四. 实对称矩阵的对角化

实对称矩阵是一类特殊的矩阵，它们一定可以对角化。

即存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$

更可找到正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT=\Lambda$

定理1：实对称矩阵的特征值为实数.

证：设 λ 是 A 的任一特征值，（证 $\overline{\lambda}=\lambda$）

α 是对应于 λ 的特征向量，

则 $A\alpha=\lambda\alpha,\quad(\alpha\neq 0)$

设 $\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\overline{\alpha}=\begin{pmatrix}\overline{x_1}\\\overline{x_2}\\\vdots\\\overline{x_n}\end{pmatrix}$

用 $\overline{\lambda}$ 表示 λ 的共轭复数，$\overline{\alpha}$ 表示 α 的共轭复向量。

则 $\overline{A\alpha}=\overline{\lambda\alpha}=\overline{\lambda}\cdot\overline{\alpha}$ **(1)**

又 $\because A$ 是实对称矩阵， $\therefore \overline{A}=A$ 且 $A^T=A$.

$\therefore \overline{A\alpha}=\overline{A}\cdot\overline{\alpha}=A\cdot\overline{\alpha}$ **(2)**

由(1)(2)有 $\overline{\lambda}\cdot\overline{\alpha}=A\cdot\overline{\alpha}$， 等号两边同时左乘 α^T

左边 $=\alpha^T\cdot(\overline{\lambda}\cdot\overline{\alpha})=\overline{\lambda}\cdot\alpha^T\cdot\overline{\alpha}$

右边 $=\alpha^T\cdot(A\cdot\overline{\alpha})=\alpha^T\cdot A^T\cdot\overline{\alpha}=(A\alpha)^T\cdot\overline{\alpha}$

$$=(\lambda\alpha)^T\cdot\overline{\alpha}=\lambda\cdot\alpha^T\cdot\overline{\alpha}$$

$\therefore \overline{\lambda}\cdot\alpha^T\cdot\overline{\alpha}=\lambda\cdot\alpha^T\cdot\overline{\alpha}$

即 $(\overline{\lambda}-\lambda)\cdot\alpha^T\cdot\overline{\alpha}=0$

考虑

$$\alpha^T\overline{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}\overline{x_1}\\\overline{x_2}\\\vdots\\\overline{x_n}\end{pmatrix}=x_1\cdot\overline{x_1}+x_2\cdot\overline{x_2}+\cdots+x_n\cdot\overline{x_n}$$

$$=|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots|x_n|^2>0$$

$$(\because\alpha\neq 0)$$

$\therefore\overline{\lambda}-\lambda=0\quad\therefore\overline{\lambda}=\lambda$　　即 λ 为实数。

定理1的意义：

因为对称矩阵 A 的特征值 λ_i 为实数，所以齐次线性方程组 $(A-\lambda_i E)x=0$ 是实系数方程组。

又因为 $|A-\lambda_i E|=0$，可知该齐次线性方程组一定有实的基础解系，从而对应的特征向量可以取实向量。

定理2： 实对称矩阵A的对应于不同特征值的特征向量正交。

证：设λ_1,λ_2是对称矩阵A的两个特征值，且$\lambda_1 \neq \lambda_2$，

p_1, p_2 是依次与之对应的特征向量。

则 $Ap_1 = \lambda_1 p_1,\ Ap_2 = \lambda_2 p_2,\ (\lambda_1 \neq \lambda_2)$

$\because A$为实对称矩阵，$\therefore A^T = A$

考虑 $\lambda_1 p_1^T = (\lambda_1 p_1)^T = (Ap_1)^T = p_1^T A^T = p_1^T A,$

于是 $\lambda_1 p_1^T p_2 = p_1^T A \cdot p_2 = p_1^T \cdot (\lambda_2 p_2) = \lambda_2 \cdot p_1^T p_2,$

$\therefore (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot p_1^T p_2 = 0.$

$\because \lambda_1 \neq \lambda_2,\ \therefore p_1^T p_2 = 0.\ \therefore (p_1, p_2) = p_1^T p_2 = 0$

即 p_1, p_2正交。

定理3： A为n阶实对称矩阵，λ_0 是 A 的 k 重特征值，

p.125

则对应于λ_0的特征向量中，线性无关的向量的个数为 k，

即$(A-\lambda_0 E)X=0$的基础解系所含向量个数为 k.

