Álgebra Linear. 2024.S2

Avaliação Final VR.

Turma **K1**.

Prof. Bely R Morales

UFF

Problema 1: (4 Pontos) Analise a veracidade das seguintes afirmações e justifique:

a) Para qualquer par de números reais $a, b \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos a matriz $A_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ é invertível.

b) Para qualquer par de números complexos $z, w \in \mathbb{C}$ não simultaneamente nulos a matriz $A_{z,w} = \begin{pmatrix} z & -w \\ w & z \end{pmatrix}$ é invertível.

c) O conjunto formado pelas matrizes de $n \times n$ com determinante zero é um subespaço das matrizes quadradas, i.e., $\mathcal{S} = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \det(A) = 0\}$ é um subespaço de $M_n(\mathbb{K})$.

d) A equação $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ determina um hiperboloide de duas folhas no espaço $\mathbb{R}^3$.

Problema 2: (3 Pontos) Seja E um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, V, W subespaços tais que $E = V \oplus W$. Definamos uma aplicação

$$p_V : E = V \oplus W \to E,$$

$$x = x_v + x_w \mapsto p_V(x) = x_v,$$

i.e. a aplicação p_V fica com a parte x_v de cada vetor x que pertence ao subespaço V. A aplicação p_V é chamada de "*projeção sobre o subespaço V*".

a) Prove que p_V é uma aplicação linear.

b) Prove que $\ker p_V = W$ e $\mathbf{Im}\ p_V = V$.

c) Prove que $p_V^2 = p_V \circ p_V = p_V$.

Problema 3: (3 Pontos) Determine si existe uma matriz $D \in M_4(\mathbb{R})$ diagonal e uma matriz invertível $P \in M_4(\mathbb{R})$ tais que $A = P^t D P$. Em caso afirmativo calcule as matrizes D e P.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ponto Extra (Opcional): Seja E um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $p \in \mathbf{End}(E)$ um endomorfismo tal que $p^2 = p \circ p = p$. Prove que existe um subespaço V de E tal que $p = p_V$, i.e., prove que p é a projeção sobre algum subespaço de E.

Dica: Prove que $E = \ker p \oplus \mathbf{Im}\, p$.

Problema 1º

a) Verdadeiro — $\forall a,b \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos, a matriz $A_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ é invertível.

$A_{a,b}$ é invertível $\iff \det(A_{a,b}) \neq 0$ $\quad \det(A_{a,b}) = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = \underbrace{a^2+b^2 \neq 0}_{\text{pq } a,b\in\mathbb{R} \text{ não são simultaneamente nulos.}}$

$\therefore A_{a,b}$ é invertível

b) Falso — $\forall z,w \in \mathbb{C}$ não simultaneamente nulos, a matriz $A_{z,w} = \begin{pmatrix} z & -w \\ w & z \end{pmatrix}$ é invertível.

$A_{1,i} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ não é invertível pq $\det(A_{1,i}) = \begin{vmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{vmatrix} = 1^2 + i^2 = 1-1 = 0$

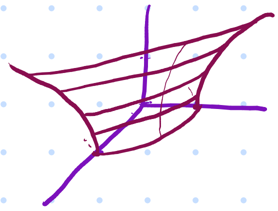
c) Falso — O conjunto $S = \{A \in M_n(K) : \det(A) = 0\}$ é subespaço de $M_n(K)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = \det(B) = 0 \Rightarrow A, B \in S$

más $A + B = I \notin S$ pq $\det(A+B) = \det(I) = 1$

d) Falso — A equação $x^2+y^2-z^2=1$ determina um hiperbolóide de duas folhas

$x^2+y^2-z^2=1$ é da forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ logo é um hiperbolóide de uma folha.



Problema 2º

$E = V \oplus W \qquad P_V : E = V\oplus W \longrightarrow E$

$\qquad\qquad\qquad\qquad x = x_V + x_W \longmapsto P_V(x) = x_V$

a) Sejam $x,y \in E$, $\alpha,\beta \in K \Rightarrow x = \overset{\in V}{x_V} + \overset{\in W}{x_W}$, $y = \underset{\in V}{y_V} + \overset{\in W}{y_W}$ $\Rightarrow \alpha x + \beta y = \alpha(x_V + x_W) + \beta(y_V + y_W) = \underbrace{(\alpha x_V + \beta y_V)}_{\in V} + \underbrace{(\alpha x_W + \beta y_W)}_{\in W}$

$p(\alpha x + \beta y) = \alpha \underbrace{x_V}_{\overset{\|}{p(x)}} + \beta \underbrace{y_V}_{\overset{\|}{p(y)}} = \alpha p(x) + \beta p(y)$

b) Se $w \in W$ então $w = \overset{\in V}{0} + \overset{\in W}{w} \Rightarrow p_V(w) = 0 \Rightarrow w \in \mathrm{Ker}\, P_V$ $\quad \therefore W \subseteq \mathrm{Ker}\, P_V$

