

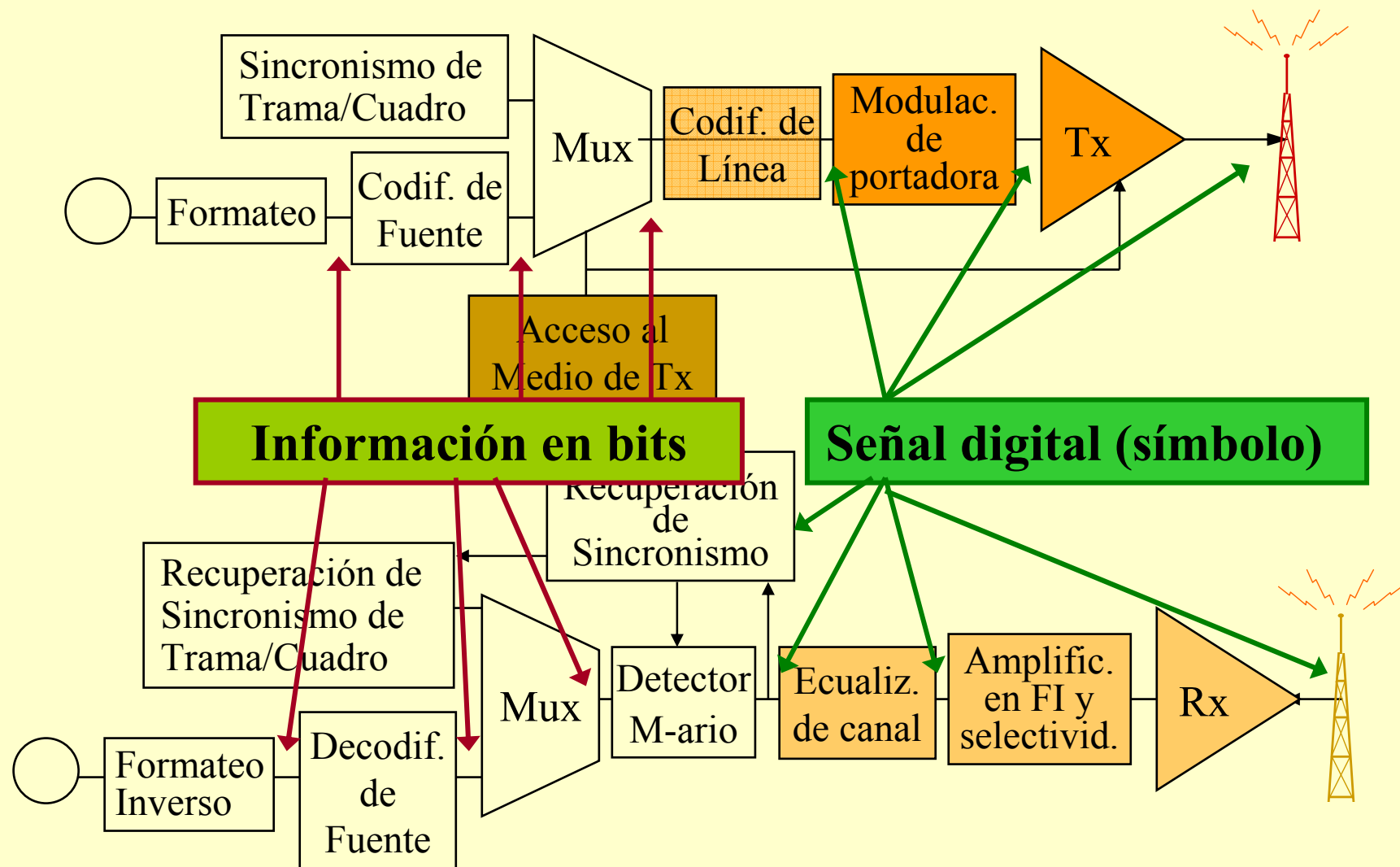


Comunicaciones Digitales

L.Couch II, Capítulo 4

Técnicas de Tx de Señales de Banda
Pasante y Componentes

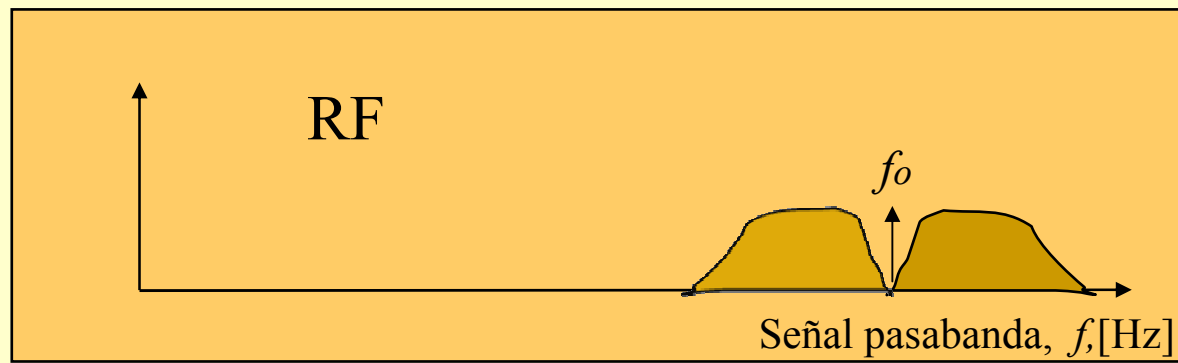
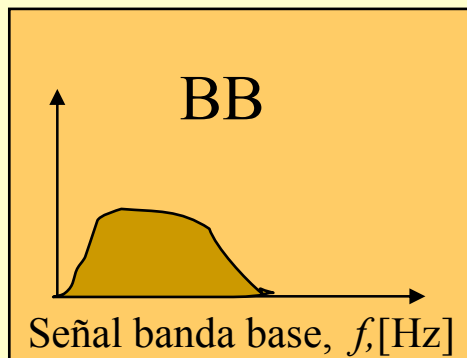
Diagrama de bloques funcional de un sistema de telecomunicaciones digital



Introducción

- ♦ Una señal pasabanda se obtiene a partir de la modulación de una portadora con una señal de banda base (BB).
- ♦ La modulación de una portadora (RF) puede ser realizada en amplitud, en fase o en frecuencia.

$$\begin{array}{c} x(t) \longrightarrow \bigcirc \longrightarrow y(t) = x(t)\cos(\omega t) \\ \quad \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad \cos(\omega t) \text{ ó } \sin(\omega t) \end{array}$$



Definición matemática de señal pasabanda

- ♦ Una señal pasabanda se define como

$$v(t) = \operatorname{Re}\{g(t)e^{j\omega_0 t}\} = \operatorname{Re}\{R(t)e^{j\theta(t)}e^{j\omega_0 t}\}$$

$$v(t) = R(t)\cos\{\omega_0 t + \theta(t)\}$$

$$g(t) = R(t)e^{j\theta(t)} = x(t) + jy(t) = R(t)\cos\theta(t) + jR(t)\sin\theta(t)$$

- en que ω_0 es la frecuencia angular de la portadora y
- $R(t) = (x^2(t) + y^2(t))^{1/2}$
- $\theta(t) = \arctan(y(t)/x(t))$
- ♦ La señal banda base de $v(t)$ es $g(t)$ y se denomina “**envolvente compleja**” de $v(t)$.
- ♦ Es posible simplificar el análisis de señales pasabanda aplicando el concepto de señal de banda base equivalente

Definición matemática de señal pasabanda

Teorema

Si una señal pasabanda se representa por:

$$v(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\}$$

Entonces el espectro de frecuencias de $v(t)$, $V(f)$ está dado por:

$$V(f) = \frac{1}{2}\{G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)\}$$

y la densidad espectral de potencia de $v(t)$, $S_v(f)$ está dada por:

$$S_v(f) = \frac{1}{4}\{S_g(f - f_c) + S_g(-f - f_c)\} = \frac{1}{4}\{S_g(f - f_c) + S_g(f + f_c)\}$$

Donde $G(f) = \mathcal{F}[g(t)]$ y $S_g(f)$ es la DEP de $g(t)$

Filtrado equivalente

El filtrado pasabanda de una señal también pasabanda puede ser analizado como el filtrado de una señal de banda base por un filtro pasabajos equivalente. Sea $h(t)$ la respuesta a impulso del filtro pasabanda y $H(f)$ la respuesta en frecuencia. Entonces

$$h(t) = \text{Re} \left[k(t) e^{j\omega_c t} \right]$$

$$H(f) = \frac{1}{2} K(f - f_c) + \frac{1}{2} K^*(-f - f_c)$$

Sean $v_1(t)$ la señal pasabanda de entrada al filtro y sea $v_2(t)$ la salida

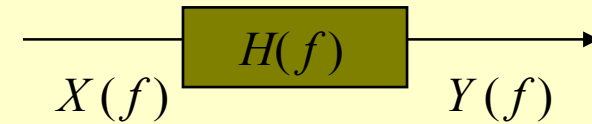
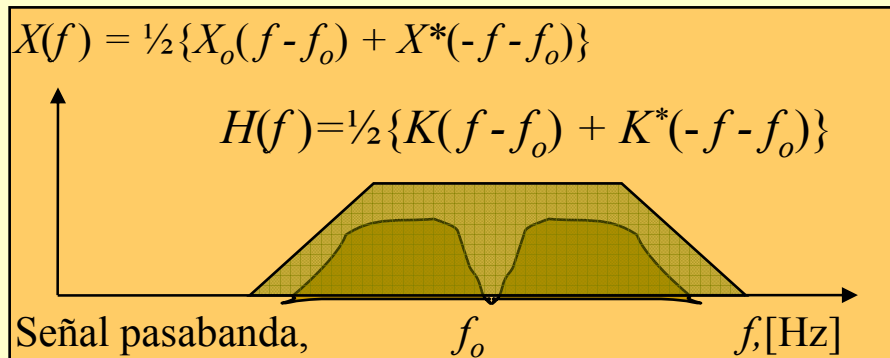
$$v_1(t) = \text{Re} \left[g_1(t) e^{j\omega_c t} \right]$$

$$v_2(t) = \text{Re} \left[g_2(t) e^{j\omega_c t} \right]$$

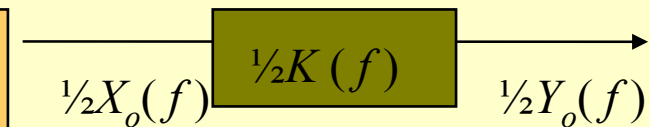
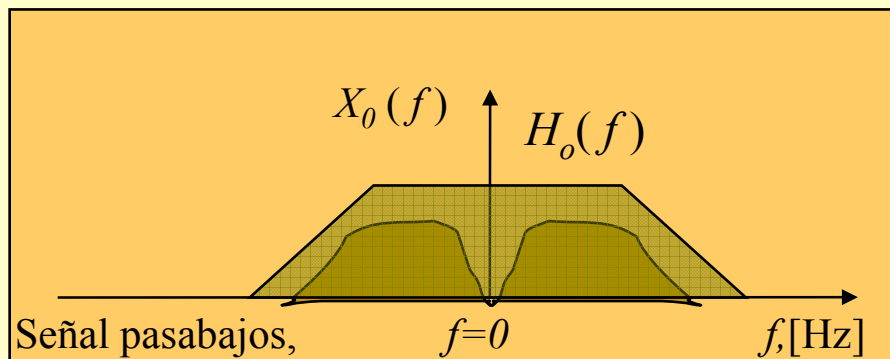
Entonces se demuestra:

$$\frac{1}{2} g_2(t) = \frac{1}{2} g_1(t) * \frac{1}{2} k(t) \text{ o equivalentemente } \frac{1}{2} G_2(f) = \frac{1}{2} G_1(f) \frac{1}{2} K(f)$$

Filtrado equivalente



$$Y(f) = H(f) X(f)$$



$$\frac{1}{2}Y_o(f) = \frac{1}{2}H_o(f)\frac{1}{2}X_o(f)$$

$X_o(f)$ e $Y_o(f)$ son respectivamente las componentes pasabajo equivalentes de la entrada y la salida

