

Nome:\_\_\_\_\_

11/11/2024

**Questão 1:** a) Prove, por indução,

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

b) Prove, por indução, que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $4^n + 6n - 1$  é divisível por 9.

---

**Questão 2:** Seja o conjunto universo  $U = \{x \in \mathbb{N} : 0 \leq x \leq 9\}$  e os conjuntos A, B e C definidos como:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{b \in U : (b^2 - 5b + 6)(b - 7)^5 = 0\} \text{ e } C = \{y \in U : y \equiv 0 \pmod{2}\}.$$

a) Determine

$$i) A \cup B \quad ii) A \Delta B \quad iii) A \cap (B \cup C) \quad iv) |A|, |B|, |C| \quad v) \bar{A} \cup C.$$

b) Determine se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

$$(i) \{\{1\}, \{1, 2\}\} \in 2^{A \cup B} \quad (iii) \{(1, 3), (4, 7)\} \subset (A - B) \times (B - A) \\ (ii) \{\{1\}, \{1, 2\}\} \subset 2^{A \cup B} \quad (iv) 2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B.$$

---

**Questão 3:** Se Permutarmos de todas as formas possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6 e 7 e escrevemos os números assim formados em ordem crescente. Determine

- que lugar ocupa o 62417.
- que número ocupa a posição 66º lugar.
- qual o 166º algarismo escrito.
- qual o total da soma de todos os números que nós escrevemos.

---

**Questão 4:** Sejam  $a, b \in \mathbb{Z}$ , dizemos que  $a \equiv b \pmod{7}$  se, e só se,  $7|(a - b)$ .

- Verifique se a relação  $\pmod{7}$  é (i) reflexiva, (ii) anti-reflexiva (irreflexiva), (iii) simétrica, (iv) anti-simétrica e/ou (v) transitiva.
- $\sim$  é uma relação de equivalência? Justifique.
- Descreva o conjunto  $[37]$ .

---

**Questão 5:** Sejam  $n$  e  $k$  inteiros positivos. Considere esta equação:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k.$$

- Quantas soluções existem se as variáveis  $x_i$  forem inteiros não negativos?
- Quantas soluções existem se as variáveis  $x_i$  forem inteiros positivos?
- Quantas soluções existem se as variáveis  $x_i$  só podem ter os valores 0 ou 1?
- Quantos termos tem

$$(x + y + z)^8 = \sum_{a+b+c=n} \binom{8}{a \ b \ c} x^a y^b z^c?$$

---

Boa Prova!