Semaine 3 - Théorie des ensembles

Informatique fondamentale

présenté par

Revekka Kyriakoglou

le

08 fevrier 2023

Plan du cours

Ensemble

En mathématiques, un ensemble désigne intuitivement une collection d'objets (les éléments de l'ensemble).

Ensemble

En mathématiques, un ensemble désigne intuitivement une collection d'objets (les éléments de l'ensemble).

- **Ensemble :** une collection d'objets spécifiés.
- **Eléments :** les objets d'un ensemble.

Ensemble

En mathématiques, un ensemble désigne intuitivement une collection d'objets (les éléments de l'ensemble).

- **Ensemble :** une collection d'objets spécifiés.
- **Eléments :** les objets d'un ensemble.

Notation

- Les éléments sont affichés entre accolades, $\{\}$.
- Nous utilisons souvent des lettres majuscules pour nommer les ensembles.

Exemple

Les exemples suivants sont des exemples d'ensembles :

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
- $B = \{Anna, Emma, Lea, Maria\}$,
- $C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$,
- $D = \{\star, \bullet, \square, \circ, \otimes\}$

Les ensembles beaucoup utilisés portent des noms :

- $\mathbb{B}$ est l'ensemble des **bits**,

$$\mathbb{B} = \{0, 1\}$$

Les ensembles beaucoup utilisés portent des noms :

- $\mathbb{B}$ est l'ensemble des **bits**,

$$\mathbb{B} = \{0, 1\}$$

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels**,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

Les ensembles beaucoup utilisés portent des noms :

- $\mathbb{B}$ est l'ensemble des **bits**,

$$\mathbb{B} = \{0, 1\}$$

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels**,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **entiers relatifs**,

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

Les ensembles beaucoup utilisés portent des noms :

- $\mathbb{B}$ est l'ensemble des **bits**,

$$\mathbb{B} = \{0, 1\}$$

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels**,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **entiers relatifs**,

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des **nombres réels**,

$$\mathbb{R} = \{\text{Numbers that can represent a distance along a line.}\}$$

Notation

Les ensembles fabriqués à partir de ceux-ci sont souvent désignés par une juxtaposition de symbols, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}^-$.

Attention

- Les ensembles sont non ordonnés.
- Nous ne pouvons pas avoir de doublons des éléments dans un ensemble.

Exemple

Les ensembles $A = \{1, 3, 5, 7\}$ *et* $B = \{7, 3, 1, 5\}$ *sont les mêmes.*

Exemple

Dans une salle, il y a 5 super-héros,

1. *Bruce Wayne (Batman),*
2. *Bruce Banner (Hulk),*
3. *Peter Parker (Spiderman),*
4. *Natasha Romanoff (Black Widow).*

L'ensemble de leur vrais prénoms est :

$$A = \{Bruce, Peter, Natasha\}$$

L'ensemble de leur noms (super-héros) est :

$$B = \{Batman, Hulk, Spiderman, BlackWidow\}.$$

Si le nombre d'éléments est grand ou même infini, nous essayons de décrire ces éléments.

Si le nombre d'éléments est grand ou même infini, nous essayons de décrire ces éléments.

Exemple

l'ensemble des nombres premiers peut être écrit comme suit :

$$\{x \; : \; x \textit{ est un nombre premier}\}$$

à lire comme suit :

- *P est l'ensemble dont les éléments sont tous les x tels que x est un nombre premier,*
- *P est l'ensemble de tous les nombres premiers.*

Rappelez-vous :

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs.

Rappelez-vous :

- $\in$: est utilisée pour les mots « appartient à », « est un élément de ».
- $\notin$: est utilisée pour « n'appartient pas à », « n'est pas un élément de ».

