Trabalho 3

Vignon Fidele Adanvo

August 15, 2022

1 Introdução

Este documento modela um canal que pode ser representado pela seguinte forma:

$$h(t) = re^{j\theta} = x(t) + jy(t) \tag{1}$$

onde x(t) e y(t) são variáveis aleatórias independentes e uniformemente distribuídas entre $-B$ e B. A forma da distribuição do canal é mostrado na Figura 1. O eixo x representa a parte real e o eixo y a parte imaginária. Essencialmente,

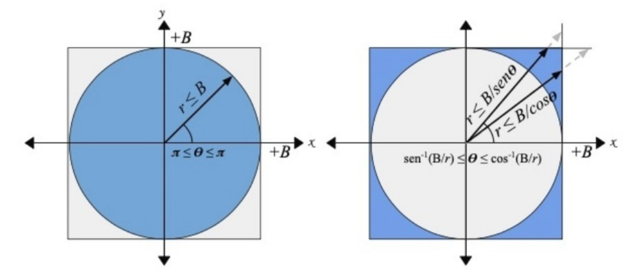


Figure 1: Figura da distribuição

este documento mostra o desenvolvimento da função densidade de probabilidade de r, que representa o módulo do ganho de canal h(t). Quer dizer $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ Também gera-se n amostras de r utilizando o simulador computacional com fins de comparação com a expressão encontrada através de figuras.

2 Expressão analítica

Ex

Dado um canal

$h(t) = r\exp(j\theta) = x(t) + j\,y(t)$ onde x e y são variavel aleatória independente e uniformamente distribuido entre $-B$ e B

* A pdf de uma uniforme entre a, b é

$$f = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{outro} \end{cases}$$

Conhecendo a pdf, generico, então a gente pode escreve a pdf de x e y da seguinte forma.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2B} & -B < x < +B \\ 0 & \text{outro} \end{cases} \qquad f_Y = \begin{cases} \frac{1}{2B} & -B < y < B \\ 0 & \text{outro} \end{cases}$$

$$re^{-j\theta} = x + jy \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad \theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x^2 = r^2 - y^2 \quad \text{e} \quad y = x\,tg\,\theta$$

$$x^2 = r^2 - x^2 tg^2\theta$$

$$r^2 = x^2 + x^2 tg^2\theta$$

$$= x^2\left(1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$$

$$= x^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right) \Rightarrow x^2 = r^2\cos^2\theta \Rightarrow$$

$$\underline{x = r\cos\theta}$$

$$y = r\cos\theta \cdot tg\,\theta$$

$$= r\cos\theta\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\underline{y = r\sin\theta}$$

$$p(r,\theta) = p(x)\cdot p(y)\cdot J\begin{vmatrix} x & y \\ r & \theta \end{vmatrix}$$

$$J\begin{vmatrix} x & y \\ r & \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

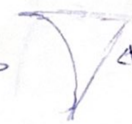
$$J\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

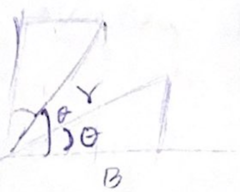
$$p(r,\theta) = r\,p(x)\cdot p(y)$$

Sabendo que $f_x = \begin{cases} \frac{1}{2B} & -B < x < B \\ 0 & \text{outro} \end{cases}$ e $f_y = \begin{cases} \frac{1}{2B} & -B < y < B \\ 0 & \text{outro} \end{cases}$

$$p(r,\theta) = r \cdot \frac{1}{2B} \cdot \frac{1}{2B} = \frac{r}{4B^2}$$

Sendo $-\pi \leq \theta \leq \pi$ e $r \leq B$ para o circulo Azul

e $B \leq r \leq \underline{B \cdot \sqrt{2}}$ e $\sin^{-1}\frac{B}{r} \leq \theta \leq \cos^{-1}\left(\frac{B}{r}\right) \Rightarrow$  area



$$\cos\theta = \frac{B}{r} \therefore r = \frac{B}{\cos\theta} \qquad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{B}{r}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{B}{r} \qquad r = \frac{B}{\sin\theta} \qquad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{B}{r}\right)$$

