

# Trabalho 4 (2/2)

Vignon Fidele Adanvo

August 29, 2022

## 1 Introdução

Este documento mostra o desenvolvimento da expressão para a probabilidade de erro de símbolo em um canal de comunicação onde o ganho do canal é formado pela soma ortogonal de duas VAs iid uniformemente distribuídas entre  $-B$  e  $B$ . A Figura 1 ilustra a distribuição do canal. Trace-se a curva da SER vs SNR para as modulações QPSK, 16-QAM e 64-QAM e compara-se os resultados com os resultados de simulação.

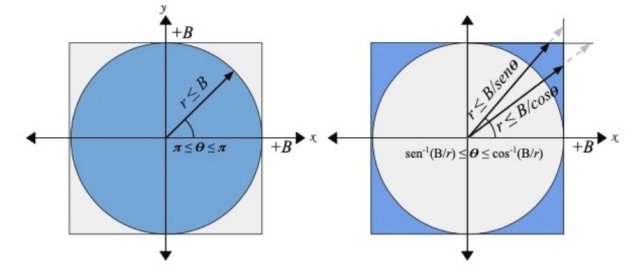
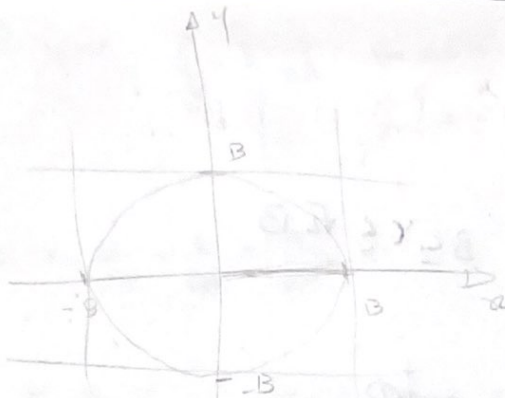


Figure 1: Figura da distribuição

## 2 Expressão analítica

1)



De acordo com a tarefa II, a  $p(r)$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$p(r) = \begin{cases} \frac{\pi r}{2B^2} & 0 \leq r \leq B \\ \frac{r}{B^2} \left[ \sin^{-1}\left(\frac{B}{r}\right) - \cos\left(\frac{B}{r}\right) \right] & B \leq r \leq \sqrt{2}B \end{cases}$$

Usando a definição aproximada de  $P_e$

$$P_e \approx \bar{M} \int_0^{\infty} \bar{M} Q\left(\sqrt{r^2 \frac{E}{N_0}}\right) p(r) dr$$

$$\bar{P}_e = \int_0^B M Q\left(\sqrt{r^2 \frac{E}{N_0}}\right) \frac{\pi r}{2B^2} dr + \int_B^{\sqrt{2}B} M Q\left(\sqrt{r^2 \frac{E}{N_0}}\right) \frac{r}{B^2} \left[ \sin^{-1}\left(\frac{B}{r}\right) - \cos\left(\frac{B}{r}\right) \right] dr$$

$$Q\left(\sqrt{r^2 \frac{E}{N_0}}\right) = \int_{x=\sqrt{r^2 \frac{E}{N_0}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{Polaris}$$

$$\bar{P}_e = \int_0^{\infty} M \int_{r=\sqrt{r^2 \frac{E}{N_0}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{\pi r}{2B^2} dx dr + M \int_B^{\sqrt{2}B} \int_{x=\sqrt{r^2 \frac{E}{N_0}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{r}{B^2} \left[ \sin^{-1}\left(\frac{B}{r}\right) - \cos\left(\frac{B}{r}\right) \right] dx dr$$

