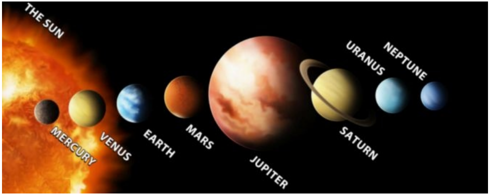
Soit p_1 et p_2 les propositions,

- *p_1 : La lune est un satellite de la terre,*
- *p_2 : la Terre est la troisième planète par ordre d'éloignement au Soleil.*

La conjonction $p_1 \wedge p_2$ est :

*La lune est un satellite de la terre **et** la Terre est la troisième planète par ordre d'éloignement au Soleil.*

Vrai ou Faux ?



Exemple

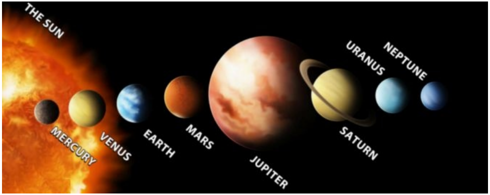
Soit p_1 et p_2 les propositions,

- p_1 : *La lune est un satellite de la terre,*
- p_2 : *la Terre est la troisième planète par ordre d'éloignement au Soleil.*

La conjonction $p_1 \wedge p_2$ est :

*La lune est un satellite de la terre **et** la Terre est la troisième planète par ordre d'éloignement au Soleil.*

Vrai



Disjonction

Disjonction

La disconjonction est une façon d'affirmer qu'au moins une de ces deux assertions est vraie (la première, la deuxième, ou les deux).

Elle se traduit par le **ou** et elle est noté :

- $\vee$,

Disjonction

La disconjonction est une façon d'affirmer qu'au moins une de ces deux assertions est vraie (la première, la deuxième, ou les deux).

Elle se traduit par le **ou** et elle est noté :

- $\vee$,

Question

Quand pensez-vous que la disconjonction $p \vee q$ est vrai ?

Disjonction

La disconjonction est une façon d'affirmer qu'au moins une de ces deux assertions est vraie (la première, la deuxième, ou les deux).

Elle se traduit par le **ou** et elle est noté :

- $\vee$,

Question

Quand pensez-vous que la disconjonction $p \vee q$ est vrai ?

Quand l'une des propositions est vrai.

L'interprétation du connecteur $\vee$ peut être faite par une table de vérité.

L'interprétation du connecteur $\vee$ peut être faite par une table de vérité.

Pour deux propositions p et q. Il existe quatre paires possibles :

1. vrai et vrai,
2. ...
3. ...
4. ...

Donc, la table de vérité a ...lignes.

L'interprétation du connecteur $\vee$ peut être faite par une table de vérité.

Pour deux propositions p et q. Il existe quatre paires possibles :

1. vrai et vrai,
2. ...
3. ...
4. ...

Donc, la table de vérité a ...lignes.

P	Q	$P \vee Q$
Vrai	Vrai	...
Vrai	Faux	...
Faux	Vrai	...
Faux	Faux	...

Exemple

Soit p_1 et p_2 les deux propositions suivantes,

- p_1 : *La lune est un satellite de la terre,*
- p_2 : *la terre est un satellite de la lune.*

La disjonction $p_1 \vee p_2$ est :

? . . .

? *Vrai ou Faux ?*

Exemple

Soit p_1 et p_2 les deux propositions suivantes,

- p_1 : *La lune est un satellite de la terre,*
- p_2 : *la terre est un satellite de la lune.*

La disjonction $p_1 \vee p_2$ est :

*La lune est un satellite de la terre **ou** la terre est un satellite de la lune.*

Vrai ou Faux ?

Exemple

Soit p_1 et p_2 les deux propositions suivantes,

- p_1 : *La lune est un satellite de la terre,*
- p_2 : *la terre est un satellite de la lune.*

La disjonction $p_1 \vee p_2$ est :

*La lune est un satellite de la terre **ou** la terre est un satellite de la lune.*

Vrai

Proposition conditionnelle

Une proposition de la forme « si p alors q » ou « p implique q », est appelée une proposition conditionnelle et elle est représentée par :

$$p \implies q$$

Proposition conditionnelle

Une proposition de la forme « si p alors q » ou « p implique q », est appelée une proposition conditionnelle et elle est représentée par :

$$p \implies q$$

- La proposition p est appelée hypothèse ou antécédent,
- la proposition q est la conclusion ou le conséquent.

Proposition conditionnelle

Une proposition de la forme « si p alors q » ou « p implique q », est appelée une proposition conditionnelle et elle est représentée par :

$$p \implies q$$

- La proposition p est appelée hypothèse ou antécédent,
- la proposition q est la conclusion ou le conséquent.

Exemple

Si Chris étudie l'informatique, alors il doit étudier l'informatique fondamentale.

La proposition $p \implies q$ est toujours vrai sauf lorsque p est vrai et q est faux.

La proposition $p \implies q$ est toujours vrai sauf lorsque p est vrai et q est faux.

Question

Pourquoi, les phrases suivantes sont vraies ?

- si $2 < 4$ alors Paris est en France,
- si Paris est au Danemark alors $2 < 4$,
- si $2 = 4$ alors Paris est au Danemark.

La table de vérité d'une proposition conditionnelle est : .

P	Q	$P \implies Q$
Vrai	...	Vrai
Vrai	...	Faux
Faux	...	Vrai
...	...	Vrai

Proposition biconditionnelle

Une proposition de la forme « p si et seulement si q » est appelée une proposition biconditionnelle et elle set représentée par

$$p \iff q$$

La proposition $p \iff q$ est vraie précisément lorsque p et q ont la même valeur de vérité.

La proposition $p \iff q$ est vraie précisément lorsque p et q ont la même valeur de vérité.

Question

Pourquoi, les phrases suivantes sont vraies ?

- $2 < 4$ si et seulement si Paris est en France,
- $2 = 4$ si et seulement si Paris est au Danemark.

Question

Quelle est la table de vérité d'une proposition biconditionnelle ($P \iff Q$) ?

Question

Quelle est la table de vérité d'une proposition biconditionnelle ($P \iff Q$) ?

P	Q	$P \iff Q$
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Faux	Faux	Vrai

Quantification

- La Quantification universelle : « pour tout »ou « quel que soit » se dénote par le symbole $\forall$.

Quantification

- La Quantification universelle : « pour tout »ou « quel que soit » se dénote par le symbole $\forall$.
- La Quantification existentielle : « il existe un/au moins un » se dénote par le symbole $\exists$.

Exemple

Considérons les propositions :

1. *Il y a un entier entre 2 et 5,*
2. *tous les nombres entiers impairs sont supérieurs à 2,*
3. *tous les pays ont une capitale,*
4. *il existe un pays sans frontière maritime.*

Ces propositions peuvent être écrites comme suit :

1. *($\exists$ un entier)(le entier est compris entre 2 et 5),*
2. *($\forall$ nombres entiers impairs)(les nombres entiers impairs sont supérieurs à 2),*
3. *. . .*
4. *. . .*

On peut aussi nier une proposition !

Exemple

Les propositions :

- $(\forall n \in \mathbb{N})(n > 2)$,
- *Negation :* $(\exists n \in \mathbb{N})(n \leqslant 2)$,
- $(\exists n \in \mathbb{N})(2 \leqslant n \leqslant 20)$,
- *Negation :* $(\forall n \in \mathbb{N})(n < 2 \textbf{ ou } n > 20)$.

MERCI !