（则 $k=n-r(A-\lambda_0 E)$, $\therefore r(A-\lambda_0 E)=n-k$.）

定理4：(实对称矩阵必可对角化)

对于任一 n 阶实对称矩阵 A ，

一定存在 n 阶正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT=\Lambda$.

其中 Λ是以A的 n个特征值为对角元素的对角阵。

证：设实对称阵 A 的互不相等的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$

它们的重数依次为 $r_1, r_2, \cdots, r_s$

则 $r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n$

由定理，特征值 λ_i （重数为 r_i ）对应的线性无关的特征向量为 r_i 个。

把它们正交化，再单位化，即得 r_i 个单位正交的特征向量。

$\because r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n$

所以，可得这样的单位正交向量 n 个。

又 $\because A$ 是实对称阵，

$\therefore$ 不同特征值对应的特征向量正交，

$\therefore$ 上面得到的 n 个单位特征向量两两正交。

以它们为列向量构成正交矩阵 T ，有

$$T^{-1}\cdot AT = T^{-1}\cdot T\Lambda = \Lambda$$

其中 Λ 的对角元素含有 r_1 个 λ_1

r_2 个 λ_2

$\cdots r_s$ 个 λ_s 恰是 A 的 n 个特征值。

求正交矩阵 T，把实对称矩阵 A 化为对角阵的方法步骤：

1. 解特征方程 $|A-\lambda E|=0$,

求出对称阵 A 的全部不同的特征值。

2. 对每个特征值 λ_i，求出对应的特征向量，

即求齐次线性方程组 $(A-\lambda_i E)X=0$ 的基础解系。

3. 将属于每个 λ_i 的特征向量先正交化，再单位化。

这样共可得到 n 个两两正交的单位特征向量 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$

4. 以 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 为列向量构成正交矩阵 $T=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$

有 $T^{-1}AT=\Lambda$

即 $\boldsymbol{T}^{-1}\cdot\boldsymbol{AT}=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_r & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_r\end{pmatrix}$

必须注意：对角阵中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的顺序

要与特征向量 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的排列顺序一致。

例1：设 $A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}$，求正交矩阵 T，使得$T^{-1}AT$ 为对角阵。

解：$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&2&4\\2&-\lambda&2\\4&2&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)^2(\lambda-8)=0$$

$$\therefore \lambda_1=\lambda_2=-1, \lambda_3=8.$$

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时，齐次线性方程组为 $\left(A+E\right)X=0$

$$\left(A+E\right)=\begin{pmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore x_2=-2x_1-2x_3$ 令 $\begin{pmatrix}x_1\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\quad p_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}.$

先正交化：令 $\beta_1 = p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\beta_2 = p_2 - \frac{(p_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

再单位化：令

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\eta_2 = \frac{5}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

当 $\lambda_3 = 8$ 时，齐次线性方程组为 $(A - 8E)X = 0$

$$(A - 8E) = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = \dfrac{1}{2} x_3 \end{cases}$$ 令 $x_3 = 1$ 得基础解系 $p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$,

单位化得 $\eta_3 = \dfrac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$,

得正交矩阵 $T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

有 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$

例2：设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT$ 为对角阵。

解：

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+2)=0$$

$$\therefore \lambda_1=4,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-2.$$

当 $\lambda_1 = 4$ 时，由 $(A-4E)x=0,$

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即 $\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$ 得基础解系 $p_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

只需把 p_1 单位化，得 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix},$

（考虑为什么？）

当 $\lambda_2 = 1$ 时，由 $(A - E)x = 0$,

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即 $\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = -2x_2 \end{cases}$ 得基础解系 $p_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

只需把 p_2 单位化，得 $\eta_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$,

当$\lambda_2=-2$时，由$(A+2E)x=0$,

$$A+2E=\begin{pmatrix}4&-2&0\\-2&3&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&-1\\2&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

即 $\begin{cases}x_3=2x_1\\x_2=2x_1\end{cases}$ 得基础解系 $p_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$

只需把 p_3 单位化，得 $\eta_3=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}.$

得正交矩阵 $T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

有 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.