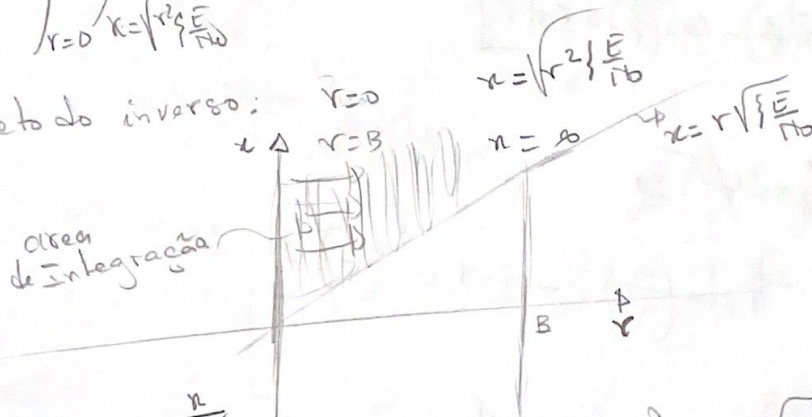
$$\bar{\rho}_e = \frac{4\pi}{2\sqrt{2\pi}B^2} \int_{r=0}^{r=B} \int_{x=\sqrt{r^2 \frac{E}{H_0}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} r dx dr + \frac{4}{B^2\sqrt{2\pi}} \int_{r=0}^{r=\sqrt{2}B} \int_{x=\sqrt{r^2 \frac{E}{H_0}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} r \left( \sin^{-1} \frac{B}{r} - \cos \left( \frac{B}{r} \right) \right) dx dr$$

$$= \underbrace{\frac{4\pi}{2\sqrt{2\pi}B^2} \int_{r=0}^{r=B} \int_{x=\sqrt{r^2 \frac{E}{H_0}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} r dx dr}_{\text{Cof}_1} + \underbrace{\frac{4}{B^2\sqrt{2\pi}} \int_{r=B}^{r=\sqrt{2}B} \int_{x=\sqrt{r^2 \frac{E}{H_0}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} r \left( \sin^{-1} \frac{B}{r} - \cos \left( \frac{B}{r} \right) \right) dx dr}_{\text{Parte II}}$$

Solução Parte I

Parte I =  $\int_{r=0}^{r=B} \int_{x=\sqrt{r^2 \frac{E}{H_0}}}^{\infty} r e^{-\frac{x^2}{2}} dx dr$   $\Rightarrow$  Integral sem solução

$\Rightarrow$  Método inverso:



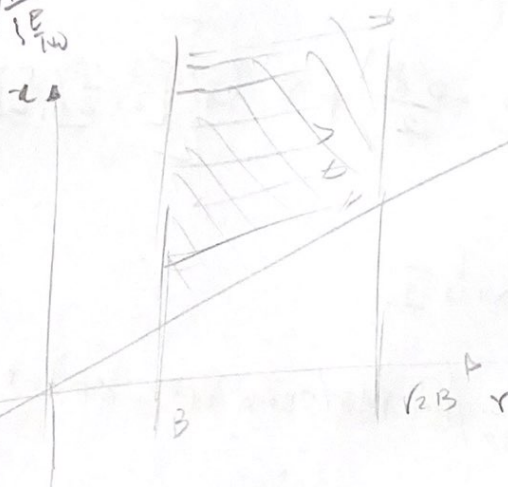
$$\text{Parte I} = \int_{r=0}^{\infty} \int_{x=0}^{x=\frac{r}{\sqrt{\frac{E}{H_0}}}} e^{-\frac{x^2}{2}} r dx dr = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{E}{H_0}}} \right)^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\frac{E}{H_0}}$$

$$\text{Parte I} \times \text{Cof}_1 = \frac{4\pi}{B^2 \cdot 2\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\frac{E}{H_0}} = \frac{4\pi}{8B^2} \cdot \frac{1}{\frac{E}{H_0}} \quad (1)$$



