2021 级《概率论与数理统计》课堂作业 1

一、设$P(A)=\dfrac{1}{2}, P(B)=\dfrac{1}{3}, P(\overline{A}\,\overline{B})=\dfrac{1}{3}$,求 $P(A-B)$. (5分)

二、有一道选择题共4个答案，其中只有一个答案正确，考生如果会解这道题，则一定能选出正确答案;如果不会解这道题，可通过试猜而选中正确答案，其概率为$\dfrac{1}{4}$. 设考生会解这道题的概率是 0.7，求:

(1) 考生选出正确答案的概率;

(2) 若考生选出正确答案，求他确实会解这道题的概率. (10分)

三、设随机变量X的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{\sqrt{1-x^2}}, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

求: (1) 常数c;　(2) $P\{-1\le X\le \dfrac{\sqrt{2}}{2}\}$;　(3) X的分布函数. (10分)

四、设(X,Y)的概率密度$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y, 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

求: (1) $P\{X\le \dfrac{1}{2}\}$;　(2) 边缘概率密度 $f_X(x)$及 $f_Y(y)$;

(3) X与Y是否独立? (15分)

五、设X的概率密度为$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，求 $Y=e^X$的概率密度. (10分)

2021级《概率论与数理统计》课堂作业2

一、设随机变量 X、Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<1 \text{且} 0<y<x \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求：(1) $D(X)$, $D(Y)$;

(2) X,Y 是否相关、是否独立？ (15分)

二、设 $X_i \sim N(3,4)$ 且相互独立, $i=1,\cdots,9$.

(1) 求 a 使得 $P\{|X_1-3|>a\}=0.02$

(2) 求 $P\{\overline{X}<4\}$. (10分)

(参考数据：$\Phi(0.5)=0.6915$，$\Phi(1.5)=0.9332$，$\Phi(2.25)=0.9878$;

$z_{0.01}=2.326$，$z_{0.025}=1.96$，$z_{0.05}=1.645$)

2021级《概率论与数理统计》课堂作业3

一、设总体X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0<x<1 \\ 0, & 其他\end{cases}$，$\theta>0$未知，

$X_1,\cdots,X_n$是总体X的一个样本，求：

(1) θ的矩估计量；

(2) θ的最大似然估计值． (15分)

二、设某元件的寿命$X\sim N(\mu,\ 0.25)$，现有4个该元件样品，寿命分别为：5.2，4.9，4.8，5.1，求μ的置信水平为0.9的置信区间(结果保留小数点后两位)． (10分)

(参考数据：$z_{0.1}=1.282$； $z_{0.05}=1.645$； $t_{0.1}(3)=1.6377$；

$t_{0.05}(3)=2.3534$； $\chi^2_{0.05}(3)=7.815$； $\chi^2_{0.95}(3)=0.352$)

《课堂作业1》答案

一、解：（法一）由题知，$P(\bar{A})=\frac{1}{2}$，$P(\bar{B})=\frac{2}{3}$，则

$P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})=\frac{1}{3}=P(\bar{A}\bar{B})$

∴ $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立，从而，A、B 相互独立

∴ $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$

$=P(A)-P(A)P(B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

或 $P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)\cdot P(\bar{B})=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

（法二）由题知，$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})$

$=1-P(\bar{A}\bar{B})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

∴ $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$

∴ $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

<还有其他的方法吗？法：$A-B=A\cup B-B$>

二、解：设 A={考生选出正确答案}

B={考生确实会做这道题}

则由题意：$P(A|B)=1$，$P(A|\bar{B})=\frac{1}{4}$，$P(B)=0.7$

由此，$P(\bar{B})=0.3$

(1) $P(A)=P(B)\cdot P(A|B)+P(\bar{B})\cdot P(A|\bar{B})$

$=0.7\times1+0.3\times\frac{1}{4}=\frac{31}{40}=0.775$

(2) $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(A)}$

$=\frac{0.7\times1}{0.775}=\frac{28}{31}\approx0.903$

三、解：(1) 由 $1=\int_0^1\frac{C}{\sqrt{1-x^2}}dx=C[\arcsin x]_0^1=\frac{\pi C}{2}$

∴ $C=\frac{2}{\pi}$

(2) 由(1)知，$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

∴ $P\{-1\le X\le\frac{\sqrt{2}}{2}\}=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{2}{\pi}[\arcsin x]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}$

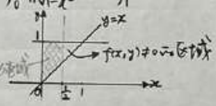
（或者先求出分布函数再计算）

(3) 设 X 的分布函数为 F(x)，则

$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$

$=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}0dx=0, & x\le0\\ \int_{-\infty}^{0}0dx+\int_0^x\frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{2}{\pi}\arcsin x, & 0<x<1\\ \int_{-\infty}^{0}0dx+\int_0^1\frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx+\int_1^x0dx=1, & x\ge1\end{cases}$

四、解：如图，



(1) $P\{X\le\frac{1}{2}\}=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^1 8xy\,dy=\frac{7}{16}$

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^1 8xy\,dy=4x-4x^3, & 0<x<1\\ \int_{-\infty}^{+\infty}0dy=0, & 其他\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y 8xy\,dx=4y^3, & 0<y<1\\ \int_{-\infty}^{+\infty}0dx=0, & 其他\end{cases}$