Se $x = \underset{\in V}{x_V} + \underset{\in W}{x_W} \in \mathrm{Ker}\, P_V \Rightarrow 0 = p(x) = x_V \Rightarrow x = 0 + x_W = x_W \Rightarrow x \in W$ $\quad \therefore \mathrm{Ker}\, P_V \subseteq W$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}\, P_V = W$

Evidentemente $V \subseteq \mathrm{Im}\, P_V$, Se $y \in \mathrm{Im}\, P_V \Rightarrow y = p(x) = x_V \in V \Rightarrow y \in V$ $\quad \therefore \mathrm{Im}\, P_V = V$

c) $P_V^2(x) = P_V(P_V(x)) = P_V(x_V) = x_V = P_V(x)$

Problema 3:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

A é simétrica $\Longrightarrow$ A representa endomorfismo autoadjunto de $\mathbb{R}^4$ na base canônica com o produto escalar usual

$\Downarrow$

Pelo Teorema Espectral A é diagonalizável em base ortonormal.

Calculando autovalores

$$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0&0\\1&1-\lambda&0&0\\0&0&-\lambda&0\\0&0&0&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\1&1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2[\lambda^2-2\lambda+1-1]=\lambda^2[\lambda^2-2\lambda]$$

$$P_A(\lambda)=\lambda^2[\lambda^2-2\lambda]=\lambda^3(\lambda-2)\Longrightarrow \begin{matrix}\lambda=0 & \text{multiplicidade } 3\\ \lambda=2 & \text{multiplicidade } 1\end{matrix}$$

$V_0=\operatorname{Ker}(A-0I)=\operatorname{Ker} A$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\\cancel{1}&\cancel{1}&\cancel{0}&\cancel{0}\\\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow x_1+x_2=0 \;\Downarrow\; x_2=-x_1$$

$V_0=\{(x_1,-x_1,x_3,x_4): x_1,x_3,x_4\in\mathbb{R}\}$

$V_0=\{x_1(1,-1,0,0)+x_3(0,0,1,0)+x_4(0,0,0,1);\ x_1,x_3,x_4\in\mathbb{R}\}$

$V_0=\langle\{(1,-1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}\rangle$

$\therefore$ Os vetores $a_1=(1,-1,0,0)$, $a_2=(0,0,1,0)$, $a_3=(0,0,0,1)$ é uma base de V_0

É evidente que $a_1\perp a_2$, $a_1\perp a_3$, $a_2\perp a_3$ $\Rightarrow \{a_1,a_2,a_3\}$ é base ortogonal

$\|a_1\|=\sqrt{2}$, $\|a_2\|=1$, $\|a_3\|=1$

$\therefore \{v_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0,0),\ v_2=(0,0,1,0),\ v_3=(0,0,0,1)\}$ é base ortonormal de V_0

$V_2=\operatorname{Ker}(A-2I)$

$$\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\\cancel{1}&\cancel{-1}&\cancel{0}&\cancel{0}\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow \begin{matrix}-x_1+x_2=0\\-x_3=0\\-x_4=0\end{matrix}\Rightarrow \begin{matrix}x_1=x_2\\x_3=x_4=0\end{matrix}$$

$V_2=\{(x_1,x_1,0,0): x_1\in\mathbb{R}\}$

$V_2=\langle(1,1,0,0)\rangle$

$V_2=\langle a_4\rangle$ $\quad a_4=(1,1,0,0)\Rightarrow \|a_4\|=\sqrt{2}$ $\quad\therefore v_4=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0)$

$\therefore v_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0,0)$, $v_2=(0,0,1,0)$, $v_3=(0,0,0,1)$, $v_4=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0)$

$$D=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&2\end{pmatrix} \qquad A=P^tDP$$

$$P^t=MMC(\{v_i\},\{e_i\})=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0&0&1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}&0&0&1/\sqrt{2}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0&0&1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}&0&0&1/\sqrt{2}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}&0&0\end{pmatrix}$$

$$A \;=\; P^t \;\cdot\; D \;\cdot\; P$$

Ponto Extra: E K-espaço vetorial, $p\in End_K(E)$ $p^2=p$

Prove que $p=p_V$ para algum subespaço V.

Prova:

Dado $x\in E$ escreva $x=\underbrace{(x-p(x))}_{\in Ker\,p}+\underbrace{p(x)}_{\in Im\,p}$, $p(x-p(x))=p(x)-p^2(x)=p(x)-p(x)=0$

$$\Downarrow$$

$x-p(x)\in Ker\,p$

$$\Downarrow$$

$$E=Ker\,p+Im\,p$$

Se $x\in Im\,p\cap Ker\,p \Rightarrow x=p(y)=p^2(y)=p(p(y))=p(x)=0 \Rightarrow x=0$

$\therefore Im\,p\cap Ker\,p=0 \Rightarrow \boxed{E=Ker\,p\oplus Im\,p}$

Basta pegar $V=Im\,p$, $W=Ker\,p \Rightarrow p=p_V$

$$x=\underbrace{x_V}_{\in Im\,p}+\underbrace{x_W}_{\in Ker\,p} \Rightarrow p(x)=p(x_V)+\underbrace{p(x_W)}_{0}=x_V=p_V(x)$$

□