Álgebra Linear. 2025-1

Avaliação Especial VS.

Turma **B1**.

Prof. Bely R Morales

UFF

Problema 1: (3 Pontos) Analise a veracidade das seguintes afirmações e justifique:

a) Para todo valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ a matriz $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ é invertível.

b) O conjunto $V = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\right\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

c) Seja $f : E \to E$ um automorfismo (i.e. f é um endomorfismo invertível), se λ é autovalor de f então λ^{-1} é autovalor de f^{-1}.

Problema 2: (3 Pontos) Considere a aplicação linear $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ dada por:

$$f(x,y,z) = (x + y, -2x + y + z, 3y + z).$$

a) Calcule a matriz de f na base canonica de $\mathbb{K}^3$.

b) Calcule a dimensão do núcleo de f.

c) Calcule a dimensão da imagem de f.

Problema 3: (4 Pontos) Determine si existe uma matriz $D \in M_3(\mathbb{R})$ diagonal e uma matriz invertível $P \in M_3(\mathbb{R})$ tais que $A = P^t D P$. Em caso afirmativo calcule as matrizes D e P.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 1º Analise a veracidade das seguintes afirmações e justifique:

a) Verdadeiro Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ a matriz $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ é invertível.

$\begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix} = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

b) Falso O conjunto $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$

$(1,1) \in V$ porque $1^2 = 1^2$
$(1,-1) \in V$ porque $1^2 = (-1)^2$

porém $(1,1) + (1,-1) = (2,0) \notin V$ porque $2^2 \neq 0^2$
Logo V não é fechado pela soma.

c) Verdadeiro Seja f automorfismo, λ autovalor de $f \Rightarrow \lambda^{-1}$ autovalor de f^{-1}

λ autovalor de $f \Rightarrow V_\lambda \neq 0 \Rightarrow \exists x \neq 0 : f(x) = \lambda x \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(f(x))}_{x = (f^{-1} \circ f)(x)} = \underbrace{f^{-1}(\lambda x)}_{\lambda f^{-1}(x)} \Rightarrow \lambda f^{-1}(x) = x$

$\Downarrow$

λ^{-1} é autovalor de f^{-1} $\Leftarrow$ $f^{-1}(x) = \lambda^{-1} x$

Problema 2º $f: K^3 \to K^3$ $\quad f(x,y,z) = (x+y, -2x+y+z, 3y+z)$

a) $f(1,0,0) = (1,-2,0)$
$f(0,1,0) = (1,1,3)$
$f(0,0,1) = (0,1,1)$

$A = M(f, \{e_i\}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\operatorname{Ker} f = \left\{ (x,y,z) : A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x + y = 0 \Rightarrow x = -y \\ 3y + z = 0 \Rightarrow z = -3y \end{cases}$

$\operatorname{Ker} f = \{(-y, y, -3y) : y \in K\}$

$\operatorname{Ker} f = \langle (1,-1,3) \rangle \Rightarrow \boxed{\dim(\operatorname{Ker} f) = 1}$

c) Aplicando o Teorema do Posto: $\dim K^3 = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f)$

$\boxed{\dim(\operatorname{Im} f) = 2} \Leftarrow 3 = 1 + \dim(\operatorname{Im} f)$

Problema 3º $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

$A\in M_3(\mathbb{R})$ é simétrica $\Rightarrow$ A representa um endomorfismo autoadjunto de $\mathbb{R}^3$ na base canônica com o produto escalar usual $\Rightarrow$ Pelo Teorema Espectral A é diagonalizável em base ortonormal.

$$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\1&1-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1\\1&1-\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1-\lambda\\1&1\end{vmatrix}$$

$$P_A(\lambda)=(1-\lambda)[\lambda^2-2\lambda+1-1]-(1-\lambda-1)+(1-1+\lambda)=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda)+\lambda+\lambda$$

$$P_A(\lambda)=\lambda(1-\lambda)(\lambda-2)+2\lambda=\lambda[-(\lambda-1)(\lambda-2)+2]=\lambda[-(\lambda^2-3\lambda+2)+2]=\lambda[-\lambda^2+3\lambda-2+2]$$

$$P_A(\lambda)=\lambda[-\lambda^2+3\lambda]=-\lambda^2(\lambda-3)$$

Autovalores: $\lambda=0 \rightsquigarrow$ multiplicidade 2

$\lambda=3 \rightsquigarrow$ multiplicidade 1

$V_0=\mathrm{Ker}(A-0I)=\mathrm{Ker}\,A$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\\cancel{1}&\cancel{1}&\cancel{1}\\\cancel{1}&\cancel{1}&\cancel{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x+y+z=0 \Downarrow z=-x-y$$

$V_0=\{(x,y,-x-y): x,y\in\mathbb{R}\}=\{x(1,0,-1)+y(0,1,-1): x,y\in\mathbb{R}\}$

$V_0=\langle\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}\rangle$

$a_1=(1,0,-1)$, $a_2=(0,1,-1)$

Gram-Schmidt:

$b_1=a_1=(1,0,-1)$ $\quad\langle b_1,b_1\rangle=2$, $\langle a_2,b_1\rangle=1$ $\quad\|b_1\|=\sqrt{2}$

$b_2=a_2-\dfrac{\langle a_2,b_1\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle}b_1=(0,1,-1)-\frac{1}{2}(1,0,-1)$

$b_2=(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})$ $\quad\|b_2\|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{4}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$v_1=\dfrac{b_1}{\|b_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{-1}{\sqrt{2}})$

$v_2=\dfrac{b_2}{\|b_2\|}=\frac{2}{\sqrt{6}}(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})=(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}})$

$\therefore \{v_1,v_2\}$ base ortonormal de V_0

$V_3=\mathrm{Ker}(A-3I)$

$$\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&1&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&-3&3\\0&3&-3\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&-3&3\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\begin{cases}x-2y+z=0\\-3y+3z=0\end{cases}$$

$\Downarrow$

$y=z$

$x-2z+z=0$

$x-z=0\Rightarrow x=z$

$\therefore V_3=\{(z,z,z): z\in\mathbb{R}\}=\langle(1,1,1)\rangle$

$a_3=(1,1,1)$ $\quad\|a_3\|=\sqrt{3}$

Gram-Schmidt: $v_3=\dfrac{a_3}{\|a_3\|}=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$

v_3 é base ortonormal de V_3

v_1,v_2,v_3 é base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores

$v_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{-1}{\sqrt{2}})$ $\quad v_2=(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}})$ $\quad v_3=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$

$D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ $\quad A=P^tDP$ $\quad P=MMC(\{e_i\},\{v_i\})$

$P^t=P^{-1}=MMC(\{v_i\},\{e_i\})=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}}=\underset{P^t}{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}}\cdot\underset{D}{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}}\cdot\underset{P}{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0&-1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{6}&2/\sqrt{6}&-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&1/\sqrt{3}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}}$$