Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática – IME – Departamento de Análise – GAN
Gabarito da P1 de Matemática Discreta – 2024/02 – Turma: A1

Docente: Jones Colombo

11/11/2024

Questão 1: **a)** Prove, por indução,

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

b) Prove, por indução, que para todo $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 6n - 1$ é divisível por 9.

Solução: Vamos provar, ambos os itens por indução: **a)** O caso base é $n = 1$

$$1 \cdot 2 = 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}, \text{ a fórmula é verdadeira.}$$

Suponha, como hipótese de indução que o resultado é verdadeiro para $n = k$, isto é,

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k \cdot (k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

e vamos somar de ambos os lados, $(k+1)(k+2)$, obtemos

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k \cdot (k+1) + (k+1)(k+2) &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)[k+3]}{3} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \end{aligned}$$

Observe que, tanto o lado direito, como o lado esquerdo da igualdade, é relação quando $n = k+1$. Portanto, é verdadeira e pelo PIM o resultado deve ser verdadeiro para todo natural maior ou igual a 1.

b Vamos começar verificando para $(n = 0)$, caso base, $9 | (4^0 + 60 - 1) = 0$, é verdadeiro.

Suponha, como hipótese de indução que o resultado é verdadeiro para $n = k$, isto é, existe um inteiro d tal que $4^k + 6k - 1 = 9d$, isto é, $4^k = 9d - 6k + 1$. Queremos verificar que 9 divide $4^{k+1} + 6(k+1) - 1$, mas

$$4^{k+1} + 6(k+1) - 1 = 4 \cdot 4^k + 6k + 6 - 1 = 4 \cdot (9d - 6k + 1) + 6k + 6 - 1 = 36d - 24k + 4 + 6k + 6 - 1 = 9(4d - 2k + 1)$$

daí, 9 divide $4^{k+1} + 6(k+1) - 1$. Portanto, pelo PIM o resultado é verdadeiro para todo n natural.

Questão 2: Seja o conjunto universo $U = \{x \in \mathbb{N} : 0 \leq x \leq 9\}$ e os conjuntos A, B e C definidos como:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \; B = \left\{b \in U : (b^2 - 5b + 6)(b - 7)^5 = 0\right\} \text{ e } C = \{y \in U : y \equiv 0 \mod 2\}.$$

a) Determine

$$i)\ A \cup B \quad ii)\ A \Delta B \quad iii)\ A \cap (B \cup C) \quad iv)\ |A|, |B|, |C| \quad v)\ \bar{A} \cup C.$$

b) Determine se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

(i) $\{\{1\}, \{1, 2\}\} \in 2^{A \cup B}$ (iii) $\{(1, 3), (4, 7)\} \subset (A - B) \times (B - A)$
(ii) $\{\{1\}, \{1, 2\}\} \subset 2^{A \cup B}$ (iv) $2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$.

Solução: Antes de começar veja que $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 7\}$ e $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Agora é só fazer as operações:
i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7\}$
ii) $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 4\} \cup \{7\} = \{1, 4, 7\}$.
iii) $A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\} \cap (\{2, 3, 7\} \cup \{0, 2, 4, 6, 8\}) = \{2, 3, 4\}$.
iv) $|A| = 4$, $|B| = 3$ e $|C| = 5$.
v) $\bar{A} \cup C = \{5, 6, 7, 8, 9\} \cup \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
b) (i) FALSO Os elementos de $2^{A \cup B}$ são os subconjuntos de $A \cup B$. Usamos $\in$ quando o elemento pertence ao conjunto, no caso $\{\{1\}, \{1, 2\}\}$ é um subconjunto.
(ii) VERDADEIRO - pelo que já foi discutido em (i).
(iii) FALSO - como já vimos $(A - B) = \{1, 4\}$ e $(B - A) = \{7\}$. Logo, $(1, 3) \notin (A - B) \times (B - A)$.
(iv) FALSO - pois, $\{1, 7\} \in 2^{A \cup B}$, mas $\{1, 7\} \notin 2^A$ e $\{1, 7\} \notin 2^B$.