Exemple

Les éléments suivants sont des représentations d'ensembles :

- *L'ensemble des nombres pairs,*

$$\begin{aligned} \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\} &= \{x : x \text{ est un nombre pair}\} \\ &= \{2k : k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Exemple

Les éléments suivants sont des représentations d'ensembles :

- *L'ensemble des nombres pairs,*

$$\begin{aligned} \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} &= \{x : x \text{ est un nombre pair}\} \\ &= \{2k : k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

- *L'ensemble des entiers naturels, multiples de* 3 *et inférieur à* 100,
- *L'ensemble des nombres pairs qu'ils ne sont pas dans* $[-5, 5]$,

Exemple

Les éléments suivants sont des représentations d'ensembles :

- *L'ensemble des nombres pairs,*

$$\begin{aligned}\{\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots\} &= \{x : x \text{ est un nombre pair}\}\\ &= \{2k : k \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

- *L'ensemble des entiers naturels, multiples de* 3 *et inférieur à* 100,

$$\begin{aligned}\{3,6,9,\ldots,96,99\} &= \{x : x \text{ est } \ldots\}\\ &= \end{aligned}$$

- *L'ensemble des nombres pairs qu'ils ne sont pas dans* $[-5,5]$,

Exemple

Les éléments suivants sont des représentations d'ensembles :

- *L'ensemble des nombres pairs,*

$$\begin{aligned} \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} &= \{x : x \text{ est un nombre pair}\} \\ &= \{2k : k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

- *L'ensemble des entiers naturels, multiples de* 3 *et inférieur à* 100*,*

$$\begin{aligned} \{3, 6, 9, \dots, 96, 99\} &= \{x : x \text{ est } \dots\} \\ &= \{3k : k \in \mathbb{N} \wedge 3k < 100\} \end{aligned}$$

- *L'ensemble des nombres pairs qu'ils ne sont pas dans* $[-5, 5]$*,*

Exemple

Les éléments suivants sont des représentations d'ensembles :

- *L'ensemble des nombres pairs,*

$$\begin{aligned}\{\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots\} &= \{x : x \textit{ est un nombre pair}\}\\ &= \{2k : k \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

- *L'ensemble des entiers naturels, multiples de* 3 *et inférieur à* 100*,*

$$\begin{aligned}\{3,6,9,\ldots,96,99\} &= \{x : x \textit{ est } \ldots\}\\ &= \{3k : k \in \mathbb{N} \wedge 3k < 100\}\end{aligned}$$

- *L'ensemble des nombres pairs qu'ils ne sont pas dans* $[-5,5]$*,*

$$\{\ldots,-8,-6,6,8,\ldots\} \quad =$$

Exemple

Les éléments suivants sont des représentations d'ensembles :

- *L'ensemble des nombres pairs,*

$$\begin{aligned}\{\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots\} &= \{x : x \textit{ est un nombre pair}\}\\ &= \{2k : k \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

- *L'ensemble des entiers naturels, multiples de* 3 *et inférieur à* 100,

$$\begin{aligned}\{3,6,9,\ldots,96,99\} &= \{x : x \textit{ est } \ldots\}\\ &= \{3k : k \in \mathbb{N} \wedge 3k < 100\}\end{aligned}$$

- *L'ensemble des nombres pairs qu'ils ne sont pas dans* $[-5,5]$,

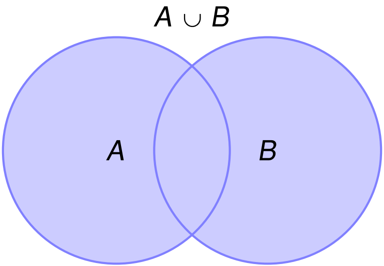
$$\begin{aligned}\{\ldots,-8,-6,6,8,\ldots\} &= \{x : x \textit{ est un nombre pair } \textbf{\textit{et}} \textit{ x not in } [-5,5]\}\\ &= \{2k : k \in \mathbb{Z} \wedge 2k \notin [-5,5]\}\end{aligned}$$

Union

Union

Quand on a deux ensembles A et B, on peut construir leur réunion (dit aussi *union*) en considérant un ensemble suivante :

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$



Exemple

Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 4, 8, 12\}$. *L'union* $A \cup B$ *est l'ensemble* $\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 12\}$.

Exemple

Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 4, 8, 12\}$. *L'union* $A \cup B$ *est l'ensemble* $\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 12\}$.

