Álgebra Linear. 2024-1

Avaliação P3.

Turma **C1**.

Prof. Bely R Morales

UFF

Problema 1: (3 Pontos) Analise a veracidade das seguintes afirmações. Justifique em cada caso.

a) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz quadrada simétrica então todos os autovalores de A são números reais.

b) O conjunto formado pelos vetores $\{a_1 = (1, -1, 1), a_2 = (1, 1, 0), a_3 = (-1, 1, 2)\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ equipado com o produto escalar usual.

c) Sejam E um $\mathbb{K}$-espaço com produto escalar e V um subespaço tais $\dim E = 4$ e $\dim V = 3$ então $\dim V^{\perp} = 1$.

Problema 2: (2 Pontos) Seja E um $\mathbb{K}$-espaço com produto escalar $x, y \in E$ dois vetores ortogonais, i.e., $x \perp y$:
Mostre que a seguinte equação é satisfeita:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Dica: Lembre que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Problema 3: (5 Pontos) Calcule, se existe, uma matriz diagonal D e uma matriz invertível P tais que $D = P^t A P$.

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 1:

a) Verdadeiro Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é simétrica então todos os autovalores de A são números reais

↳ $A \in M_n(\mathbb{R})$ é simétrica $\Longrightarrow$ A representa um endomorfismo autoadjunto f de $\mathbb{R}^n$ em base ortonormal $\Rightarrow$ todos os autovalores de f são reais.

b) Verdadeiro O conjunto $\{a_1=(1,-1,1),\ a_2=(1,1,0),\ a_3=(-1,1,2)\}$ é base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ com o produto escalar usual.

$$\langle a_1,a_2\rangle = \langle (1,-1,1),(1,1,0)\rangle = 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0 \ \checkmark$$
$$\langle a_1,a_3\rangle = \langle (1,-1,1),(-1,1,2)\rangle = 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 2 = 0 \ \checkmark$$
$$\langle a_2,a_3\rangle = \langle (1,1,0),(-1,1,2)\rangle = 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 0\cdot 2 = 0 \ \checkmark$$

c) Verdadeiro Sejam E K-espaço com produto escalar, V um subespaço tq $\dim E = 4$ e $\dim V = 3$ então $\dim V^\perp = 1$

$$E = V \oplus V^\perp \Rightarrow \underset{4}{\dim E} = \underset{3}{\dim V} + \dim V^\perp \Longrightarrow \dim V^\perp = 1$$

$$4 = 3 + \dim V^\perp$$

Problema 2: Seja E K-espaço com produto escalar, $x,y \in E$, $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Prova: $x \perp y \Longleftrightarrow \langle x,y\rangle = 0$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \underbrace{\langle x,y\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y,x\rangle}_{=0} + \langle y,y\rangle$$

porque $x \perp y$

$$\therefore \|x+y\|^2 = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$\square$

Problema 3: Calcule se existem D diagonal e P inversível tq $D = P^t A P$ onde
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A \in M_4(\mathbb{R})$ é simétrica $\Rightarrow$ Representa endomorfismo autoadjunto de $\mathbb{R}^4$ na base canônica e_1,e_2,e_3,e_4 com o produto escalar usual

$\Downarrow$

A é diagonalizável em base ortonormal

Calculando o polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2[(4-\lambda)^2 - 16]$$

$$p(\lambda) = \lambda^2[\lambda^2 - 8\lambda + 16 - 16] = \lambda^2(\lambda^2 - 8\lambda) = \lambda^3(\lambda - 8) \Rightarrow \text{Autovalores}$$

$\lambda = 0 \longrightarrow$ multiplicidade 3

$\lambda = 8 \longrightarrow$ multiplicidade 1

Calculando autoespaços:

$$V_0 = Ker(A - 0I) = Ker\ A$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ \cancel{4} & \cancel{4} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 4x_1 + 4x_2 = 0 \Downarrow x_1 + x_2 = 0 \Downarrow x_2 = -x_1$$

$\therefore V_0 = \{(x_1, -x_1, x_3, x_4) : x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$

$V_0 = \{x_1(1,-1,0,0) + x_3(0,0,1,0) + x_4(0,0,0,1)\}$

$V_0 = \langle\{a_1 = (1,-1,0,0),\ a_2 = (0,0,1,0),\ a_3 = (0,0,0,1)\}\rangle$

$\{a_1, a_2, a_3\}$ base de V_0

$\langle a_1, a_2\rangle = \langle(1,-1,0,0),(0,0,1,0)\rangle = 0$

$\langle a_1, a_3\rangle = \langle(1,-1,0,0),(0,0,0,1)\rangle = 0$

$\langle a_2, a_3\rangle = \langle(0,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle = 0$

A base $\{a_1, a_2, a_3\}$ é ortogonal $\Longleftarrow$

$\Downarrow$

$v_1 = \dfrac{a_1}{\|a_1\|}$, $v_2 = \dfrac{a_2}{\|a_2\|}$, $v_3 = \dfrac{a_3}{\|a_3\|}$ é uma base ortonormal de V_0

$\|a_1\| = \sqrt{2}$ $\|a_2\| = 1$ $\|a_3\| = 1$ $\Rightarrow \left\{v_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), v_2 = (0,0,1,0), v_3 = (0,0,0,1)\right\}$

é base ortonormal de V_0

Calculando a base de V_8 : $V_8 = Ker(A - 8I)$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ \cancel{4} & \cancel{-4} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x_1 + 4x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \\ -8x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \\ -8x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0 \end{cases}$$

$\therefore V_8 = \{(x_1, x_1, 0, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\} = \langle(1,1,0,0)\rangle$

$a_4 = (1,1,0,0)$ é base de V_8

$\Downarrow$

$v_4 = \dfrac{a_4}{\|a_4\|}$ é base de ortonormal de V_8 $\Longleftarrow$ $\|a_4\| = \sqrt{2}$, $v_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$

Logo os vetores $\left\{v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), v_2 = (0,0,1,0), v_3 = (0,0,0,1), v_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)\right\}$ são uma base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ formada por autovetores de A

Logo temos $D = P^t A P$ onde $D = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&8 \end{pmatrix}$ e $P = MMC(\{v_i\}, \{e_i\}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4&4&0&0 \\ 4&4&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = P^t \cdot A \cdot P$$