Álgebra Linear

Avaliação P3.

Turma **F1. 2023-2**.

Prof. Bely R Morales

UFF

Problema 1 (2 pontos)

Seja E um $\mathbb{K}$-espaço com produto escalar.

a) Prove que se $x, y \in E$ são dois vetores ortogonais então $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

b) Se $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é um conjunto de vetores não nulos tais que $v_i \perp v_j$ para todo $i \neq j$ então mostre que necessariamente $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente.

Problema 2 (3 pontos)

Analise a veracidade das seguintes afirmações. Justifique sua resposta:

a) Os vetores $x = (1, \mathrm{i}, 2)$ e $y = (1, \mathrm{i}, -1)$ são vetores ortogonais no espaço vetorial $\mathbb{C}^3$ equipado com o produto escalar usual.

b) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz quadrada então as matrizes A^tA e AA^t sempre são diagonalizáveis.
Dica: Calcule a transposta da matrizes A^tA e AA^t.

c) Se $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é um espaço com produto escalar, V e W são subespaços tais que $V \subseteq W$ então $V^\perp \subseteq W^\perp$.

Problema 3 (5 pontos)

Calcule, se existe, uma matriz diagonal D e uma matriz invertível P tais que $D = P^tAP$.

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 1: E K-espaço, $\langle\,,\,\rangle : E \times E \longrightarrow K$ prod. escalar.

Porque $x \perp y$

a) Sejam $x, y \in E$, $x \perp y$ então $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \underbrace{\langle x,y\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y,x\rangle}_{=0} + \langle y,y\rangle$

$\|x+y\|^2 = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$

b) $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq E$, $v_i \neq 0\ \forall i$, $i \neq j \Rightarrow v_i \perp v_j$. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é l.i.?

Prova: Seja $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$ uma combinação linear nula.

Logo $\forall k = 1, 2, \dots, n$ temos $0 = \langle 0, v_k\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, v_k\rangle$

$\quad = \alpha_k \langle v_k, v_k\rangle$

$0 = \alpha_k \overbrace{\langle v_k, v_k\rangle}^{\neq 0 \text{ porque } v_k \neq 0} \Rightarrow \alpha_k = 0\ \forall k = 1, 2, \dots, n$ Logo $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é l.i. $\square$

Problema 2:

a) Verdadeiro Os vetores $x = (1, i, 2)$, $y = (1, i, -1)$ são ortogonais em $\mathbb{C}^3$ equipado com o produto escalar usual.

Prova: $\langle x, y\rangle = \langle (1,i,2), (1,i,-1)\rangle = 1 \cdot \bar{1} + i \cdot \bar{i} + 2 \cdot \overline{(-1)} = 1 \cdot 1 + i(-i) + 2 \cdot (-1)$
$= 1 - i^2 - 2 = 1 - (-1) - 2 = 0$.

b) Verdadeiro Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz quadrada então as matrizes A^tA e AA^t sempre são diagonalizáveis.

Prova: $(A^tA)^t = A^t(A^t)^t = A^tA$, $(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t \Rightarrow$ As matrizes A^tA, AA^t são matrizes simétricas com coeficientes reais $\Rightarrow$ São diagonalizáveis em base ortonormal $\square$

c) Falso Se $(E, \langle\,,\,\rangle)$ é um espaço com produto escalar, V e W são subespaços tais que $V \subseteq W$ então $V^\perp \subseteq W^\perp$

Justificativa: Seja E qualquer espaço não trivial $(E \neq 0)$ com produto escalar logo $0 \subsetneq E$ mas $0^\perp = E$ e $E^\perp = 0$ e $E = 0^\perp \nsubseteq E^\perp = 0$

Justificativa 2: Se $\dim E < \infty$, $V \subsetneq W$ temos: $\dim V + \dim V^\perp = \dim E$, $V \subsetneq W \Rightarrow \dim V < \dim W$
$\dim W + \dim W^\perp = \dim E$

Se $V^\perp \subseteq W^\perp \Rightarrow \dim V^\perp \leq \dim W^\perp$

Logo $\dim E = \dim W + \dim W^\perp > \dim V + \dim V^\perp = \dim E$

$\therefore \dim E > \dim E \Rightarrow$ Absurdo $\square$

Justificativa 3 (Exemplo concreto): Pegue, por exemplo, $E = \mathbb{R}^3$ com o produto escalar usual.