Exemple

Soit

$$F = \{Claire, Anna, Maria, Lea\}$$

l'ensemble des noms des femmes qui participent à un concours de danse et

$$M = \{Jim, Dominique, Xavier, Arthur, Ollivier\}$$

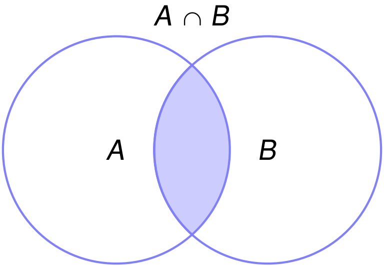
l'ensemble des noms des hommes qui participent.
L'union $F \cup M$ *est l'ensemble de toutes les personnes qui participent.*

Intersection

Intersection

Quand on a deux ensembles A et B, on peut construir leur intersection en considérant un ensemble suivante :

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}.$$



Exemple

Soit $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,4,8,12\}$. *L'intersection* $A \cap B$ *est l'ensemble* $\{1,4\}$.

Exemple

Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 4, 8, 12\}$. *L'intersection* $A \cap B$ *est l'ensemble* $\{1, 4\}$.

Ensembles disjoints

- Deux ensembles sont disjoints quand leur intersection est l'ensemble vide.
- n ensembles sont disjoints 2 à 2 quand ils sont par deux disjoint, c'est à dire $E_i \cap E_j = \{\}$ quels que soient i et j, avec $i \neq j$.

Exemple

Supposons que deux amies, Anna et Maria, essaient de trouver une activité commune. Anna s'intéresse au tennis, au volley et au badminton. Maria est intéressée par la natation, l'escalade et le volley. Nous utiliserons la lettre A pour indiquer l'ensemble des intérets de Anna et M pour l'ensemble des intérets de Maria,

$$A = \{\ldots\}$$

$$M = \{\ldots\}.$$

L'intersection des ensembles A et M est,

$$A \cap M = \{\ldots\}$$

qui correspond aux intérêts qu'ils ont en commun.

Exemple

Supposons que deux amies, Anna et Maria, essaient de trouver une activité commune. Anna s'intéresse au tennis, au volley et au badminton. Maria est intéressée par la natation, l'escalade et le volley. Nous utiliserons la lettre A pour indiquer l'ensemble des intérets de Anna et M pour l'ensemble des intérets de Maria,

$$A = \{tennis, volley, badminton\}$$

$$M = \{natation, escalade, volley\}.$$

L'intersection des ensembles A et M est,

$$A \cap M = \{volley\}$$

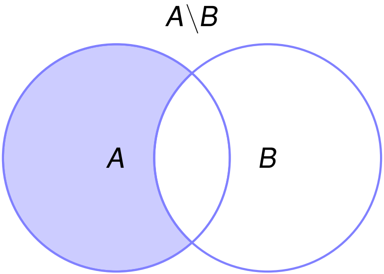
qui correspond aux intérêts qu'ils ont en commun.

Différence

Différence

Nous pouvons aussi lister les éléments d'un ensemble A qui ne sont pas dans l'ensemble B. Cette opération s'appelle la différence entre A et B, que nous écrivons comme,

$$A \backslash B = \{x : x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$



Exemple

Soit $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, f, g\}$. *La différence entre* A *et* B *est l'ensemble* $A \backslash B = \{a, b, d\}$ *et la différence entre* B *et* A *est l'ensemble* $B \backslash A = \{f, g\}$.

Exemple

Soit $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, f, g\}$. La différence entre A et B est l'ensemble $A \backslash B = \{a, b, d\}$ et la différence entre B et A est l'ensemble $B \backslash A = \{f, g\}$.

Exemple

Supposons que Anna ne veut pas commancer la même activité que Maria. Anna s'intéresse au tennis, au volley et au badminton. Maria est intéressée par la natation, l'escalade et le volley. Nous utiliserons la lettre A pour indiquer l'ensemble des intérets de Anna et M pour l'ensemble des intérets de Maria,

$$A = \{\dots\}$$

$$M = \{\dots\}.$$

La différence entre A et M sont les activités qu'Anna peut faire sans Maria,

$$A \backslash M = \{\dots\}.$$

Exemple

Soit $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, f, g\}$. *La différence entre* A *et* B *est l'ensemble* $A \backslash B = \{a, b, d\}$ *et la différence entre* B *et* A *est l'ensemble* $B \backslash A = \{f, g\}$.

