

## Semaine 4 - Relations d'ordre

Informatique fondamentale

présenté par

Revekka Kyriakoglou

le

16 fevrier 2023

# Relations sur les relations



Puisque les relations sont des ensembles (de paires), les relations s'appliquent également aux relations.

# Relations sur les relations



Puisque les relations sont des ensembles (de paires), les relations s'appliquent également aux relations.

Soit  $E$  un ensemble et  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  des relations sur  $E$ .

- $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  sont **égales** si :

$$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y, \text{ si et seulement si } x\mathcal{S}y.$$

- $\mathcal{R}$  est un **sous-ensemble** de  $\mathcal{S}$  si :

$$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \text{ implique } x\mathcal{S}y.$$

# Diagramme de Hasse

Un **diagramme de Hasse** est une représentation graphique d'un ordre partiel.



On obtient ce diagramme à partir du diagramme sagittal :

- Pas d'auto-boucles : par **réflexivité**, nous pouvons toujours les rajouter.
- Les éléments supérieurs sont plus grands que les éléments inférieurs : par **antisymétrie**, les arêtes ne peuvent aller que dans une seule direction.
- Pas d'arêtes redondantes : par transitivité, nous pouvons peut déduire les bords manquants.

Nous dirons que  $y$  est un **successeur immédiat** de  $x$  quand :

- $x \leq y$  (c-à-d il y a une flèche de  $x$  à  $y$ ),
- $y$  est différent de  $x$  (c-à-d la flèche n'est pas une boucle), et
- il n'existe pas d'élément  $z$  tel que  $x \leq z$  et  $z \leq y$  (c-à-d en suivant les flèches, on ne peut pas aller de  $x$  à  $y$  par étape).

Nous dirons que  $y$  est un **successeur immédiat** de  $x$  quand :

- $x \leq y$  (c-à-d il y a une flèche de  $x$  à  $y$ ),
- $y$  est différent de  $x$  (c-à-d la flèche n'est pas une boucle), et
- il n'existe pas d'élément  $z$  tel que  $x \leq z$  et  $z \leq y$  (c-à-d en suivant les flèches, on ne peut pas aller de  $x$  à  $y$  par étape).

### Exemple

*Soit  $(\mathbb{N}, \leq)$  l'ensemble ordonné. L'élément 3 est le seul successeur immédiat de 2.*

### Exemple

*Soit  $\mathbb{N}^+$  avec la relation de divisibilité  $|$ . Il existe une infinité de successeurs immédiats de 2 : 4, 6, 10, 14, 22, 26, 34, 36, etc.*

### Exemple

*Soit l'ordre lexicographique. Le successeur immédiat de 100 est 1000 (et non pas 101 car  $1000 \leq 101$ ).*

# Exemple par CS103 de Stanford

Data : <http://www.london2012.com/medals/medal-count/>

## Jeux olympiques 2012

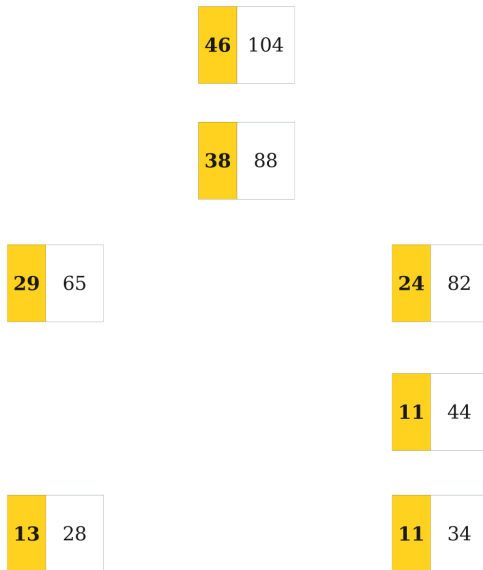
Or	Argent	Bronze	Total
46	29	29	104
38	27	23	88
29	17	19	65
24	26	32	82
13	8	7	28
11	19	14	44
11	11	12	34

### Relation :

$(or_0, total_0) \mathcal{R} (or_1, total_1)$

si

$or_0 \leq or_1$  et  $total_0 \leq total_1$





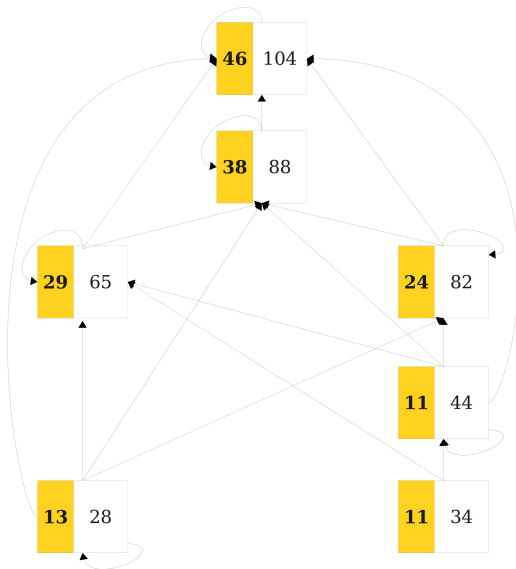


FIGURE – Diagramme sagittal

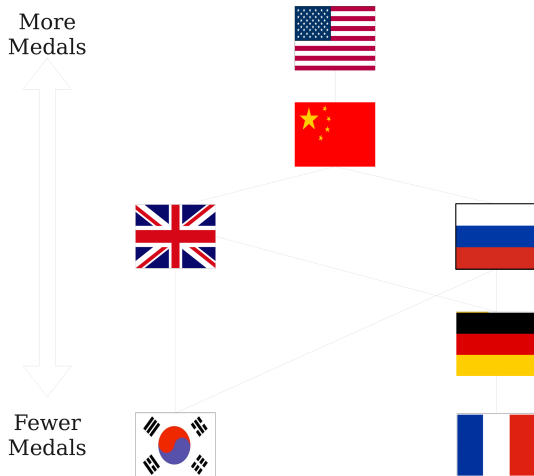


FIGURE – Diagramme de Hasse