Diagrama de bloques funcional de un sistema de telecomunicaciones digital

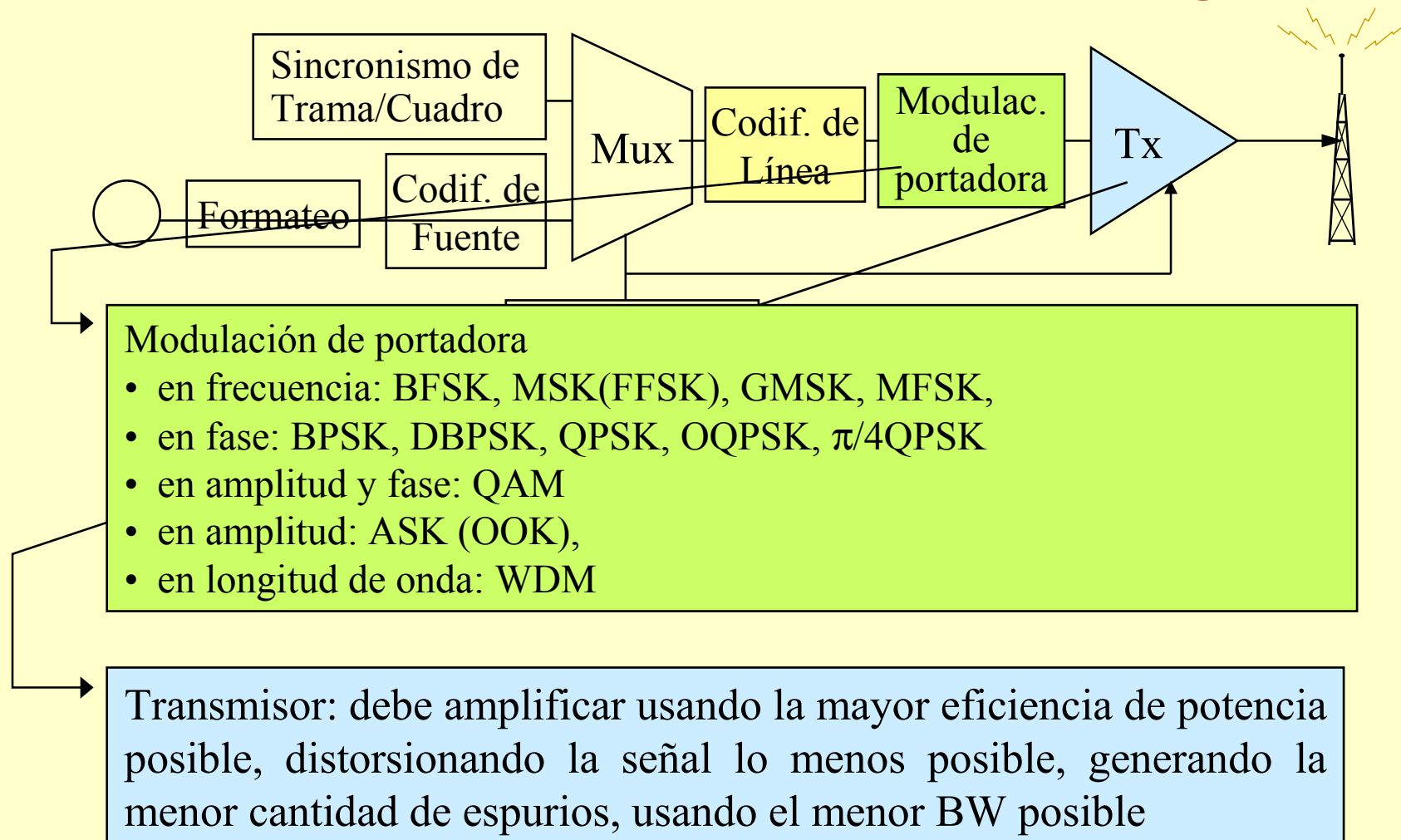
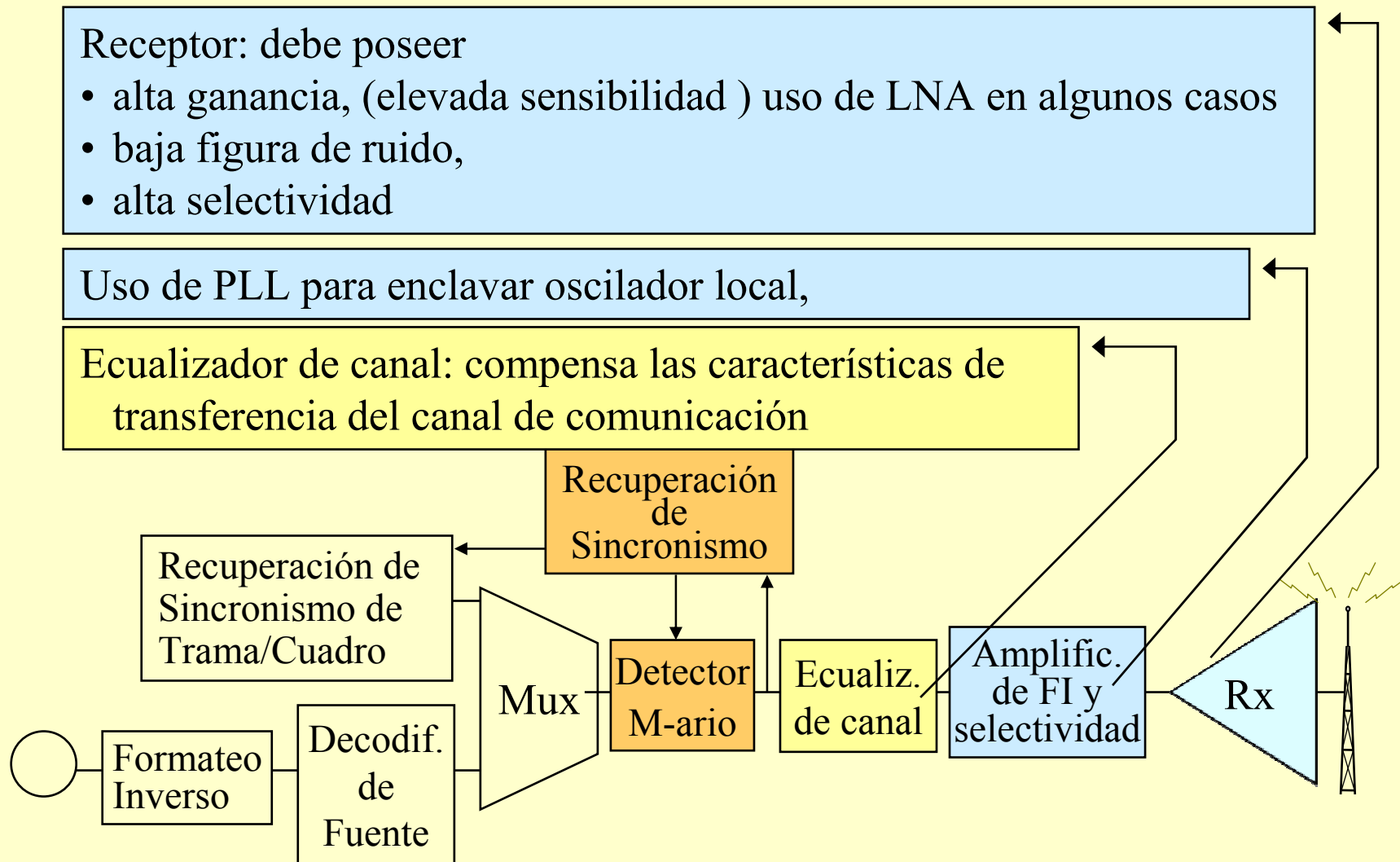


Diagrama de bloques funcional de un sistema de telecomunicaciones digital



Sistemas básicos de modulación digital de portadora

Las técnicas de modulación de una señal portadora pueden ser:

- ♦ Tx por cierre y apertura: ASK (*Am-plitude Shift Keying*) o OOK (*On-Off Keying*). Es la técnica más antigua. El código Morse se transmitía así.
- ♦ Tx por desplazamiento de fase: PSK (*Phase Shift Keying*). Su formato más conocido es BPSK (*Binary PSK*). También se usan QPSK, OQPSK, $\pi/4$ QPSK, DPSK, MPSK.
- ♦ Tx por desplazamiento de frecuencia: FSK (*Frequency Shift Keying*). Su formato más conocido es BFSK (*Binary PSK*), existiendo también MSK o FFSK, GMSK, MPSK.

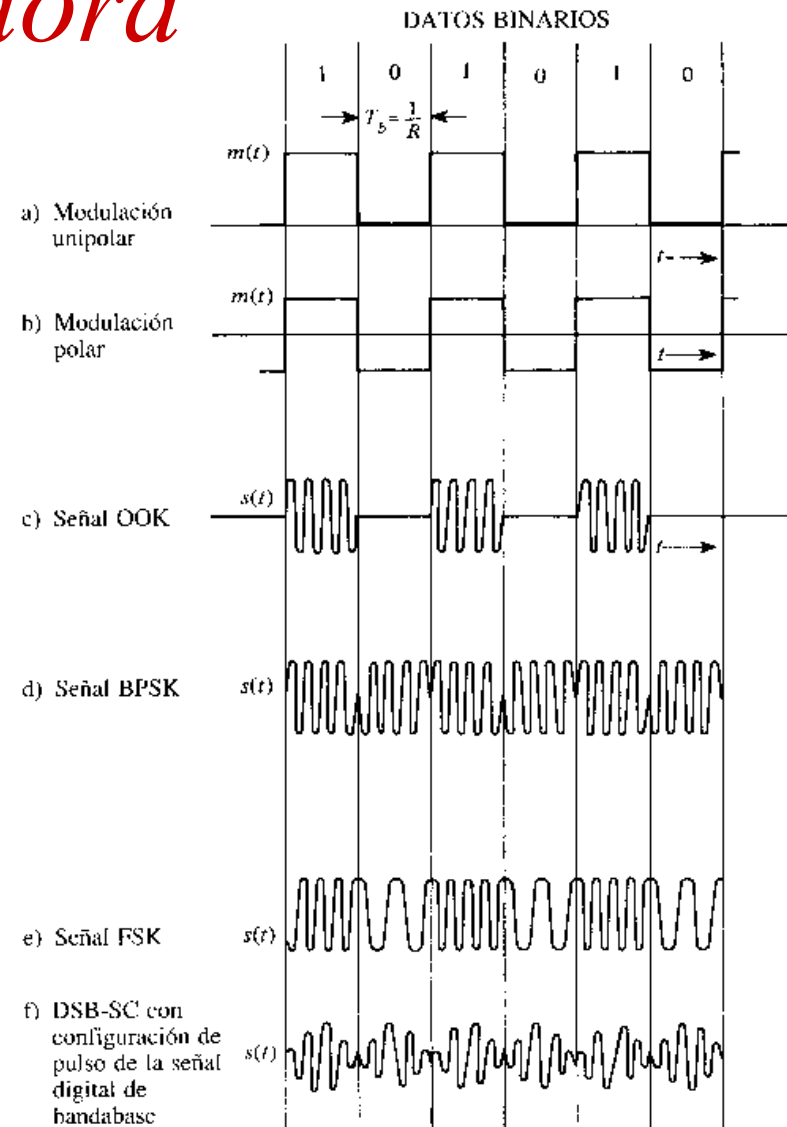


Figura 5-19 Señales pasabanda moduladas digitalmente.

ASK: Amplitude Shift Keying

La señal ASK se puede pensar como un código unipolar modulando una portadora. A modo de ejemplo se considera el código unipolar NRZ-L con $h(t) = h_o(t)\cos\omega_c t$ donde $h_o(t)$ es un pulso de amplitud A

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k \delta(t - kT_s) \quad a_k = \begin{cases} 1 & \text{se Tx un 1 binario} \\ 0 & \text{se Tx un 0 binario} \end{cases}$$

Pregunta: ¿Qué ocurre si se reemplaza el pulso NRZ-L por otra forma de onda?

Ancho de Banda	$B = 2f_s \pm$
Sincronización	No tiene \times
Transparencia	No tiene \times
Detección de errores	No tiene \times

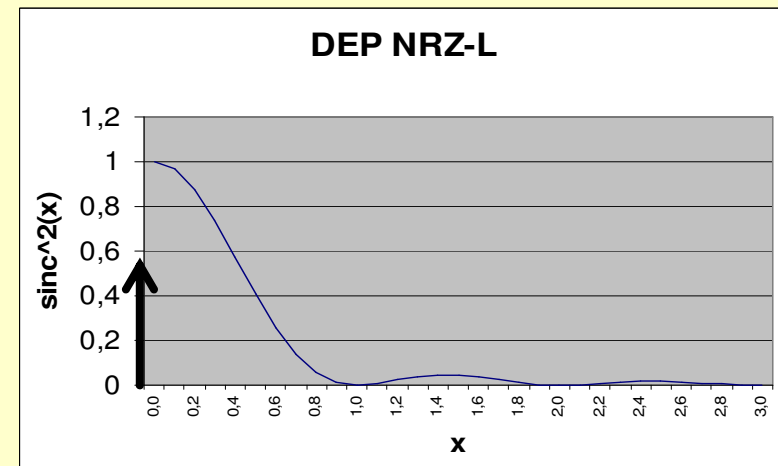
$$\Re_x(\tau) = \frac{\delta(\tau)}{4T_s} + \frac{1}{4T_s} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kT_s) \Rightarrow$$

$$S_x(f) = \frac{1}{4T_s} \left(1 + \frac{1}{T_s} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_s) \right)$$

$$H(f) = \frac{AT_s}{2} \{ \text{sinc}((f - f_c)T_s) + \text{sinc}((f + f_c)T_s) \} = \frac{AT_s}{2} \text{sinc}(fT_s) * \{ \delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) \}$$

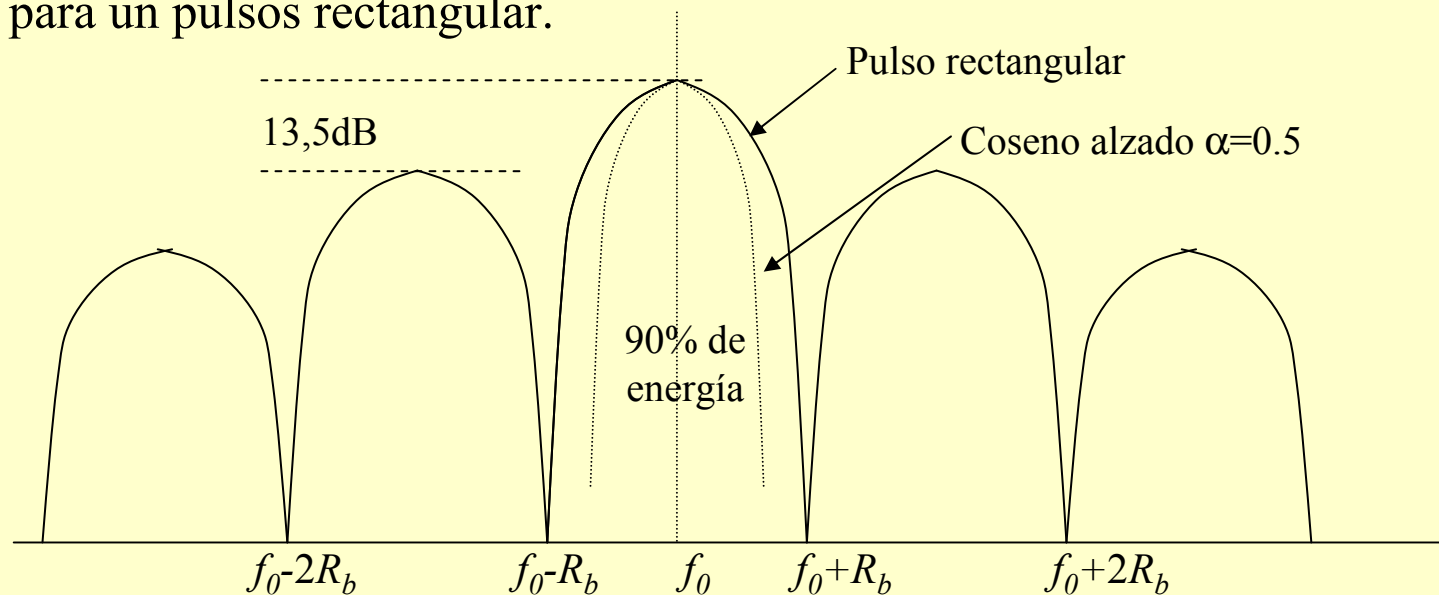
$$|H(f)|^2 \approx \left(\frac{AT_s}{2} \right)^2 \{ \text{sinc}^2((f - f_c)T_s) + \text{sinc}^2((f + f_c)T_s) \} = \frac{A^2 T_s^2}{4} \text{sinc}^2(fT_s) * \{ \delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) \}$$

$$S_y(f) \approx \frac{A^2 T_s^2}{16} \text{sinc}^2(fT_s) \left(1 + \frac{1}{T_s} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_s) \right) * \{ \delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) \}$$



Espectro de una señal ASK, BPSK y BFSK

- ♦ La forma de la densidad espectral de potencia de una señal ASK es igual a la de BPSK, ya que básicamente se trata de la codificación de la forma $s_i(t) = A \cos(\omega_0 t + 2\pi(i-1)/2)$, $i=1,2$. Para pulsos rectangulares, los nulos ocurren en los **múltiplos de la tasa de bits R_b**
- ♦ Para BFSK son dos espectros de frecuencia centrados en cada una de las dos frecuencias portadoras.
- ♦ En general el espectro va a ser dependiente de la forma de onda del pulso en banda base. Se muestra la DEP con escala de amplitud logarítmica para un pulsos rectangular.



