《线性代数》介绍

一、参考书：

1、《线性代数》（美）利昂（机械工业出版社）

2、吴传生主编.《经济数学—线性代数学习辅导与习题选解》 高等教育出版社出版，2009年

3、高等学校文科教材·线性代数2：经济应用数学基础 赵树嫄， 中国人民大学出版社

4. 高等代数（任何一本教材，数学专业用）

二、内容：

“线性代数”的主要内容基本是研究方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_m \end{cases}$$

第一章是探求m=n时的求解公式（中学知识推广）

第二章 — 第四章研究一般的线性方程组解的结构（更一般）

第五章其他

第一章　行列式

一．　二（三）阶行列式

二．　排列、逆序与对换

三．　n 阶行列式的定义

行列式概念的形成　（定义）

四．　行列式的性质

五．　行列式按一行（列）展开

行列式的基本性质及计算方法

六．　Cramer 法则

利用行列式求解线性方程组

本章主要讨论以上三个问题。

中学为求数学方程 $f(x)=0$ ，希望给出求根（解）公式，如一元一次、二次方程的求根/解公式：

$$x=\frac{b}{a},\qquad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

首先来看行列式概念的形成

问题的提出：　　求解二、三元线性方程组

$\downarrow$ 引出

二阶、三阶行列式

$\downarrow$

为求解n元线性方程组，推广、定义n阶行列式

一、 二阶与三阶行列式

1. 二阶行列式

二元线性方程组：
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

由消元法，得
$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = b_1a_{21} \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2 \end{cases}$$

得 $$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

同理，得 $$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

于是，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \qquad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

为便于记忆，引进**记号** $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

称记号 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为二阶行列式

其中，数 $a_{ij}(i = 1,2; j = 1,2)$ 称为元素

i 为行标，表明元素位于第 i 行

j 为列标，表明元素位于第 j 列

注： (1) 二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 算出来是一个数。

(2) 记忆方法：对角线法则

主对角线上两元素之积 － 副对角线上两元素之积

因此，上述二元线性方程组的解可表示为

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

综上，令 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则，
$$x_1=\frac{D_1}{D}$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}$$

称 D 为方程组的系数行列式。

例1： 解方程组 $\begin{cases} -3x_1+2x_2=12 \\ 2x_1+x_2=1 \end{cases}$

解： 因为 $D=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-3-4=-7\neq 0$

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=12-2=10$$

$$D_2=\begin{vmatrix} -3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-3-24=-27$$

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{10}{-7}=-\dfrac{10}{7}$， $x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-27}{-7}=\dfrac{27}{7}$

2. 三阶行列式

类似地，为讨论三元线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

引进**记号**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

称之为三阶行列式

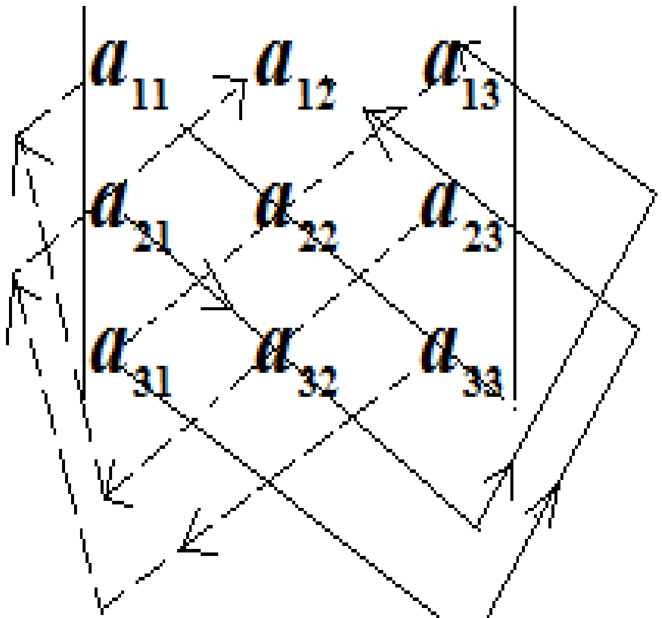
其中，数 $a_{ij}(i = 1,2,3; j = 1,2,3)$ 称为元素

i 为行标，　j 为列标。

注： (1) 三阶行列式 算出来也是一个数。

(2) 记忆方法：对角线法则

(3) 一般大于三阶无记忆法



逆时针为"+"，顺时为"—"

