Universidade Federal Fluminense

Instituto de Matemática e Estatística - IME
Departamento de Análise - GAN
Prof.ª Yuri Ki

1ª Prova de Matemática Discreta
2023.1 - 17/05/2023

1	1,5	
2	2	
3	3,5	
4	3	
Total	10	

Nome: Kauã P. Geddes

Observações: Resultados apresentados sem justificativas do raciocínio não serão considerados. Não é permitido sair da sala durante a prova. Não é permitido o uso de calculadora. O celular deve estar desligado e **guardado.**

Questão 1 (1,5 pontos)

Seja $A = \{\emptyset, \{1\}, 2, \{1,2\}\}$. Verifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas. No caso de ser falsa, reescreva a afirmação de modo a torná-la verdadeira.

F (a) $1 \in A$ $1 \notin A$

V (b) $\emptyset \in A$

F (c) $\{1\} \subset A$ $1 \in A$

V (d) $\{\{1\}\} \subset \mathcal{P}(A)$

Lê-se: o conj. com elemento {1} é subconjunto do conjunto de todos os subconj. de A

V (e) $\{2, \{1\}\} \in \mathcal{P}(A)$

F (f) $|\mathcal{P}(A)| = 15$ $|P(A)| = 16$

Questão 2 (2 pontos)

(a) De quantas maneiras podemos fazer uma lista de três números inteiros (a, b e c) em que $0 \leq a,\, b,\, c \leq 9$ e $a + b + c$ é par?

$(P \cdot P \cdot P) + (P \cdot P \cdot I) = (5 \cdot 5 \cdot 5) + (5 \cdot 5 \cdot 5) = 250$

(b) De quantas maneiras podemos fazer uma lista de três números inteiros (a, b e c) em que $0 \leq a,\, b,\, c \leq 9$ e $a \cdot b \cdot c$ é par?

$(P \cdot X \cdot X) = (5 \cdot 10 \cdot 10) = 500$

PROVA FEITA

Questão 3 (3,5 pontos)

Usando o princípio de indução

(a) Escolha e prove APENAS UM dos itens (i) ou (ii).

(i) $\dfrac{n}{6} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n^3}{3} \in \mathbb{Z}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$, para todo inteiro positivo n.

$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! + (n+1)(n+1)! = [(n+1)+1] - 1$

$(n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = [(n+1)+1]! - 1$

$(n+1)! + (n+1)(n+1)! = [(n+1)+1]!$

$(n+1)![1 + (n+1)] = (n+2)!$

$(n+1)!(n+2) = (n+2)!$

$\dfrac{(n+2)!}{(n+1)!} = (n+2)$

$n+2 = n+2$

(b) Mostre que todo natural $n \geq 2$ é primo ou pode ser escrito como produto de números primos.

Questão 4 (3 pontos)

Obtenha a solução das equações de recorrência

(a) Escolha e determine a solução de APENAS UM dos itens (i) ou (ii).

(i) $y_{n+1} + \dfrac{y_n^2}{3} = \dfrac{7}{3}$ $\quad y_0 = \sqrt{10}$ $\quad y_1 + \dfrac{10}{3} = \dfrac{7}{3}$ $\quad y_1 = 1$

(ii) $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 0$ $\quad y_0 = 2$ $\quad y_1 = 9$ $\quad y_2 = 36$

$y_{n+2} - 54 + 18 = 0$

$y_{n+2} = 36$

(b) $y_{n+1} + n\, y_n = 2n + 2$ $\quad y_1 = 4$

$x + 4 = 4$ $\quad y_2 = 0$