五. 行列式按行（列）展开

对于三阶行列式，容易验证：

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

可见一个三阶行列式可以转化成三个二阶行列式的计算。

问题：一个n 阶行列式是否可以转化为若干个 n－1 阶行列式来计算？

定义1：在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，余下的 n－1 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式。记为 M_{ij}

称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

例如：
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}.$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}$$

$$M_{44}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{44}=(-1)^{4+4}M_{44}=M_{44}$$

注：行列式的每个元素都分别对应着一个余子式和一个代数余子式。

定理1: 行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

证明：（先特殊，再一般）

分三种情况讨论，我们只对行来证明此定理。

(1) 假定行列式D的第一行除 a_{11} 外都是0。

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由行列式定义，D 中仅含下面形式的项

$$(-1)^{\tau(1,j_2,j_3,\cdots,j_n)}a_{11}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}$$

$$= a_{11}(-1)^{\tau(1,j_2,j_3,\cdots,j_n)}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $(-1)^{\tau(1,j_2,j_3,\cdots,j_n)}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}$ 恰是M_{11} 的一般项。

所以，$D = a_{11}M_{11}$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}$$

$$= a_{11}A_{11}$$

(2) 设 D 的第 i 行除了 a_{ij} 外都是 0 。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把D转化为(1)的情形

把 D 的第 i 行依次与第 $i-1$ 行，第 $i-2$ 行，……，第2行，第1行交换；再将第 j 列依次与第 $j-1$ 列，第 $j-2$ 列，……,第2列，第1列交换，这样共经过 $(i-1)+(j-1)=i+j-2$ 次交换行与交换列的步骤。

由性质2，行列式互换两行（列）行列式变号，

得，

$$D = (-1)^{i+j-2} \begin{vmatrix} a_{ij} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$$

(3) 一般情形

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$ 证毕。

例如，行列式 $D = \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 7 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ 按第一行展开，得

$$D = -3\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 27.$$

定理2: 行列式任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=0,\quad k\neq i.$$

证明：由定理1，行列式等于某一行的元素分别与它们代数余子式的乘积之和。

在 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中，如果令第 i 行的元素等于另外一行，譬如第 k 行的元素

则，

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{array}{|cccc|l}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & \rightarrow \text{第}\mathbf{i}\text{行} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & \text{第}\mathbf{k}\text{行} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} &
\end{array}$$

右端的行列式含有两个相同的行，值为 0 。

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

而$(-1)^{1+1} a_{31} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{32} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{33} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3} = \begin{cases} D, & i = j \\ 0 \end{cases} \qquad a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + a_{3i}A_{3j} = \begin{cases} D, & i = j \\ 0 \end{cases}$$

综上，得公式

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases}D, & （当k=i）\\ 0, & （当k\neq i）\end{cases}$$

$$a_{1l}A_{1j}+a_{2l}A_{2j}+\cdots+a_{nl}A_{nj}=\begin{cases}D, & （当l=j）\\ 0, & （当l\neq j）\end{cases}$$

在计算数字行列式时，直接应用行列式展开公式并不一定简化计算，因为把一个n阶行列式换成n个（n－1）阶行列式的计算并不减少计算量，只是在行列式中某一行或某一列含有较多的零时，应用展开定理才有意义。但展开定理在理论上是重要的。

利用行列式按行按列展开定理，并结合行列式性质，可简化行列式计算：计算行列式时，可先用行列式的性质将某一行（列）化为仅含1个非零元素，再按此行（列）展开，变为低一阶的行列式，如此继续下去，直到化为三阶或二阶行列式。

例1： 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_4+c_3]{c_1+(-2)c_3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_2 + r_1}} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 40.$$

例2:　证明范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j). \qquad (1)$$

证明：　用数学归纳法

(1) 当n=2时, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{2\geq i>j\geq 1}(x_i - x_j)$,

结论成立。

(2) 设n－1阶范德蒙德行列式成立，往证n阶也成立。

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_{n-1} - x_1 r_{n-2} \\ \vdots \\ r_2 - x_1 r_1}]{r_n - x_1 r_{n-1}}$$

$$
=\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\
0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)
\end{vmatrix}
$$

按第1列展开，并把每列的公 因子 (x_i-x_1) 提出,

$$
=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}
\end{vmatrix}
$$

n-1阶范德蒙德行列式

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\prod_{n \ge i > j \ge 2}(x_i - x_j)$$

$$= \prod_{n \ge i > j \ge 1}(x_i - x_j).$$

证毕。

练习：用降阶法
（按行按列展开）
计算行列式的值。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

=57

五（加）．利用性质及展开定理计算行列式的例题：

例1：

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_2]{r_1-4r_2} \begin{vmatrix} -7 & 0 & -17 & -8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第二列展开}} 1\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -7 & -17 & -8 \\ 0 & -5 & 5 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2+c_3} \begin{vmatrix} -7 & -25 & -8 \\ 0 & 0 & 5 \\ 3 & 11 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{按第二行展开}]{} 5\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -7 & -25 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 5(77-75) = 10$$