例：

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\times(-4)\times 3 + 0\times(-1)\times(-1) + 1\times 1\times 8$$

$$-1\times(-4)\times(-1) - 0\times 1\times 3 - 2\times(-1)\times 8$$

$$= -24 + 8 - 4 + 16 = -4$$

对于三元线性方程组，若其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

可以验证，方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D} \qquad x_2=\frac{D_2}{D} \qquad x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中，

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

计算下列行列式：

$$D=\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}=3x(x+y)y-(x+y)^3-x^3-y^3$$

注意化简！

2 全排列及其逆序数

（前面方法无法推广到n 阶行列式）

定义1：由自然数1，2，……，n 组成的一个有序数组称为一个n 元排列。

例如：12345

51234　　都是数1，2，3，4，5的一个排列。

53214

考虑：n个数的不同排列有　n！个。

自然排列：　按数的大小次序，由小到大排列。

这样的：n元排列中，自然排列只有一种

除此之外，任一n元排列都一定出现较大数排在较小数之前的情况。

定义2： 在一个排列中，若某个较大的数排在某个较小的数前面，就称这两个数构成一个逆序。

一个排列中出现的逆序的总数称为这个排列的逆序数 通常记为 $\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)$

奇排列： 逆序数为奇数的排列。

偶排列： 逆序数为偶数的排列。

计算排列的逆序数的方法：

法1：n个数的任一n元排列，先看数1，看有多少个比1大的数排在1前面，记为 m_1 ；

再看有多少个比2大的数排在2前面，记为 m_2 ；

继续下去，最后至数n，前面比n大的数显然没有，

记为 $m_n = 0$ ；

则此排列的逆序数为 $\tau = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$

例 $\tau(2143)=2$， $\tau(4312)=2+2+1+0=5$

注：n个数可以是3，5，6，……，k,这样的无规则的n个不同的数,但本书不讨论。

法2： n 元排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的逆序数

$$\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)=$$ 数 i_1 后面比 i_1 小的数的个数

$+$ 数 i_2 后面比 i_2 小的数的个数

$+\ \cdots$

$+$ 数 i_{n-1} 后面比 i_{n-1} 小的数的个数

法3： $$\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)=$$ 数 i_n 前面比 i_n 大的数的个数

$+$ 数 i_{n-1} 前面比 i_{n-1} 大的数的个数

$+\cdots$

$+$ 数 i_2 前面比 i_2 大的数的个数

例1 求排列451362的逆序数.（按法3）

关于 4的逆序数为0;

关于 5的逆序数为0,(5的前面没有比5大的);

关于1的逆序数为2 ,(1的前面比1大的有4,5);

关于3的逆序数为2 ,(3的前面比3大的有4,5);

关于6的逆序数为0,(6是最大数);

关于2的逆序数为4, (2的前面比2大的有2,4,5,4);

于是此排列的逆序数为 $t=0+0+2+2+0+4=8$.

例2 求排列$n(n-1)(n-2)\ldots321$的逆序数.

解 逆序数为 $t=0+1+2+3+\ldots+n-1=n(n-1)/2$.

例3：　　求排列 453162 的逆序数。 $\tau = 9$

例4：　　求排列 32514 的逆序数。

解：（法1）　$m_1 = 3, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 0, \quad m_4 = 1, \quad m_5 = 0$

$$\tau(32514) = 3 + 1 + 1 = 5$$

（法2）　前 $\rightarrow$ 后

$$\tau(32514) = 2 + 1 + 2 + 0 + 0 = 5$$

（法3）　后 $\rightarrow$ 前

$$\tau(32514) = 1 + 3 + 0 + 1 + 0 = 5$$

课堂练习：　　p26　　2.

（5） 1，3，…，2n－1，2，4，…，2n

（6） 1，3，…，2n－1，2n，2n－2，…，4，2

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+0=\frac{1}{2}n(n-1)$$ 法3

$$2+4+\cdots+2(n-1)=n(n-1)$$ 法3

考虑，在 1，2，3 的全排列中，共有 6 个：

有 3 个偶排列： 123，231，312

有 3 个奇排列： 132，213，321

一般说来，在n个数码的全排列中，奇偶排列各占一半

定义3： 把一个排列中的任意两个数交换位置，其余数码不动，叫做对该排列作一次对换，简称对换。

相邻对换：将相邻的两个数对换。

显然相邻对换改变排列奇偶性

以下体系稍有点不同于书

定理1： 对换改变排列的奇偶性。

证明思路： 先证相邻变换，再证一般对换。

定理2： $n \geq 2$ 时，n个数的所有排列中，奇偶排列各占一半，即各为 $n!/2$ 个。

证明： 设n个数的排列中，

奇排列有 p 个，偶排列有 q 个， 则 p＋q＝n !

