经济数学III单元练习二

一、(10 分)计算行列式 $D=\begin{vmatrix}3&1&-2&2\\-1&2&1&-1\\1&-1&3&1\\0&1&-1&2\end{vmatrix}$。

解：$D=\begin{vmatrix}3&1&-2&2\\-1&2&1&-1\\1&-1&3&1\\0&1&-1&2\end{vmatrix}\overset{\substack{r_1+3r_2\\r_3+r_2}}{=}\begin{vmatrix}0&7&1&-1\\-1&2&1&-1\\0&1&4&0\\0&1&-1&2\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}7&1&-1\\1&4&0\\1&-1&2\end{vmatrix}$

$\overset{r_3+r_1}{=}\begin{vmatrix}7&1&-1\\1&4&0\\8&0&1\end{vmatrix}=8\cdot\begin{vmatrix}1&-1\\4&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}7&1\\1&4\end{vmatrix}=32+27=59$

$=\begin{vmatrix}7&1&-1\\1&4&0\\15&1&0\end{vmatrix}=59$

结果错，方法对，扣 5 分

二、(10 分)解下列矩阵方程：$\begin{pmatrix}1&-2&-1\\1&1&-1\\2&3&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$。

解：$(A,B)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-1&1&-2&-1\\1&1&-1&1&1&-1\\2&3&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{r_2-r_2\\r_3-2r_1}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-1&1&-2&-1\\0&3&0&0&3&0\\0&7&3&-2&4&3\end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{r_1+\frac{2}{3}r_2\\r_3-\frac{7}{3}r_2}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&-1\\0&3&0&0&3&0\\0&0&3&-2&-3&3\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}r_2\\\frac{1}{3}r_3}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&-1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&-\frac{2}{3}&-1&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow{r_1+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{3}&-1&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&-\frac{2}{3}&-1&1\end{array}\right)$

所以，$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 & 1 \end{pmatrix}$

方法正确，错一个数扣 2 分

三、(10 分)设向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4)$， $\alpha_2=(0,3,1,2)$， $\alpha_3=(3,0,7,14)$，$\alpha_4=(2,1,5,6)$，判定向量组的相关性，若相关，求它的秩及极大无关组，并将多余向量用极大无关组线性表示。

解：$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-4r_1]{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_3]{r_2-2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{-\frac{1}{4}r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_4]{r_1-2r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 5 分

所以，$r(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)=3$，相关 1 分

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为一个极大无关组， 2 分

且 $\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$。 2 分

四、(15 分)求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+5x_3-x_4=1 \\ x_1+x_2-2x_3+3x_4=2 \\ 3x_1-x_2+8x_3+x_4=4 \\ x_1+3x_2-9x_3+7x_4=3 \end{cases}$ 的通解。

解：$(A,b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 8 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -9 & 7 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-3r_1 \\ r_4-r_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -14 & 8 & 2 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 5 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2 & \frac{1}{2}\\ 0 & 2 & -7 & 4 & 1\\ 0 & 4 & -14 & 8 & 2\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_3-2r_2\\ r_4-4r_2}]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$ 8 分

对应方程组为$\begin{cases}x_1+\frac{3}{2}x_3+x_4=\frac{3}{2}\\ x_2-\frac{7}{2}x_3+2x_4=\frac{1}{2}\end{cases}$，移项得 $\begin{cases}x_1=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x_3-x_4\\ x_2=\frac{1}{2}+\frac{7}{2}x_3-2x_4\end{cases}$

所以，特解为$\eta=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$， 2 分

导出齐次线性方程组基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{7}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ （需要写过程）

3 分

完 全 无

过程 -2 分

其他正确的基础解系结果还有：

$\xi_1=\begin{pmatrix}-3\\ 7\\ 2\\ 0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ $\xi_1=\begin{pmatrix}-6\\ 1\\ 2\\ 3\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ $\xi_1=\begin{pmatrix}-5\\ 3\\ 2\\ 2\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$**等**

通解为： $X=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{7}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，其中$c_1,c_2$为任意常数。2 分

五、(10 分)将向量组$\alpha_1=(1\quad -2\quad 2),\alpha_2=(-1\quad 0\quad -1),\alpha_3=(5\quad -3\quad -7)$正交化再单位化。

解：取$\beta_1=(1\quad -2\quad 2)$　　　　　　　　　1 分

$$\beta_2=(-1\quad 0\quad -1)-\frac{-3}{9}(1\quad -2\quad 2)=\left(-\frac{2}{3}\quad -\frac{2}{3}\quad -\frac{1}{3}\right)\qquad 3\text{ 分}$$

$$\beta_3=(5\quad -3\quad -7)-\frac{-3}{9}(1\quad -2\quad 2)-\frac{1}{1}\left(-\frac{2}{3}\quad -\frac{2}{3}\quad -\frac{1}{3}\right)=(6\quad -3\quad -6)$$