(3) 由(2)问题可得：$f_X(x)\cdot f_Y(y)\ne f(x,y)$

∴ X 与 Y 不独立

成都信息工程学院教案纸

五、解：i) 当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=0$，则 $f_Y(y)=0$；

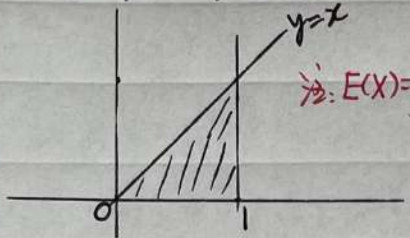
ii) 当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^X\le y\}=P\{X\le\ln y\}=F_X(\ln y)$

则：$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{y}f_X(\ln y)=\begin{cases}\frac{1}{y}\cdot2\ln y=\frac{2}{y}\ln y, & 0<\ln y<1 \text{（即：}1<y<e\text{）}\\ 0, & 其他 \text{（即：}0<y\le1\text{或}y\ge e\text{）}\end{cases}$

综上：$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{y}\ln y, & 1<y<e\\ 0, & 其他\end{cases}$（添加了“y=0”的定义）

《课堂作业2》答案

一. 如图.



注: $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)\,dx\,dy$

(1) 由于 $E(X)=\int_0^1 dx\int_0^x 2x\,dy=\frac{2}{3}$

$E(X^2)=\int_0^1 dx\int_0^x 2x^2\,dy=\frac{1}{2}$

$E(Y)=\int_0^1 dx\int_0^x 2y\,dy=\frac{1}{3}$

$E(Y^2)=\int_0^1 dx\int_0^x 2y^2\,dy=\frac{1}{6}$

$\therefore D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$

$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$

(2) 由于 $E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^x 2xy\,dy=\frac{1}{4}$

$\therefore Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{36}\neq 0$

(意味着 $\rho_{XY}\neq 0$)

故: X与Y相关, 从而X与Y不独立

(注: ① 独立 ⇒ 不相关, 相关 ⇒ 不独立

② 独立 ⇒ $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$,

$E(XY)\neq E(X)\cdot E(Y)$ ⇒ 不独立)

二. 解: (1) 由题意, $X_1\sim N(3,4)$, 则

$P\{|X_1-3|>a\}$

$=1-P\{|X_1-3|\le a\}$

$=1-P\{-a\le X_1-3\le a\}$

$=1-P\{\frac{-a}{2}\le \underbrace{\frac{X_1-3}{2}}_{\sim N(0,1)}\le\frac{a}{2}\}$

$=1-[\Phi(\frac{a}{2})-\Phi(-\frac{a}{2})]$

$=2-2\Phi(\frac{a}{2})=0.02$

从而, $\Phi(\frac{a}{2})=0.99=1-0.01=\Phi(z_{0.01})$

$=\Phi(2.326)$

$\therefore \frac{a}{2}=2.326$, $a=4.652$

(2) 由题知: $\overline{X}\sim N(3,\frac{4}{9})$, 则

$P\{\overline{X}<4\}=P\{\underbrace{\frac{\overline{X}-3}{\frac{2}{3}}}_{\sim N(0,1)}<\frac{4-3}{\frac{2}{3}}\}$

$=\Phi(\frac{4-3}{\frac{2}{3}})=\Phi(1.5)=0.9332$

(注: 教材4.2节 Th2: $\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$)

《课堂作业3》答案

一、解：(1) 由题知，

$$\mu_1=E(X)=\int_0^1 x\cdot\sqrt{\theta}\,x^{\sqrt{\theta}-1}dx$$

$$=\sqrt{\theta}\cdot\frac{x^{\sqrt{\theta}+1}}{\sqrt{\theta}+1}\Big|_0^1=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$$

令 $\mu_1=A_1$，即：$\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}=A_1=\overline{X}$，解得

$$\hat{\theta}=\left(\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}\right)^2$$，即为θ的矩估计量。

(2) 似然函数为：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)=\prod_{i=1}^n\sqrt{\theta}\cdot x_i^{\sqrt{\theta}-1}=\theta^{\frac{n}{2}}\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\sqrt{\theta}-1},\quad 0<x_i<1$$

对数似然函数为：

$$\ln L(\theta)=\frac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\cdot\sum_{i=1}^n\ln x_i$$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\cdot\sum_{i=1}^n\ln x_i=0$，

解得：$$\hat{\theta}=\frac{n^2}{\left(\sum_{i=1}^n\ln x_i\right)^2}$$

即为θ的最大似然估计值。

（注：也可由 $\frac{d^2\ln L(\theta)}{d\theta^2}\Big|_{\hat{\theta}}<0$ 作更严谨的论证 极大值）

二、解：由题意，取枢轴量为：

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

又由题知，$n=4$，$\alpha=1-0.9=0.1$，

$\sigma=\sqrt{0.25}=0.5$，$\bar{x}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 x_i=5$，则：

$$\underline{\mu}=\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}=5-\frac{0.5}{\sqrt{4}}\times z_{0.05}$$

$$=5-\frac{0.5}{2}\times1.645\approx4.59$$

$$\overline{\mu}=\bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}=5+\frac{0.5}{\sqrt{4}}\times z_{0.05}$$

$$=5+\frac{0.5}{2}\times1.645\approx5.41$$

从而，μ的置信水平为0.9的置信区间为 (4.59, 5.41).