

Informatique Fondamentale

LIV 2022-2023
Travaux Dirigés 3

Exercice 1. En compréhension

Énumérer, si possible, les éléments des ensembles suivants. (ici $<$ et \leq sont les inégalités sur \mathbb{R}) (pour un ensemble décrit par des propositions on peut utiliser $\{x : \dots\}$ ou $\{x / \dots\}$)

1. $\{x / (x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 16) \wedge (3 \leq x) \wedge (x \text{ est pair})\}$
2. $\{y / (y \in \mathbb{N}) \wedge (y < 16) \wedge \neg(3 \leq y)\}$
3. $\{\alpha / (\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (\alpha < 16) \wedge \neg(3 \leq \alpha)\}$
4. $\{x : (x \in \mathbb{Z}) \wedge \neg(x < 16) \wedge \neg(3 \leq x)\}$

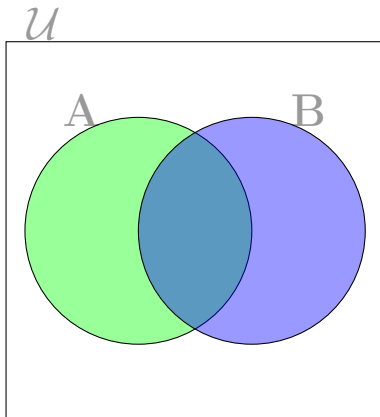
Exercice 2. Intersection soustraction union préhension

On pose $A := \{7, 1, 4, 9, 10, 3, 13, 15, 17, 11\}$ et $B := \{14, 2, 3, 11, 9, 13, 15, 16, 18\}$. Déterminer les ensembles suivants.

- | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------------------------|
| — $A \cap B$ | — $B \setminus A$ | — $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ |
| — $A \setminus B$ | — $A \cup B$ | |

Exercice 3. Venn

Etant donné l'information que $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cap B = \{3\}$, $A \setminus B = \{1, 2\}$, $A^c = \{4, 5, 6\}$, pouvez-vous dessiner un diagramme de Venn avec les ensembles A et B ?



Exercice 4. Les ensembles d'étudiants

Définissons les deux ensembles d'étudiants suivants :

- $A = \{\text{étudiants qui aiment l'informatique}\}$
- $B = \{\text{étudiants qui aiment les mathématiques}\}$

Pour chacune des expressions suivantes, indiquez avec une phrase, quel est l'ensemble des étudiants désigné par l'expression.

- | | | |
|---------------|-------------------|-------------------|
| 1. $A \cap B$ | 3. $A^c \cap B$ | 5. $(A \cap B)^c$ |
| 2. $A \cup B$ | 4. $A^c \cap B^c$ | 6. $(A \cup B)^c$ |

Exercice 5. Cardinaux

On pose $A = \{2, 3, 4, 5\}$. Lorsqu'un ensemble est fini on appelle le nombre de ses éléments le **cardinal** de cet ensemble. Par exemple le cardinal de A est 4. et on note $|A| = 4$

1. Si $A \subset B$ et que $|B| = 19$ quelle est la valeur $|B \setminus A|$?
2. Soient C et D deux ensemble tels que $C \subset D$ quelle est la valeur de $|D \setminus A|$?
3. Énumérer l'ensemble des parties de A .
4. Pour un ensemble de cardinal n . Quel est le cardinal de l'ensemble des parties de A ?

Exercice 6. Égalité

Les ensembles suivants sont-ils égaux ? (les opérations sont considérées dans \mathbb{R})

- $A = \{x : x^2 - 5x + 6 = 0\}$
- $\{2, 3\}$
- $\{3, 6\}$

(Indice) L'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ a deux solutions, $x = 2$ et $x = 3$.

Exercice 7. Si simple ?

Quels sont les ensembles $A \cup A$, $A \cup \emptyset$, $A \cap A$, $A \cap \emptyset$?

Exercice 8. Égalité 2

Expliquez pourquoi : $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| = 1\}$.

Indice : $|\cdot|$ représente la valeur absolue d'un nombre réel. Exemple : $|-6| = 6$ $|6| = 6$

Exercice 9. Dans un treillis

On se place dans \mathcal{U} l'ensemble de tous les nombres entiers positifs $x \leq 20$, et on pose

- $A = \{x : x \text{ is a prime number}\}$,
- $B = \{x : x \text{ is odd number}\}$.

trouver les ensembles $(A \cup B)^c$ et $A^c \cap B^c$.

Exercice 10. Nouvelle opération ?

Pour deux ensembles A et B on définit l'opération \triangleright de la façon suivante $A \triangleright B := \left\{x : \neg \left((x \in A) \Rightarrow (x \in B) \right)\right\}$

On pose $A = \{1, 2, 4, 5, 9\}$ et $B = \{2, 3, 5, 7\}$.

1. Énumérer les éléments de $A \triangleright B$
2. Énumérer les éléments de $B \triangleright A$
3. Sous quel autre nom est connue l'opération \triangleright ?

Exercice 11. Ensemble bizzare

Énumérer, si possible, les éléments des ensembles suivants. (ici $<$ et \leq sont les inégalités sur \mathbb{R}) (pour un ensemble décrit par des propositions on peut utiliser $\{x : \dots\}$ ou $\{x / \dots\}$)

1. $\{5 : (5 \in \mathbb{N}) \wedge \neg(5 \in \mathbb{N})\}$ (ici le symbole 5 joue le rôle de la variable)
2. $\{x / (x \in \mathbb{N}) \vee \neg(x \in \mathbb{N})\}$
3. $\{x / (x \text{ est une lettre de l'alphabet latin}) \vee ((x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 10))\}$
4. $\{x : ((x \text{ est une lettre de l'alphabet latin}) \vee (x \in \mathbb{N})) \wedge (x \leq 10)\}$
5. $\{x / (x \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x \in \mathbb{Z})\}$

Exercice 12. Tous

On pose $A = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

1. Quels sont les sous-ensembles de A de taille 3.
2. Soit B un ensemble de cardinal n . Combien de sous-ensembles de taille k B possède-t-il ?

Exercice 13. Démonstration

Pour deux ensembles G et H on dit que $G = H$ si $G \subset H$ et $H \subset G$. Soit E un ensemble et soient A, B et C trois sous-ensembles de E . Montrer en utilisant les lois propositionnelles que

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$,
2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.