

Nome: \_\_\_\_\_

Matemática Discreta — 2025/01 — Turma B1 — Prof. José Koiller

**Prova 2** (02/06/2025)

- 
- É recomendável fazer a avaliação a lápis, mas escreva **a caneta** as suas **respostas finais**, bem como o **número de cada questão e item**.
  - **É proibido:** consultar livros ou anotações; comunicar-se com colegas; usar calculadora, celular, ou qualquer dispositivo eletrônico.
  - **É necessário justificar as suas respostas.** Exiba seus cálculos e/ou raciocínio. Respostas finais sem justificativa, ainda que corretas, não receberão crédito.
  - Empregue a **língua portuguesa** e a **notação matemática** de maneira correta.

BOA PROVA!

---

0,5 pts.

**Q0.** Capricho, organização, clareza e legibilidade nas demais questões.

3,0 pts.

- Q1.** (a) Obtenha a solução geral da relação de recorrência  $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$ .  
(b) Obtenha a solução geral da relação de recorrência  $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n$ .  
(c) Verifique que  $a_n = 3n + 8$  é uma solução da relação de recorrência

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 3n + 2.$$

- (d) Obtenha a solução geral da relação de recorrência

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 3 \cdot 2^n - (3n + 2).$$

*Dica:* Use os itens anteriores.

1,5 pts.

**Q2.** Para  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $a_n$  o número de sequências binárias de comprimento  $n$  que **contém** três 0's consecutivos. (*Sequências binárias* são sequências de 0's e 1's.)

- (a) Encontre uma relação de recorrência para  $(a_n)$ . *Justifique a sua resposta.*  
(b) Quais são as condições iniciais pertinentes?

0,5 pts.

**Q3.** Considerando uma relação  $R$  em um conjunto  $A$ , dê a *definição* das seguintes propriedades:  
(a) reflexividade; (b) simetria; (c) antissimetria; (d) transitividade.

1,5 pts.

**Q4.** (Baseada nos exercícios 9.5.14 e 9.5.38 de Rosen, 8a Edição.)

Seja  $S$  o conjunto das sequências de “caracteres”, em que cada caractere é uma letra maiúscula (A–Z) ou uma letra minúscula (a–z). Não admitimos letras com acentuação, cedilhas, nem algarismos numéricos. Assim, por exemplo, diScREtA  $\in S$  e AbCdeF  $\in S$ , mas *matemática*  $\notin S$ , *Computação*  $\notin S$  e *abc123*  $\notin S$ .

Defina a relação  $\sim$  em  $S$  da seguinte forma: para  $x, y \in S$ , temos  $x \sim y$  se, e somente se, as sequências  $x$  e  $y$  têm o mesmo comprimento e, para cada caractere na sequência  $x$ , o caractere na posição correspondente em  $y$  representa a mesma letra, seja maiúscula ou seja minúscula. Assim, por exemplo, diScREtA  $\sim$  Discreta, mas lua  $\not\sim$  ula e par  $\not\sim$  pares.

- (a) Mostre que  $\sim$  é uma relação de equivalência.  
(b) Exiba explicitamente o conjunto [Lua], isto é, a classe de equivalência da sequência Lua com respeito à relação  $\sim$ .

*Mais uma questão no verso...*

3,0 pts.

**Q5.** Considere o conjunto  $A = \{a, b, c, d\}$ . Para cada relação em  $S$  dada abaixo, trace o grafo direcionado que a representa. Em seguida, responda as perguntas.

(a)  $R_1 = \{(a, a), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, c), (d, d)\}$ .

$R_1$ é reflexiva?	$R_1$ é simétrica?	$R_1$ é anti-simétrica?	$R_1$ é transitiva?
Sim <input type="checkbox"/> Não <input type="checkbox"/>	Sim <input type="checkbox"/> Não <input type="checkbox"/>	Sim <input type="checkbox"/> Não <input type="checkbox"/>	Sim <input type="checkbox"/> Não <input type="checkbox"/>

Justifique cada resposta negativa por meio de um “contra-exemplo”:

(b)  $R_2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c), (d, d)\}$ .

$R_2$ é reflexiva?	$R_2$ é simétrica?	$R_2$ é anti-simétrica?	$R_2$ é transitiva?
Sim <input type="checkbox"/> Não <input type="checkbox"/>	Sim <input type="checkbox"/> Não <input type="checkbox"/>	Sim <input type="checkbox"/> Não <input type="checkbox"/>	Sim <input type="checkbox"/> Não <input type="checkbox"/>

Justifique cada resposta negativa por meio de um “contra-exemplo”:

(c)  $R_3 = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$ .

$R_3$ é reflexiva?	$R_3$ é simétrica?	$R_3$ é anti-simétrica?	$R_3$ é transitiva?
Sim <input type="checkbox"/> Não <input type="checkbox"/>	Sim <input type="checkbox"/> Não <input type="checkbox"/>	Sim <input type="checkbox"/> Não <input type="checkbox"/>	Sim <input type="checkbox"/> Não <input type="checkbox"/>

Justifique cada resposta negativa por meio de um “contra-exemplo”:

---

## Respostas:

- Q1.** (a)  $a_n^H = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot n2^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .  
(b)  $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot n2^n + \frac{1}{8}n^22^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .  
(c) Substitua  $a_n = 3n + 8$  no lado esquerdo da relação, e verifique que o resultado é igual ao lado direito  $(3n + 2)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  
(d) Pelo “princípio de superposição”,  $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot n2^n + \frac{3}{8}n^22^n - (3n + 8)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- Q2.** (a)  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + 2^{n-3}$ , para  $n \geq 4$ .  
(b)  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = 1$ . (Se preferir, considere as condições  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 0$ . Neste caso, a recorrência acima vale para  $n \geq 3$ .)
- Q3.** (a)  $\forall x \in A, x R x$ . (Lembre que ‘ $x R x$ ’ é o mesmo que ‘ $(x, x) \in R$ ’.)  
(b)  $\forall x, y \in A, x R y \implies y R x$ . (Novamente, ‘ $x R y$ ’ é o mesmo que ‘ $(x, y) \in R$ ’.)  
(c)  $\forall x, y \in A, (x R y \text{ e } y R x) \implies x = y$ .  
(Equivalentemente,  $\forall x, y \in A, (x R y \text{ e } x \neq y) \implies y \not R x$ .)  
(d)  $\forall x, y, z \in A, (x R y \text{ e } y R z) \implies x R z$ .
- Q4.** (b)  $[Lua] = \{lua, luA, lUa, lUA, Lua, LuA, LUa, LUA\}$ .
- Q5.** Neste “gabarito”, faltam os grafos direcionados...
- (a)  $R_1$  não é simétrica. Por exemplo,  $a R_1 c$ , mas  $c \not R_1 a$ .  
*Obs.:*  $R_1$  é uma relação de ordem parcial: é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.
- (b)  $R_2$  não é anti-simétrica. Por exemplo,  $a R_2 b$  e  $b R_2 a$  (onde  $a$  e  $b$  são elementos *distintos* de  $A$ ).  
*Obs.:*  $R_2$  é uma relação de equivalência: é reflexiva, simétrica e transitiva.
- (c)  $R_3$  não é reflexiva. Por exemplo,  $a \not R_3 a$ .  
 $R_3$  não é simétrica. Por exemplo,  $a R_3 b$ , mas  $b \not R_3 a$ .  
 $R_3$  não é simétrica. Por exemplo,  $a R_3 b$  e  $b R_3 c$ , mas  $a \not R_3 c$ .