对 p 个奇排列，施行同一对换，

则由定理1得到 p 个偶排列。（而且是p个不同的偶排列）

因为总共有 q 个偶排列，所以 $p \leq q$

同理 $q \leq p$

所以 $p = q = n!/2$

看二、三阶行列式:

观察二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

寻找规律（2阶推广到三阶）:

1. 三阶行列式是 3！ 项的代数和。

2. 每一项都是取自不同行、不同列的 3 个元素的乘积。

其任一项可写成: $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 　其中 $j_1\, j_2\, j_3$ 是123的一个排列

3.（每项的符号规律）

当 $j_1\, j_2\, j_3$ 是偶排列时，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 取正号

当 $j_1\, j_2\, j_3$ 是奇排列时，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 取负号

三. n阶行列式的定义

根据二、三阶行列式的构造规律，推广定义n阶行列式

定义1：

n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

指的是n！项的代数和，

其中每一项都是取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积，

其一般项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，这里$j_1j_2\cdots j_n$ 是12⋯n的一个排列

当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，项前面带正号

当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，项前面带负号

注意：不是2n项的代数和！（无类似于二、三阶行列式的对角线法则）

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有n元排列取和

例如：$\sum\limits_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2} = (-1)^{\tau(12)} a_{11} a_{22} + (-1)^{\tau(21)} a_{12} a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

注:(1) 当n=1时，一阶行列式 $|a| = a$ 此处用了记号 $|a|$ 不是a的绝对值，例如行列式 $|-1| = -1$

(2) 定义表明，计算n阶行列式，首先必须作出所有的可能的位于不同行、不同列的n个元素的乘积，把这些乘积的元素的第一个下标（行标）按自然顺序排列，然后看第二个下标（列标）所成的奇偶性来决定这一项的符号。

（3）本身为一记号，但有实际用处，甚至很神奇！为我们带来许多方便

例1：　写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项。

$$(-1)^{13j_3j_4}\ a_{11}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

例2：　计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

例3：　计算四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$ 有2x2=4项

有acfh, adeh, bdeg, bcfg带上符号

$$D = acfh - bcfg + dbeg - adeh$$

四个结论：

(1)　上三角形行列式（主对角线下侧元素都为0）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2)　下三角形行列式（主对角线上侧元素都为0）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3)
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

（显然）

(4)
$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(5)
$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

(6)
$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ 0 & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

符号定理： 令 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 是n阶行列式中的任一项，

则项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 的符号等于$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$

证明：由行列式定义可知，确定项

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \quad (1)$$

的符号，

需要把各元素的次序进行调动，使其行标成自然排列。

为此，我们先来研究若交换项（1）中某两个元素的位置时，其行标和列标排列的奇偶性如何变化。

对换任意两元素，相当于项（1）的元素行标排列及列标排列同时经过一次对换。

设对换前:行标排列的逆序数为s，列标排列的逆序数为t。

设经过一次对换后行标排列的逆序数为 s'

列标排列的逆序数为 t'

由定理，对换改变排列的奇偶性

所以， $s'-s$ 是奇数

$t'-t$ 也是奇数

所以 $(s'-s)+(t'-t)$ 是偶数，

即 $(s'+t')-(s+t)$ 是偶数，

所以 $s'+t'$ 与 $s+t$ 同时为奇数或同时为偶数。

即，交换项（1）中任意两个元素的位置后，其行标和列标所构成的排列的逆序数之和的奇偶性不变。

另一方面，经过若干次对换项（1）中元素的次序，总可以把项（1）变为

$$a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n},$$

所以

$$\begin{aligned}(-1)^{s+t} &= (-1)^{s'+t'} \\ &= (-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)} \\ &= (-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}\end{aligned}$$

得证。

由此，得行列式的等价定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$$

$$= \sum_{\substack{j_1 j_2 \cdots j_n \\ i_1 i_2 \cdots i_n}} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

