Álgebra Linear. 2025.S1

Avaliação P1.

Turma **B1**.

Prof. Bely R Morales

UFF

Problema 1: (3 Pontos) Seja $A = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$, onde $t \in \mathbb{R}$.

a) Calcule AA^t e A^tA.

b) Calcule o determinante de A.

c) Será A invertível? No caso afirmativo calcule A^{-1}.

Problema 2: (2 Pontos) Analise a veracidade das seguintes afirmações e justifique:

a) Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ matrizes invertíveis então $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

b) Se A é uma matriz quadrada de tamanho impar e anti-simétrica então $\det(A) = 0$.

Problema 3: (2 Pontos) Demostre que se A, B são duas matrizes quadradas de $n \times n$ tais que $AB = BA$ então $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$.

Problema 4: (3 Pontos)

i) Determine se a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ é invertível. No caso afirmativo calcule sua inversa.

ii) Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 4 \\ \phantom{x +{}} y + z = 3. \end{cases}$$

Ponto Extra (Opcional): (1 Ponto) Prove que: $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ⋰ & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Dica: Existem diversos métodos de solução:
Solução 1: Aplique o método de indução matemática.
Solução 2: Aplique o método dos menores para obter uma sequência recursiva.
Solução 3: Tente, permutando colunas, converter a matriz na matriz identidade.

Gabarito

Publicado 30.04.2025 as 11:00

Problema 1º

$$A=\begin{pmatrix}\cos(t) & -\sin(t)\\ \sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}$$

a) $$AA^t=\begin{pmatrix}\cos(t) & -\sin(t)\\ \sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(t) & \sin(t)\\ -\sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overbrace{\cos^2(t)+\sin^2(t)}^{=1} & \overbrace{\cos(t)\sin(t)-\sin(t)\cos(t)}^{=0}\\ \underbrace{\sin(t)\cos(t)-\cos(t)\sin(t)}_{=0} & \underbrace{\sin^2(t)+\cos^2(t)}_{=1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$\therefore AA^t=I$

$$A^tA=\begin{pmatrix}\cos(t) & \sin(t)\\ -\sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(t) & -\sin(t)\\ \sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2(t)+\sin^2(t) & -\cos(t)\sin(t)+\sin(t)\cos(t)\\ -\sin(t)\cos(t)+\cos(t)\sin(t) & \sin^2(t)+\cos^2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$\therefore A^tA=I$ Logo A é uma matriz ortogonal

b) $$\det A=\begin{vmatrix}\cos(t) & -\sin(t)\\ \sin(t) & \cos(t)\end{vmatrix}=\cos^2(t)+\sin^2(t)=1$$

c) Sim pq $\det(A)=1\neq 0$. De fato em 1.a) foi provado que $A^{-1}=A^t$

Problema 2: Analise a veracidade de:

a) Falso $A,B\in M_n(K)$ inversíveis então $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$

Basta considerar: $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}\det(A)=1\neq 0\\ \det(B)=4\neq 0\end{matrix}\Rightarrow A$ e B são inversíveis

$A+B=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$ $\det(A+B)=9$ $\therefore \underbrace{\det(A+B)}_{9}\neq\underbrace{\det(A)}_{1}+\underbrace{\det(B)}_{4}$

b) Verdadeira Se $A\in M_n(K)$, A é anti-simétrica de tamanho ímpar então $\det(A)=0$

$$\det(A)=\det(A^t)=\det(-A)=(-1)^n\det(A)\overset{n \text{ é ímpar}}{=}-\det(A)\Rightarrow \det(A)=-\det(A)$$

$$\det(A)=0\Longleftarrow 2\det(A)=0$$

$\square$

Problema 3: Demostre que se $A,B\in M_n(K)$ e $AB=BA$ então $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$

$AB=BA\Rightarrow AB^2=BAB$

Prova: $(A-B)(A^2+AB+B^2)=A(A^2+AB+B^2)-B(A^2+AB+B^2)=A^3+A^2B+AB^2-BA^2-BAB-B^3$

$=A^3-B^3$

$AB=BA\Rightarrow A^2B=ABA=BA^2$

$\square$

Gabarito

Publicado 30.04.2025 as 11:00

Problema 4: $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$

i) $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}=-1$ $\quad\therefore \det(A)=-1\neq 0 \Rightarrow A$ é inversível.