Transmisión Multinivel y Constelaciones de Transmisión

- ♦ Cuando el ancho de banda de transmisión es la limitante mayor en una transmisión de datos, por lo general se recurre a la transmisión multinivel.
- ♦ Cuando se modula una portadora es posible representar el esquema de modulación de amplitud, de fase o ambos mezclados mediante un diagrama de fase.

Transmisión Multinivel y Constelaciones de Transmisión

- ♦ Cuando el ancho de banda de transmisión es la limitante mayor en una transmisión de datos, por lo general se recurre a la transmisión multinivel.
- ♦ Una gráfica de los valores permitidos de $g(t)$, la envolvente compleja de una portadora modulada aporta información útil para estudiar el comportamiento de estas señales respecto de las técnicas de demodulación y la probabilidad de error.
 - $v(t) = \text{Re}\{ g(t) e^{j\omega_c t} \} = \text{Re}\{ R(t) e^{j\theta(t)} e^{j\omega_c t} \}$
 - $v(t) = R(t)\cos\{\omega_c t + \theta(t)\}$
- ♦ Una señal ASK se puede representar de la forma indicada en la figura a), se transmite un 1 binario $v(t) = A\cos\omega_c t$, o un 0 binario $0\cos\omega_c t$
- ♦ Una señal BPSK se puede representar como se señala en la figura b), $A \cos \omega_c t$, o $-A \cos \omega_c t$.

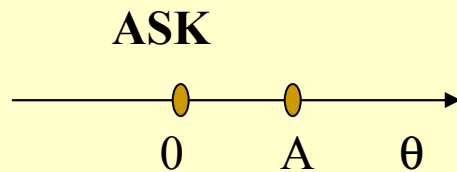


Figura a)

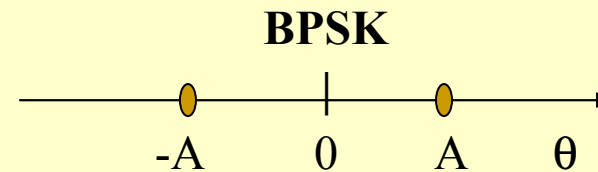


Figura b)

Transmisión Multinivel y Constelaciones de Transmisión

- Una señal QPSK es una doble señal BPSK, o dos BPSK en cuadratura, y se puede representar como se muestra en la figura c):

$$v(t) = A \cos \{ \omega_c t + (i-1)\pi/2 \} = A \cos \{ (i-1)\pi/2 \} \cos \omega_c t - A \sin \{ (i-1)\pi/2 \} \sin \omega_c t$$

con $i = 1$, si se transmite 11 binario;

- $i = 2$, si se transmite 10 binario;
- $i = 3$, si se transmite 00 binario y
- $i = 4$, si se transmite 01 binario

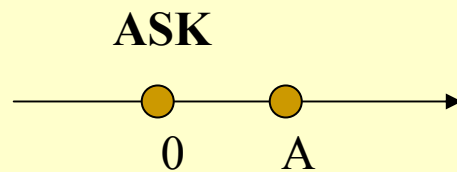


Figura a)

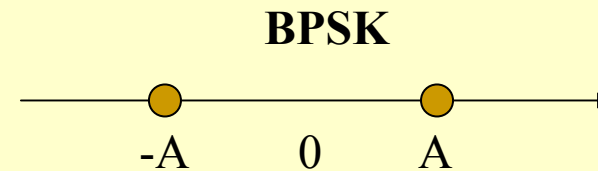


Figura b)

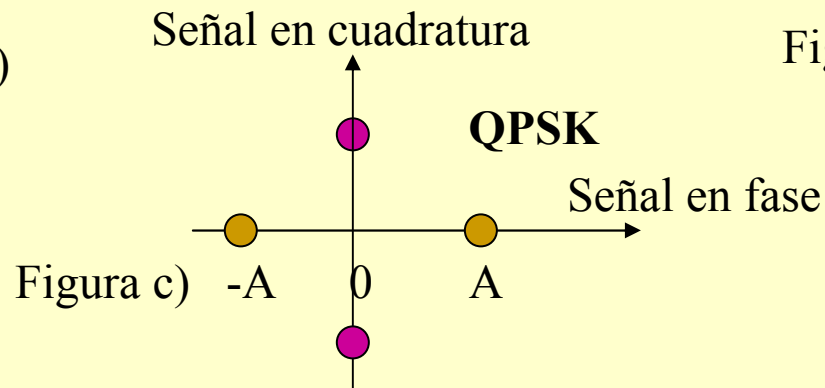
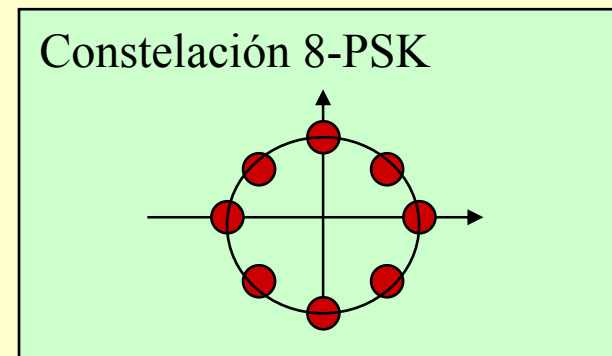
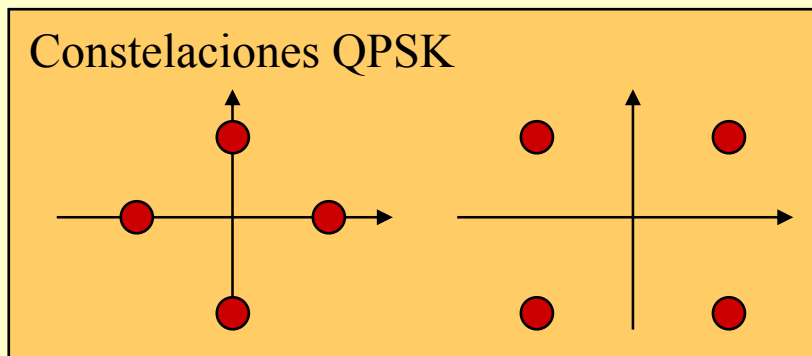


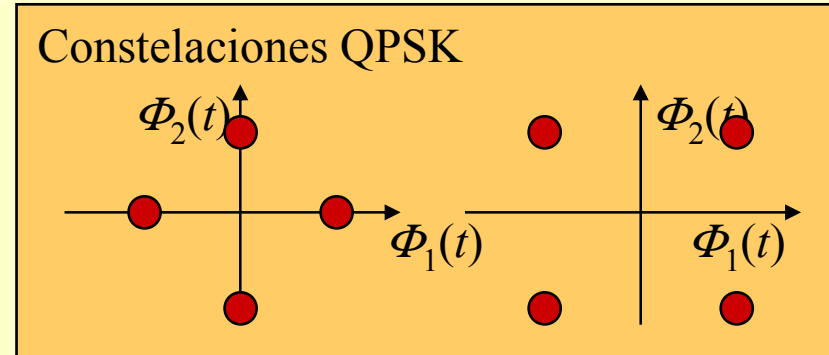
Figura c)

Señalización pasabanda modulada multinivel

- ♦ Cuando se permite representar más de un bit agrupados mediante un símbolo transmitido de una fase (y amplitud) determinada se habla de transmisión multinivel.
- ♦ Un caso de interés es la modulación de fase digital de una portadora M-PSK, o PSK M-aria donde se codifican $\log_2 M$ bits mediante una portadora de amplitud constante y M fases equidistantes.
- ♦ Esquemas conocidos y de amplia difusión son 4-PSK, o QPSK y sus variantes, y 8-PSK.



QPSK: Quadrature Phase Shift Keying



- ♦ E_s : energía asociada a un símbolo,
- ♦ El período de señalización $T_s = 2T_b$.
- ♦ La expresión analítica de QPSK es la siguiente:

Para una senoide de duracion T_s

$$E_s = \int_0^{T_s} (A \cdot \sin \omega_c t)^2 dt = \frac{A^2 T_s}{2}$$

$$A = \sqrt{\frac{2 E_s}{T_s}}$$

$$s_{QPSK}(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T_s}} \cos(\omega_c t + (i-1)\pi/2) \quad 0 \leq t \leq T_s \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$s_{QPSK}(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T_s}} \cos((i-1)\pi/2) \cos(\omega_c t) - \sqrt{\frac{2E_s}{T_s}} \sin((i-1)\pi/2) \sin(\omega_c t)$$

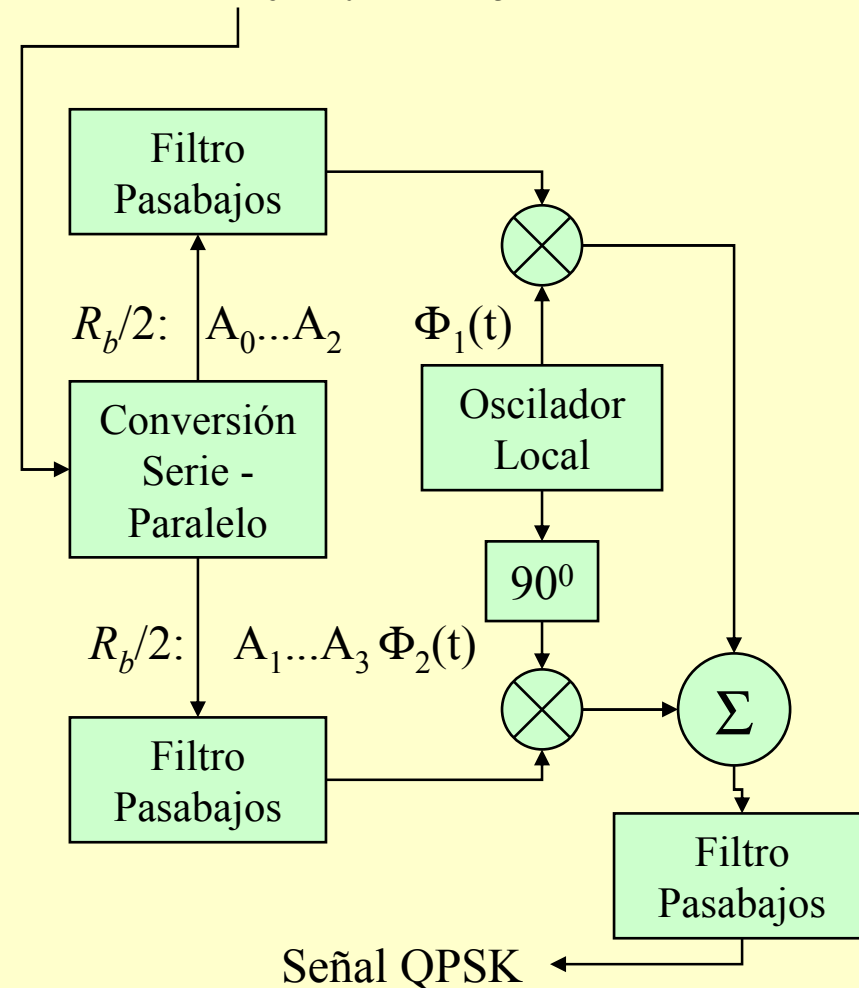
$$s_{QPSK}(t) = \sqrt{E_s} \cos((i-1)\pi/2) \Phi_1(t) - \sqrt{E_s} \sin((i-1)\pi/2) \Phi_2(t)$$

- ♦ Con $\Phi_1(t) = (2/T_s)^{1/2} \cos \omega_c t$; y $\Phi_2(t) = (2/T_s)^{1/2} \sin \omega_c t$
- ♦ Lo anterior permite graficar la modulación en fase en función de las 2 componentes como una constelación de puntos.
- ♦ La diferencia entre las 2 constelaciones presentadas es un desfase de $\pi/4$, y a diferencia del primero se caracteriza por el hecho de que siempre están presentes las componentes $\Phi_1(t)$ y $\Phi_2(t)$

Generación de señales QPSK

Datos de entrada a R_b : $A_0A_1A_2A_3\dots$

- ♦ Los datos de entrada ingresan al conversor serie-paralelo a tasa R_b .
- ♦ En el conversor se separan los bits de a pares y se codifican en forma polar.
- ♦ El 1^{er} bit se lleva al filtro pasabajos (formador de onda) superior.
- ♦ El 2^o bit se lleva al filtro pasabajos inferior
- ♦ El resultado es la suma de 2 señales BPSK a $R_b/2$.
- ♦ El filtro de salida disminuye la aparición de componentes de señal a frecuencias indeseadas.