例2：

$$D=\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ a & x-a & a & \cdots & a \\ a & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n}[x+(n-2)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x-a & a & \cdots & a \\ 1 & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_n - r_1]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ \vdots}} [x+(n-2)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-2a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-2a \end{vmatrix}$$

$$= [x-(n-2)a](x-2a)^{n-1}$$

例3：

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

箭形行列式

目标：把第一列化为 $\begin{vmatrix}a_{11}\\0\\\vdots\\0\end{vmatrix}$

上三角形行列式

$$\overline{\overline{c_1-\frac{1}{2}c_2-\frac{1}{3}c_3+\cdots-\frac{1}{n}c_n}}\begin{vmatrix}1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}&1&1&\cdots&1\\0&2&0&\cdots&0\\0&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=n!(1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i})$$

例4：

$$D=\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-r_1\\ \vdots \\ r_n-r_1}]{\substack{r_2-r_1}} \begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b & -b & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & -b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & -b \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n}$$

$\boxed{\text{箭形行列式}}$

$$
= \begin{vmatrix} (a_1 + a_2 + \cdots a_n) - b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & -b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b \end{vmatrix}
$$

$$
= [(a_1 + a_2 + \cdots a_n) - b](-b)^{n-1}
$$

例5： $D=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & a \\ a & x_2 & a & a \\ a & a & x_3 & a \\ a & a & a & x_4 \end{vmatrix}$ $(x_i \neq a, i=1,2,3,4)$

（可以化为箭形行列式）

$$\overset{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}}{\underset{\substack{r_3-r_1\\ r_4-r_1}}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} x_1 & a & a & a \\ a-x_1 & x_2-a & 0 & 0 \\ a-x_1 & 0 & x_3-a & a \\ a-x_1 & 0 & 0 & x_4-a \end{vmatrix}$$

$$=\!=\!=\; (x_1-a)(x_2-a)(x_3-a)(x_4-a)\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-a} & \frac{a}{x_2-a} & \frac{a}{x_3-a} & \frac{a}{x_4-a} \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1+c_2+c_3+c_4}{=\!=\!=\!=\!=}\; \prod_{i=1}^{4}(x_i-a)\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-a}+\sum_{i=2}^{4}\frac{a}{x_i-a} & \frac{a}{x_2-a} & \frac{a}{x_3-a} & \frac{a}{x_4-a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{x_1}{x_1-a}+\sum_{i=2}^{4}\frac{a}{x_i-a}\right]\prod_{i=1}^{4}(x_i-a)$$

思考题： 设n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}$$

求第一行各元素的代数余子式之和

$$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}.$$

解: 第一行各元素的代数余子式之和可以表示成

$$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}=n!\left(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right).$$

例　证明 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$

证明　由行列式的定义,有

$$D = a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})b_{11}b_{22} - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})b_{12}b_{21}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

推广 $D = \left|\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ \hdashline c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right|, = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$

六. Cramer 法则

引入行列式概念时，求解二、三元线性方程组，当系数行列式 $D \neq 0$ 时，方程组有唯一解， $x_i = \dfrac{D_i}{D} \quad (i = 1,2,3)$

含有n个未知数，n个方程的线性方程组，与二、三元线性方程组类似，它的解也可以用n阶行列式表示。

Cramer法则：如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

的系数行列式不等于零，

即 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$ 则线性方程组(1)有唯一解，

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, x_3=\frac{D_2}{D}, \cdots, x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中 D_j 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1}\cdots a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}\cdots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明： 用D中第j列元素的代数余子式 $A_{1j}, A_{2j}, \cdots, A_{nj}$

依次乘方程组(1)的n个方程,得

$$\begin{cases} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)A_{1j} = b_1A_{1j} \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)A_{2j} = b_2A_{2j} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)A_{nj} = b_nA_{nj} \end{cases}$$

再把 n 方程依次相加，得

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{kj}\right)x_1 + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\right)x_j + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{kj}\right)x_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_kA_{kj},$$

由代数余子式的性质可知，上式中除了x_j的系数等于D，

其余$x_i(i \neq j)$的系数均等于0，而等式右端为D_j

于是 $$Dx_j = D_j(j = 1,2,\cdots,n) \qquad (2)$$

当$D \neq 0$时，方程组(2)有唯一的一个解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

由于方程组(2)与方程组(1)等价，所以

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

也是方程组的(1)解。

例1： 用Cramer法则解线性方程组。

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{81}{27} = 3, \qquad x_2 = -4, \quad x_3 = -1, \qquad x_4 = 1.$$

