PCC — 2023/01 — Turma A1 — Prof. José Koiller

Prova 2 (04/07/2023)

- *É recomendável fazer a avaliação a lápis, mas escreva* ***a caneta*** *as suas* ***respostas finais****, bem como o* ***número de cada questão e item****.*
- ***É proibido:*** *consultar livros ou anotações; comunicar-se com colegas; usar calculadora, celular, ou qualquer dispositivo eletrônico.*
- ***É necessário exibir seus cálculos e/ou raciocínio.*** *Respostas finais sem justificativa, ainda que corretas, não receberão crédito.*
- *Empregue a* ***língua portuguesa*** *e a* ***notação matemática*** *de maneira correta. A* ***clareza****, o* ***capricho*** *e a* ***legibilidade*** *são fundamentais, e fazem parte da avaliação!*

BOA SORTE!

2 pts. **Q1.** Um grupo de 20 amigos se reúne para jogar partidas de vôlei de praia, em duplas (equipes de dois contra dois). Os jogadores formam 10 duplas, e cada dupla joga uma partida contra outra dupla (disputa-se um total de cinco partidas).

(a) De quantas maneiras esse torneio pode ser realizado, supondo que a ordem das partidas seja *irrelevante*? (Considere, por exemplo, que elas possam ser disputadas simultaneamente, em quadras idênticas.)

(b) Agora, de quantas maneiras esse torneio pode ser realizado, supondo que a ordem das partidas seja *relevante*? (Considere, por exemplo, que há apenas uma quadra disponível, e que os jogos serão disputados em sequência.)

Observação: Em qualquer dos casos, a partida *João e Maria vs. Ana e Pedro* é idêntica a *Pedro e Ana vs. Maria e João*, por exemplo.

2 pts. **Q2.** (a) Temos *quatro* prateleiras distintas, numeradas de 1 a 4. De quantas maneiras uma coleção de 30 livros distintos pode ser organizada nessas prateleiras, sendo *relevante* a ordem dos livros em cada uma? Uma ou mais prateleiras *podem* ficar vazias.

(b) Temos *quatro* caixas distintas, numeradas de 1 a 4. De quantas maneiras uma coleção de 30 livros distintos pode ser guardada nessas caixas, sendo *irrelevante* a ordem dos livros em cada uma? Uma ou mais caixas *podem* ficar vazias.

+0,5 pts. (c) Agora, temos *três* caixas *idênticas*, e *quatro* livros distintos: A, B, C e D. Enumere (liste) todas as formas de guardar estes livros nas caixas, admitindo, ainda, que uma ou duas caixas possam ficar vazias, e que a ordem dos livros em cada uma seja irrelevante. Qual é o total de maneiras de guardá-los, neste contexto?

Sugestões: Considere, separadamente, os casos em que nenhuma, uma e duas das caixas ficam vazias. Aqui estão alguns exemplos: $AB/C/D$ (nenhuma caixa vazia), $AB/CD/$, $ABC/D/$ (uma caixa vazia), $ABCD//$ (duas caixas vazias). Faça a sua enumeração utilizando esta notação.

1,5 pts. **Q3.** Utilize o Teorema Binomial para determinar o coeficiente de x^8y^9 na expansão do polinômio $(3x^2 - 2y^3)^7$.

Mais questões no verso...

2 pts. **Q4.** Dez casais sentam-se ao redor de uma grande mesa circular. De quantas maneiras diferentes eles podem sentar-se, supondo que maridos e esposas devam sentar-se lado-a-lado? Observe que se todos se deslocarem, conjuntamente, para a esquerda ou para a direita, a disposição resultante não é considerada diferente.

2,5 pts.
(a) 0,5 pts.
(b) 0,5 pts.
(c) 1 pt.
(d) 0,5 pts.

