Álgebra Linear. 2024.S2

Avaliação P3.

Turma **K1**.

Prof. Bely R Morales

UFF

Problema 1: (3 Pontos) Analise a veracidade das seguintes afirmações e justifique:

a) Os vetores $x = (\mathrm{i}, 1, 1)$ e $y = (1, 0, \mathrm{i})$ são ortogonais no espaço $\mathbb{C}^3$ com o produto escalar usual.

b) A equação $x^2 - 3xy + 3y^2 + 6y = 8$ determina uma hipérbole no plano $\mathbb{R}^2$.

c) A equação $4x^2 + y^2 = z^2$ determina um paraboloide elíptico no espaço $\mathbb{R}^3$.

Problema 2: (2 Pontos) Seja E um $\mathbb{K}$-espaço com produto escalar. Prove que, para todo par de vetores $x, y \in E$, cumpre-se a identidade

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

Problema 3: (1 Ponto) Seja E um $\mathbb{R}$-espaço vetorial com produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle \, E \times E \to \mathbb{R}$ e f um endomorfismo anti-autoadjunto ($f^* = -f$). Prove que para todo $x \in E$ temos $\langle f(x), x \rangle = 0$.

Problema 4: (4 Pontos) Determine si existe uma matriz $D \in M_3(\mathbb{R})$ diagonal e uma matriz invertível $P \in M_3(\mathbb{R})$ tais que $A = P^t D P$. Em caso afirmativo calcule as matrizes D e P.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ponto Extra (Opcional): Seja E um $\mathbb{C}$-espaço vetorial com produto escalar de dimensão finita, seja $f \in \mathbf{End}(E)$ um automorfismo tal que $f^* = f^{-1}$. Mostre que todos os autovalores de f tem modulo 1, i.e., mostre que se λ é autovalor de f então $|\lambda| = 1$.

Dica: Auxilie-se da identidade do adjunto.

Problema 1:

a) **Verdadeiro** Os vetores $x=(i,1,1)$ e $y=(1,0,i)$ de $\mathbb{C}^3$ são ortogonais (Produto esc. usual)

$$\langle x,y\rangle = \langle (i,1,1),(1,0,i)\rangle = i\cdot\bar{1} + 1\cdot\bar{0} + 1\cdot\bar{i} = i + (-i) = 0$$

b) **Falso** A equação $x^2-3xy+3y^2+6y=8$ define uma hipérbole.

Aplicando o critério do discriminante para $x^2-3xy+3y^2+6y-8=0$ temos
$\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4\cdot1\cdot3 = 9-12 = -3 < 0 \Rightarrow$ A curva é uma elipse (ou uma forma degenerada).

c) **Falso** A equação $4x^2+y^2=z^2$ determina um parabolóide elíptico no $\mathbb{R}^3$

Transformando a equação para a forma canônica temos: $x^2+\frac{y^2}{4}=\frac{z^2}{4} \iff x^2+\frac{y^2}{2^2}=\frac{z^2}{2^2}$
$\Downarrow$
É um cone elíptico

Problema 2: Seja E um K-espaço com produto escalar. Prove que:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2$$

Prova:

$\|x+y\|^2 = \langle x+y,x+y\rangle = \langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle = \|x\|^2+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\|y\|^2$

$\|x-y\|^2 = \langle x-y,x-y\rangle = \langle x,x\rangle-\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle = \|x\|^2-\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle+\|y\|^2$

$\therefore \|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2$

Problema 3: Seja E um $\mathbb{R}$-espaço com produto escalar, $f\in End(E)$, $f^*=-f$.