Questão 3: Se Permutarmos de todas as formas possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6 e 7 e escrevemos os números assim formados em ordem crescente. Determine
a) que lugar ocupa o 62417.
b) que número ocupa a posição 66^o lugar.
c) qual o 166^o algarismo escrito.
d) qual o total da soma de todos os números que nós escrevemos.

Solução: a) Se fossemos listar de forma ordenada começaríamos $12467, 12476, 12647, \ldots$. Queremos determinar nesta lista a posição do 62417. Veja que aparecem todos os números começando com: 1 $(4! = 24)$, 2 $(4! = 24)$ e 4 $(4! = 24)$. O próximo número já tem o 6 na primeira posição, logo há $61 (3! = 6)$ e, por fim alcançamos 621 que há $2! = 2$. Portanto, 62417 esta na posição: $24 + 24 + 24 + 6 + 2 = 80^o$.
b) Como há $4! = 24$ números começando com 1, e $4! = 24$ números começando com 2, e $3! = 6$ começando por 41, e $3! = 6$ começando por 42, e $3! = 6$ números começando por 42, já estamos na 62^o posição. O número na 66^o é 46721.
c) Como há 5 algarismos em cada número, dividindo 165 por 3 dá 33, daí o 166^o algarismo escrito é o primeiro algarismo do 34^o número. Como há $4! = 24$ números começando com 1, e $3! = 6$ começando por 21 já estamos no 30^o número, já podemos concluir que o dígito é o 2.
d) Nas casas das unidades, aparecem os algarismos 1, 2, 4, 6 e 7. Cada um deles $4! = 24$ vezes. A soma das unidades desses números é, portanto, $(1 + 2 + 4 + 6 + 7) \cdot 24 = 480$. O

mesmo raciocínio, se aplica a posição de dezena, centena, milhar e dezena de milhar. Daí temos: $480(1 + 10 + 100 + 1000 + 10000) = 480 \cdot 11111 = 5\,333\,280$.

Questão 4: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, dizemos que $a \equiv b \mod 7$ se, e só se, $7|(a - b)$.

1. Verifique se a relação $\mod$ é (i) reflexiva, (ii) anti-reflexiva (irreflexiva), (iii) simétrica, (iv) anti-simétrica e/ou (v) transitiva.

2. $\sim$ é uma relação de equivalência? Justifique.

3. Descreva o conjunto $[37]$.

Solução: 1. i) é reflexiva, pois, $7|0$, daí $a \equiv a \mod 7$ para qualquer que seja o a inteiro. iii) é simétrico, pois $a \equiv b \mod 7$, isto é, $7|(a - b)$, então $7|(b - a)$, isto é, $b \equiv a \mod 7$. Por fim, (v) considere $a \equiv b \mod 7$ e $b \equiv c \mod 7$, isto significa que, $7|(a - b)$ e $7|(b - c)$, respectivamente. Mas isto significa que

$$7|\,[(a - b) + (b - c)] = (a - c), \text{ isto é, } a \equiv c \mod 7.$$

ou seja, $\equiv \mod 7$ é transitiva. Ela não pode ser irreflexiva e nem anti-simétrica.
2. Sim, pois a relação $\equiv \mod 7$ é reflexiva, simétrica e transitiva.
3. Observe que a classe de equivalência do 37 são todos números inteiros que podemos obter somando ou subtraindo um múltiplo de 7. Logo, $[37] = \{\dots, -5, 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, \dots\}$.