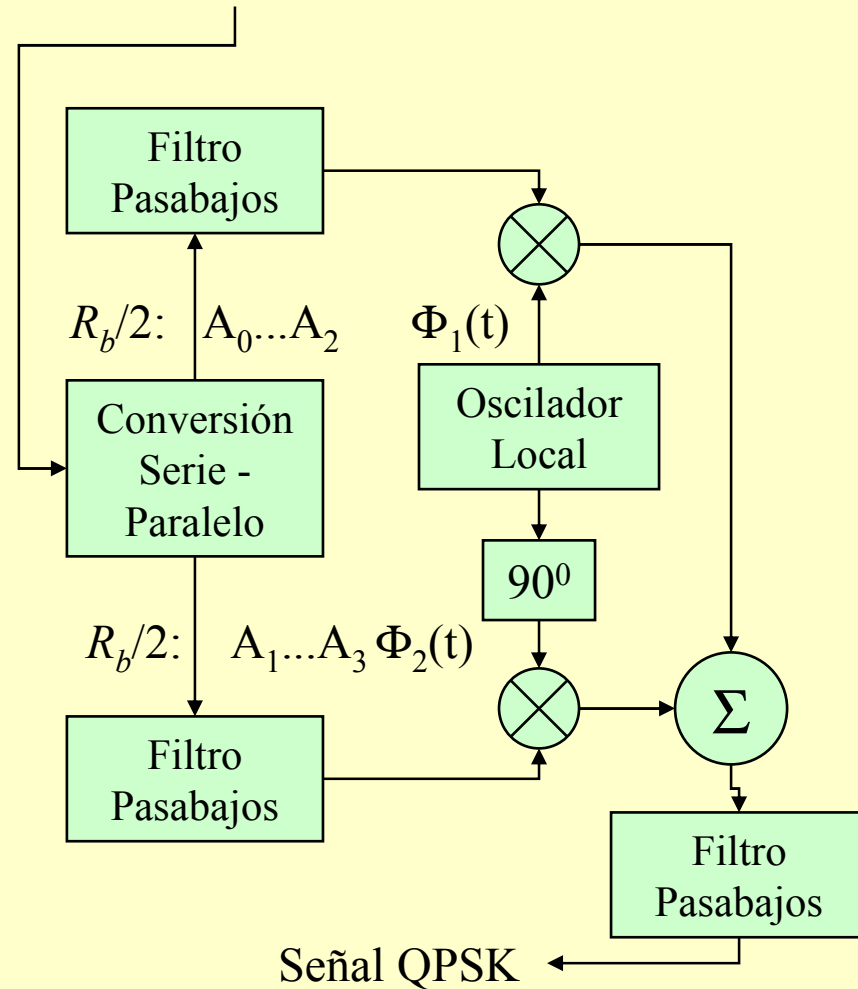
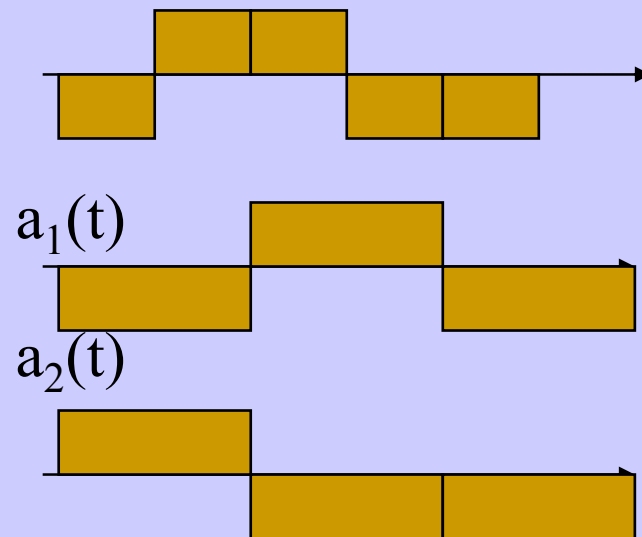


Generación de señales QPSK

Datos de entrada a R_b : $A_0 A_1 A_2 A_3 \dots$

Para datos de entrada como los señalados, se ilustran las señales a_1 , a_2

0 1 1 0 0 0



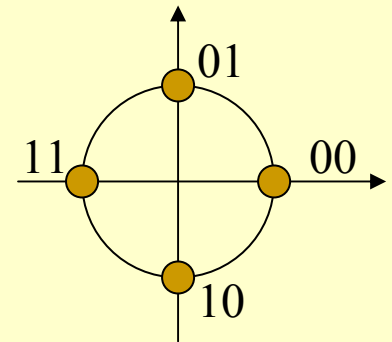
Recepción coherente de señales QPSK, señalización ortogonalizada

En este caso se considera que en $t \in (0, T_s]$ se envían 2 bits en 4 símbolos

$$s_1(t) = A \cos \omega_c t = \sqrt{\frac{2E_s}{T_s}} \cos \omega_c t; \quad s_2(t) = -A \cos \omega_c t = -\sqrt{\frac{2E_s}{T_s}} \cos \omega_c t \quad E_s = \frac{A^2 T_s}{2}$$

$$s_3(t) = A \sin \omega_c t = \sqrt{\frac{2E_s}{T_s}} \sin \omega_c t; \quad s_4(t) = -A \sin \omega_c t = -\sqrt{\frac{2E_s}{T_s}} \sin \omega_c t$$

En la práctica los errores que ocurren son los correspondientes a confundir un punto de la constelación con el vecino más cercano (confundir $\sin(\cdot)$ con $\cos(\cdot)$) Por ello el cálculo de P_e es igual al de señalización ortogonal: (prob. b1 y b2...)



$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_1 - 2E_{1,2} + E_2}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T_s}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{PS}{PN}}\right)$$

$$E = E_1 = \int_0^{T_s} s_1^2(t) dt = E_2 = \frac{A^2 T_s}{2} \quad E_{1,2} = \int_0^{T_s} s_1(t) s_2(t) dt = 0$$

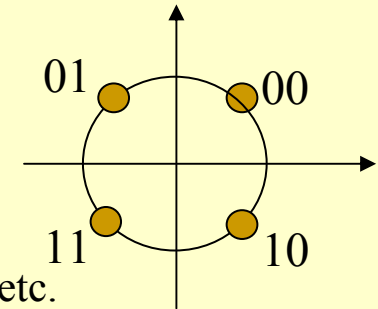
Dada la forma de la constelación se ha asumido que un error de símbolo genera un error de bit

Recepción coherente de señales QPSK, señalización polar doble

- En este caso se considera que en $t \in (0, T_s]$ se transmite 1 de 4 símbolos (se mantiene la potencia E_s/T_s y la amplitud $A = \sqrt{\frac{2E_s}{T_s}}$)

$$s_1(t) = \frac{A}{\sqrt{2}} \cos \omega_c t + \frac{A}{\sqrt{2}} \sin \omega_c t = \sqrt{\frac{E_s}{T_s}} \cos \omega_c t + \sqrt{\frac{E_s}{T_s}} \sin \omega_c t \quad (00 \text{ binario})$$

$$s_2(t) = -\sqrt{\frac{E_s}{T_s}} \cos \omega_c t + \sqrt{\frac{E_s}{T_s}} \sin \omega_c t = \sqrt{\frac{2E_s}{T_s}} \cos \left(\omega_c t + \frac{3\pi}{4} \right) \quad (01 \text{ binario}); \text{ etc.}$$



- pero el 1^{er} bit multiplica una portadora y el 2^o bit otra, que genera una señal en cuadratura, es como si fueran 2 sistemas BPSK ortogonales cada uno con amplitud $\frac{A}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{E_s}{T_s}}$. Un error en cualquiera de ellos provoca un error de símbolo y la probabilidad de ello es.

$$P_e = Q \left(\sqrt{\frac{\left(\frac{A}{\sqrt{2}} \right)^2 T_s}{N_0}} \right) = Q \left(\sqrt{\frac{A^2 T_s}{2N_0}} \right) = Q \left(\sqrt{\frac{E}{N_0}} \right)$$

(que es el mismo resultado anterior)

Comparación BPSK/QPSK

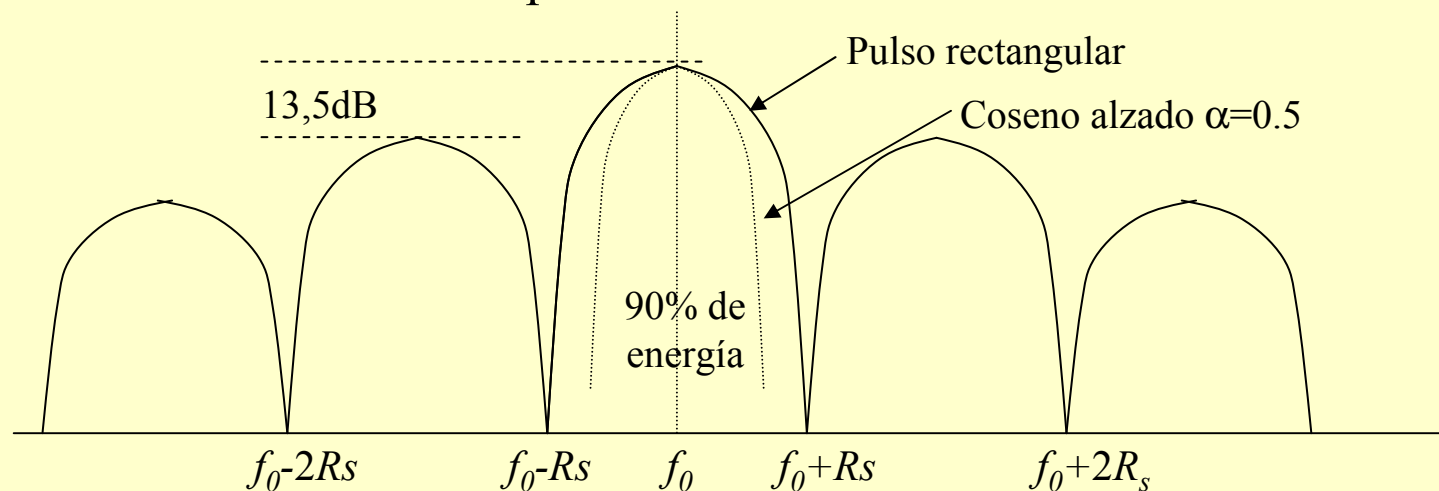
Recordamos que para BPSK con una portadora de amplitud A y un símbolo de duración T_b :

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right); E_b = \frac{A^2 T_b}{2}$$

La potencia S de las señales es $S=A^2/2$ y la tasa de bits $R_b=1/T_b$ por lo tanto

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2ST_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2S}{N_0 R}}\right)$$

El ancho de banda entre primeros nulos es $2R_s$



Comparación BPSK/QPSK

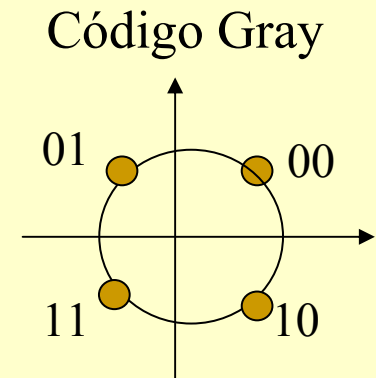
Comparamos con una transmisión QPSK con una portadora de igual amplitud A (igual potencia transmitida que BPSK) y símbolos de duración $T_s = 2T_b$ (igual tasa de bits que BPSK):

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T_s}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T_b}{N_0}}\right)$$

La potencia S de la señales nuevamente es

$S = A^2/2$ y la tasa de bits $R_b = 2/T_s$

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{ST_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2S}{N_0 R}}\right)$$

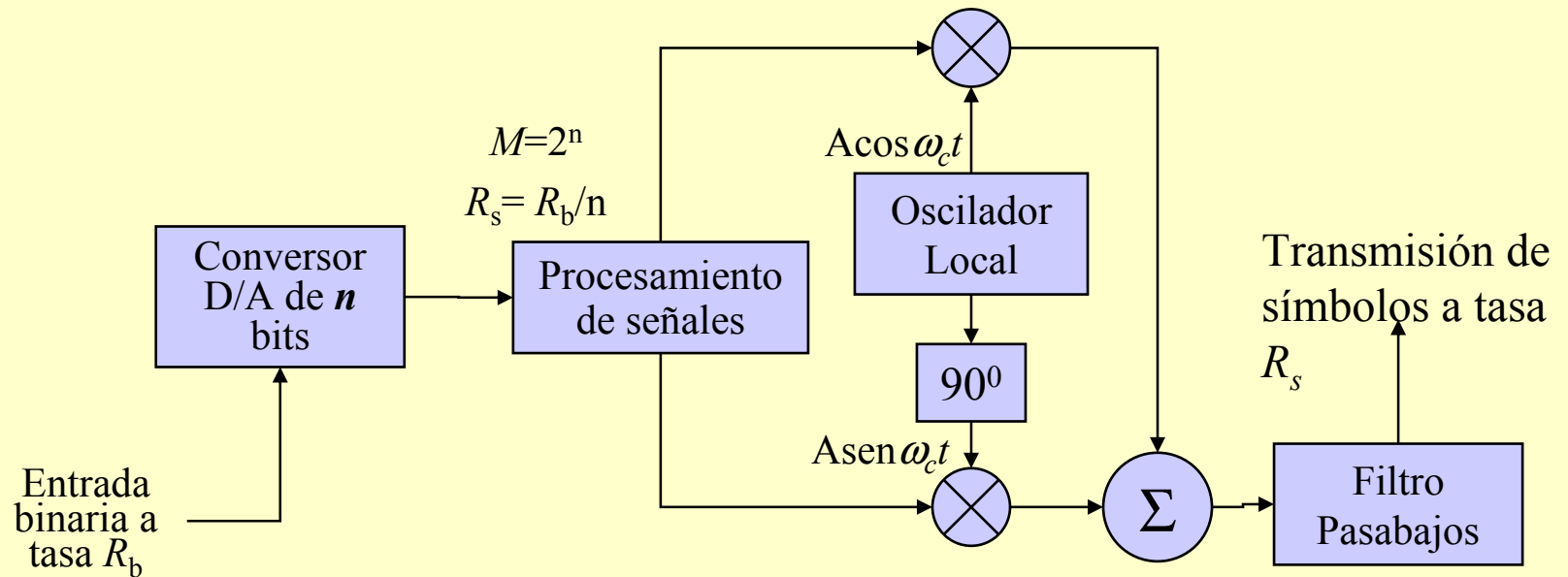
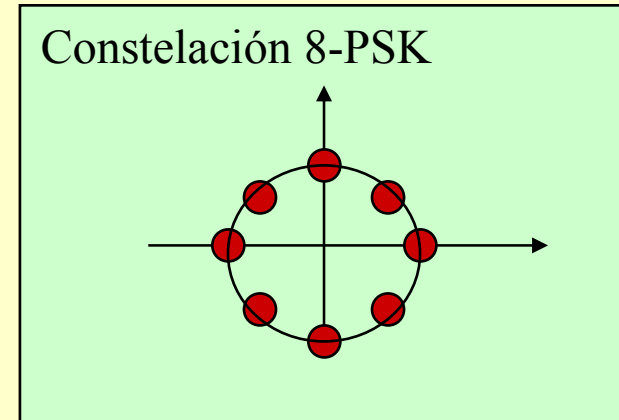


En QPSK se obtiene la misma tasa de errores que en BPSK, si la potencia y la velocidad de transmisión son iguales. (Nótese que se ha asumido aquí que un símbolo errado genera un bit errado, código Gray)

En QPSK, el ancho de banda entre primeros nulos es $2R_s = R_b$, para BPSK es $2R_b$, o sea para igual tasa de bits e igual P_e se reduce a la mitad la exigencia de ancho de banda al compararlo con BPSK!

