Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística

Prova 2 - GAN140 - Álgebra Linear - Turmas A1 e M1 - 2024.01
Profª Cláudia Ossanai e Profª Míriam Abdon
Todos os cálculos devem ser apresentados, fazem parte da avaliação.

03/06/2024

Nome:	Nota:

1. Seja $V = \mathbb{R}^4$, com as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar usuais, e os subespaços vetoriais de V abaixo:

$$G = ger\{(2,1,3,1),(2,2,4,0),(3,2,5,1)\};$$
$$W = \{(x,2x,3x,-x) \in \mathbb{R}^4 \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

   (a) Obter **explicitamente** o subespaço Soma S de G e W, $S = G + W$, uma base para S e sua dimensão (1,2 ponto)
   (b) Obter **explicitamente** o subespaço Interseção I de G e W, $I = G \cap W$, uma base para I e sua dimensão (1,2 ponto)
   (c) Obter **explicitamente** o complemento ortogonal $G^{\perp}$, uma base para $G^{\perp}$ e sua dimensão (1,2 ponto)

2. Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$:

$$T(x,y,z,t) = (2x + 4y + z + t\ ,\ x + 2y + 2z - t\ ,\ x + 2y + z + t)$$

   (a) Determine **explicitamente** o Núcleo de T, uma base e sua dimensão (1,2 pontos);
   (b) Determine **explicitamente** a Imagem de T, uma base e sua dimensão (1,2 pontos);
   (c) A transformação T é injetora? É sobrejetora? **Justifique** suas respostas (0,6 ponto).

3. Determine uma transformação linear T tal que:

$$T(1,1,1) = (0,2,2) \qquad T(1,1,0) = (3,1,4) \qquad T(0,1,1) = (-1,0,-1)$$

   Apresente as etapas do desenvolvimento (1,4 ponto).

4. Sejam as bases $\mathbf{A} = \{(3,1),(2,1)\}$ e $\mathbf{B} = \{(0,1),(1,2)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$T(x,y) = (x + 2y\ ,\ 3x + 4y)$$

   (a) **PROVE** que T(x,y) é um operador **linear** (1,0 ponto);
   (b) Determinar a matriz do operador T da base $\mathbf{A}$ para $\mathbf{B}$, $[\mathbf{T}]_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}}$ (1,0 ponto).