Álgebra Linear. 2024.S2

Avaliação P2.

Turma **K1**.

Prof. Bely R Morales

UFF

Problema 1: (3 Pontos) Analise a veracidade das seguintes afirmações e justifique:

a) As matrizes $\left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, formam um sistema de geradores de $M_2(\mathbb{K})$.

b) O conjunto $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : tr(A) = 0\}$ é um subespaço vetorial de $M_n(\mathbb{K})$, i.e., o conjunto das matrizes quadradas com traço zero é um subespaço vetorial das matrizes quadradas.

c) O sistema de vetores $\{(1,-1,0,4),(1,0,1,0),(1,2,-2,-1)\}$ é linearmente independente em $\mathbb{K}^4$.

Problema 2: (3 Pontos) Considere a aplicação linear $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ dada por $f(x,y,z) = (x-y, x-z)$.

a) Calcule a matriz de f nas bases canônicas de $\mathbb{K}^3$ e $\mathbb{K}^2$.

b) Calcule a dimensão do núcleo de f.

c) Calcule a dimensão do imagem de f.

Problema 3: (4 Pontos) Em cada caso determine si existe uma matriz $D \in M_3(\mathbb{C})$ e uma matriz invertível $P \in M_3(\mathbb{C})$ tais que $D = P^{-1}AP$. Em caso afirmativo calcule as matrizes D e P.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **b)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pontos Extras (Opcional): Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ uma matriz quadrada de $n \times n$.

i. (1 Ponto) Prove que existe um polinômio $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $p(A) = 0$.
Dica: Lembre-se da dimensão do espaço $M_n(\mathbb{K})$.

ii. (1 Ponto)*** Seja $\mathcal{V}_A = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] : p(A) = 0\}$, mostre que existe um polinômio $m(x) \in \mathcal{V}_A$ tal que todo polinômio $p(x) \in \mathcal{V}_A$ é múltiplo de $m(x)$.
Dica: Auxiliando-se do princípio da boa ordenação dos números naturais mostre que existe pelo menos um polinômio $m(x) \in \mathcal{V}_A$ com grau minimo e mostre que $\mathcal{V}_A = m(x)\mathbb{K}[x]$.

Problema 1:

(a) **Falso** As matrizes $\left\{A_1=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\}$ formam um sistema de geradores de $M_2(K)$.

$\dim M_2(K)=4 \Rightarrow$ Todo sistema gerador minimal tem exatamente 4 matrizes

$\Downarrow$

O conjunto $\{A_1, A_2, A_3\}$ é formado por apenas 3 matrizes. Logo não pode ser gerador.

(b) **Verdadeiro** O conjunto $sl_n(K)=\{A\in M_n(K): tr(A)=0\}$ é subespaço vetorial de $M_n(K)$.

- $tr(0)=0 \Rightarrow 0\in sl_n(K) \quad \therefore sl_n(K)\neq \phi$

- $A,B\in sl_n(K),\ \alpha,\beta\in K \Rightarrow tr(\alpha A+\beta B)=\alpha \underbrace{tr(A)}_{0}+\beta \underbrace{tr(B)}_{0}=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0$

$\therefore \alpha A+\beta B\in sl_n(K)$

Logo $sl_n(K)$ é subespaço de E

Resposta Alternativa: Considere a aplicação linear $tr: M_n(K)\longrightarrow K$, $A\longmapsto tr(A)$

logo $sl_n(K)=Ker(tr)$, i.e., $sl_n(K)$ é o núcleo duma aplicação linear então é um subespaço.

(c) **Verdadeiro** O sistema de vetores $\{(1,-1,0,4), (1,0,1,0), (1,2,-2,-1)\}$ é l.i.

$$\alpha_1(1,-1,0,4)+\alpha_2(1,0,1,0)+\alpha_3(1,2,-2,-1)=(0,0,0,0)$$

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, -\alpha_1+2\alpha_3, \alpha_2-2\alpha_3, 4\alpha_1-\alpha_3)=(0,0,0,0)$$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0\\ -\alpha_1+2\alpha_3=0\\ \alpha_2-2\alpha_3=0\\ 4\alpha_1-\alpha_3=0\end{cases} \quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & -4 & -5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0\\ \alpha_2+3\alpha_3=0\\ -5\alpha_3=0\end{cases} \Rightarrow \alpha_3=0\Rightarrow\alpha_2=0\Rightarrow\alpha_1=0$$

$\therefore \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0 \Rightarrow$ Os vetores são l.i.

Problema 2º

$f: K^3 \longrightarrow K^2$ aplicação linear

$f(x,y,z) = (x-y, x-z)$

a) $f(e_1) = (1,1) = 1e_1 + 1e_2$

$f(e_2) = (-1,0) = (-1)e_1 + 0e_2$

$f(e_3) = (0,-1) = 0e_1 + (-1)e_2$

$$M(f, \{e_i\}, \{e_j\}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $\mathrm{Ker}\, f = \{(x,y,z) \in K^3 : f(x,y,z) = (0,0)\} = \{(x,y,z) \in K^3 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x - y = 0 & \Rightarrow x = y = z \\ y - z = 0 & \Rightarrow y = z \end{cases}$$

$\therefore \mathrm{Ker}\, f = \{(z,z,z) : z \in K\} = \langle (1,1,1) \rangle \Longrightarrow \boxed{\dim \mathrm{Ker}\, f = 1}$

c) Aplicando o Teorema do Posto: $\underset{3}{\dim K^3} = \underset{1}{\dim(\mathrm{Ker} f)} + \dim(\mathrm{Im} f)$

$3 = 1 + \dim(\mathrm{Im} f)$

$$\boxed{\therefore \dim(\mathrm{Im} f) = 2}$$

Problema 3º

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Será A diagonalizável em $M_3(\mathbb{C})$?