Exemple

Supposons que Anna ne veut pas commancer la même activité que Maria. Anna s'intéresse au tennis, au volley et au badminton. Maria est intéressée par la natation, l'escalade et le volley. Nous utiliserons la lettre A *pour indiquer l'ensemble des intérets de Anna et* M *pour l'ensemble des intérets de Maria,*

$$A = \{tennis, volley, badminton\}$$

$$M = \{natation, escalade, volley\}.$$

La différence entre A *et* M *sont les activités qu'Anna peut faire sans Maria,*

$$A \backslash M = \{tennis, badminton\}.$$

Complémentaire

Nous utilisons un nom pour le **"plus grand"** ensemble que nous sommes prêts à considérer. Si tous les ensembles que nous voulons considérer sont des sous-ensembles d'un grand ensemble $\mathcal{U}$, alors $\mathcal{U}$ est appelé l'ensemble universel.

Complémentaire

Nous utilisons un nom pour le **"plus grand"** ensemble que nous sommes prêts à considérer. Si tous les ensembles que nous voulons considérer sont des sous-ensembles d'un grand ensemble $\mathcal{U}$, alors $\mathcal{U}$ est appelé l'ensemble universel.

Différence

Le complémentaire d'une partie A d'un ensemble $\mathcal{U}$ est constitué de tous les éléments de $\mathcal{U}$ n'appartenant pas à A et s'écrit comme suit $A^{\complement}$ ou $\overline{A}$.

$$A^{\complement} = \overline{A} = \{x : x \notin A\}$$

Exemple

Supposons que dans le salle de sport de l'université, cinq activités sont disponibles,

$$\mathcal{U} = \{tennis, volley, badminton, natation, escalade\}.$$

Un élève a choisi de participer aux sports suivants,

$$A = \{tennis, badminton\}.$$

Les sports qui sont disponibles mais qui ne sont pas choisis par l'étudiant sont le complément de l'ensemble A,

$$A^{\complement} = \{volley, natation, escalade\} = \mathcal{U} - A$$

Exemple

Soit $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *et nous considérons deux ensembles,* $A = \{1, 2\}$ *et* $B = \{3\}$. *Alors,*

$$A^{\complement} = \{3, 4, 5\} \textit{ et } B^{\complement} = \{1, 2, 4, 5\}.$$

Exemple

Soit $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *et nous considérons deux ensembles,* $A = \{1, 2\}$ *et* $B = \{3\}$*. Alors,*

$$A^{\complement} = \{3, 4, 5\} \text{ et } B^{\complement} = \{1, 2, 4, 5\}.$$

Exemple

Soit $U = \mathbb{N}$ *et nous considérons deux ensembles,* $A = \{1, 2\}$ *et* $B = \{3\}$*, comme précédemment. Alors,*

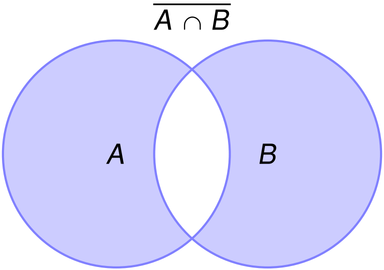
$$A^{\complement} = \mathbb{N} \backslash A = \{3, 4, 5, 6, \ldots\} \text{ et } B^{\complement} = \mathbb{N} \backslash B = \{1, 2, 4, 5, 6, \ldots\}.$$

Nous pouvons également appliquer le complément d'un ensemble qui est le resultat d'opérations sur ensembles !

Nous pouvons également appliquer le complément d'un ensemble qui est le resultat d'opérations sur ensembles !

