三. 相似矩阵的定义及性质

定义: 设A,B 都是 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵P，使得

$$P^{-1}AP = B$$

则称矩阵B是矩阵A 的相似矩阵，

或称矩阵 A 与矩阵B 相似，记作 $A \quad B$

对A进行运算 $P^{-1}AP$ 称为对 A 进行相似变换，

可逆矩阵P 称为把矩阵A 变成矩阵 B 的相似变换矩阵。

注：矩阵相似是一种等价关系

（1）反身性：$A \quad A$.

（2）对称性：若 $A \quad B$ 则 $B \quad A$.

（3）传递性：若 $A \quad B, B \quad C$, 则 $A \quad C$.

性质1： 相似矩阵有相同的特征多项式、相同特征值、

相同的行列式、相同的迹、相同的秩

$$|A-\lambda E| = |PBP^{-1} - \lambda E|$$

$$= |P(B-\lambda E)P^{-1}| = |B-\lambda E|$$

推论： 若矩阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，

则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值。

其它的有关相似矩阵的性质：（介绍）

(1) 相似矩阵或者都可逆，或者都不可逆。
当它们可逆时，它们的逆矩阵也相似。

(2) 若 A 与 B 相似，则 kA 与 kB 相似。（ k 为正整数）

(3) 若 A 与 B 相似，则 A^m 与 B^m 相似。（ m 为正整数）

(4) 若 A 与 B 相似，而 $f(x)$ 是一个多项式，
则 $f(A)$ 与 $f(B)$ 相似。

(5) $P^{-1}\left(A_1A_2\right)P=\left(P^{-1}A_1P\right)\left(P^{-1}A_2P\right).$

(6) $P^{-1}\left(k_1A_1+k_2A_2\right)P=k_1P^{-1}A_1P+k_2P^{-1}A_2P$

（k_1,k_2 为任意常数）

注：（1）与单位矩阵相似的n阶矩阵只有单位阵E本身，
与数量矩阵kE 相似的n阶方阵只有数量阵kE本。

（2）有相同特征多项式的矩阵不一定相似。

例 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

三. 矩阵可对角化的条件（利用相似变换把方阵对角化）

对 n 阶方阵 A，如果可以找到可逆矩阵 P,

使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角阵，就称为把方阵 A 对角化。

定理1： n 阶矩阵 A 可对角化（与对角阵相似）

$\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量。

推论： 若 n 阶方阵 A 有 n 个互不相同的特征值,

则 A 可对角化。（与对角阵相似） (逆命题不成立)

注： （1）若 $A \quad \Lambda$,则 Λ 的主对角元素即为 A 的特征值，

如果不计 λ_k 的排列顺序，则 Λ 唯一，称之为

矩阵 A 的相似标准形。

（2）可逆矩阵 P 由 A 的 n 个线性无关的特征向量作列向量构成。

例1：判断下列实矩阵能否化为对角阵？

$$(1)\ A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}\qquad (2)\ A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

解:

$$(1)\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 2\\ -2 & -2-\lambda & 4\\ 2 & 4 & -2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda-2)^2(\lambda+7)=0$$

得 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-7$

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，齐次线性方程组为$\left(A-2E\right)X=0$

$$\left(A-2E\right)=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -4 & 4\\ 2 & 4 & -4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$x_1=-2x_2+2x_3$$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$p_2=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_3=-7$ 时，齐次线性方程组为 $\left(A+7E\right)X=0$

$$\left(A+7E\right)=\begin{pmatrix}8 & -2 & 2\\ -2 & 5 & 4\\ 2 & 4 & 5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$ 得基础解系 $p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\because \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\therefore p_1, p_2, p_3$ 线性无关

即A有3个线性无关的特征向量，所以A可以对角化。

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$(2)\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 2\\ 5 & -3-\lambda & 3\\ -1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda+1)^3=0 \qquad \therefore \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1.$$

当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$时，齐次线性方程组为$(A+E)X=0$

$$(A+E)=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & -2 & 3\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\xi=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$， 所以$A$不能化为对角矩阵.

例2：设 $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$. 问$A$能否对角化？

若能对角化，求出可逆矩阵 P使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵。

解：$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=-\left(\lambda-1\right)^2\left(\lambda+2\right)=0$$

$$\therefore \lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-2.$$

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，齐次线性方程组为$(A-E)X=0$

$$(A-E)=\begin{pmatrix}3&6&0\\-3&-6&0\\-3&-6&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$x_1=-2x_2$ 得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\quad p_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$

当$\lambda_3=-2$ 时，齐次线性方程组为$(A+2E)X=0$

$$(A+2E)=\begin{pmatrix}6&6&0\\-3&-3&0\\-3&-6&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$ 得基础解系 $p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\because \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ $\therefore p_1, p_2, p_3$线性无关，

$\therefore A$ 可以对角化。

令 $P = (p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

则有 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

注意：若令 $P=\left(p_3, p_1, p_2\right)=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

