

# Máquinas de Turing

## Enumerabilidade

**Prof. Edson Alves**

Faculdade UnB Gama

# Sumário

1. Definição de enumerabilidade
2. Exemplos de conjuntos enumeráveis
3. Diagonalização

# Funções parciais

## Funções parciais

Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos. A função  $f : D \rightarrow B$  é uma função **parcial** de  $A$  em  $B$  se  $D \subset A$  é um subconjunto próprio de  $A$ . Se  $D = A$  a função  $f$  é dita uma função **total** de  $A$  em  $B$ .

# Enumerabilidade

## Conjuntos enumeráveis

Um conjunto  $A$  é enumerável se, e somente se, ele é imagem de ao menos uma função (total ou parcial) de  $\mathbb{N}$  em  $A$ .

**Observação:** informalmente, um conjunto  $A$  é enumerável se seus elementos podem ser listados em ordem, isto é, um primeiro elemento, um segundo elemento, etc,

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

de modo que, cedo ou tarde, todos os elementos de  $A$  sejam listados, ao menos, uma vez.

## Exemplos de conjuntos enumeráveis

1. Os números naturais são enumeráveis: eles são enumerados pela função identidade  $f(n) = n$
2. A união dos números naturais com o zero também é enumerável: a função  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  tal que

$$g(n) = n - 1$$

enumera esta união

3. O conjunto dos naturais pares é enumerado pela função total  $h(n) = 2n$ , ou pela parcial

$$p(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \text{ é par} \\ \text{indefinida,} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

## Exemplos de conjuntos enumeráveis

4. O conjunto vazio  $\emptyset$  é enumerado pela a função  $z(n) = \text{indefinida}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$
5. Qualquer conjunto finito  $A$  é enumerável
6. Os números inteiros  $\mathbb{Z}$  são enumeráveis: uma listagem possível dos seus elementos é

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots$$

Uma função  $f$  que gera tal enumeração é

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ -\frac{n}{2}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

# Enumerabilidade dos números racionais

## Teorema

O conjunto dos números racionais positivos  $\mathbb{Q}^+$  é enumerável.

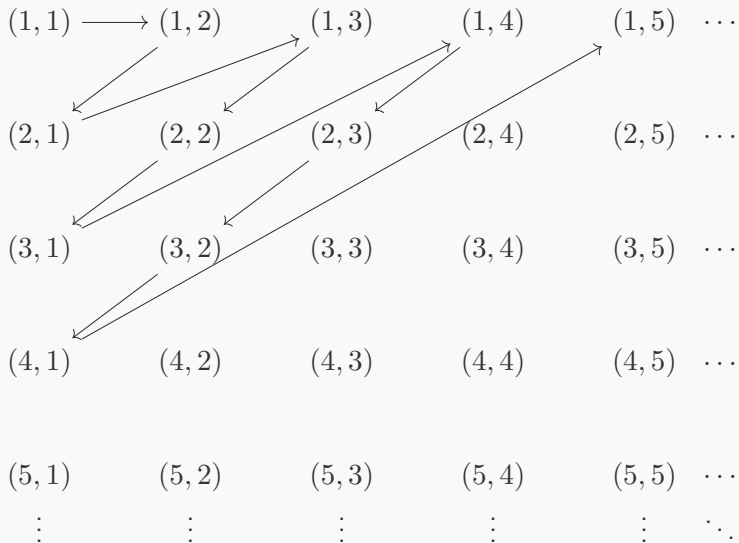
Para demonstrar este importante resultado, observe que

$$\mathbb{Q}^+ = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}\}$$

Assim, basta demonstrar o seguinte lema:

## Lema

O conjunto os pares ordenados de números naturais é enumerável.





## Demonstração por *zigue-zague* de Cantor

- ▶ A função  $G$  que enumera os pares é tal que

$$G(1) = (1, 1), G(2) = (1, 2), G(3) = (2, 1), G(4) = (1, 3), \dots$$

conforme padrão apresentado na figura anterior

- ▶ O padrão, de fato, é o seguinte: primeiro são enumerados todos os pares cujas coordenadas somam 2 (a saber, apenas o par  $(1, 1)$ )
- ▶ Em seguida, são listados todos os pares cujas coordenadas somam 3, ordenados pela primeira coordenada:  $(1, 2), (2, 1)$
- ▶ Após estes são enumerados os pares que somam 4, 5,  $\dots$ , e assim por diante
- ▶ É possível, mas não necessário, descrever a função  $G$  em termos de  $n$

# Enumerabilidade das sequências finitas de inteiros positivos

## Proposição

O conjunto  $\mathcal{S}$  de todas as sequências finitas de inteiros positivos é enumerável.

# Enumerabilidade das sequências finitas de inteiros positivos

## Demonstração

O Teorema Fundamental da Aritmética nos diz que qualquer inteiro  $n \geq 2$  pode ser escrito, de forma única, como

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

onde os números  $p_i$  são primos e os expoentes  $\alpha_i$  são inteiros não-negativos. A função  $f(s)$  recebe uma sequência finita de inteiros positivos  $s = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$  e retorna o natural

$$f(s) = 2^{s_1} 3^{s_2} 5^{s_3} \dots p_N^{s_N},$$

onde  $p_N$  é o  $N$ -ésimo número primo. Fazendo  $f(e) = 1$ , onde  $e$  é a sequência vazia, a inversa da função  $f$  pode ser usada para construir uma função parcial  $G$  que enumera  $\mathcal{S}$ .