Questão 5: Sejam n e k inteiros positivos. Considere esta equação:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k.$$

a) Quantas soluções existem se as variáveis x_i forem inteiros não negativos?
b) Quantas soluções existem se as variáveis x_i forem inteiros positivos?
c) Quantas soluções existem se as variáveis x_i só podem ter os valores 0 ou 1?
d) Quantos termos tem

$$(x + y + z)^8 = \sum_{a+b+c=n} \binom{8}{a\,b\,c} x^a y^b z^c?$$

Solução: **a)** Para não ficar uma situação abstrata, vamos considerar uma equação concreta

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7$$

Uma possível solução seria: $(1, 2, 3, 0, 1)$. Queremos contar a quantidade tais possíveis soluções. Considere palavras composta por: sete 1's e quatro | (barras). Podemos associar a esta solução de maneira biunívoca a seguinte palavra,

$$1|11|111||1 \leftrightarrow (1, 2, 3, 0, 1)$$

Veja que 1 é a quantidade de 1 até a primeira |, entre a 1ª e a 2ª | temos dois 1's e assim sucessivamente. Veja que todas as possíveis distribuições das barras | entre os 1's nos fornece (todas) as possíveis soluções da equação. Então o que precisamos contar é a quantidade de palavras que podemos fazer dispondo de 7 1's e 4 |. Mas já sabemos contar tais tipos de palavras, que no nosso caso é

$$\frac{(7+4)!}{7!4!} = \frac{(7+(5-1))!}{7!4!} = \binom{7-(5-1)}{7} = \left(\!\binom{5}{7}\!\right).$$

Portanto, no caso geral, a solução é $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

b) Neste caso x_i não podem ser zero, logo uma solução da equação acima seria $(1,1,3,1,1)$. Com esta restrição as | não podem aparecer nem no início, nem no final das palavras e, também não podem aparecer repetidas. Apesar da dificuldade ainda podemos contar o número de tais palavras, mas não faremos desta forma. Considere uma mudança de coordenadas, que é $x_i = y_i + 1$, nesta situação quando $x_i \geq 1$, os $y_i \geq 0$, a equação toma a forma

$$(y_1+1)+(y_2+1)+(y_3+1)+(y_4+1)+(y_5+1) = 7 \Leftrightarrow y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 = 7-5 = 2.$$

Procedendo desta forma no caso geral, temos que a quantidade de soluções é dado por

$$\left(\!\binom{n}{k-n}\!\right) = \binom{n+(k-n)-1}{k-n} = \binom{k-1}{k-n}.$$

c) Nesta situação, a equação só terá solução se $n \geq k$. E precisamos escolher entre as n variáveis k delas que serão iguais a 1. Isto pode ser feito de,

$$\binom{n}{k} \text{ formas distintas.}$$

d) O número de termos que aparece ao expandir $(x+y+z)^8$ é dado pela quantidade de soluções inteiras não positivas da equação $a+b+c=8$. Conforme raciocínio desenvolvido no item a) temos

$$\left(\!\binom{3}{8}\!\right) = \binom{3+8-1}{8} = \binom{3+8-1}{2} = \frac{10\cdot 9}{2} = 45.$$

Vou copiar os termos

$$\begin{aligned}&x^8+8x^7y+28x^6y^2+56x^5y^3+70x^4y^4+56x^3y^5+28x^2y^6+8xy^7+y^8+8x^7z+56x^6yz+168x^5y^2z\\ &+280x^4y^3z+280x^3y^4z+168x^2y^5z+56xy^6z+8y^7z+28x^6z^2+168x^5yz^2+420x^4y^2z^2\\ &+560x^3y^3z^2+420x^2y^4z^2+168xy^5z^2+28y^6z^2+56x^5z^3+280x^4yz^3+560x^3y^2z^3+560x^2y^3z^3\\ &+280xy^4z^3+56y^5z^3+70x^4z^4+280x^3yz^4+420x^2y^2z^4+280xy^3z^4+70y^4z^4+56x^3z^5\\ &+168x^2yz^5+168xy^2z^5+56y^3z^5+28x^2z^6+56xyz^6+28y^2z^6+8xz^7+8yz^7+z^8\end{aligned}$$
