

Questão	Pontos	Notas
1	3	
2	2	
3	2,5	
4	2,5	
Total	10	

Nome: _____

Observações: Resultados apresentados sem justificativas do raciocínio não serão considerados. Não é permitido sair da sala durante a prova. Não é permitido o uso de calculadora. O celular deve estar desligado e **guardado**.

Questão 1 (3 pontos)

Prove as afirmativas abaixo, *usando indução*.

- (a) $2^{2n} - 1$ é divisível por 3, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Todo número natural $n \geq 8$ pode ser escrito como uma soma de 3's e 5's.
Exemplos: $8 = 3 + 5$, $14 = 3 + 3 + 3 + 5$.

Questão 2 (2 pontos)

Obtenha a solução da equação de recorrência

$$y_{n+2} - y_n = n \cdot 2^n, \quad \text{com } y_0 = \frac{1}{9} \text{ e } y_1 = \frac{4}{9}.$$

Questão 3 (2,5 pontos)

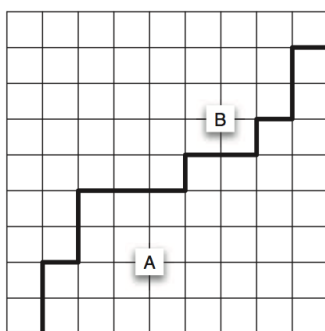
Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e a relação

$$R = \{(x, y) \in A \times A : 3 \mid (y - x)\}.$$

- (a) Exiba o *grafo orientado* e a *matriz* que representam a relação R .
- (b) Verifique se a relação R é (i) reflexiva, (ii) anti-reflexiva (irreflexiva), (iii) simétrica, (iv) anti-simétrica e/ou (v) transitiva. Justifique cada item.
- (c) R é uma relação de equivalência? Caso afirmativo, quais são suas classes de equivalência? Exiba explicitamente cada uma delas.

Questão 4 (2,5 pontos)

Considere o reticulado da figura abaixo. Um *caminho admissível* é um caminho que liga o canto inferior esquerdo ao canto superior direito do reticulado, consistindo de exatamente 18 passos: nove para a direita, e nove para cima. Um caminho assim é exemplificado na figura.



- (a) Quantos caminhos admissíveis existem neste reticulado?
- (b) Quantos caminhos admissíveis *passam* pelo ponto A ?
- (c) Quantos caminhos admissíveis *não* passam pelo ponto A , *nem* pelo ponto B ?