A representa um endomorfismo de $\mathbb{C}^3$ na base canônica.

Calculando os autovalores de A:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 = -(\lambda-1)^3 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ autovalor de multiplicidade } 3.$$

Calculando agora $V_1 = \mathrm{Ker}(A - I)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \therefore V_1 = \{(x,0,0) : x \in \mathbb{C}\} = \langle (1,0,0) \rangle$$

Logo $\dim V_1 = 1 < 3 = \text{multiplicidade de } (\lambda = 1)$

$\therefore$ A não é diagonalizável!!!

Problema 3:

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ Será B diagonalizável em $M_3(\mathbb{C})$?

B representa um endomorfismo de $\mathbb{C}^3$ na base canônica.
Calculando os autovalores:

$$p_B(\lambda) = \det(B-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2+1) = -\lambda(\lambda+i)(\lambda-i)$$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$

Logo B é diagonalizável em $M_3(\mathbb{C})$ porque tem três autovalores distintos.

Calculando base dos autoespaços:

$V_0 = Ker(A - 0I) = Ker\, A$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow z = y = 0$$

$V_0 = \{(x,0,0) : x \in \mathbb{C}\}$

$V_0 = \langle (1,0,0) \rangle \qquad a_1 = (1,0,0)$

$V_i = Ker(A - iI)$

$$\begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & -1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{iL_2 + L_3 \mapsto L_3} \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -ix = 0 \\ -iy + z = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$x = 0, \; z = iy$

$V_i = \{(0, y, iy) : y \in \mathbb{C}\} = \langle (0,1,i) \rangle \qquad a_2 = (0,1,i)$

$V_{-i} = Ker(A - (-iI)) = Ker(A + iI)$

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & -1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{-iL_2 + L_3 \mapsto L_3} \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ iy + z = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$x = 0, \; z = -iy$

$V_{-i} = \{(0, y, -iy) : y \in \mathbb{C}\} = \langle (0,1,-i) \rangle \qquad a_3 = (0,1,-i)$

Logo $\{a_1 = (1,0,0), a_2 = (0,1,i), a_3 = (0,1,-i)\}$ é base de $\mathbb{C}^3$ formada por autovetores

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \qquad D = P^{-1} A P \qquad P = MMC(\{a_i\}, \{e_i\}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & i & -i \end{pmatrix} \quad \square$$

Pontos Extras: Seja $A \in M_n(K)$

(i) Prove que existe um polinômio $p(x) \in K[x]$ tq. $p(A) = 0$.

Prova: O conjunto formado pelas matrizes $\{I, A, A^2, A^3, \dots, A^{n^2}\}$ é linearmente dependente porque $\dim M_n(K) = n^2$ logo qualquer conjunto de n^2+1 matrizes é l.d.

Por tanto existem $a_0, a_1, \dots, a_{n^2} \in K$ tq $a_0 I + a_1 A + \dots + a_{n^2} A^{n^2} = 0$ então A é zero do polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n^2} x^{n^2}$

(ii) Seja $V_A = \{p(x) \in K[x] : p(A) = 0\}$. Prove que $V_A = m(x)K[x]$, com $m(A) = 0$; i.e., todo polinômio $p(x) \in V_A$ é múltiplo dum polinômio fixo $m(x) \in V_A$.

Prova: Pelo provado em (i) temos que $V_A \neq \emptyset$.
Logo pelo princípio da boa ordenação existe um polinômio $m(x) \in V_A$ não nulo com grau mínimo.

Será que $V_A = m(x)K[x]$? $\begin{cases} V_A \supseteq m(x)K[x]? \\ V_A \subseteq m(x)K[x]? \end{cases}$

$V_A \supseteq m(x)K[x]$?
Se $p(x) = m(x)q(x) \in m(x)K[x]$ $\quad p(A) = m(A)q(A) = 0 \cdot q(A) = 0 \Rightarrow p(x) \in V_A$

$\therefore V_A \supseteq m(x)K[x]$

$V_A \subseteq m(x)K[x]$?
Seja $p(x) \in V_A$. Aplicando o algoritmo da divisão com resto
$\exists\, q(x), r(x) \in K[x]$ tq $p(x) = m(x)q(x) + r(x)$ onde $r(x) = 0$ ou $\text{grau}(r(x)) < \text{grau}(m(x))$

Avaliando $p(x)$ em A temos $0 = p(A) = \underbrace{m(A)}_{=0} q(A) + r(A)$

$\therefore r(A) = 0 \Rightarrow r(x) \in V_A$

Más $m(x)$ é o polinômio de menor grau em $V_A \Rightarrow$ O caso $\text{grau}(r(x)) < \text{grau}(m(x))$ é impossível
$\Downarrow$
$p(x)$ é múltiplo de $m(x) \Leftarrow p(x) = m(x)q(x) \Leftarrow$ Necessariamente $r(x) = 0$

$\therefore V_A \subseteq m(x)K[x]$

Logo $V_A = m(x)K[x]$ $\square$