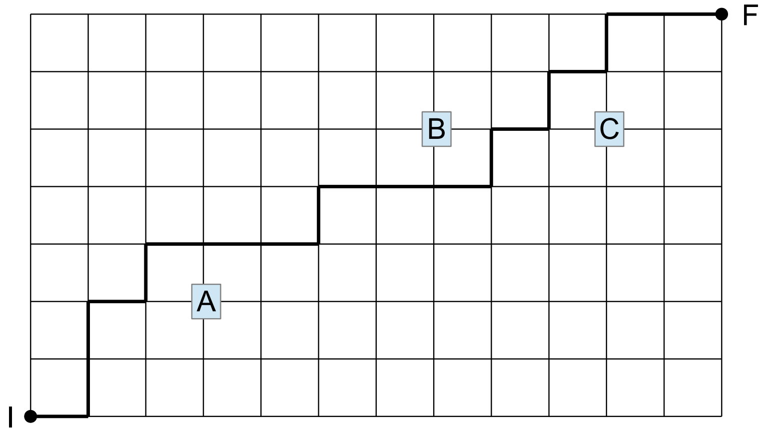
Q5. Considere o reticulado da figura abaixo. Um *caminho admissível* é um caminho sobre o reticulado que começa no ponto I e termina no ponto F, consistindo de exatamente 19 passos: doze para a direita, e sete para cima. Um exemplo de caminho admissível é dado na figura.

(a) Quantos caminhos admissíveis (de I a F) existem?

(b) Quantos caminhos admissíveis passam por *todos* os pontos A, B e C?

(c) Quantos caminhos admissíveis passam por *ao menos um* dos pontos A, B ou C?

(d) Quantos caminhos admissíveis *não* passam por A, *nem* por B, *nem* por C?



Respostas:

Q1. (a) Este problema é análogo ao exercício P5(b) da lista. Há mais de uma forma de expressar a resposta. Dentre elas:

- $\dfrac{20!}{8^5 \cdot 5!} = \dfrac{20!}{2^{15} \cdot 5!}$.
- $\dfrac{\binom{20}{2}\binom{18}{2}\cdots\binom{2}{2}}{10!} \cdot \dfrac{\binom{10}{2}\binom{8}{2}\cdots\binom{2}{2}}{5!}$.

Esta última forma de expressar a resposta pode ser interpretada assim: a primeira fração corresponde ao número de formas de escolher as 10 duplas que vão competir (a ordem das duplas não importa, daí a divisão por 10!). Uma vez que as 10 duplas estão formadas, a segunda fração corresponde ao número de formas de organizá-las em partidas (cada partida corresponde à escolha de duas duplas). Dividimos por 5! pois a ordem das partidas não é relevante. O número de formas de organizar o torneio é o produto desses números, pelo Princípio Multiplicativo.

(b) A resposta deste item é 5! vezes a resposta de (a), já que, agora, a ordem das 5 partidas é relevante (ou seja, consideramos que trocar a ordem das partidas leva a um torneio distinto). Assim, a resposta é $20!/8^5$.

Q2. (a) $33!/3!$. Considere 33 objetos: 30 livros distintos e 3 "divisórias". 33! é o número de permutações desses objetos. Como as divisórias são idênticas, permutá-las não leva a uma configuração distinta. Pelo Princípio k-para-1, dividimos por 3!.

Outra forma de obter a resposta é a seguinte: Das 33 posições em um sequência, escolhemos 3 para alocar as divisórias (não importa a "ordem" dessas 3 posições). Nas posições remanescentes, organizamos os 30 livros (dessa vez, a ordem importa...). A resposta, assim, é

$$\binom{33}{3} \cdot 30! = \frac{33!}{3!\,30!} \cdot 30! = \frac{33!}{3!}.$$

(b) 4^{30}. Temos quatro opções de caixa para cada um dos 30 livros.

(c) Há 14 formas de guardar os livros:

$$AB/C/D, \quad AC/B/D, \quad AD/B/C, \quad BC/A/D, \quad BD/A/C, \quad CD/A/B,$$
$$AB/CD/, \quad AC/BD/, \quad AD/BC/,$$
$$A/BCD/, \quad B/ACD/, \quad C/ABD/, \quad D/ABC/,$$
$$ABCD//.$$

Q3. $\binom{7}{4}3^4(-2)^3 = 35 \cdot 81 \cdot (-8) = -22\,680$.