3 分

为正交向量组，再单位化得

$$\lambda_1=\left(\frac{1}{3}\quad -\frac{2}{3}\quad \frac{2}{3}\right),\quad \lambda_2=\left(-\frac{2}{3}\quad -\frac{2}{3}\quad -\frac{1}{3}\right),\quad \lambda_3=\left(\frac{2}{3}\quad -\frac{1}{3}\quad -\frac{2}{3}\right)\qquad 3\text{ 分}$$

六、(15 分)判定矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$能否对角化，若能，写出$P$和$\Lambda$。

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 1\\ 2 & 4-\lambda & -2\\ -3 & -3 & 5-\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{c_1+c_3\\ c_2+c_3}}{=}\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 1\\ 0 & 2-\lambda & -2\\ 2-\lambda & 2-\lambda & 5-\lambda\end{vmatrix}$

$$=(5-\lambda)(2-\lambda)^2-(2-\lambda)^2+2(2-\lambda)^2=(6-\lambda)(2-\lambda)^2$$

所以，特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=6$　　　　　　5 分 一个特别值 1 分，计算过程 2 分

对$\lambda_1=\lambda_2=2$，对应齐次方程组为$(A-2E)X=0$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+2r_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 2 分

基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$； 2 分

对 $\lambda_3 = 6$，对应齐次方程组为 $(A-6E)X = 0$

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1+5r_2} \begin{pmatrix} 0 & -6 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{6}r_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+6r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 分

基础解系为 $\xi_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ 1 分

因为矩阵 A 有三个线性无关特征向量 ξ_1, ξ_2, ξ_3，所以矩阵 A 能对角化， 1 分

且

$$p = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$$ 2 分

七、(10 分) 当 λ 取何值时，二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1 x_3$ 正定？

解：二次型矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 2 分

由 $d_1=|2|>0, d_2=\begin{vmatrix}2 & \lambda \\ \lambda & 1\end{vmatrix}=2-\lambda^2>0, d_3=\begin{vmatrix}2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=3-2\lambda^2>0$ 5 分

即 $\begin{cases}4-\lambda^2>0 \\ 3-2\lambda^2>0\end{cases}$，解得 $-\frac{\sqrt{6}}{2}<\lambda<\frac{\sqrt{6}}{2}$ 1 分

所以，当 $-\frac{\sqrt{6}}{2}<\lambda<\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时，二次型正定。 2 分

八、证明题(20 分) (1)若 n 阶矩阵 A 满足 $A^2-3A-4E=O$，试证明①$A-E$ 可逆，并求逆；②$A+E$ 和 $A-4E$ 中至少有一个不可逆。

证明：①由 $A^2-3A-4E=O$ 得 $(A-E)(A-2E)=6E$

即 $$(A-E)\left[\frac{1}{6}(A-2E)\right]=E$$

所以，$A-E$ 可逆，且 $(A-E)^{-1}=\frac{1}{6}(A-2E)$ 5 分

②又由 $A^2-3A-4E=O$ 得 $(A+E)(A-4E)=O$

即

$$|(A+E)(A-4E)|=|A+E|\cdot|A-4E|=|O|=0$$

所以，$|A+E|$ 与 $|A-4E|$ 中至少有一个等于 0，

即，$A+E$ 和 $A-4E$ 中至少有一个不可逆。 5 分

一小问 5 分，计算结果错，方法正确，得 3 分，出现 <u>矩阵与数相加减</u>，额外扣 1 分

(2) 设 $\beta_1=\alpha_1$， $\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$， $\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$， $\beta_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$， 且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，证明 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 也线性无关。

证明：设有一组数 k_1,k_2,k_3,k_4，使得 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3+k_4\beta_4=O$ 2 分

即

$$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+k_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+k_4(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)=O$$

亦即， $(k_1+k_2+k_3+k_4)\alpha_1+(k_2+k_3+k_4)\alpha_2+(k_3+k_4)\alpha_3+k_4\alpha_4=O$ 2 分

又因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，所以 $\begin{cases} k_1+k_2+k_3+k_4=0 \\ k_2+k_3+k_4=0 \\ k_3+k_4=0 \\ k_4=0 \end{cases}$ 2 分

由 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$，

方程组有且仅有零解， 2 分 （由**行阶梯形矩阵秩**解释也可得分，如果系数矩阵秩为 4，故齐次线性方程组仅有 0 解）

即 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$ 1 分

所以，向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 也线性无关。 1 分