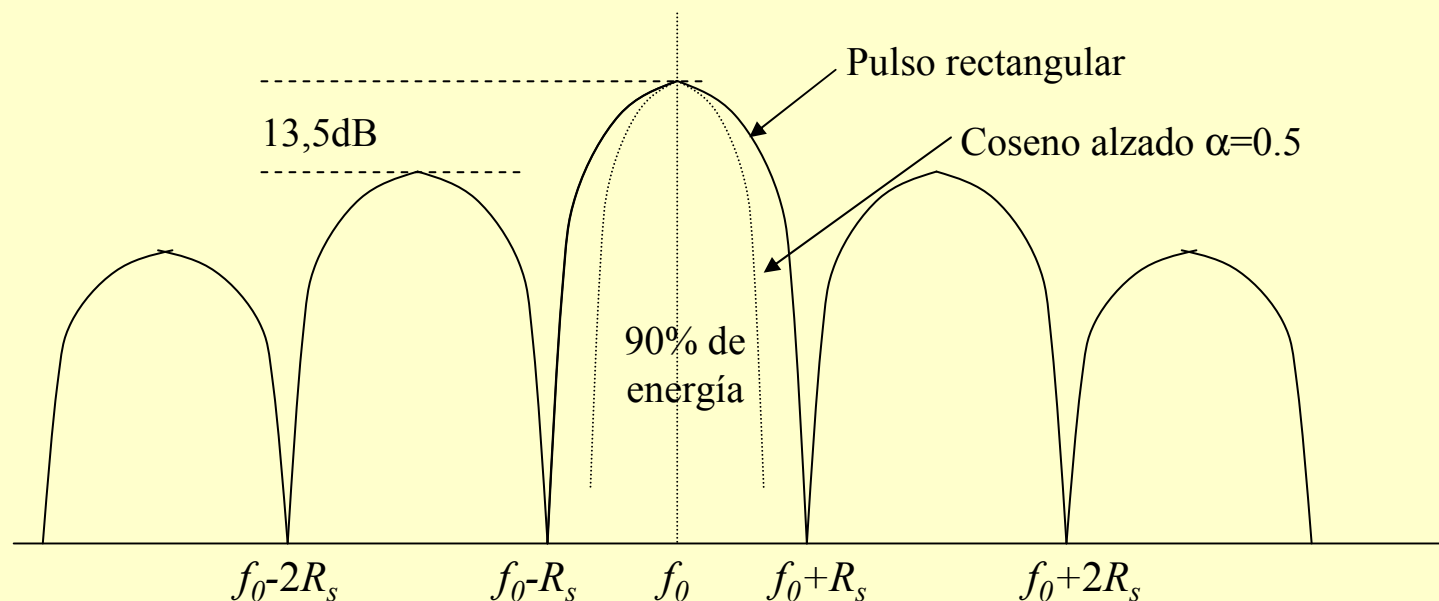
Modulador de constelación de señales generalizado

- ♦ Utilizando el formato de la expresión desarrollada para QPSK, es posible desarrollar un circuito que permite generar señales de (sólo) fase diferentes.
- ♦ Esto se conoce en general como **M-PSK**: *Multi-Phase Shift Keying*



Espectro de una señal M-PSK

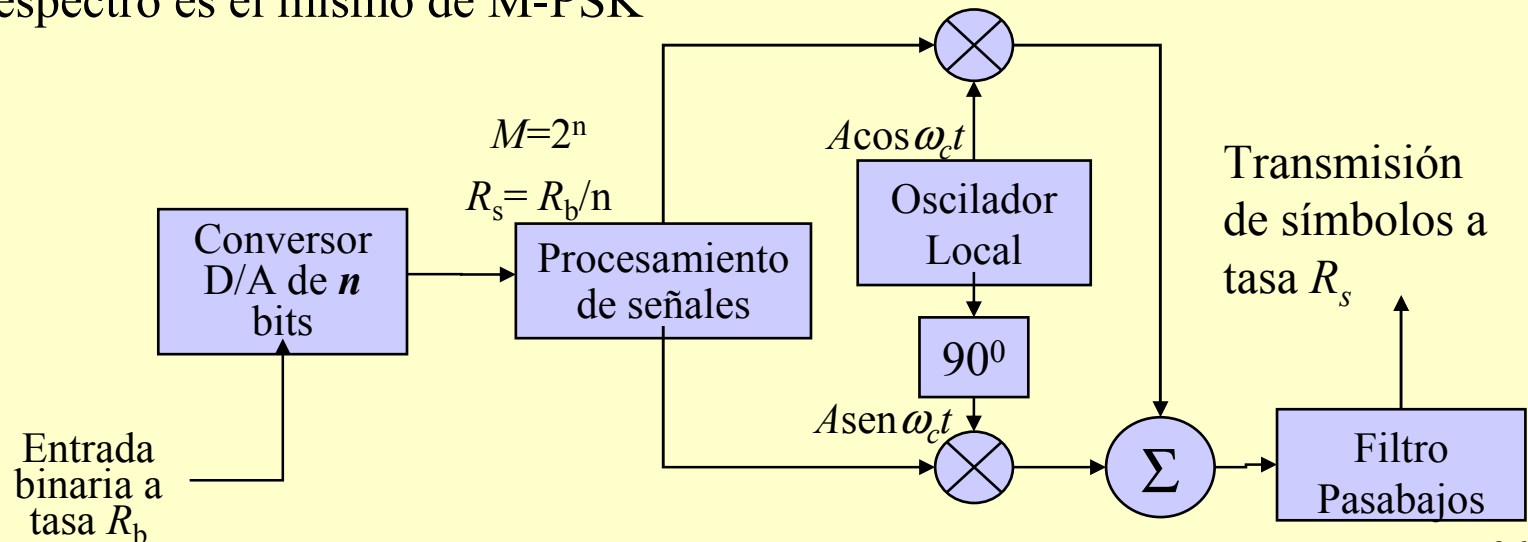
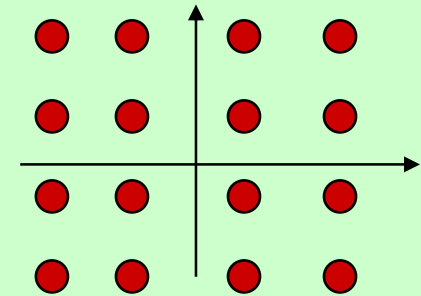
- ♦ La forma de la densidad espectral de potencia de una señal M-PSK es igual a la de BPSK, ya que básicamente se trata de la codificación de la forma $s_i(t) = A \cos(\omega_c t + 2\pi (i-1)/M)$, $i=1,2,\dots,M$. Para pulsos rectangulares, los nulos ocurren en los **múltiplos de la tasa de símbolos R_s** donde $R_s = R_b/n = R_b/\log_2 M$
- ♦ En general el espectro va a ser dependiente de la forma de onda del pulso en banda base. Se muestra la DEP con escala de amplitud logarítmica.



Modulador de constelación de señales generalizado

- ♦ Utilizando el formato de la expresión desarrollada para QPSK, es posible desarrollar un circuito que permite generar señales de amplitud y fase diferentes.
- ♦ Esto se conoce en general como **QAM**: *Quadrature Amplitude Modulation*
- ♦ El espectro es el mismo de M-PSK

Constelación 16QAM



DEP de sistemas MPSK y QAM

Nótese que para lograr una atenuación de, por ejemplo 20 dB (100 veces menos de potencia), el ancho de banda es $Bw_{Tx} = 3R_b/l = 3R_s$; $l = \log_2 M$

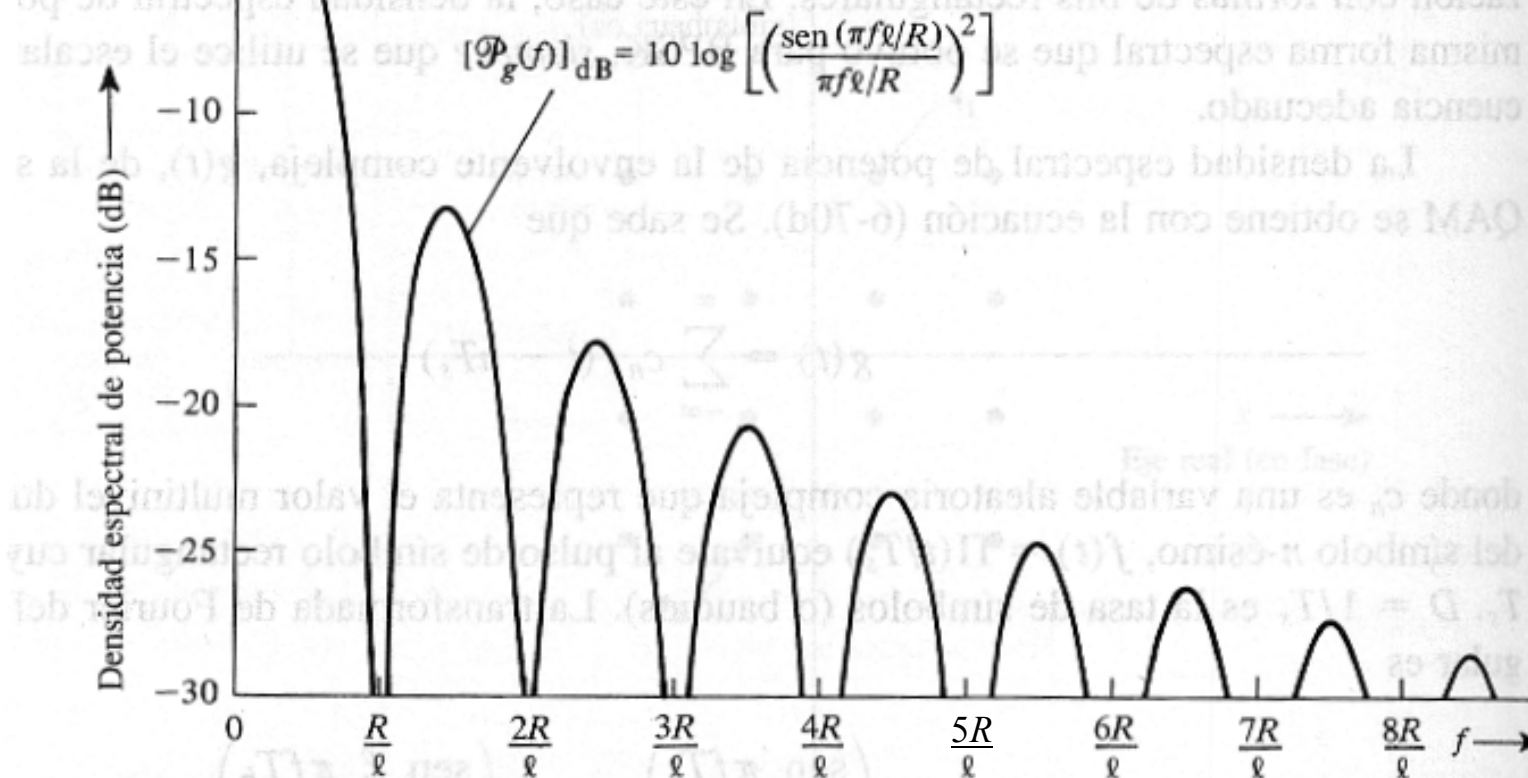


Figura 5-33 PSD de la envolvente compleja de MPSK y QAM donde $M = 2^\ell$, R es la tasa de bits y $R/\ell = D$ es la tasa en baudios (se muestran las frecuencias positivas).

Eficiencia espectral

- ♦ Se define la eficiencia espectral de una transmisión digital como la razón entre la tasa de bits R_b y el ancho de banda de transmisión requerido $\eta = R_b/B_w$. La definición depende desde luego del criterio usado para la definición del ancho de banda. Es posible usar el criterio de primeros nulos 90% de la energía). **Notamos que en general los anchos de banda de la señal modulada son el doble de los de la envolvente compleja (banda base).**
- ♦ Si se considera que una señal QAM de M niveles que está siendo transmitida mediante una envolvente (señal equivalente de banda base) correspondiente a un pulso NRZ, entonces el ancho de banda de transmisión (entre nulos) requerido será
- ♦ $B_{ws} = 2R_s = 2R_b/\log_2 M$
- ♦ La eficiencia espectral es entonces $\eta = R_b/2R_s = (\log_2 M)/2$ [b/s/Hz]

El pulso de Nyquist

- ♦ Es el pulso de mínimo ancho de banda que permite transmitir $f_s=1/T_s$ **pulsos de magnitud independiente** por segundo. Su forma temporal se obtiene de la transformada inversa de Fourier del espectro “rectangular” y en consecuencia es una función “sinc”

$$h(t) = f_s \{ \text{sinc}(f_s t) \}$$

- Este pulso tiene un espectro acotado a $f_s/2$ Hz y en el tiempo sus cruces por cero están equiespaciados cada T_s segundos (salvo desde luego en $t = 0$) y por lo tanto una secuencia de tales pulsos centrados en múltiplos de T_s no genera interferencia entre estos pulsos **en los instantes de muestreo**.
- El decaimiento temporal de estos pulsos al alejarse de $t = 0$ es según t^{-1} lo cual es demasiado lento para la mayoría de las aplicaciones reales (puede producir una suma de valores divergente). Por ello se utiliza normalmente una solución que tiene un decaimiento más gradual en el espectro y consecuentemente más rápido en el tiempo.

El filtro del coseno alzado

- ♦ Su función de transferencia $H(f)$ es

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f| < f_1 \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left(\frac{\pi(|f| - f_1)}{f_s - 2f_1} \right) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sin \left(\frac{\pi(|f| - f_s/2)}{f_s - 2f_1} \right) \right\} & f_1 < |f| < f_s - f_1 \\ 0 & |f| \geq f_s - f_1 \end{cases}$$

La respuesta a impulso del filtro, o sea el pulso a transmitir es:

$$h(t) = f_s \left\{ \text{sinc}(f_s t) \right\} \left\{ \frac{\cos \{ \pi (f_s - 2f_1) t \}}{1 - (2(f_s - 2f_1) t)^2} \right\}$$

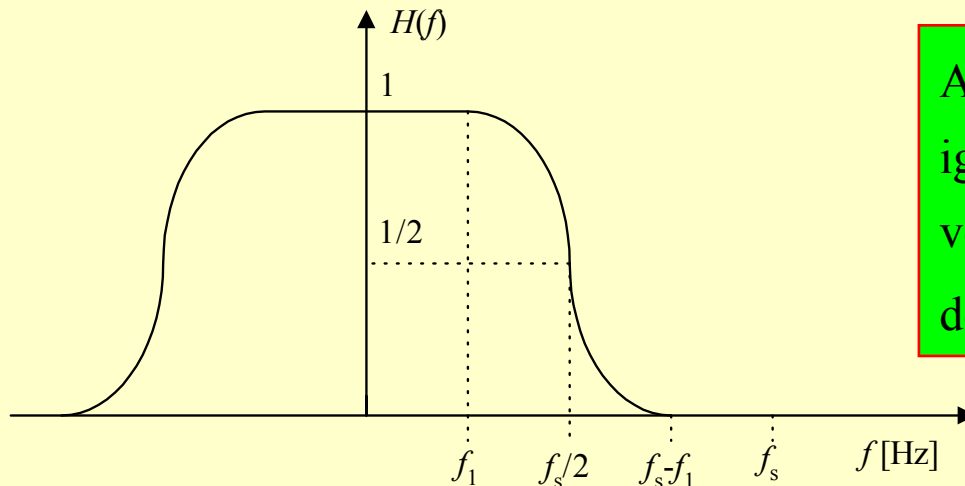
Definimos el “factor de decaimiento: $\rho = 1 - \frac{2f_1}{f_s}$

$\rho = 0$ implica “pulsos de Nyquist”, o sea mínimo ancho de banda, en cambio

$\rho = 1$ implica duplicar el ancho de banda

El filtro del coseno alzado

- ♦ Los ceros de esta función ocurren también en $t = nT_s$; Se conservan los mismos cruces por cero de los pulsos de Nyquist (o sea de los pulsos de mínimo ancho de banda que satisfacen el primer criterio).