Q4. Este é o exercício P22 da lista de exercícios. Número de maneiras de dispôr as esposas ao redor da mesa: $10!/10 = 9!$ (é o número de permutações circulares de 10 elementos). Cada marido tem duas opções: sentar-se à direita ou à esquerda de sua esposa. Pelo Princípio Multiplicativo, há $9! \cdot 2^{10}$ maneiras de dispôr os casais.

Q5. (a) Cada caminho admissível pode ser representado por uma sequência composta pelas letras D (direita) e C (cima). Mais precisamente, há uma *bijeção* entre o conjunto dos caminhos admissíveis de I a F e o conjunto de sequências de comprimento 19 com exatamente 12 D's e 7 C's. Determinar uma sequência corresponde a escolher, dentre as 19 posições, 12 posições para os D's ou, equivalentemente, 7 posições para os C's. Assim, existem

$$N = \binom{19}{12} = \binom{19}{7} = \frac{19!}{12!\,7!}$$

sequências dessa forma. Pelo Princípio da Bijeção, esta é a quantidade de caminhos admissíveis de I a F.

(b) Por argumento análogo ao do item (a), existem

$$n_{IA} = \binom{5}{2} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{2!\,3!}$$

caminhos de I a A,

$$n_{AB} = \binom{7}{3} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{3!\,4!}$$

caminhos de A a B,

$$n_{BC} = \binom{3}{3} = 1$$

caminho de B a C, e

$$n_{CF} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!}$$

caminhos admissíveis de C a F. Um caminho admissível de I a F que passa por A, B e C pode ser obtido em quatro etapas independentes: (i) escolher um caminho de I a A; (ii) escolher um caminho de A a B; (iii) escolher um caminho de B a C; (iv) escolher um caminho de C a F. Pelo Princípio Multiplicativo, a quantidade de tais caminhos é, portanto, igual a

$$N_{ABC} = n_{IA} \cdot n_{AB} \cdot n_{BC} \cdot n_{CF} = \binom{5}{2}\binom{7}{3}\binom{3}{3}\binom{4}{2}.$$

(c) Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ os conjuntos dos caminhos admissíveis de I a F que passam pelos pontos A, B e C, respectivamente. Então $\mathcal{Y} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ é o conjunto dos caminhos que passam por ao menos um desses pontos. Pelo Princípio de Inclusão-Exclusão,

$$|\mathcal{Y}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| - |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| - |\mathcal{A} \cap \mathcal{C}| - |\mathcal{B} \cap \mathcal{C}| + |\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}|.$$

Podemos calcular cada uma dessas quantidades usando um argumento análogo ao do item (b). Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{Y}| = {} & \binom{5}{2}\binom{14}{5} + \binom{12}{5}\binom{7}{2} + \binom{15}{5}\binom{4}{2} \\ & - \binom{5}{2}\binom{7}{3}\binom{7}{2} - \binom{5}{2}\binom{10}{3}\binom{4}{2} - \binom{12}{5}\binom{3}{3}\binom{4}{2} + \binom{5}{2}\binom{7}{3}\binom{3}{3}\binom{4}{2}. \end{aligned}$$

Observe que $|\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}|$ é exatamente o número N_{ABC} obtido no item (b).

(d) Sejam $\mathcal{X}$ o conjunto de todos os caminhos admissíveis de I a F, $\mathcal{Y}$ o conjunto definido no item (c), e $\mathcal{Z}$ o conjunto dos caminhos que não passam por A, nem B, nem C. Note que $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}$ e que $\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z} = \varnothing$. Assim, pelo Princípio Aditivo, $|\mathcal{X}| = |\mathcal{Y}| + |\mathcal{Z}|$, ou seja,

$$|\mathcal{Z}| = |\mathcal{X}| - |\mathcal{Y}| = N - |\mathcal{Y}| \,.$$

As quantidades N e $|\mathcal{Y}|$ foram obtidas nos itens (a) e (c), respectivamente.