Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática – IME – Departamento de Análise – GAN
P1 de Matemática Discreta – 2024/01 – Turma: C1

Docente: Jones Colombo

08/05/2024

Questão 1: **a)** Prove, por indução,

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

b) Prove, por indução,

$$1 + \binom{n}{1}2 + \binom{n}{2}4 + \cdots + \binom{n}{n-1}2^{n-1} + \binom{n}{n}2^n = 3^n.$$

Você saberia dar uma prova combinatória para esta fórmula?

Solução: **a)** O caso base é $n = 0$

$$0^3 = 0 = \left[\frac{0(0+1)}{2}\right]^2, \text{ a fórmula é verdadeira.}$$

Suponha como hipótese de indução que o resultado é verdadeiro para $n = k$ e vamos tentar mostrar que ele vale para $n = k + 1$. Dizer que o resultado é verdadeiro para $n = k$ quer dizer que a igualdade abaixo vale para k

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$$

Somando $(k+1)^3$ de ambos os lados temos

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3.$$

Desenvolvendo o lado direito temos

$$\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2\left[k^2+4k+4\right]}{4},$$

é flagrante que a última expressão é igual $\left[\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\right]^2$ e o resultado é verdadeiro para $k+1$. Portanto, pelo PIM o resultado deve ser verdadeiro para n natural.

b) O caso base é $n = 0$

$$1 = 3^0, \text{ e claramente verdadeiro.}$$

Suponha como hipótese de indução que o resultado é verdadeiro para $n = k$ e vamos tentar provar para $k+1$. Dizer que o resultado é verdadeiro para $n = k$ quer dizer que a igualdade abaixo vale para k

$$1 + \binom{k}{1}2 + \binom{k}{2}4 + \cdots + \binom{k}{k-1}2^{k-1} + \binom{k}{k}2^k = 3^k.$$

Veja que para aparecer $3^{k+1} = 3 \times 3^k$ precisamos somar, de maneira esperta, 3 vezes esta igualdade. Somando uma com a outra

$$\begin{aligned}
1 + \binom{k}{1}2 + \binom{k}{2}4 + \cdots + \binom{k}{k-1}2^{k-1} + \binom{k}{k}2^k &= 3^k \\
1 + \binom{k}{1}2 + \binom{k}{2}4 + \cdots + \binom{k}{k-1}2^{k-1} + \binom{k}{k}2^k &= 3^k \\
2 + \binom{k}{1}4 + \binom{k}{2}8 + \cdots + \binom{k}{k-1}2^{k} + \binom{k}{k}2^{k+1} &= 2 \times 3^k
\end{aligned}$$

E somando o resultado novamente temos

$$\begin{aligned}
2 + \binom{k}{1}4 + \binom{k}{2}8 + \cdots + \binom{k}{n-1}2^{k} + \binom{k}{k}2^{k+1} &= 2 \times 3^k \\
1 + \binom{k}{1}2 + \binom{k}{2}4 + \binom{k}{3}8 + \quad \cdots \quad + \binom{k}{k}2^k &= 3^k \\
1 + \binom{k+1}{1}2 + \binom{k+1}{2}4 + \binom{k+1}{3}8 + \cdots + \binom{k+1}{k}2^k + \binom{k}{k}2^{k+1} &= 3 \times 3^k
\end{aligned}$$

Veja que $\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$. E portanto, o resultado deve ser verdadeiro para $n = k+1$. Portanto, pelo PIM o resultado deve ser verdadeiro para n natural.

Questão 2: Seja o conjunto universo $U = \{x \in \mathbb{N} : 0 \le x \le 9\}$ e os conjuntos A, B e C definidos como:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \; B = \left\{x \in \mathbb{N} : (x-1)(x-3)^5 = 0\right\} \text{ e } C = \{x \in \mathbb{N} : x \equiv 0 \mod 2\}.$$

a) Determine

$$i)\ A \cup B \qquad ii)\ A \Delta B \qquad iii)\ A \cap (B \cup C) \qquad iv)\ |A|, |B|, |C| \qquad v)\ \bar{A} \cup C.$$

b) Determine se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

$$\begin{array}{ll}
(i)\ \{\{1\}, \{1,2\}\} \in 2^{A \cup B} & (iii)\ \{(1,3)\} = (A - B) \times (B - A) \\
(ii)\ \{\{1\}, \{1,2\}\} \subset 2^{A \cup B} & (iv)\ 2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B.
\end{array}$$

Solução: Antes de começar veja que $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,3\}$ e $C = \{0,2,4,6,8\}$.
i) $A \cup B = A$, pois $B \subseteq A$. ii) $A \Delta B = (A-B) \cup (B-A) = \{2,4\} \cup \{\} = \{2,4\}$. iii) $A \cap (B \cup C) = \{1,2,3,4\} \cap (\{1,3\} \cup \{0,2,4,6,8\}) = \{1,2,3,4\}$. iv) $|A| = 4$, $|B| = 2$ e $|C| = 5$. v) $\bar{A} \cup C = \{5,6,7,8,9\} \cup \{0,2,4,6,8\} = \{0,2,4,5,6,7,8,9\}$.

b) (i) FALSO Os elementos de $2^{A \cup B}$ são os subconjuntos de A. Usamos $\in$ quando o elemento pertence ao conjunto, no caso $\{\{1\}, \{1,2\}\}$ é um subconjunto.
(ii) VERDADEIRO - pelo que já foi discutido em (i).