Exemple

$$
\begin{aligned}
(A \cap B)^{\complement} &= \overline{A \cap B} \\
&= \{x : x \in A \text{ et } x \in B \text{ et } x \notin A \cap B\}
\end{aligned}
$$



Remarque

Supposons-nous que $\mathcal{U}$ est l'ensemble universel. Nous pouvons vérifier que les résultats suivants sont vrais,

- $\emptyset^{\complement} = \mathcal{U}$
- $\mathcal{U}^{\complement} = \emptyset$
- $(A^{\complement})^{\complement} = A$

Sous-ensemble

Un ensemble B est un sous-ensemble d'un ensemble A si tous les éléments de B sont également des éléments de A. Dans ce cas A est un sur-ensemble de B.

Sous-ensemble

Un ensemble B est un sous-ensemble d'un ensemble A si tous les éléments de B sont également des éléments de A. Dans ce cas A est un sur-ensemble de B.

Notation

Si B est un sous-ensemble de A on ecrit,

$$\begin{aligned} B &\subseteq A \\ A &\supseteq B. \end{aligned}$$

Ensemble puissance

Ensemble puissance

Soit E un ensemble. L'ensemble puissance ou l'ensemble des parties de E est l'ensemble, généralement noté $pow(E)$, dont les éléments sont les sous-ensembles de E :

$$A \in pow(E) \Leftrightarrow A \subset E.$$

Exemple

Soit $E = \{a, b, c\}$. Les sous-ensembles de E sont :

- *$\emptyset$ et E,*
- *les trois singletons $\{a\}, \{b\}$ et $\{c\}$,*
- *les trois paires $\{a, b\}, \{a, c\}$ et $\{b, c\}$.*

Donc, l'ensemble puissance est :

$$pow(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$$

Ensembles inégaux

Deux ensembles sont inégaux si il existe au moins un élément de A qui n'est pas un élément de B.

Ensembles inégaux

Deux ensembles sont inégaux si il existe au moins un élément de A qui n'est pas un élément de B.

Exemple

- $A = \{1, 2, 4, 7\}$ *et* $B = \{1, 7, 4, 2\}$ *sont égaux.*
- $A = \{1, 2, 5, 7\}$ *et* $B = \{1, 7, 4, 3\}$ *sont inégaux.*

Si A et B sont égaux, alors B est un sous-ensemble propre (ou strict) de A et il est noté par,

$$B \subsetneq A.$$

Si A et B sont égaux, alors B est un sous-ensemble propre (ou strict) de A et il est noté par,

$$B \subsetneq A.$$

La relation selon laquelle un ensemble est un sous-ensemble d'un autre est appelée inclusion.

Si A et B sont égaux, alors B est un sous-ensemble propre (ou strict) de A et il est noté par,

$$B \subsetneq A.$$

La relation selon laquelle un ensemble est un sous-ensemble d'un autre est appelée inclusion.

L'*ensemble vide* est noté par $\{\}$ ou $\varnothing$ et il est :

- un sous-ensemble de tout ensemble,
- un sous-ensemble propre de tout ensemble **sauf** de lui-même.

Exemple

Soit $A = \{2, 6, 100\}$ *et* $P = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$. *Nous pouvons vérifier que tous les éléments de* A *appartiennent au* P.
En effet,

$$\begin{aligned} 2 \ (mod\ 2) = 6 \ (mod\ 2) = 100 \ (mod\ 2) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2, 6, 100 \in P \\ &\Rightarrow \quad A \subseteq P. \end{aligned}$$

Méthodologie

Pour démontrer que deux ensembles A et B sont égaux, on procède en deux temps,

- en démontrant que A est inclus dans B,
- puis que B est inclus dans A.

Méthodologie

Pour démontrer que deux ensembles A et B sont égaux, on procède en deux temps,

- en démontrant que A est inclus dans B,
- puis que B est inclus dans A.

Exemple

Remplir les exemples de sous-ensembles :

- $\{1, 5\} \ldots \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\{1, 10\} \ldots \{1, 10\}$
- $\{10\} \ldots \{1, 10\}$
- $\mathbb{Z} \ldots \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$

Méthodologie

Pour démontrer que deux ensembles A et B sont égaux, on procède en deux temps,

- en démontrant que A est inclus dans B,
- puis que B est inclus dans A.