Para $\theta = 45$ r_{max}

$\sin 45 = \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{B}{r}$

$\underline{\underline{B < r \leq \sqrt{2}B}}$

$$\cos^{-1}\left(\frac{B}{r}\right) \leq \theta < \sin^{-1}\left(\frac{B}{r}\right)$$

$$p(r,\theta) = \begin{cases} \frac{r}{4B^2} & 0 < r \leq B \ \wedge \ -\pi < \theta < \pi \\ 4\left(\frac{r}{4B^2}\right) & B \leq r < \sqrt{2}B \ \wedge \ \cos^{-1}\left(\frac{B}{r}\right) < \theta < \sin^{-1}\left(\frac{B}{r}\right) \\ 0 & \text{outro} \end{cases}$$

$$p(r) = \int_{-\infty}^{\infty} p(r,\theta)\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{4B^2}\, d\theta + 4\int_{\cos^{-1}\left(\frac{B}{r}\right)}^{\sin^{-1}\left(\frac{B}{r}\right)} \frac{r}{4B^2}\, d\theta$$

$$p(r) = \begin{cases} \dfrac{\pi r}{2B^2} & 0 \leq r \leq B \\ \dfrac{r}{B^2}\left[\sin^{-1}\left[\dfrac{B}{r}\right] - \cos\left(\dfrac{B}{r}\right)\right] & B \leq r \leq \sqrt{2}\,B \\ 0 & \text{outro} \end{cases}$$

3 Scrip

```
import numpy as np
from scipy.stats import uniform
import matplotlib.pyplot as plt

####### Parameters #####
B=5
size=100000
r=np.linspace(0, 10, num=size)

def xfunction_numeric(B, size):
    x= uniform.rvs( -B ,2*B, size).reshape(size,1)
    y= uniform.rvs( -B, 2*B, size).reshape(size,1)
    Sv1=x+1j*y
    Sv=np.abs(Sv1)              #Calcula o modulo
    return Sv

####### Tracar a funcao definida por parte

r = np.linspace(0, 7, num=size)
pr_analitica = np.piecewise(r, [((r>=0)&(r<=B)),\
    ((r>=B)&(r<=np.sqrt(2)*B))], \
    [lambda r: ((np.pi*r)/(2*(B**2))), \
        lambda r: (r/B**2)*(-np.arccos(B/r)+np.arcsin(B/r))])


######## Plote ##################################
rn=np.linspace(0, 7, num=np.size(pr_analitica))
pr_numerico = xfunction_numeric(B, size)
plt.plot(r, pr_analitica, 'b', label='Analitica')
plt.hist(pr_numerico, color ='g', \
     bins=100, density=True, label='Histogram')
plt.title("Distribui   o de h(t)")
plt.xlabel('r')
plt.ylabel('p(r)')
plt.legend()
plt.show()
```

4 Comentário sobre as figuras

A Figura 2 mostra o histograma das amostras geradas usando o **script** mencionado anteriormente. Considera-se cem mil amostras e $B = 5$. Também plota-se a curva da pdf encontrada. Consta-se que o histograma plotado (verde) coincide com a curva da expressão analítica (Azul) encontrada, validando assim a análise realizada. Observa-se que a soma complexa de duas variáveis aleatórias independentes e uniformemente distribuídas não resulta em uma variável aleatória uniforme. Nota-se que a PDF resultante se aproxima a um triângulo truncado com um dos lados que reproduze uma função exponencial negativa.

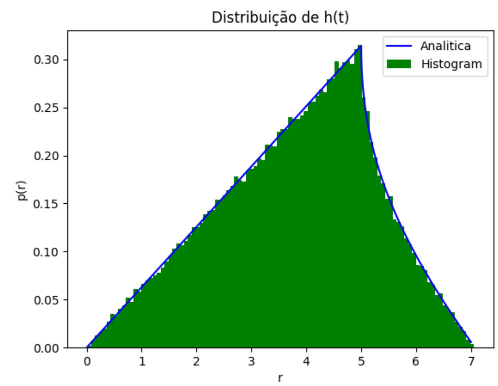


Figure 2: Função densidade de probabilidade B=5 .

Na Figura 3, plota-se a função densidade de probabilidade em função de r variando B. Observa-se que o valor B tem um impacto sob o ganho do canal resultante.

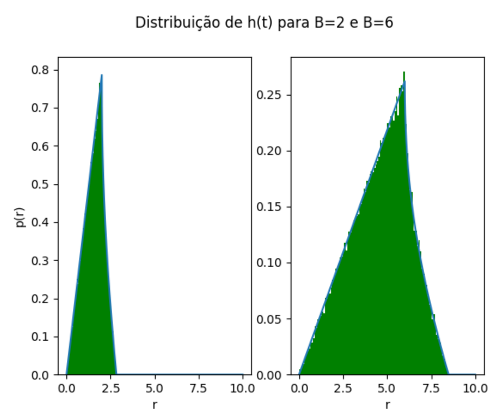


Figure 3: Função densidade de probabilidade B=5 .

5 Conclusão

Esse trabalho mostra o desenvolvimento da função densidade de probabilidade de r de duas variáveis aleatórias independentes e uniformemente distribuídas. O histograma traçado a partir das amostras geradas coincide com a expressão encontrada, o que valida o desenvolvimento da expressão. Observa-se que o fator B tem um impacto no PDF resultante.