## Exemplos da enumeração de $\mathcal{S}$

1. A sequência de três termos  $s = \{1, 2, 3\}$  é codificada pelo número 2250 pela função  $f$ , pois

$$f(s) = 2^1 3^2 5^3 = 2250$$

2. A sequência  $s$  tal que  $f(s) = 30$  é  $s = \{1, 1, 1\}$ , pois

$$30 = 2^1 3^1 5^1$$

3. As cinco primeiras sequências da enumeração são

$$e, \{1\}, \{2\}, \{1, 1\}, \{3\}$$

4. Veja, na listagem acima, que a função  $G(n) = f^{-1}(n)$  não está definida para todos os  $n$  naturais

# Enumerabilidade das cadeias finitas de alfabetos enumeráveis

## Proposição

Seja  $\mathcal{A}$  um alfabeto enumerável. O conjunto  $\mathcal{C}$  de todas as cadeias finitas de símbolos de  $\mathcal{A}$  é enumerável.

## Demonstração

Como  $\mathcal{A}$  é enumerável, seus elementos podem ser dispostos em ordem:

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

Assim, qualquer cadeia finita  $c = \{a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_N}\} \in \mathcal{C}$  corresponde uma sequência finita de inteiros positivos

$$s = \{i_1, i_2, \dots, i_N\}$$

Como  $\mathcal{S}$  é enumerável,  $\mathcal{C}$  também é enumerável.

## Exemplo de conjunto não-enumerável

### Teorema de Cantor

O conjunto de todos os conjuntos de inteiros positivos não é enumerável.

## Demonstração do Teorema de Cantor

- ▶ Uma forma de demonstrar o Teorema de Cantor é utilizar uma técnica chamada diagonalização
- ▶ A ideia é, a partir de uma lista  $L$  de conjuntos de inteiros positivos, construir um conjunto  $\Delta(L)$  de inteiros positivos que não pertence à lista  $L$
- ▶ Caso este conjunto seja acrescentado à lista  $L$ , é possível aplicar a mesma técnica para construir um novo conjunto  $\Delta(L^*)$  que não pertence à lista  $L^* = L \cup \Delta(L)$
- ▶ Assim, não existe nenhuma lista que enumera o conjunto de todos os conjuntos de inteiros positivos

## Construção do conjunto $\Delta(L)$

- ▶ Seja  $L = S_1, S_2, S_3, \dots$  uma lista de conjuntos de inteiros positivos  $S_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}^+$
- ▶ Defina

$$\Delta(L) = \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid n \notin S_n\}$$

- ▶ Da definição acima,  $\Delta(L) \subset \mathbb{Z}^+$
- ▶ Como sugerido pela própria notação, o conjunto  $\Delta(L)$  depende da lista  $L$ : cada lista  $L_j$  de conjuntos de inteiros positivos gera um conjunto  $\Delta(L_j)$  em particular
- ▶ Por exemplo, se  $L = S_1, S_2, S_3, \dots$  é tal que  $S_i$  é o conjunto dos  $i$  primeiros números primos, temos que

$$\Delta(L) = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, \dots\}$$



## Demonstração por contradição

- ▶ Suponha, por contradição, que  $\Delta(L) \in L$ , isto é, que o conjunto  $\Delta(L)$  seja listado, em algum momento, por  $L$
- ▶ Assim, existe um  $k \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $\Delta(L) = S_k$
- ▶ Em relação ao inteiro positivo  $k$  há dois cenários possíveis
- ▶ Se  $k \in S_k$ , então  $\Delta(L) \neq S_k$ , pois por definição, se  $k \in \Delta(L)$  então  $k \notin S_k$
- ▶ Logo, deveríamos ter  $k \notin S_k$  mas, neste caso, teríamos que ter  $k \in \Delta(L)$ , de modo que  $S_k \neq \Delta(L)$
- ▶ Portanto, a hipótese de que  $\Delta(L) \in L$  leva a contradição  
 $(\Delta(L) = S_k) \wedge (\Delta(L) \neq S_k)$
- ▶ Assim,  $\Delta(L) \notin L$ , completando a demonstração do Teorema de Cantor

# Corolário do Teorema de Cantor

## Corolário

O conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais não é enumerável.

## Demonstração

Seja  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $0 < x < 1$ . Então  $x$  tem uma expansão decimal da forma

$$0, x_1 x_2 x_3 \dots$$

Seja  $S_x$  o conjunto de inteiros positivos tal que  $n \in S_x$  se, e somente se,  $x_n = 1$ . Deste modo, qualquer conjunto  $S \subset \mathbb{Z}^+$  está associado a, pelo menos, um número real  $y \in (0, 1)$ . Assim, se os reais fossem enumeráveis, o conjunto de todos os conjuntos de inteiros positivos seria enumerável, contradizendo o Teorema de Cantor.

## Referências

1. **BOOLOS**, George S.; **BURGESS**, John P.; **JEFFREY**, Richard C. *Computabilidade e Lógica*, Editora Unesp, 2012.