Exemple

Remplir les exemples de sous-ensembles :

- $\{1,5\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$
- $\{1,10\} \dots \{1,10\}$
- $\{10\} \dots \{1,10\}$
- $\mathbb{Z} \dots \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$

Méthodologie

Pour démontrer que deux ensembles A et B sont égaux, on procède en deux temps,

- en démontrant que A est inclus dans B,
- puis que B est inclus dans A.

Exemple

Remplir les exemples de sous-ensembles :

- $\{1,5\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$
- $\{1,10\} = \{1,10\}$
- $\{10\} \ldots \{1,10\}$
- $\mathbb{Z} \ldots \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$

Méthodologie

Pour démontrer que deux ensembles A et B sont égaux, on procède en deux temps,

- en démontrant que A est inclus dans B,
- puis que B est inclus dans A.

Exemple

Remplir les exemples de sous-ensembles :

- $\{1, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\{1, 10\} = \{1, 10\}$
- $\{10\} \subseteq \{1, 10\}$
- $\mathbb{Z} \ldots \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$

Méthodologie

Pour démontrer que deux ensembles A et B sont égaux, on procède en deux temps,

- en démontrant que A est inclus dans B,
- puis que B est inclus dans A.

Exemple

Remplir les exemples de sous-ensembles :

- $\{1, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\{1, 10\} = \{1, 10\}$
- $\{10\} \subseteq \{1, 10\}$
- $\mathbb{Z} \supseteq \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$

Remarque

Nous pouvons utiliser le complément pour reformuler le sous-ensemble en termes d'égalité :

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$$

Remarque

Nous pouvons utiliser le complément pour reformuler le sous-ensemble en termes d'égalité :

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \varnothing$$

Remarque

Il tient que :

$$A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$$

Loi distributive des ensembles

Théorème

Soit A, B et C trois ensembles. Alors,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Loi distributive des ensembles

Théorème

Soit A, B et C trois ensembles. Alors,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Preuve :

L'égalité $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ est équivalent à

$$z \in A \cap (B \cup C) \text{ si-si } z \in (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

pour tout z. Nous allons le prouver par une chaîne de "si et seulement si".

$$\begin{aligned}
z \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow (z \in A) \wedge (z \in B \cup C) \\
&\Leftrightarrow (z \in A) \wedge (z \in B \vee z \in C) \\
&\Leftrightarrow (z \in A \wedge z \in B) \vee (z \in A \wedge z \in C) \qquad (\textit{distribu} \\
&\Leftrightarrow (z \in A \cap B) \vee (z \in A \cap C) \\
&\Leftrightarrow z \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}$$

Partition

Partition

Une partition d'un ensemble est un regroupement de ses éléments en sous-ensembles non vides, de telle sorte que chaque élément soit inclus dans exactement un sous-ensemble.

Exemple

Nous supposons que la salle il y a 7 élèves :

$$E = \{Anna, Arthur, Lea, Louis, Maria, Mohamed, Xavier\}$$

Nous pouvons faire une partition de l'ensemble E sur la base de la première lettre des noms des étudiants :
$A = \{Anna, Arthur\}$, $L = \{Lea, Louis\}$, $M = \{Maria, Mohamed\}$, $X = \{Xavier\}$

Exemple

Nous supposons que la salle il y a 7 élèves :

$$E = \{Anna, Arthur, Lea, Louis, Maria, Mohamed, Xavier\}$$

Nous pouvons faire une partition de l'ensemble E sur la base de la première lettre des noms des étudiants :
$A = \{Anna, Arthur\}$, $L = \{Lea, Louis\}$, $M = \{Maria, Mohamed\}$, $X = \{Xavier\}$

Chaque élève n'appartient qu'à un seul sous-ensemble et que l'union de tous les sous-ensembles est égale à l'ensemble lui-même.

Exemple

Nous supposons que la salle il y a 7 élèves :

$$E = \{Anna, Arthur, Lea, Louis, Maria, Mohamed, Xavier\}$$

Nous pouvons faire une partition de l'ensemble E sur la base de la première lettre des noms des étudiants :
$A = \{Anna, Arthur\}$, $L = \{Lea, Louis\}$, $M = \{Maria, Mohamed\}$, $X = \{Xavier\}$

Chaque élève n'appartient qu'à un seul sous-ensemble et que l'union de tous les sous-ensembles est égale à l'ensemble lui-même.

