PCC — 2023/01 — Turma A1 — Prof. José Koiller

Prova 1 (25/05/2023)

- *É recomendável fazer a avaliação a lápis, mas escreva* ***a caneta*** *as suas* ***respostas finais****, bem como o* ***número de cada questão e item****.*
- ***É proibido:*** *consultar livros ou anotações; comunicar-se com colegas; usar calculadora, celular, ou qualquer dispositivo eletrônico.*
- ***É necessário exibir seus cálculos e/ou raciocínio.*** *Respostas finais sem justificativa, ainda que corretas, não receberão crédito.*
- *Empregue a* ***língua portuguesa*** *e a* ***notação matemática*** *de maneira correta. Apresente suas resoluções de forma* ***clara*** *e* ***legível!***

BOA SORTE!

3,0 pts. **Q1.** Prove APENAS DUAS das seguintes afirmativas, usando o Princípio de Indução.

(a) Para todo inteiro positivo n, vale $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.
Dica: A fórmula $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ pode ser útil.

(b) Para todo número natural n, vale $0! + 1! + 2! + \cdots + n! \leqslant (n+1)!$

(c) Para todo número natural n, o inteiro $2^{2n} - 1$ é um múltiplo de 3.

1,5 pts. **Q2.** Obtenha a solução da relação de recorrência

$$a_{n+2} - 8a_{n+1} + 16a_n = 0, \qquad \text{com } a_0 = 3 \text{ e } a_1 = 8.$$

2,5 pts. (a) 1 pt. (b) 1 pt. (c) 0,5 pts. **Q3.** Obtenha a solução geral de cada uma das relações de recorrência a seguir:

(a) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 4n$.

(b) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 10 \cdot 2^n$.

(c) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 4n + 10 \cdot 2^n$. *Dica:* Use (a) e (b).

2,0 pts. **Q4.** (a) Temos duas caixas distintas: a azul (A) e a vermelha (V). De quantas maneiras uma coleção de 40 livros pode ser guardada nessas caixas, sendo *irrelevante* a ordem dos livros em cada uma? É concebível que uma das caixas fique vazia.

(b) Temos duas prateleiras distintas: a de cima (C) e a de baixo (B). De quantas maneiras uma coleção de 40 livros pode ser organizada nessas prateleiras, sendo *relevante* a ordem dos livros em cada uma? É concebível que uma das prateleiras fique vazia.

1,0 pt. **Q5.** Considere a tarefa de ladrilhar uma faixa de 1 centímetro de largura. Há ladrilhos quadrados de 1 cm × 1 cm, disponíveis nas cores branca e preta. Há, também, ladrilhos retangulares de 2 cm × 1 cm, disponíveis nas cores azul, cinza e verde.

Denote por a_n o número de maneiras distintas de ladrilhar uma faixa de n centímetros de comprimento.

(a) Quanto vale a_1? Quanto vale a_2? Justifique sucintamente.

(b) Obtenha uma relação de recorrência que a sequência dos a_n deva satisfazer. Justifique a sua resposta claramente, em termos dos Princípios de Contagem discutidos em aula.

No verso: questões para pontuação adicional. . .

Resolva ***apenas uma*** das questões a seguir, valendo pontuação adicional.

1,0 pt. **Q6.** (Representação binária de um número natural)

Prove *por indução* que todo número inteiro positivo pode ser escrito como uma soma de potências *distintas* de 2 (por exemplo, $11 = 2^3 + 2^1 + 2^0$).

Dica 1: Use indução forte. No passo de indução, para provar que a afirmativa vale para um inteiro $k + 1$, considere separadamente os casos em que $k + 1$ é par e em que $k + 1$ é ímpar. Quando $k + 1$ é par, observe que $(k + 1)/2$ é um número inteiro.

Dica 2: Uma soma de potências distintas de 2 pode ser representada usando a notação $c_p 2^p + c_{p-1} 2^{p-1} + \cdots + c_1 2^1 + c_0 2^0$, onde cada c_j é igual a 0 ou 1. No exemplo acima, temos $11 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$.

1,0 pt. **Q7.** Prove que todo número inteiro positivo pode ser escrito como uma soma de números de Fibonacci *distintos*.

Por exemplo, $20 = 2 + 5 + 13$ (onde 2, 5 e 13 são números da sequência de Fibonacci). Embora possamos escrever $20 = 2 + 5 + 5 + 8$, isso não ilustra o resultado, pois o número 5 aparece duas vezes nesta soma.

1,0 pt. **Q8.** (Princípio da Adição)

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos dois-a-dois disjuntos, e $X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Prove que

$$|X| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|,$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, partindo da hipótese de que este resultado valha para $n = 2$.

0,5 pts. **Q9.** Temos duas caixas *idênticas*. De quantas maneiras uma coleção de 40 livros pode ser guardada nessas caixas, sendo *irrelevante* a ordem dos livros em cada uma? É concebível que uma das caixas fique vazia.

Observação: Como as caixas são idênticas, permutá-las não leva a uma configuração distinta. Considerando, por exemplo, o problema de "guardar os elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ em duas caixas iguais," as configurações 1/234 e 432/1 são idênticas.

Respostas:

Q2. Resposta: $a_n = 3 \cdot 4^n - n \cdot 4^n$.

Observação: A solução geral é $a_n = C_1 \cdot 4^n + C_2 \cdot n \cdot 4^n$.

Q3. (a) $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n + 2n + 3$.

(b) $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n - 5n \cdot 2^n$.

(c) $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n + 2n + 3 - 5n \cdot 2^n$.

Q4. (a) 2^{40}. (b) $41!$

Q5. (a) $a_1 = 2$ e $a_2 = 2^2 + 3 = 7$. *Observação*: Faria sentido definir $a_0 = 1$.

(b) $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$.

Observação: A solução explícita do PVI assim obtido é $a_n = (3^{n+1} + (-1)^n)/4$.

Q9. A resposta é 2^{39}.

Uma forma de raciocinar é a seguinte: Escolha arbitrariamente uma das caixas para colocar um dos livros (chame-o de "livro 1", digamos). A escolha é irrelevante, já que as caixas são idênticas. Agora, para cada um dos 39 livros restantes, há duas opções: guardá-lo na caixa do "livro 1", ou guardá-lo na outra caixa.

Observação: Este problema seria mais complicado se tivéssemos três ou mais caixas. Para n caixas, com $n \geqslant 3$, a resposta *não* é $n^{40}/n!$ (note que este número pode sequer ser inteiro...).