第五章　　相似矩阵及二次型

1.向量的内积、长度、夹角。
2.Schmidt正交化、单位化法。
3.正交矩阵。

一、 内积、长度、正交化与正交矩阵.

1. 向量的内积、长度、夹角

定义1：n维实向量 $\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

称 $(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

$$=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\alpha^T\beta$$

为向量 α 与 β 的内积。

若α,β为行向量，则 $(\alpha,\beta)=\alpha\beta^T$

向量内积的性质：

$(1)(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$ 对称性

$$\left.\begin{aligned}&(2)(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)\\&(3)(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)\end{aligned}\right\}\text{线性性}$$

$(4)(\alpha,\alpha)\geq 0$ 正定性

等号成立当且仅当 $\alpha=0$

定义2：实数 $|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$

称为向量的长度（或模，或范数）

若 $|\alpha|=1$，称 α 为单位向量。

把向量单位化： 若 $\alpha \neq 0$， 则 $|\alpha| \neq 0$

考虑 $$(\frac{\alpha}{|\alpha|}, \frac{\alpha}{|\alpha|}) = \frac{1}{|\alpha|^2}(\alpha, \alpha) = \frac{1}{|\alpha|^2}|\alpha|^2 = 1$$

即 $\dfrac{\alpha}{|\alpha|}$ 的模为1，为单位向量，称为把 α 单位化。

向量长度的性质：

（1）非负性： 当 $\alpha \neq 0$ 时，$|\alpha| > 0$

当 $\alpha = 0$ 时，$|\alpha| = 0$

（2）齐次性： $|k\alpha| = |k||\alpha|$

（3）柯西—施瓦兹不等式：$|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha||\beta|$

（4）三角不等式：$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

证明（(3)柯西—施瓦兹不等式）：

若α或$\beta=0$，显然成立，不妨设$\beta \neq 0$，则$(\alpha+t\beta,\alpha+t\beta)\geq 0$

$\forall$实数$t \neq 0, \therefore (\beta, \beta)t^2 + 2(\alpha,\beta)t + (\alpha,\alpha) \geq 0, \therefore \Delta = [2(\alpha,\beta)]^2$

$-4(\beta,\beta)(\alpha,\alpha) \leq 0$,即有$\left|(\alpha,\beta)\right| \leq \sqrt{(\alpha,\alpha)} \cdot \sqrt{(\beta,\beta)} = |\alpha| \cdot |\beta|$

证明（(4)三角形不等式）：

主要是利用柯西—施瓦兹不等式

非零向量 α 和 β 的夹角余弦：$\cos\langle\alpha,\beta\rangle=\dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$

定义3：非零向量 α,β 的夹角是

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$$

定义4：当向量α,β 的内积为零时，即 $(\alpha,\beta)=0$ 时，

即 $\alpha\perp\beta$ 时，称向量 α,β 正交。

注：（1）零向量与任何向量都正交。

（2）定义了内积的向量空间称为欧氏空间。

例　已知3维向量空间 R^3 中两个向量

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

正交,试求一个非零向量 $\vec{a}_3$,使 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 两两正交.

解　记 $A=\begin{pmatrix}\vec{a}_1^T\\\vec{a}_2^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}$,

$\vec{a}_3$ 应满足齐次方程 $A\vec{x}=\vec{0}$,即

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

2. Schmidt正交化、单位化法。

定义5：

正交向两组：非零实向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 两两正交。

正交单位向量组：（标准正交向量组） 非零实向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 两两正交，且每个向量长度全为1。

即 $$(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}1(i=j)\\0(i\neq j)\end{cases}$$

定理：正交向量组是线性无关的。

schmidt正交化、单位化法：

定理1： n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是两两正交的非零向量，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关。

证明：设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_s\alpha_s=0$

则： $\alpha_i^T\left(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_s\alpha_s\right)=\alpha_i^T 0=0$

$\alpha_i^T k_j\alpha_j=0$, i ≠ j， $k_i\alpha_i^T\alpha_i=0 \overset{\alpha_i^T\alpha_i\neq 0}{\Longrightarrow} k_i=0,$

$i=1,2,\cdots,s$

标准正交基(规范正交基)：

$e_1,\cdots$， e_r是V的一个基，并且是单位正交的，也称V的规范正交基

schmidt正交化、单位化法:

$\alpha_1,\cdots\alpha_r$是V的一组基，规范正交化:

取$\beta_1=\alpha_1$;

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\ \alpha_1]}{[\alpha_1,\ \alpha_1]}\alpha_1;$$

…………

$$\beta_r=\alpha_r-\frac{[\beta_1,\alpha_r]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\beta_2,\alpha_r]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2-\cdots-\frac{[\beta_{r-1},\alpha_r]}{[\beta_{r-1},\beta_{r-1}]}\beta_{r-1}$$

再单位化: $e_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|},\cdots,\ e_r=\frac{\beta_r}{\|\beta_r\|}$是V的一个规范正交基

例 设$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\vec{a}_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix},\vec{a}_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix},$

试用施密特正交化过程把这组向量正交规范化。

解 取$\vec{b}_1=\vec{a}_1;$

$$\vec{b}_2=\vec{a}_2-\frac{[\vec{a}_2,\vec{b}_1]}{\|\vec{b}_1\|^2}\vec{b}_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix};$$

$$\vec{b}_3=\vec{a}_3-\frac{[\vec{a}_3,\vec{b}_1]}{\|\vec{b}_1\|^2}\vec{b}_1-\frac{[\vec{a}_3,\vec{b}_2]}{\|\vec{b}_2\|^2}\vec{b}_2$$

$$=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

再把它们单位化，取

$$\vec{e}_1=\frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\vec{e}_2=\frac{\vec{b}_2}{\|\vec{b}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\ \vec{e}_3=\frac{\vec{b}_3}{\|\vec{b}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Ex.1 已知$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\4\end{pmatrix}$,求一组非零向量$\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$,使$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$两两正交.

解 向量$\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$应满足方程$\vec{a}_1^T\vec{x}=0$,即

$$x_1+2x_2+2x_3+4x_4=0.$$

其基础解系可取为 $\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}2\\4\\-5\\0\end{pmatrix},\vec{\xi}_3=\begin{pmatrix}4\\8\\8\\-9\end{pmatrix}$.

显然$\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\vec{\xi}_3$是两两正交的,取$\vec{a}_2=\vec{\xi}_1,\vec{a}_3=\vec{\xi}_2,\vec{a}_4=\vec{\xi}_3$即可.

3. 正交矩阵

定义6：A是一个n阶实矩阵，若 $A^T A = E$，

则称A为正交矩阵。

定理：设A、B都是n阶正交矩阵，则

(1) $|A| = 1$ 或 $|A| = -1$ (2) $A^{-1} = A^T$

(3) A^T (即 A^{-1}) 也是正交矩阵。(4) AB 也是正交矩阵。

定理：n阶实矩阵A是正交矩阵

$\Leftrightarrow$ A的列（行）向量组为单位正交向量组。

证明：设 $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

将A按列分块，设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

A是正交矩阵$\Leftrightarrow$ $$A^TA=\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\alpha_n,\alpha_1) & (\alpha_n,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

即 $(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases} 1(i=j) \\ 0(i\neq j) \end{cases}$ 即A的列向量组是单位正交向量组。

注：n个n维向量，若长度为1，且两两正交，责备以它们为列（行） 向量构成的矩阵一定是正交矩阵。

定义5　若 P 为正交阵，则线性变换 $y=Px$ 称为正交变换。

设 $y=Px$ 是正交变换，则有

$$\|\vec{y}\|=\sqrt{\vec{y}^T\vec{y}}=\sqrt{\vec{x}^TP^TP\vec{x}}=\sqrt{\vec{x}^T\vec{x}}=\|\vec{x}\|.$$

这就说明：正交变换保持线段长度保持不变。从而利用正交变换化二次型为标准形不会改变二次型的几何特征。

正交矩阵在本章中占有重要的地位，因此，必须牢记正交矩阵的性质：

(i). 正交矩阵A 的行列式 $|A|=1$ 或$|A|=-1$;

(ii). 正交矩阵A 是可逆的，且$A^{-1}=A^T$;

(iii). 正交矩阵A 的逆矩阵A^{-1} 也是正交矩阵;

(iv). 同阶正交矩阵A 与B 的乘积也是正交矩阵。