Question

Quelle est une autre partition possible de l'ensemble E ?

Exemple

Soit X un ensemble avec 5 éléments. Il y a 52 partitions de X.

circles.png

Produit d'ensembles

Produit d'ensembles

Pour tout ensemble A et tout ensemble B, il existe un ensemble P dont les éléments sont tous les couples dont la première composante appartient à A et la seconde à B :

$$\forall A \; \forall B \; \exists P \quad \forall z \; \big(z \in P \Leftrightarrow \exists x \; \exists y \; (x \in A \; \wedge \; y \in B \; \wedge \; z = (x, y))\big)$$

Cet ensemble est noté $A \times B$ et est appelé produit cartésien de A par B.

Question

La cafétéria propose le menu suivant :

- Plat :
  - poulet basquaise,
  - paupiettes de dinde,
  - quiche lorraine.
- Accompagnement :
  - frites,
  - salade,
  - riz.

Quelles sont les différentes combinaisons de repas qui peuvent être commandées ?

Question

La cafétéria propose le menu suivant :

- Plat :
  - poulet basquaise,
  - paupiettes de dinde,
  - quiche lorraine.
- Accompagnement :
  - frites,
  - salade,
  - riz.

Quelles sont les différentes combinaisons de repas qui peuvent être commandées ?

$$\begin{aligned} M \times A \quad = \quad & \{(\text{poulet basquaise, frites}), (\text{poulet basquaise, salade}), \\ & (\text{paupiettes de dinde, frites}), (\text{paupiettes de dinde, riz}), \\ & (\text{quiche lorraine, frites}), (\text{quiche lorraine, riz}), \ldots\} \end{aligned}$$

Exemple

Soit $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{T, F\}$, *alors*

$$A \times B \times C = \{(a, 2, T), (a, 2, F), (a, 3, T), (a, 3, F), (a, 4, T), \ldots\}.$$

L'ensemble $A \times B \times C$ *a 12 éléments qui sont 3-tuples.*

Ensemble fini/infini

Un ensemble fini est un ensemble qui possède un nombre fini d'éléments, c'est-à-dire qu'il est possible de compter ses éléments. Un ensemble infini est un ensemble qui n'est pas fini.

Ensemble fini/infini

Un ensemble fini est un ensemble qui possède un nombre fini d'éléments, c'est-à-dire qu'il est possible de compter ses éléments. Un ensemble infini est un ensemble qui n'est pas fini.

Exemple

- *L'ensemble des chiffres en base dix* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *qui possède* 10 *éléments, est **fini**.*
- *L'ensemble de tous les nombres entiers naturels* $\mathbb{N}$ *est **infini**.*

Cardinalité

Cardinalité

La cardinalité d'un ensemble est une mesure de la taille d'un ensemble, c'est-à-dire le nombre d'éléments de l'ensemble, dénoté par $|A|$.

Cardinalité

Cardinalité

La cardinalité d'un ensemble est une mesure de la taille d'un ensemble, c'est-à-dire le nombre d'éléments de l'ensemble, dénoté par $|A|$.

Exemple

L'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *a* 4 *éléments, donc il a cardinalité* 4.

Cardinalité

Cardinalité

La cardinalité d'un ensemble est une mesure de la taille d'un ensemble, c'est-à-dire le nombre d'éléments de l'ensemble, dénoté par $|A|$.

Exemple

L'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *a* 4 *éléments, donc il a cardinalité* 4.

Question

Soit $B = \{n \in \mathbb{Z} : 5 \leqslant n \leqslant 5\}$. Quelle est la cardinalité de l'ensemble B ?

Cardinalité

Cardinalité

La cardinalité d'un ensemble est une mesure de la taille d'un ensemble, c'est-à-dire le nombre d'éléments de l'ensemble, dénoté par $|A|$.