Prove que $\langle f(x),x\rangle = 0 \ \forall x\in E$

Prova:

$$\langle f(x),x\rangle \overset{\text{identidade do adjunto}}{=} \langle x,f^*(x)\rangle \underset{f^*=-f}{=} \langle x,-f(x)\rangle = -\langle x,f(x)\rangle \underset{K=\mathbb{R}}{\overset{\text{Axioma 3 de produto escalar}}{=}} -\langle f(x),x\rangle \Rightarrow \langle f(x),x\rangle = -\langle f(x),x\rangle$$

$\Downarrow$

$\boxed{\langle f(x),x\rangle = 0 \ \forall x\in E} \Leftarrow 2\langle f(x),x\rangle = 0 \ \forall x\in E$

$\square$

<u>Problema 4:</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A \in M_3(\mathbb{R})$ é uma matriz simétrica $\Rightarrow$ A representa um endomorfismo autoadjunto de $\mathbb{R}^3$ na base canônica (com prod. esc. usual)

$\Leftarrow$ Pelo Teorema Espectral A é diagonalizável em base ortonormal

Calculando o polinômio característico

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)[\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1] - [1-\lambda-1] + [1-1+\lambda] = (1-\lambda)[\lambda^2 - 2\lambda] + \lambda + \lambda$$

$$p_A(\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-2) + 2\lambda = -\lambda[(\lambda-1)(\lambda-2) - 2] = -\lambda[\lambda^2 - 3\lambda + \cancel{2} - \cancel{2}] = -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda)$$

$\therefore p_A(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 3) \Longrightarrow \lambda_1 = 0$ autovalor de multiplicidade 2.

$\lambda_2 = 3$ autovalor de multiplicidade 1.

$V_0 = Ker(A - 0I) = Ker\, A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x + y + z = 0 \Rightarrow z = -x - y$$

$V_0 = \{(x, y, -x-y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,-1) + y(0,1,-1) : x, y \in \mathbb{R}\}$

$\therefore V_0 = \langle \{a_1 = (1,0,-1),\ a_2 = (0,1,-1)\} \rangle$

$\{a_1, a_2\}$ base de V_0. Aplicando Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal de V_0

$b_1 = a_1 = (1,0,-1)$ $\|b_1\|^2 = \langle b_1, b_1 \rangle = \langle (1,0,-1),(1,0,-1) \rangle = 1^2 + 1^2 = 2$

$$b_2 = a_2 - \frac{\langle a_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 = (0,1,-1) - \frac{\langle (0,1,-1),(1,0,-1) \rangle}{2}(1,0,-1) = (0,1,-1) - \frac{1}{2}(1,0,-1)$$

$b_2 = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$ $\|b_2\| = \left\|\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)\right\| = \frac{1}{2}\|(-1,2,-1)\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$v_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $v_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{2}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$\therefore \left\{v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}$ é base ortonormal V_0

$V_3 = Ker(A - 3I)$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{-L_1 + L_2 \to L_2 \\ 2L_1 + L_3 \to L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{-3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \Downarrow \quad y = z$$

$x + y - 2y = 0$
$x - y = 0$
$x = y$

$\therefore V_3 = \{(y,y,y) : y \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,1) \rangle \Rightarrow \{a_3 = (1,1,1)\}$ é base de V_3

$\|a_3\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$\therefore v_3 = \frac{a_3}{\|a_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ é base ortonormal de V_3

$\therefore \left\{ v_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovalores.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P = MMC(\{e_i\},\{v_i\})$$

$$P^t = MMC(\{v_i\},\{e_i\}) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$A = P^t D P$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$\square$

<u>Ponto Extra:</u> Seja E um $\mathbb{C}$-espaço com produto escalar de dimensão finita, $f \in End(E)$ tq $f^* = f^{-1}$. Mostre que todos os autovalores de f tem módulo 1

<u>Prova:</u> Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalor de $f \Rightarrow V_\lambda \neq 0 \Rightarrow \exists\, x \neq 0$ tq $f(x) = \lambda x$

$$\langle \lambda x, \lambda x \rangle = \langle f(x), f(x) \rangle = \langle x, f^*(f(x)) \rangle = \langle x, f^{-1}(f(x)) \rangle = \langle x, x \rangle$$

$$\therefore \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \langle x, x \rangle \iff \langle \lambda x, \lambda x \rangle - \langle x, x \rangle = 0 \iff \underbrace{\lambda \bar{\lambda}}_{|\lambda|^2} \langle x, x \rangle - \langle x, x \rangle = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{|\lambda| = 1} \Leftarrow |\lambda|^2 = 1 \Leftarrow |\lambda|^2 - 1 = 0 \underset{x \neq 0}{\Longleftarrow} \langle x, x \rangle (|\lambda|^2 - 1) = 0$$

$\square$