(iii) FALSO - pois $(B - A)$ é o conjunto vazio e, não faz sentido fazer $(A - B) \times (B - A)$.
(iv) VERDADEIRO - Em geral a afirmação é falsa, mas com $B \subset A$ e neste caso, $2^B \subset 2^A$, e $2^{A \cup B} = 2^A$, logo $2^{A \cup B} = 2^A = 2^A \cup 2^B$.

Questão 3: Quantas permutações dos naturais $1, 2, 3, 4, \ldots, 8, 9$ e 10 tem exatamente 4 dos números em suas posições originais?
Solução: Como não são fixado os 4 números que permanecem na posição original, devemos escolhê-los, o que pode ser feito de $\binom{10}{4}$ maneiras distintas. Agora temos 6 números que não podem estar na sua posição original, isto é, precisamos contar os desarranjos, de 6 elementos que é dado por

$$D_6 = 6!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right)$$

Esta conta é chata de fazer então calculamos $\frac{6!}{e} \cong 264,87$. Logo a quantidade de permutações procuradas é $\binom{10}{4} \times 265 = 55\,650$.

Questão 4: Seja $Z = \{(p, q) : p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{N}^*\}$. Considere a relação $\sim$ em Z definida por:

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \text{quando} \quad ad = bc.$$

1. Verifique se a relação $\sim$ é (i) reflexiva, (ii) anti-reflexiva (irreflexiva), (iii) simétrica, (iv) anti-simétrica e/ou (v) transitiva.

2. $\sim$ é uma relação de equivalência? Justifique.

3. Descreva o conjunto $[(7, 3)]$.

   Lembrete: $[(7, 3)]$ denota a classe de equivalência do elemento $(7, 3)$ de Z.

Solução: 1. i) é reflexiva, pois $(a, b) \sim (a, b) \Leftrightarrow ab = ba$. ii) não é anti-reflexiva (iii) é simétrica, pois se $(a, b) \sim (c, d)$ quando $ad = bc$, mas a igualdade é equivalente a $cb = da$, mas isso significa que $(c, d) \sim (a, b)$ (iv) não é anti-simétrica, pois $(5, 3) \sim (10, 6)$ e claramente não são iguais. (v) é transitivo, pois se, $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$, então vale $ad = bc$ e $cf = de$. Multiplicando, a primeira por f e a segunda por b temos $adf = bcf$ e $bcf = bde$, mas isso quer dizer que $adf = bde$, mas d assim como b e f pertencem a $\mathbb{N}^*$, de onde, tiramos que podemos simplificar ele na última igualdade. Tiramos disso que $af = be$, mas isso é equivalente a $(a, b) \sim (e, f)$. Isso mostra que vale a transitividade.

2. Sim, a relação é de equivalência, pois ela é reflexiva, simétrica e transitiva.

3. Vamos calcular alguns elementos na classe do elemento $(7, 3)$. Digamos que $(a, b) \in [(7, 3)]$, isto é, $3a = 7b$. O minimo múltiplo comum de 3 e 7 é 21. Logo

$$[(7, 3)] = \{(14, 6), (21, 9), (28, 12), \ldots\} = \{(7k, 3k) : k = 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Questão 5: Sejam n e k inteiros positivos. Considere esta equação:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k.$$

a) Quantas soluções existem se as variáveis x_i forem inteiros não negativos?
b) Quantas soluções existem se as variáveis x_i forem inteiros positivos?
c) Quantas soluções existem se as variáveis x_i só podem ter os valores 0 ou 1?

Solução: **a)** Para não ficar uma situação abstrata, vamos considerar uma equação concreta

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7$$

Uma solução seria: $(1, 2, 3, 0, 1)$. Queremos contar a quantidade de soluções. Considere palavras composta por: sete 1's e quatro | (barras). Podemos associar a esta solução de maneira biunívoca a seguinte palavra,

$$1|11|111||1 \leftrightarrow (1, 2, 3, 0, 1)$$

Veja que 1 é a quantidade de 1 até a primeira |, entre a 1ª e a 2ª | temos dois 1's e assim sucessivamente. Veja que todas as possíveis distribuições das barras | entre os 1's nos fornece (todas) as possíveis soluções da equação. Então o que precisamos contar é a quantidade de palavras que podemos fazer dispondo de 7 1's e 4 |. Mas já sabemos contar tais tipos de palavras, que no nosso caso é

$$\frac{(7+4)!}{7!4!} = \frac{(7+(5-1))!}{7!4!} = \binom{7-(5-1)}{7} = \left(\binom{5}{7}\right).$$

Portanto, no caso geral, a solução é $\left(\binom{n}{k}\right)$.

b) Neste caso x_i não podem ser zero, logo uma solução da equação acima seria $(1, 1, 3, 1, 1)$. Com esta restrição as | não podem aparecer nem no início, nem no final das palavras e, também não podem aparecer repetidas. Apesar da dificuldade ainda podemos contar o número de tais palavras, mas não faremos desta forma. Considere uma mudança de coordenadas, que é $x_i = y_i + 1$, nesta situação quando $x_i \geq 1$, os $y_i \geq 0$, a equação toma a forma

$$(y_1 + 1) + (y_2 + 1) + (y_3 + 1) + (y_4 + 1) + (y_5 + 1) = 7 \Leftrightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 7 - 5 = 2.$$

Procedendo desta forma no caso geral, temos que a quantidade de soluções é dado por

$$\left(\binom{n}{k-n}\right) = \binom{n+(k-n)-1}{k-n} = \binom{k-1}{k-n}.$$

c) Nesta situação, a equação só terá solução se $n \geq k$. E precisamos escolher entre as n variáveis k delas que serão iguais a 1. Isto pode ser feito de,

$$\binom{n}{k} \text{ formas distintas.}$$