例 用克莱姆法则求解线性方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

解 $$D=\begin{vmatrix}2&3&5\\1&2&0\\0&3&5\end{vmatrix}\xlongequal{r_1-r_3}\begin{vmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&3&5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&0\\3&5\end{vmatrix}=2\times2\times5=20,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}2&3&5\\5&2&0\\4&3&5\end{vmatrix}\xlongequal{r_1-r_3}\begin{vmatrix}-2&0&0\\5&2&0\\4&3&5\end{vmatrix}=(-2)\times2\times5=-20,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&2&5\\1&5&0\\0&4&5\end{vmatrix}\xlongequal{r_1-2r_2}\begin{vmatrix}0&-8&5\\1&5&0\\0&4&5\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix}1&5&0\\0&-8&5\\0&4&5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-8&5\\4&5\end{vmatrix}=60,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&3&2\\1&2&5\\0&3&4\end{vmatrix}\xlongequal{r_1-2r_2}\begin{vmatrix}0&-1&-8\\1&2&5\\0&3&4\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix}1&2&5\\0&-1&-8\\0&3&4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&-8\\3&4\end{vmatrix}=-20.$$

由克莱姆法则,

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-1,\ \ x_2=\frac{D_2}{D}=3,\ \ x_3=\frac{D_3}{D}=-1.$$

注:

1. Cramer法则仅适用于方程个数与未知量个数相等的情形。

2. 理论意义：给出了解与系数的明显关系。
但用此法则求解线性方程组计算量大，不可取。

3. 撇开求解公式 $x_j = \dfrac{D_j}{D}$，Cramer法则可叙述为下面定理：

定理1:

如果线性方程组(1)的系数行列式 $D \neq 0$

则(1)一定有解，且解是唯一的 .

定理2:

如果线性方程组(1)无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

非齐次与齐次线性方程组的概念：

线性方程组
$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为零，

则称此方程组为非齐次线性方程组。

若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为零，

此时称方程组为齐次线性方程组。

齐次线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

易知，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 一定是(2)的解，称为零解。

若有一组不全为零的数是(2)的解，称为非零解。

定理3:

如果齐次线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$,
则齐次线性方程组没有非零解（只有零解）。

定理4:

如果齐次线性方程组有非零解，
则它的系数行列式必为0。

系数行列式 $D = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$ 有非零解.

例2： 问 λ 取何值时，齐次线性方程组有非零解？

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0\\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0\\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0\end{cases}$$

解：

$$D = \begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1-\lambda & -3+\lambda & 4\\ 2 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^3 + (\lambda-3) - 4(1-\lambda) - 2(1-\lambda)(-3+\lambda)$$

$$= (1-\lambda)^3 + 2(1-\lambda)^2 + \lambda - 3 = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$$

齐次方程组有非零解，则 $D=0$

所以 $\lambda=0,\lambda=2$ 或 $\lambda=3$ 时齐次方程组有非零解。

对于n元齐次线性方程组的Cramer法则的推论，常被用来解决解析几何的问题。

例3:　求空间的四个平面 $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ 相交的必要条件。

解:　四个平面相交于一点，即线性方程组

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0 \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0 \end{cases}$$

有解。

从另一角度看，形式上可以把 $(x, y, z, 1)$ 看作是四元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1x_4 = 0 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2x_4 = 0 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 + d_3x_4 = 0 \\ a_4x_1 + b_4x_2 + c_4x_3 + d_4x_4 = 0 \end{cases}$$

的一组非零解。

因为齐次线性方程组有非零解的充要条件是 $D = 0$
所以，四平面相交的必要条件为

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0$$

例4： 已知三次曲线 $y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

在四个点 $x = \pm 1, x = \pm 2$ 处的值为

$f(1) = f(-1) = f(2) = 6, f(-2) = -6$

试求系数 a_0, a_1, a_2, a_3.

解：

$$
\begin{cases}
a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 6 \\
a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 + a_3(-1)^3 = 6 \\
a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 = 6 \\
a_0 + a_1(-2) + a_2(-2)^2 + a_3(-2)^3 = -6
\end{cases}
$$

若用Cramer法则求此方程组的解，有

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & (-1)^2 & (-1)^3\\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3\\ 1 & -2 & (-2)^2 & (-2)^3\end{vmatrix}$$ （考虑范德蒙德行列式）

$$D \underline{\underline{=D^T}} \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & -2\\ 1^2 & (-1)^2 & 2^2 & (-2)^2\\ 1^3 & (-1)^3 & 2^3 & (-2)^3\end{vmatrix}=\prod_{4\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)$$

$$=(-1-1)(2-1)(-2-1)(2+1)(-2+1)(-2-2)$$

$$=72$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 4 & 8 \\ -6 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 576 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 4 & 8 \\ 1 & -6 & 4 & -8 \end{vmatrix} = -72$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & -6 & -8 \end{vmatrix} = -144 \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 72$$

$$\therefore\ a_0 = \frac{D_1}{D} = \frac{576}{72} = 8 \qquad a_1 = \frac{D_2}{D} = \frac{-72}{72} = -1$$

$$a_2 = \frac{D_3}{D} = \frac{-144}{72} = -2 \qquad a_3 = \frac{D_4}{D} = \frac{72}{72} = 1$$

思考题:

当线性方程组的系数行列式为零时, 能否用克拉默法则解方程组?为什么?此时方程组的解为何?

解答:

不能, 此时方程组的解为无解或有无穷多解.