Exemple

L'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *a* 4 *éléments, donc il a cardinalité* 4*.*

Question

Soit $B = \{n \in \mathbb{Z} : 5 \leqslant n \leqslant 5\}$. Quelle est la cardinalité de l'ensemble B ?

$B = \{-5, -4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow |B| = 11$

Définition

Deux ensembles A et B ont la même cardinalité, désignée par $|A| = |B|$, s'il existe fonction bijective (« one-to-one ») $f : A \to B$.

Bijection

Une bijection est une fonction entre les éléments de deux ensembles, où chaque élément d'un ensemble est apparié avec exactement un élément de l'autre ensemble, et vice-versa.

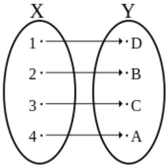


FIGURE – Fonction bijective

Définition

Un ensemble fini est un ensemble qui possède un nombre fini d'éléments, c'est-à-dire qu'il est possible de compter ses éléments. Un ensemble infini est un ensemble qui n'est pas fini.

La cardinalité d'un ensemble infini est plus délicate.

Il existe de nombreuses sortes d'infinis et que certains sont plus grands que d'autres.

Dénombrable

Étant donné un ensemble A, alors A est infini de façon dénombrable si $|\mathbb{N}| = |A|$, c'est-à-dire s'il existe une bijection f entre les nombres naturels et les éléments de A.

Dénombrable

Étant donné un ensemble A, alors A est infini de façon dénombrable si $|\mathbb{N}| = |A|$, c'est-à-dire s'il existe une bijection f entre les nombres naturels et les éléments de A.

En d'autres termes, les éléments de A peuvent être énumérés dans une liste infinie $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$.

Dénombrable

Étant donné un ensemble A, alors A est infini de façon dénombrable si $|\mathbb{N}| = |A|$, c'est-à-dire s'il existe une bijection f entre les nombres naturels et les éléments de A.

En d'autres termes, les éléments de A peuvent être énumérés dans une liste infinie $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$.

Indénombrable

A est indénombrable si A est infini et si $|\mathbb{N}| < |A|$, donc il n'existe pas de telles bijections.

Dénombrable

Étant donné un ensemble A, alors A est infini de façon dénombrable si $|\mathbb{N}| = |A|$, c'est-à-dire s'il existe une bijection f entre les nombres naturels et les éléments de A.

En d'autres termes, les éléments de A peuvent être énumérés dans une liste infinie $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$.

Indénombrable

A est indénombrable si A est infini et si $|\mathbb{N}| < |A|$, donc il n'existe pas de telles bijections.

L'infini dénombrable est le plus petit infini.

Exemple

L'ensemble de carrés des entiers positifs est dénombrable.

$$
\begin{array}{ccc}
1 & \rightarrow & 1 \\
2 & \rightarrow & 4 \\
3 & \rightarrow & 9 \\
4 & \rightarrow & 16 \\
5 & \rightarrow & 25 \\
 & \ldots &
\end{array}
$$

$$f(n) = n^2, \ \textit{avec } n \in \mathbb{N}$$

Question

Est-ce que $\mathbb{Q}$ est dénombrable ?

Question

Est-ce que Q est dénombrable ?

Solution :

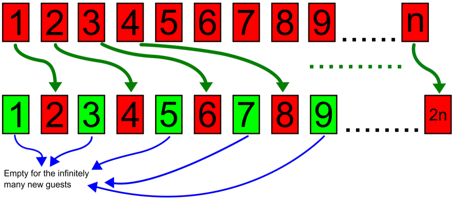
Nous pouvons arranger les nombres rationnels comme suit :

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{2}{1}, \ldots$$

Donc, chaque nombre rationnel apparaîtra quelque part dans cette liste. Alors, il y a une bijection entre chaque nombre rationnel et sa position dans la liste (éléments de $\mathbb{N}$).

Hôtel de Hilbert

L'hôtel de Hilbert illustre une propriété paradoxale des ensembles infinis en mathématique, qui est que, contrairement à ce qui se passe pour les ensembles finis, **une partie stricte peut avoir autant d'éléments que le tout**.



MERCI !