

Nome:_____

06/12/2023

Questão 1: (3pts) Resolva os itens abaixo. Justifique suas respostas.

(a) Determine o número de soluções inteiras e estritamente positivas da equação

$$x + y + z + w = 27,$$

tais que $x \geq 3$ e $w \geq 2$.

(b) Determine o coeficiente de x^9 no desenvolvimento de $\left(\frac{x}{2} - x^2\right)^8$.

(c) De quantas formas é possível arranjar as letras da palavra

IRREDUTIBILIDADE

de forma que as vogais fiquem consecutivas e as consoantes também?

Questão 2: (2pts) Prove, por indução, que se $x + \frac{1}{x}$ é um número inteiro, então $x^n + \frac{1}{x^n}$ também é um número inteiro.

Questão 3: (1,5pt) Considere os conjuntos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

(a) Quantas funções $f : A \rightarrow B$ existem?

(b) Quantas funções $f : A \rightarrow B$ injetoras existem? Quantas funções $f : A \rightarrow B$ sobrejetoras existem?

(c) Quantas funções $f : B \rightarrow A$ injetoras existem? Quantas funções $f : B \rightarrow A$ sobrejetoras existem?

Questão 4: (2pts) Seja $S = \{a, b, c, d\}$. Trace o grafo orientado que representa cada relação em S dada abaixo. Em seguida, determine se a relação dada é (i) reflexiva, (ii) simétrica, (iii) anti-simétrica, (iv) transitiva.

(a) $R_1 = \{(a, a), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, c), (d, d)\}$.

(b) $R_2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c), (d, d)\}$.

(c) $R_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$.

(d) $R_4 = \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, b)\}$.

Questão 5: (1,5pt) Obtenha a solução da equação de recorrência

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0, \text{ com } x_0 = 1 \text{ e } x_1 = 4.$$

Boa Prova!