Parte II

$$\int_{r=0}^{r=\sqrt{1-B}} \int_{x=\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{1-B}}}^{\pi} e^{-\frac{x}{2}} \left[ r \sin^{-1}\left(\frac{B}{r}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{B}{r}\right) \right] dx dr$$



seja  $\gamma = \frac{x}{\sqrt{1-B}}$   $\rightarrow B < x < \pi/\sqrt{1-B}$

Parte II =

$$\int_{x=0}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} \int_{r=B}^{r=\frac{x}{\sqrt{1-B}}} \left[ r \sin^{-1}\left(\frac{B}{r}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{B}{r}\right) \right] dr dx$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} \left[ \int_{r=B}^{r=\frac{x}{\sqrt{1-B}}} r \sin^{-1}\left(\frac{B}{r}\right) dr - \int_{r=B}^{r=\frac{x}{\sqrt{1-B}}} \cos^{-1}\left(\frac{B}{r}\right) dr \right] dx$$

$$\gamma_n = \frac{x}{\sqrt{1-B}}$$

$$\gamma_n^2 = \frac{x^2}{1-B}$$

$$K_1 = -B\sqrt{1-B^2} - \frac{B^2\pi}{4} + \frac{1}{2} \left[ B\sqrt{1-\frac{B^2}{\gamma_n^2}} \gamma_n + \gamma_n^2 \sin^{-1}\left(\frac{B}{\gamma_n}\right) \right]$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \left[ -B\sqrt{1-B^2} + B\sqrt{1-\frac{B^2}{\gamma_n^2}} \gamma_n - \gamma_n^2 \cos^{-1}\left(\frac{B}{\gamma_n}\right) \right]$$

$$K_1 + K_2 = \frac{1}{4} \left[ -8B\sqrt{1-B^2} + 4B\sqrt{1-\frac{B^2}{\gamma_n^2}} \gamma_n - B^2\pi - 2\gamma_n^2 \sin^{-1}\left(\frac{B}{\gamma_n}\right) + 2\gamma_n^2 \cos^{-1}\left(\frac{B}{\gamma_n}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[ 4B \left( -2\sqrt{1-B^2} + \gamma_n \sqrt{1-\frac{B^2}{\gamma_n^2}} \right) - B^2\pi - 2\gamma_n^2 \left( \sin^{-1}\left(\frac{B}{\gamma_n}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{B}{\gamma_n}\right) \right) \right]$$

$$Parte I = -\frac{1}{8B\delta^{3/2}\sqrt{\pi}} \left( \sqrt{2}B\sqrt{\delta}\pi \left( 8B\sqrt{-B^2}\delta + \pi + B^2\delta\pi \right) + 8\sqrt{-\frac{1}{B^2}\delta}(-B^2\delta)^{3/2} \right)$$

$$+ \pi {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; 0, -\frac{B^2\delta}{2}\right) + 8 G\left[\left[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right], [ ]; \left\{\frac{1}{2}\right\}, \frac{1}{2}; \frac{B^2\delta}{2}\right]$$

$$P_e = Parte I + Parte II$$

$$= \frac{-4\pi}{8B^2\delta} - \frac{1}{8B\delta^{3/2}\sqrt{\pi}} \left( \sqrt{2}B\sqrt{\delta}\pi \left( 8B\sqrt{-B^2}\delta + \pi + B^2\delta\pi \right) + 8\sqrt{-\frac{1}{B^2}\delta}(-B^2\delta)^{3/2} \right) \\ + \pi {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; 0, -\frac{B^2\delta}{2}\right) + 8 G\left[\left[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right], [ ]; \left\{\frac{1}{2}\right\}, \frac{1}{2}; \frac{B^2\delta}{2}\right]$$