Ancho de banda **total** requerido **B** es igual $= (f_s/2) * (1+\rho)$ lo que es $(1+\rho)$ veces el mínimo teórico de $f_s/2$ (pulso de Nyquist)

- ♦ Nótese que para valores de t suficientemente grandes $h(t) \sim 1/t^3$

El filtro del coseno alzado

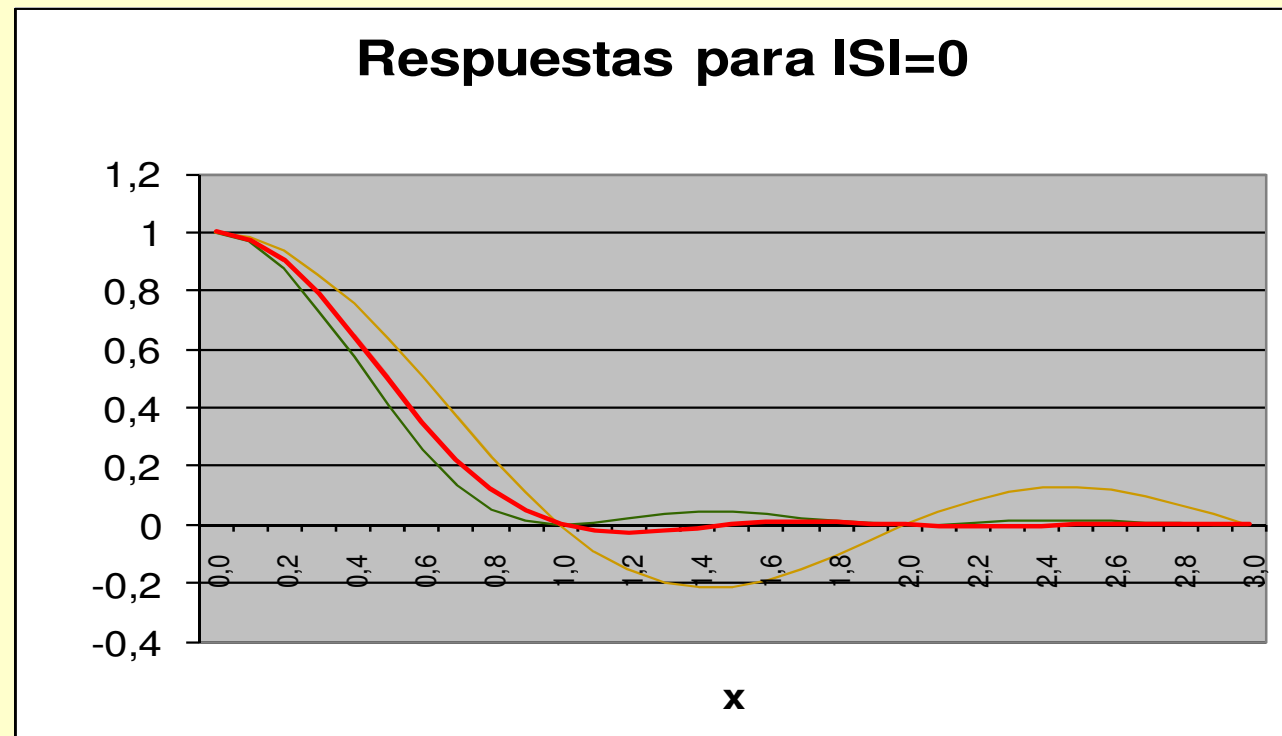
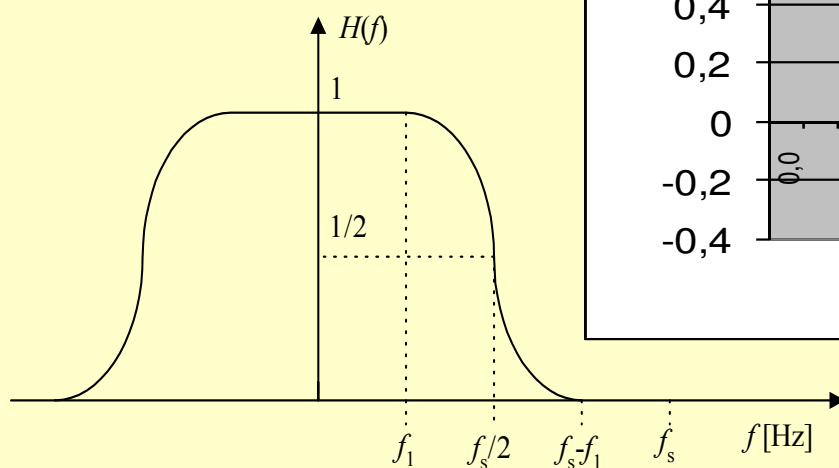
Aprovechando que $\rho f_s = f_s - 2f$

La respuesta a impulso puede también escribirse como:

$$h(t) = f_s \left\{ \text{sinc}(f_s t) \right\} \left\{ \frac{\cos\{\pi \rho f_s t\}}{1 - (2\rho f_s t)^2} \right\}$$

Nótese que la función “sinc” correspondiente a un pulso de Nyquist aparece como factor multiplicativo, lo que explica la existencia de los mismos cruces por cero.

- ♦ Una respuesta temporal del filtro coseno alzado con mayor ρ implica mayor decaimiento en tiempo, pero mayor BW, por tanto un compromiso.
- ♦ Mayor decaimiento implica menor posibilidad de interferencia (en la práctica no es ideal caso Ts).



Eficiencia espectral

- ♦ Si la envolvente corresponde a un pulso de coseno alzado (pulso BB eficiente en BW, ver concepto, forma en t y espectro) con factor de decaimiento ρ , **el ancho de banda absoluto B** será (se verá posteriormente)

$$B = (1 + \rho)R_b / \log_2 M$$

$$\eta = \log_2 M / (1 + \rho) [(b/s)/Hz]$$

Eficiencia espectral

- ♦ La expresión $\eta = R_b/Bw_s = \log_2 M / (1 + \rho)$ [(b/s)/Hz] es muy importante pues nos permite determinar a qué velocidad se puede transmitir para un Bw_{Tx} dado y un esquema de modulación específico.
- ♦ Así, por ejemplo, se puede construir la siguiente tabla

M	$\log_2 M$	$\eta = Bw_b/Bw_s = R_b/2R_s = n/(1 + \rho)$ [b/s/Hz]					
		$\rho = 0,0$	0,1	0,25	0,5	0,75	1
2	1	1,0	0,91	0,80	0,67	0,57	0,5
4	2	2,0	1,82	1,60	1,33	1,14	1,0
8	3	3,0	2,73	2,40	2,00	1,71	1,5
16	4	4,0	3,64	3,20	2,67	2,29	2,0
32	5	5,0	4,55	4,00	3,33	2,86	2,5

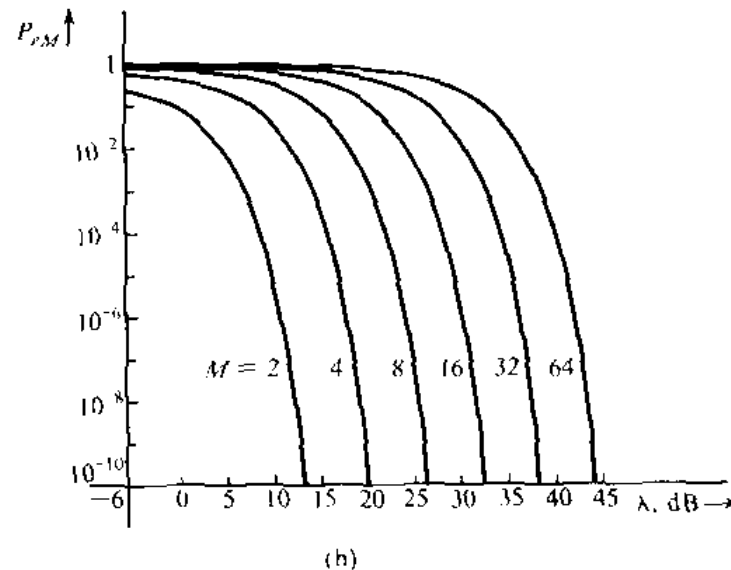
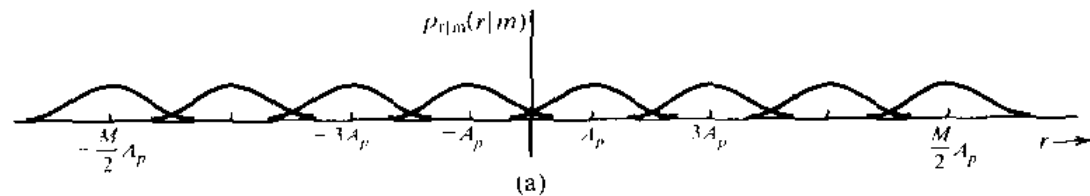
La eficiencia espectral está asociada con capacidad que tiene un determinado canal para transportar datos, dada por el Teorema de Shannon.

Probabilidades de error con Modulación en amplitud multinivel de una portadora, MASK. Detección coherente

- ♦ Cuando se modula una portadora en amplitud con múltiples niveles, y además se detecta en forma coherente, se tiene que, al igual que en señalización polar M-aria, la probabilidad de error por símbolo, el ancho de banda y probabilidad por bit equivalente están dadas por las relaciones:

$$P_{\epsilon M} = 2 \frac{M-1}{M} Q \left(\sqrt{\frac{2E_p}{N_0}} \right) = 2 \frac{M-1}{M} Q \left(\sqrt{\frac{6SNR_i}{M^2-1}} \right)$$

$$B = f_s = \frac{R_b}{\log_2 M}; \quad y \quad P_{\epsilon b} = \frac{P_{\epsilon M}}{\log_2 M}$$

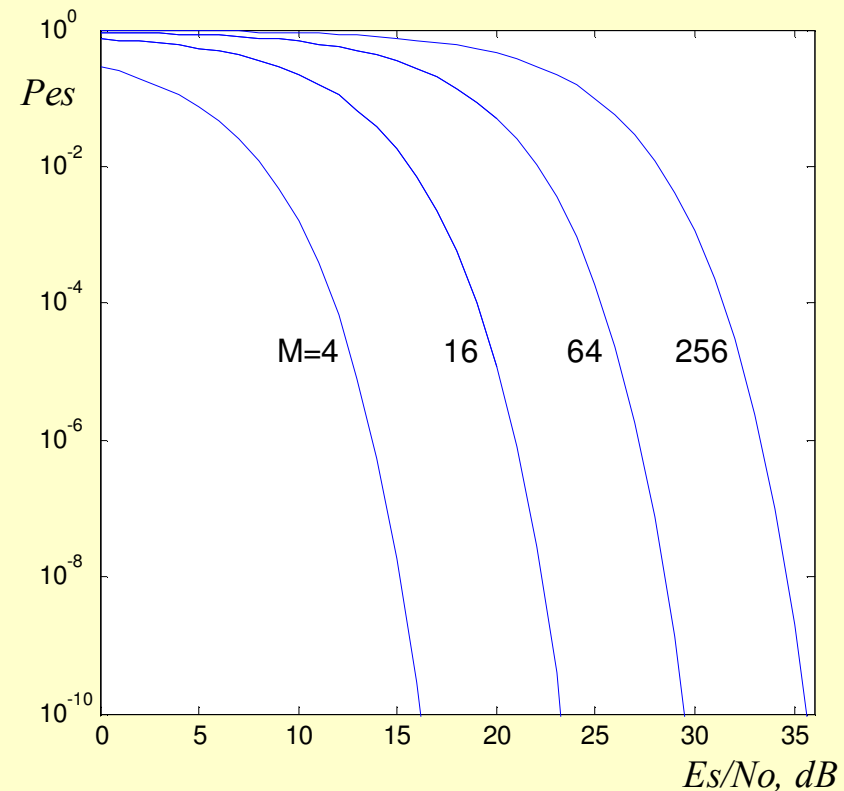


6.38 (a) Conditional PDFs in MASK. (b) Error probability in MASK.