$V = \langle\{e_1\}\rangle \subseteq W = \langle\{e_1, e_2\}\rangle$ $\quad V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, e_1\rangle = 0\} = \langle\{e_2, e_3\}\rangle$

$W^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, e_1\rangle = 0 \text{ e } \langle x, e_2\rangle = 0\} = \langle\{e_3\}\rangle$ $\quad V^\perp = \langle\{e_2, e_3\}\rangle \nsubseteq \langle\{e_3\}\rangle = W^\perp$ $\square$

Problema 3: Calcular D diagonal e P invertível tq $D = P^t A P$ onde $A = \begin{pmatrix} 4&4&0&0\\ 4&4&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$

$A \in M_4(\mathbb{R})$, A é simétrica $\Rightarrow$ A representa um endomorfismo autoadjunto de $\mathbb{R}^4$ (com o produto escalar) usual na base canônica
$\Downarrow$
A é diagonalizável em base ortonormal.

Calculando autovalores: $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 & 0 & 0\\ 4 & 4-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4\\ 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2[(4-\lambda)^2 - 16] = \lambda^2(\lambda^2 - 8\lambda + 16 - 16) = \lambda^2(\lambda^2 - 8\lambda)$

$\therefore$ $p_A(\lambda) = \lambda^3(\lambda - 8) \Rightarrow \lambda = 0$ autovalor de multiplicidade 3
$\lambda = 8$ autovalor de multiplicidade 1.

$$D = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&8 \end{pmatrix}$$

Calculando $V_0 = \ker(A - 0I) = \ker A$

$$\begin{pmatrix} 4&4&0&0\\ \cancel{4}&\cancel{4}&\cancel{0}&\cancel{0}\\ \cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\ \cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$$

$4x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$
$4x_1 + 4x_2 = 0$
$x_2 = -x_1$

$\therefore V_0 = \{(x_1, -x_1, x_3, x_4) : x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$
$V_0 = \langle\{(1,-1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}\rangle$

Calculando $V_8 = \ker(A - 8I)$

$$\begin{pmatrix} -4&4&0&0\\ \cancel{4}&\cancel{-4}&\cancel{0}&\cancel{0}\\ 0&0&-8&0\\ 0&0&0&-8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x_1 + 4x_2 = 0\\ -8x_3 = 0\\ -8x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = x_2\\ x_3 = x_4 = 0 \end{array}$$

$\therefore V_4 = \{(x_1, x_1, 0, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,0,0) \rangle$

$\{\underbrace{a_1 = (1,-1,0,0),\ a_2 = (0,0,1,0),\ a_3 = (0,0,0,1)}_{\text{base de } V_0},\ \underbrace{a_4 = (1,1,0,0)}_{\text{base de } V_8}\}$ base de autovetores

Precisamos de uma base ortonormal. Aplicando Gram-Schmidt:

V_0: Os vetores $\{a_1, a_2, a_3\}$ já são ortogonais $\langle a_1, a_2\rangle = \langle a_1, a_3\rangle = \langle a_2, a_3\rangle = 0$.
Logo basta normalizar: $\|a_1\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{2}$, $\|a_2\| = 1$, $\|a_3\| = 1$

$v_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,0,0,1)$

V_8: A base de V_8 apenas tem 1 vetor $a_4 = (1,1,0,0)$ logo basta normalizar
$\|a_4\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ $\therefore v_4 = \frac{a_4}{\|a_4\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$

$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ base ortonormal de autovetores

$D = P^t A P$ $\quad P = M_{MC}(\{v_i\}, \{e_i\}) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Logo
$$\overbrace{\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&8 \end{pmatrix}}^{D} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{P^t} \overbrace{\begin{pmatrix} 4&4&0&0\\ 4&4&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2}\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}}^{P}$$

$\square$