四．行列式的性质（重要）

性质1： $\boxed{\text{行列式与它的转置行列式相等。}}$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = D^{\mathrm{T}}, \quad D = D^{\mathrm{T}}$$

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为D的转置行列式

证明：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad 设\ D^T=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $b_{ij}=a_{ji} \qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$

由行列式定义

$$D^T=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}$$

由符号定理 $$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}=D$$

说明：行列式中行与列地位相同，对行成立的性质对列也成立，反之亦然。

性质2： $\boxed{\text{互换行列式的两行（列），行列式的值变号。}}$

证明：

$$D=\begin{vmatrix}4&8\\6&7\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}6&7\\4&8\end{vmatrix}=\hat{D},\quad D=-\hat{D}$$

设 $$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{sn}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ a_{t1}&a_{t2}&\cdots&a_{tn}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

交换s、t 两行，得

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ a_{t1}&a_{t2}&\cdots&a_{tn}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{sn}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \to\ \text{s行}\\ \\ \to\ \text{t行}\\ \\ \\ \end{matrix}$$

由行列式定义可知，D中任一项可以写成

$$(-1)^{\tau(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{nj_n} \qquad （1）$$

因为

$$a_{1j_1} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{nj_n} = a_{1j_1} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{nj_n} \qquad （2）$$

显然这是 D_1 中取自不同行、不同列的n个元素的乘积，而且（2）式右端的n个元素是按它们在 D_1 中所处的行标为自然顺序排好的。因此

$$(-1)^{\tau(j_1 \cdots j_t \cdots j_s \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{nj_n} \qquad （3）$$

是 D_1 中的一项。

因为，排列 $j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$ 与排列 $j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$ 的

奇偶性相反，所以项（1）与项（3）相差一符号，这就证明了D的任一项的反号是 D_1 中的项，同样可以证明 D_1 中的任一项的反号也是D中的项。

因此，D＝－ D_1

记号约定

行列式的第s行：r_s　　交换s、t两行：$r_s \leftrightarrow r_t$

行列式的第s列：c_s　　交换s、t两列：$c_s \leftrightarrow c_t$

推论：如果行列式有两行（列）相同，则行列式为 0 。

证明：把相同的两行互换，有D＝－D，所以 D＝0

$$D=\begin{vmatrix}4 & 8\\ 4 & 8\end{vmatrix}=0$$

性质3：用数 k 乘行列式的某一行（列）中所有元素，等于用数 k 乘此行列式。

推论：行列式中某一行（列）的公因子可以提到行列式符号外面

记法 第s行乘以k： kr_s 第s列乘以k： kc_s

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论：若行列式有两行（列）的对应元素成比例，则行列式等于0 。

性质4:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

即，如果某一行是两组数的和，则此行列式就等于两个行列式的和，而这两个行列式除这一行以外全与原来行列式的对应的行一样。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 + c_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 + c_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n + c_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & c_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质5： 行列式的某一行（列）的所有元素乘以同一数k后再加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变。

记法 数k乘第 t 行（列）加到第 s 行（列）上：$r_s + kr_t$

$(c_s + kc_t)$

证明：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

作 $r_s + kr_t$

得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1}+ka_{t1} & a_{s2}+ka_{t2} & \cdots & a_{sn}+ka_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{t1} & ka_{t2} & \cdots & ka_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D + 0 = D$$

利用行列式性质计算：　目标 $\longrightarrow$ 化为三角形行列式

例1：计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

例2：计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

例3： 计算 $$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3+3&1+5&1+5&1+5\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

例4： 计算

$$D=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a&a+b&a+b+c&a+b+c+d\\a&2a+b&3a+2b+c&4a+3b+2c+d\\a&3a+b&6a+3b+c&10a+6b+3c+d\end{vmatrix}$$

注： 上述各例都用到把几个运算写在一起的省略写法，要注意各个运算次序一般不能颠倒，因为后一次运算是作用在前一次运算结果上。

例如：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 + r_2} \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ -a & -b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 + r_2} \begin{vmatrix} c & d \\ c-a & d-b \end{vmatrix}$$

课堂练习：

1. 计算行列式

(1) $D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ ＝4

(2) $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$ ＝1

2. 一个n阶行列式，它的元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}\quad i,j=1,2,\cdots,n$

证明：当 n 为奇数时，此行列式为零。