则有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

即矩阵 P的列向量和对角矩阵中特征值的位置要相互对应. 如下推导:

$$P\left(p_3, p_1, p_2\right)=\left(Pp_3, Pp_1, Pp_2\right)=\left(\lambda_3 p_3, \lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2\right)$$

$$=\left(p_3, p_1, p_2\right)\begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow AP=P\Lambda \text{即} A=P\Lambda P^{-1}$$

把一个矩阵化为对角阵，不仅可以使矩阵运算简化，而且在理论和应用上都有意义。

可对角化的矩阵主要有以下几种应用：

1. 由特征值、特征向量反求矩阵

例3：已知方阵 A 的特征值是 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3,$

相应的特征向量是 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$

求矩阵 A.

解：因为特征向量是3维向量，所以矩阵 A 是3 阶方阵。

因为 A 有 3 个不同的特征值，所以 A 可以对角化。

即存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$

其中 $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 3\end{pmatrix}$,

求得 $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$,

$$\therefore A = P\Lambda P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 求方阵的幂

例4：设$A=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 2 & -3\end{pmatrix}$，求 A^{100}.

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda & -5\\ 2 & -3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)=0$

$\therefore \lambda_1=-1,\lambda_2=2.$ $\quad\therefore A$可以对角化。

当$\lambda_1=-1$ 时，齐次线性方程组为$(A+E)x=0$

系数矩阵 $(A+E)=\begin{pmatrix}5 & -5\\ 2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$x_1=x_2$ $\quad$ 令$x_2=1$得基础解系：$p_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2 = 2$ 时，齐次线性方程组为$\left(A-2E\right)x=0$

系数矩阵 $\left(A-2E\right)=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x_1 = \dfrac{5}{2}x_2$ 令$x_2 = 1$得基础解系：$p_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

令 $P = (p_1, p_2) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 求得 $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

即存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$

$$\therefore A = P\Lambda P^{-1}$$

$$A^{100} = P\Lambda^{100}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{100}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2+5\times 2^{100} & 5-5\times 2^{100} \\ -2+2^{101} & 5-2^{101} \end{pmatrix}$$

3. 求行列式

例5：设 A 是 n 阶方阵，$2,4,\cdots,2n$ 是A 的 n个特征值，

计算 $|A-3E|$.

解：方法1　求$A-3E$ 的全部特征值，
再求乘积即为行列式的值。

设 $f(x)=x-3$

$\because A$ 的特征值是 $2,4,\cdots,2n$ 即 $\lambda_i=2i,$

$\therefore A-3E$ 的特征值是 $f(\lambda_i)=2i-3$

$$\therefore |A-3E|=\prod_{i=1}^{n}2i-3=(-1)\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-3)$$

方法2：已知A有 n 个不同的特征值，所以 A 可以对角化，

即存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 4 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2n \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = P\Lambda P^{-1}$$

$$\therefore |A-3E| = |P\Lambda P^{-1} - 3PEP^{-1}| = |P(\Lambda - 3E)P^{-1}|$$

$$= |P||\Lambda - 3E||P^{-1}| = |\Lambda - 3E|$$

$$= \begin{vmatrix} 2-3 & & & \\ & 4-3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2n-3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-3)$$

4. 判断矩阵是否相似

例6：已知3阶矩阵 A 的特征值为1，2，3，

设 $B = A^2 - 3A + E$，问矩阵A 能否与对角阵相似？

解：方法1

令 $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$B = f(A) = A^3 - 3A + E$，

$\therefore B$ 的特征值为 $f(1) = -1$

$$f(2) = 3$$

$$f(3) = 19$$

3阶矩阵 B 有3个不同的特征值，所以 B可以对角化。

方法2：因为矩阵 A 有3个不同的特征值，所以可以对角化，

即存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$

$$\therefore P^{-1}BP=P^{-1}(A^3-3A+E)P$$

$$=P^{-1}A^3P-P^{-1}(3A)P+P^{-1}EP$$

$$=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)-3P^{-1}AP+E$$

$$=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}^3-3\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&&\\&3&\\&&19\end{pmatrix}$$ 所以矩阵 B 能与对角阵相似。

例7：设 n 阶方阵 A有 n 个互异的特征值，

n 阶方阵 B 与A 有相同的特征值。

证明：A 与 B 相似。

证：设 A 的n个互异的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$

则存在可逆矩阵 P_1, 使得

$$P_1^{-1}AP_1 = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

又 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 也是矩阵 B 的特征值，

所以存在可逆矩阵 P_2, 使得

$$P_2^{-1}BP_2=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$\therefore P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2$$

$$\therefore P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}=B$$

即 $(P_1P_2^{-1})^{-1}A(P_1P_2^{-1})=B$

即存在可逆矩阵 $P_1P_2^{-1}=P$,使得 $P^{-1}AP=B$

即 A 与 B 相似。