Probabilidades de error con Modulación en amplitud multinivel de una portadora, MQAM. Detección coherente

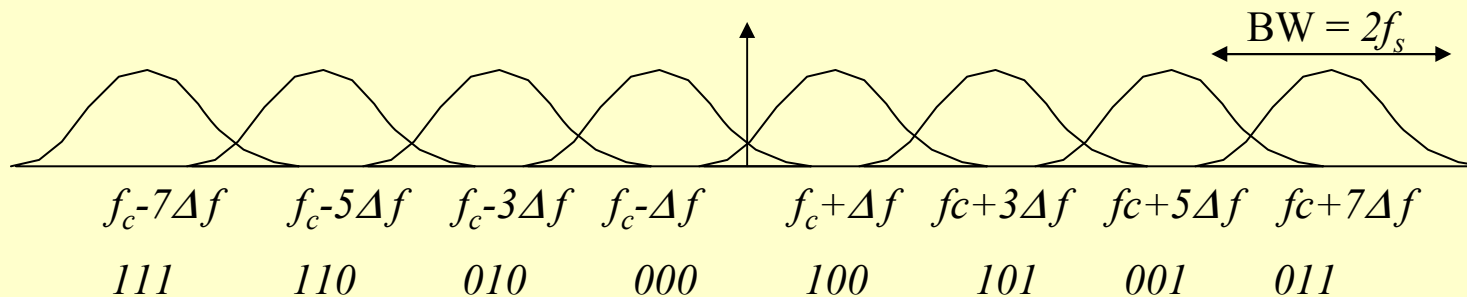
- ♦ En este caso la probabilidad de error se calcula considerando dos modulaciones NASK en cuadratura e independientes, con $N^2=M$, y se calcula la prob. de que el símbolo este correcto como la multiplicación de las prob. P_e de que cada símbolo NASK estén correctos, es decir:

$$P_{eb} = \frac{P_{es}}{n}, \quad P_{es} = 1 - (1 - P_e)^2,$$
$$P_e = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left(\sqrt{\frac{3E_s}{(M-1)N_0}} \right)$$



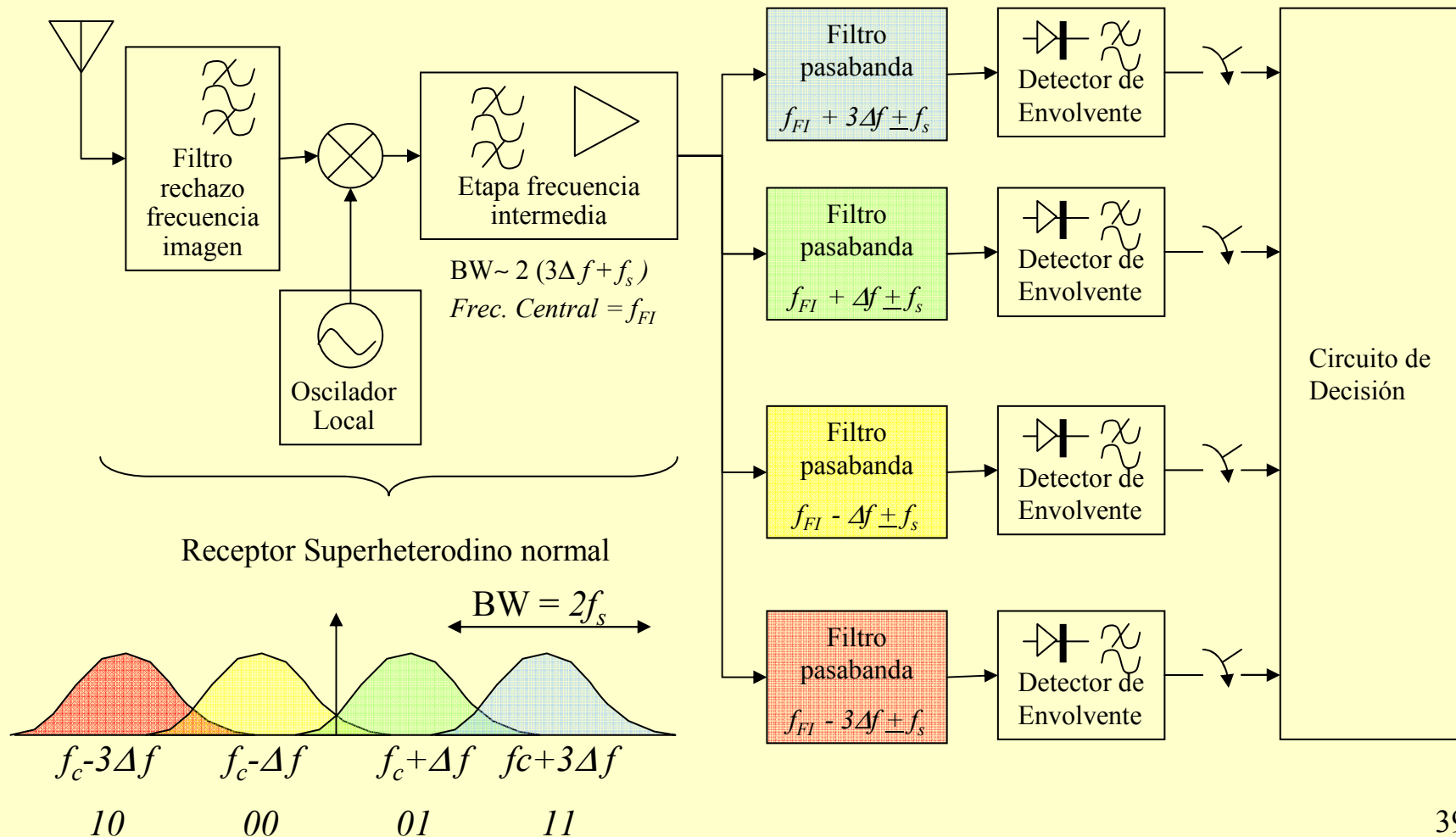
Probabilidades de error con MFSK, recepción coherente/no-coherente

- En la Tx/Rx de señales multifrecuencia, se extiende el análisis y los resultados obtenidos previamente para BFSK.
- Para la transmisión de señales multifrecuencia de $M = 2^n$ frecuencias diferentes, separadas cada una de ellas en Δf , el ancho de banda total requerido se obtiene de la figura como $B \approx 2f_s + M\Delta f$.

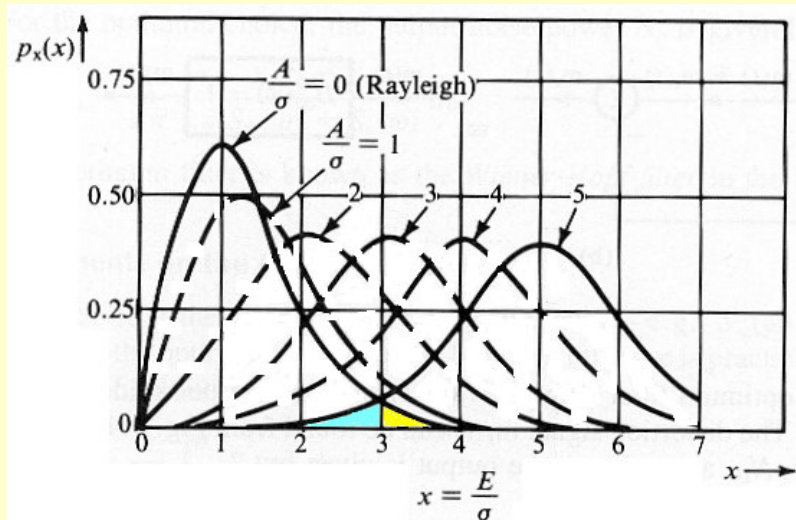
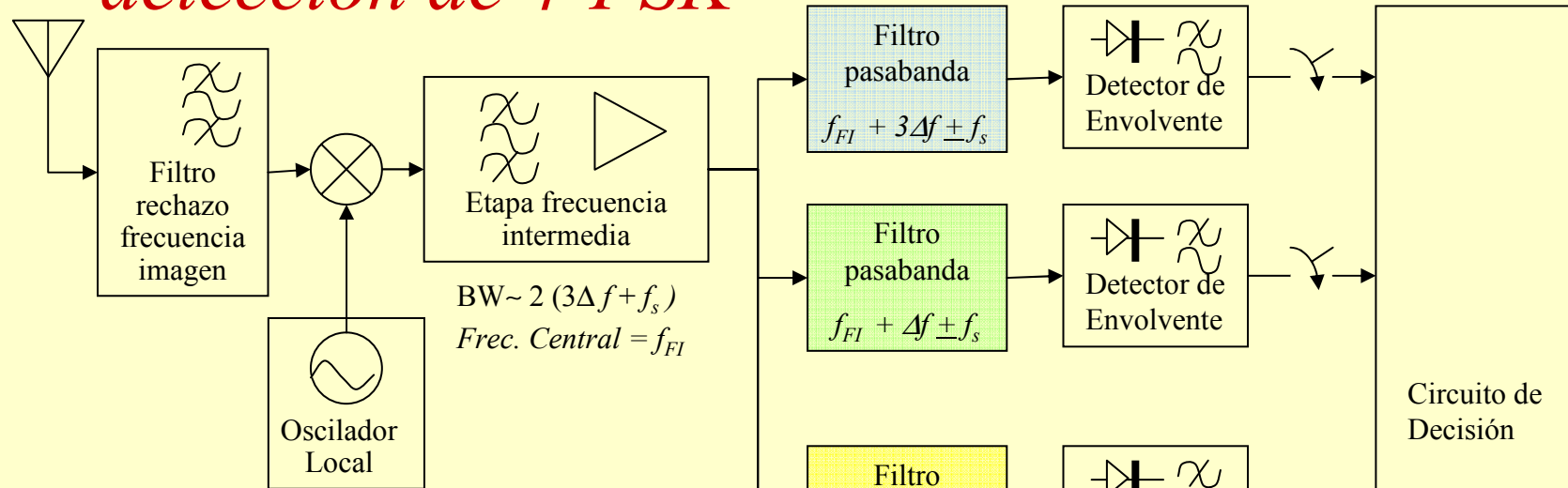


- Desde el punto de vista de la recepción es difícil mantener la coherencia de fase de las M frecuencias, por lo que prácticamente no se utiliza la detección coherente.
- En consecuencia, prácticamente todos los sistemas MFSK utilizan detección no-coherente.

Ejemplo: Receptor No-coherente para detección de 4-FSK



Ejemplo: Receptor No-coherente para detección de 4-FSK



Probabilidades de error con MFSK, recepción no-coherente

- Para la determinación de la probabilidad de error para una detección no coherente, se sigue un procedimiento similar al de la recepción BFSK.
- En este caso tiene más sentido calcular la probabilidad de recepción correcta de un símbolo: $P_{cM} = 1 - P_{eM}$

$$P_{cM} = P(C | s_1) = P(r_1 < \infty, n_2 < r_1, n_3 < r_1, \dots, n_M < r_1)$$

$$P_{cM} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r_1 e^{-\frac{r_1^2 - A^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2} I_0\left(\frac{Ar_1}{\sigma^2}\right) \left[\int_{-\infty}^{r_1} \frac{r_2 e^{-\frac{r_2^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2} dr_2 \right]^{M-1} dr_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r_1 e^{-\frac{r_1^2 - A^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2} I_0\left(\frac{Ar_1}{\sigma^2}\right) \left[e^{-\frac{r_1^2}{2\sigma^2}} \right]^{M-1} dr_1$$

$$P_{eb} = \frac{1 - P_{cM}}{\log_2 M}; \text{ suponiendo que los símbolos están codificados en Gray}$$

- Si se calcula y se grafica esta expresión, da como resultado los gráficos de la transparencia siguiente

Probabilidades de error con MFSK, recepción coherente/no-coherente

$$P_{cM} = P(C | s_1) = P(r_1 < \infty, n_2 < r_1, n_3 < r_1, \dots, n_M < r_1)$$

$$P_{cM} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r_1 e^{-\frac{r_1^2 - A^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2} I_0\left(\frac{Ar_1}{\sigma^2}\right) \left[\int_{-\infty}^{r_1} \frac{r_2 e^{-\frac{r_2^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2} dr_2 \right]^{M-1} dr_1$$

$$P_{cM} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r_1 e^{-\frac{r_1^2 - A^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2} I_0\left(\frac{Ar_1}{\sigma^2}\right) \left[e^{-\frac{r_1^2}{2\sigma^2}} \right]^{M-1} dr_1$$

$$P_{eb} = \frac{1 - P_{cM}}{\log_2 M}; \text{ suponiendo codificación Gray}$$

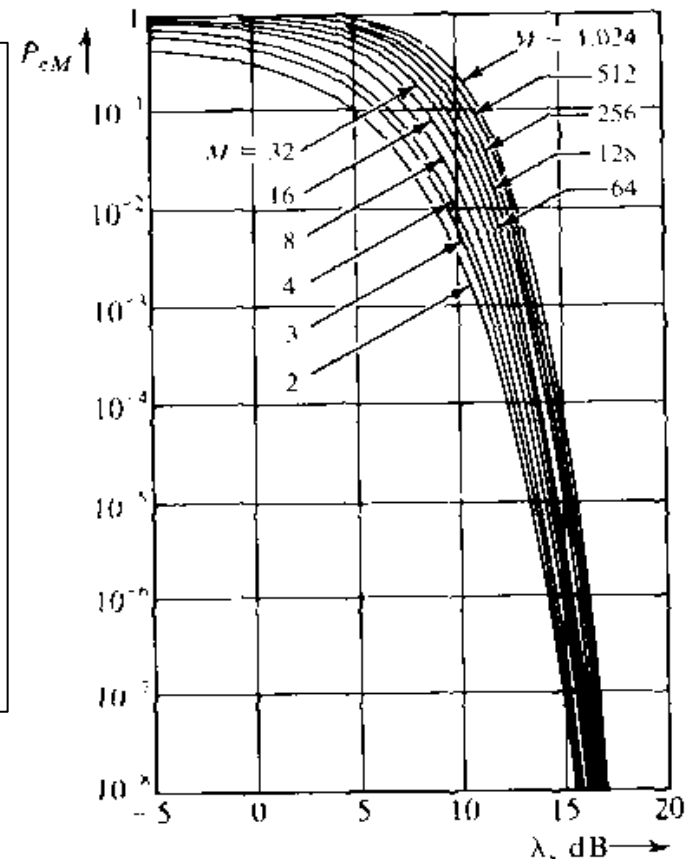
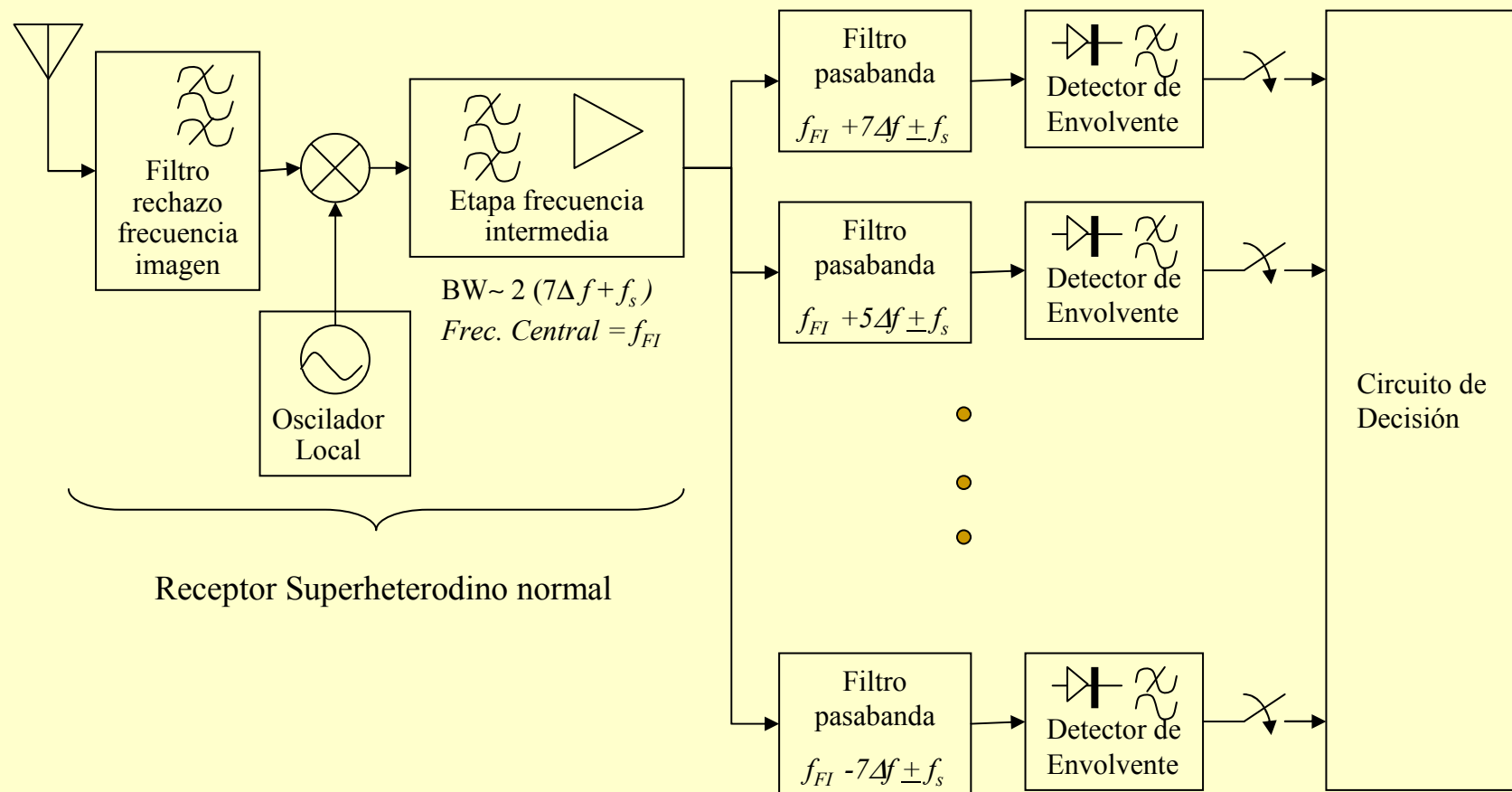