$$\operatorname{Cof} A=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot(\operatorname{Cof} A)^t=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}^t=-\begin{pmatrix}-1&0&1\\-1&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}}$$

ii) Resolva $\begin{cases}x+y+z=1\\x+y+2z=4\\y+z=3\end{cases}\iff \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}}_{b}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=b\Rightarrow A^{-1}A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}b$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}b$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}b=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\therefore S=\{(-2,0,3)\}}$$

Ponto extra: Demostre que $\begin{vmatrix}0&&1\\&\cdot^{\cdot^{\cdot}}&\\1&&0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Solução 1: Aplicando o método de indução matemática (no tamanho da matriz)

Caso base: $n=1$ $\quad|1|=1=(-1)^{\frac{1(1-1)}{2}}=(-1)^0=1$ ✓

Caso Recorrente: Vamos assumir que $\underbrace{\begin{vmatrix}0&&1\\&\cdot^{\cdot^{\cdot}}&\\1&&0\end{vmatrix}}_{n-1}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ quando a matriz é de $(n-1)\times(n-1)$

Provemos então que $\begin{vmatrix}0&&1\\&\cdot^{\cdot^{\cdot}}&\\1&&0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ quando a matriz é de $n\times n$

Gabarito
Publicado 30.04.2025 às 11:00

Calculemos o determinante desenvolvendo a última coluna

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \iddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{n} = (-1)^{n+1} \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \iddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}}_{\text{matriz de } n-1 \text{ colunas}} = (-1)^{n+1}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} = (-1)^{\frac{2n+2}{2}+\frac{n^2-3n+2}{2}} = (-1)^{\frac{n^2-n}{2}+2}$$

↳ Hipótese de indução

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \underbrace{(-1)^2}_{=1}$$

□

Solução 2:

Seja $D_n = \begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}$, i.e., D_n é o resultado do determinante da matriz antidiagonal $\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$ de tamanho $n \times n$.

Evidentemente $D_1 = 1$

Desenvolvendo pela última coluna obtemos a fórmula recursiva:

$$\boxed{D_n = (-1)^{n+1} D_{n-1}}$$

Iterando temos

$$D_n = (-1)^{n+1} D_{n-1} = (-1)^{n+1}(-1)^n D_{n-2} = (-1)^{n+1}(-1)^n(-1)^{n-1} D_{n-3} = (-1)^{n+1}(-1)^n \cdot (-1)^{n-1} \cdots (-1)^3 \underbrace{D_1}_{=1}$$

$$D_n = (-1)^{3+4+\dots+n-1+n+n+1} = (-1)^{1+2+3+4+\dots+n-1+2n} \cdot (-1)^{-2} = (-1)^{1+2+\dots+(n-1)} \cdot \underbrace{(-1)^{2n}}_{=[(-1)^2]^n = 1^n = 1} \cdot \underbrace{(-1)^{-2}}_{=[(-1)^2]^{-1} = 1^{-1} = 1}$$

$$\therefore D_n = (-1)^{1+2+3+\dots+(n-1)} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

□

Solução 3:

Note que a matriz $\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$ pode ser transformada na matriz identidade trocando colunas

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \iddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{C_n \leftrightarrow C_{n-1}} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \iddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{C_{n-1} \leftrightarrow C_n} = \cdots = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \iddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \iddots & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Ou seja trocamos a última coluna com as (n-1) colunas anteriores

Gabarito
Publicado 30.04.2025 às 11:00

$$D = (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \iddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{n-2 anteriores}]{\text{Agora trocamos a ultima coluna com as}} (-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \iddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Continuamos deslocando a ultima coluna, uma de cada vez, até chegar na identidade

↳ Conseguimos obter a 1ª coluna da identidade

$$\therefore D = (-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\cdots(-1)^{1}\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix}}_{=\,1} = (-1)^{1+2+3+\cdots+(n-1)} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$\square$

Gabarito

Publicado 30.04.2025 as 11:00