### 3 Scrip

```

function [BER_N, BER_A]=funtion_SER_B(SNR_dB, M, B)
    %% Parametro
    N=1e3; %Numero de amostra
    SNR=10.^(SNR_dB./10);
    BER_N = zeros(1,[]);
    BER_A = [];
    %% Analitico
    mi=(4*(sqrt(M)-1))/(sqrt(M));
    sita=3/(M-1);
    for i = 1:length(SNR_dB)
        gama=sita*SNR(i);
        %% Integracao em intervalo 0<r<B
        coefA=(mi*pi)/(2*sqrt(2*pi)*(B^2));
        Integre1=(1/2)*sqrt(pi/2)*(1./gama);
        parte1=coefA*Integre1;
        %% Integracao em intervalo B<r<sqrt(2)B
        coefB=mi/(sqrt(2*pi)*B^2);
        K=-((B^2)*gama)/2;
        A1=sqrt(2)*B*sqrt(gama)*pi*...
            ((8*B*(sqrt(-B^2))*gama)+pi+((B^2)*gama*pi));
        A2=8*sqrt(-(1/((B^2)*gama)))*...
            (-B^2)*gama)^(3/2)*pi*abs(kummerU(-(1/2),0,K));
        A3= (8*meijerG([3/2, 3/2], [], [1, 2], 1/2, K));
        cof= -1/(8*B*gama^(3/2)*sqrt(pi));
        %A3=0
        Integral2= cof *(A1+A2+A3) ;
        parte2=(coefB*Integral2);
        %O resultado de cada integral esta complexa. Por tanto vou resolver pelo
        % la simula o num rica

        %% Soma das integrais
        BER= parte1+parte2;
        BER_A=[BER_A, BER ];
    end

    %% Simulado
    tx = randi([0,M-1],1,N); % Genar N sinal para analisar (1 M-1)
    tx_mod = qammod(tx, M); % Modular os N sinal
    for j = 1:length(SNR_dB)
        x=- B + (2*B)*rand(1,N);
        y=-B + (2*B)*rand(1,N);
        Sv1= x+1i*y ;
        r=abs(Sv1);
    end

```

```

Stx=tx_mod.*r;          %Simbolo enviado com influencia do canal
E= sum(abs(Stx).^2)/N;
N0=E/SNR(j);
n = sqrt(N0/2)*(randn(1,N)+1i*randn(1,N));%computed noise
Sr = Stx + n ; %Sinal+ ruido
Se = Sr./r; %Equalizar o sinal
C_dem =qamdemod(Se,M); %Demodulacao do sinal
BER_N(j) = sum(C_dem~=tx)/N; %Calculo de error
end
end

```

## 4 Comentário sobre as figuras

A Figura 2 mostra o desempenho do sistema para as seguintes modulações: QPSK, 16-QAM e 64-QAM com o parâmetro  $B = 5$  e  $10^6$  simulações. Observa-se para  $B = 5$  a modulação 8-PSK atinge uma SER de quase  $10^{-2}$  com 23 dB, enquanto as modulações 16-QAM e 64-QAM atingem a mesma taxa de erro de símbolo com  $E_S/N_0 = 25dB$  e  $E_S/N_0 = 33dB$ . Por tanto, o uso adequado da ordens de modulação pode incrementar a diversidade de ganho do sistema.

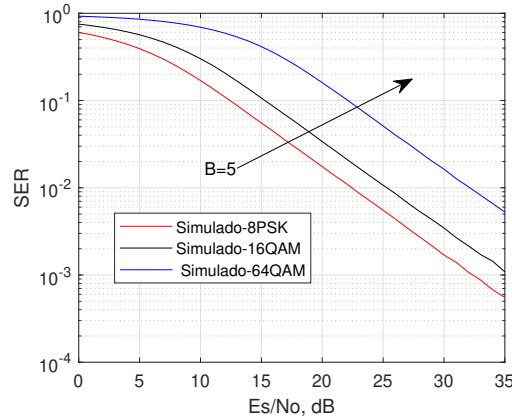


Figure 2: SER vs Es/No B=5 .

## 5 Conclusão

Esse trabalho mostra o desenvolvimento da expressão para a probabilidade de erro de símbolo em um canal de comunicação antes mostrado e a função que plota a mesma. As simulações obtidos foram comparados com diferentes ordens de modulação.