Figure 6.44 Error probability of noncoherent MFSK

Receptor No-coherente para detección de 8-FSK

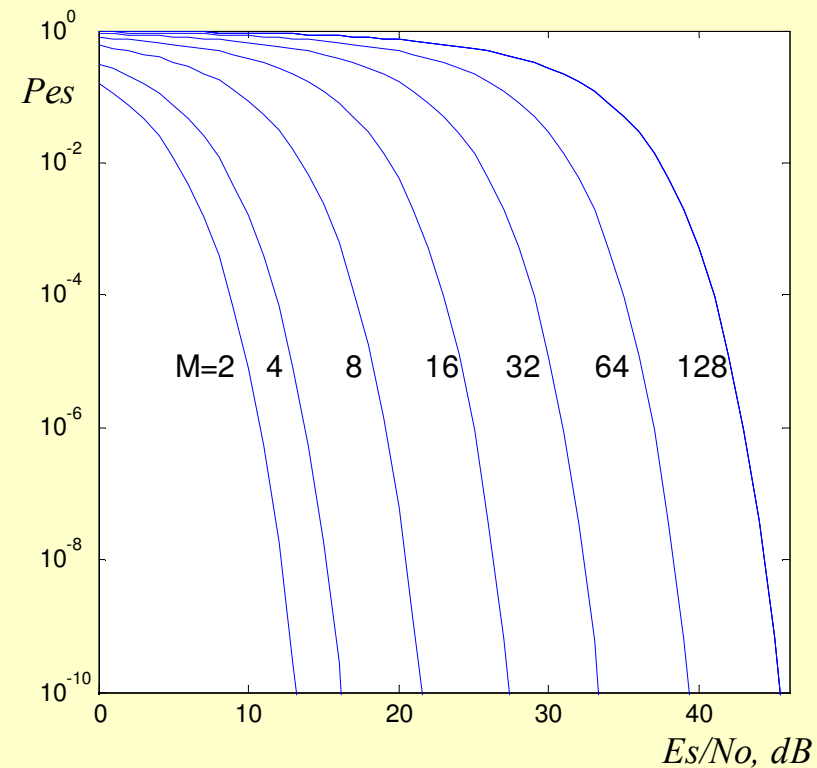
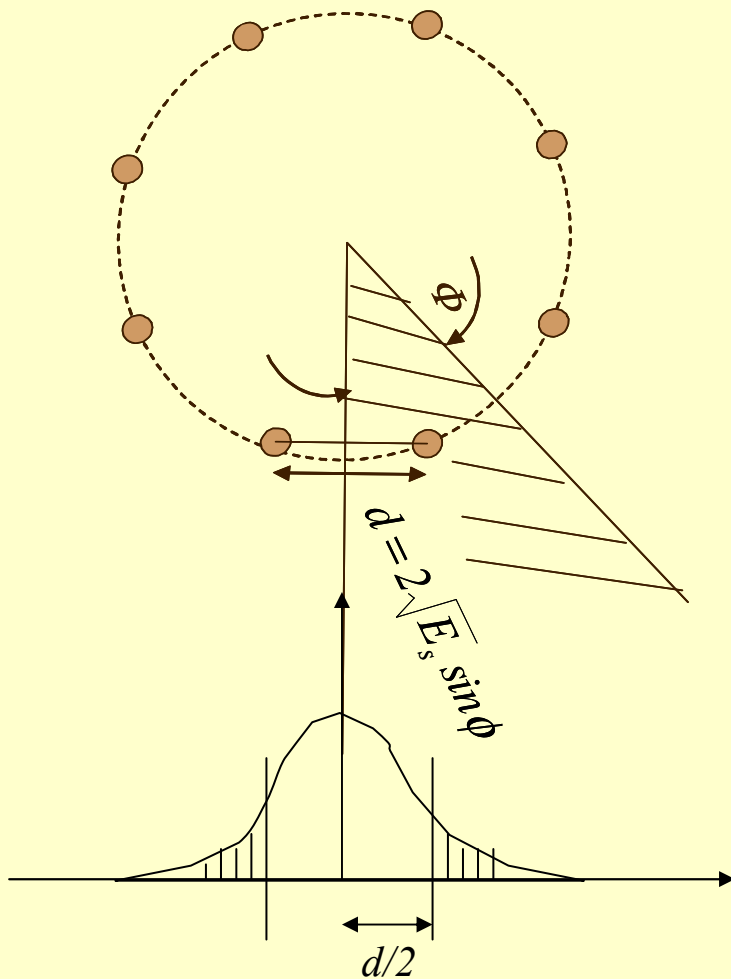


M PSK: Cálculo de la probabilidad de error (similar para MQAM)

La probabilidad de error por símbolo y bit es (supone codificación es Gray):

$$P_{eS} = 1 - P_{cS} \approx 1 - \left(1 - 2Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right) \right) = 2Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right)$$

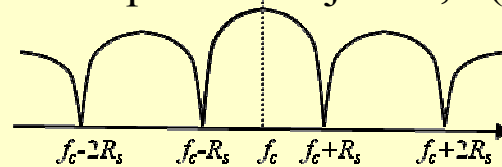
$$P_{eb} = \frac{P_{eS}}{\log_2 M} \approx \frac{2}{n} Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right) = \frac{2}{n} Q\left(\sqrt{\frac{2E_s \sin^2(\pi/M)}{N_0}}\right)$$



Resumen

Transmisión Multinivel y Constelaciones de Transmisión

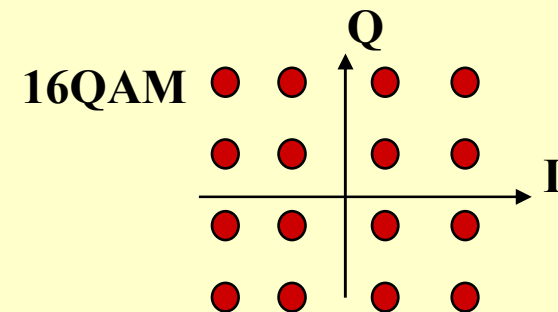
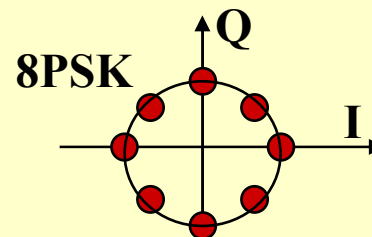
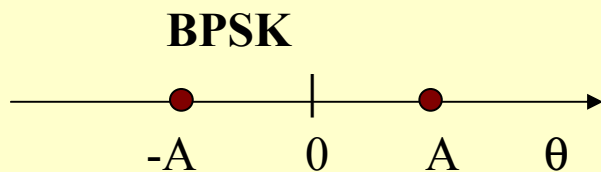
- ♦ Cuando hay limitaciones de BW se puede transmitir en general M símbolos multinivel, asociados a n bits cada uno. Con esto el BW (entre 1°s nulos) se reduce de $2Rb$ a $2Rs=2Rb/n$, y la eficiencia espectral mejora 0,5 ($Rb/2Rb$) a $0,5n$ ($Rb/(2Rs)$)...



- ♦ La modulación de BB a PB (o RF) puede representarse como una envolvente compleja $g(t)$ de una portadora modulada. La parte $Re\{g\}=I$ es la señal en fase, y la parte $Im(g)=Q$ es la señal en cuadratura.

$$v(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{R(t)e^{j\theta(t)}e^{j\omega t}\} = R(t)\cos\{\omega_c t + \theta(t)\}$$

- ♦ La envolvente compleja representa en general una constelación de multiniveles complejos a transmitir. Si sólo se modula la fase es MPSK, si sólo la amplitud es MASK, y si son ambas combinadas es MQAM (MFSK no reduce el ancho de banda). Ejemplos:

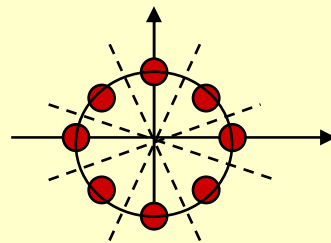


Resumen

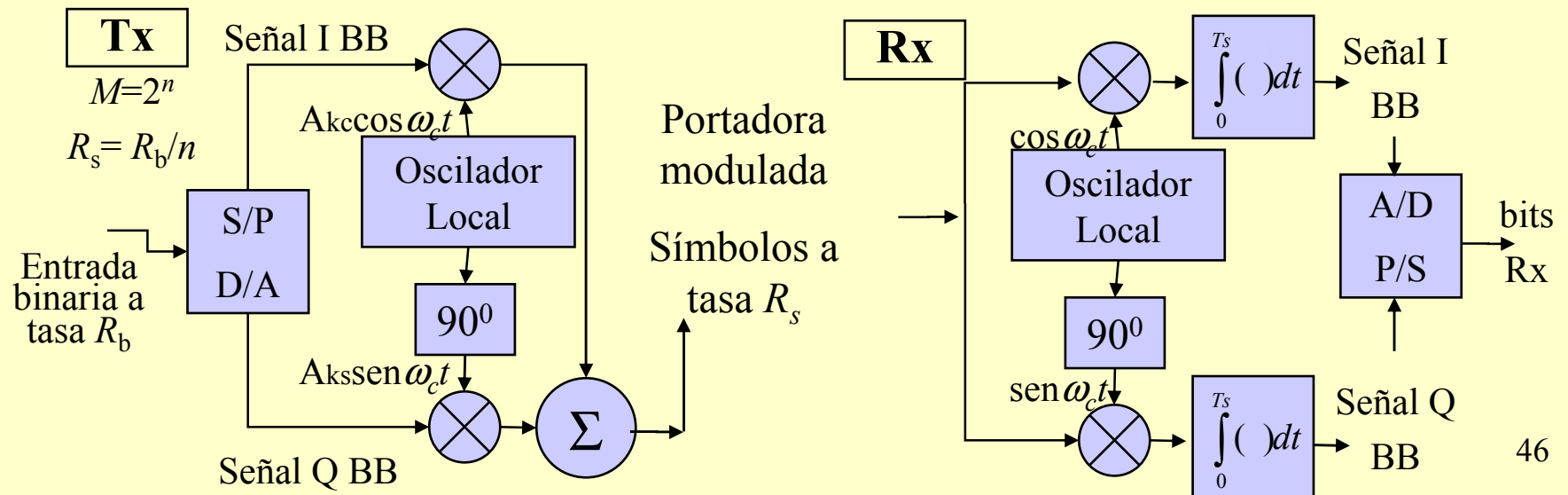
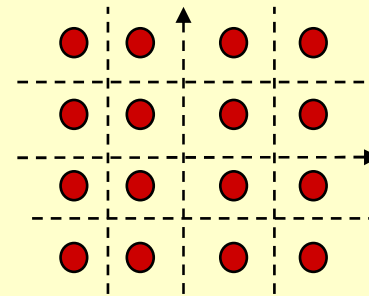
Transmisión Multinivel y Constelaciones de Transmisión

- El Receptor Óptimo o criterio de detección óptima para señales multinivel, con BB o envolvente compleja en general, recupera la BB (contaminada con ruido gaussiano) y compara con umbrales equidistantes. Ejemplos:

8PSK



16QAM



Resumen

Transmisión Multinivel y Constelaciones de Transmisión

Probabilidad de error. Con código Gray, la prob. de error por bit equivalente es $P_{eb} \cong P_{es}/n$, con P_{es} la prob. de error por símbolo y n el número de bits por símbolo.

MASK
$$P_{eb} = \frac{P_{es}}{n}, \quad P_{es} = 2 \frac{M-1}{M} Q \left(\sqrt{\frac{6Es}{(M^2-1)N_0}} \right)$$

MPSK
$$P_{eb} = \frac{P_{es}}{n}, \quad P_{es} = 2Q \left(\sqrt{\frac{2Es}{N_0}} \sin(\pi / M) \right)$$

MFSK
$$P_{eb} = \frac{1-P_{cM}}{\log_2 M}, \quad P_{cM} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r_1 e^{-\frac{r_1^2 - A^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2} I_0 \left(\frac{Ar_1}{\sigma^2} \right) \left[e^{-\frac{r_1^2}{2\sigma^2}} \right]^{M-1} dr_1$$

MQAM
$$P_{eb} = \frac{P_{es}}{n}, \quad P_{es} = 1 - (1 - P_e)^2, \quad P_e = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left(\sqrt{\frac{3Es}{(M-1)N_0}} \right)$$

QPSK
$$P_{eb} = \frac{P_{es}}{2}, \quad P_{es} = 2Q \left(\sqrt{\frac{Es}{N_0}} \right) = 2Q \left(\sqrt{\frac{A^2 Ts}{2N_0}} \right) = 2Q \left(\sqrt{\frac{A^2 Tbeq}{N_0}} \right)$$
 (P_{eb} equivalente a:
4PSK, 4QAM y 2ASK)