Matemática Discreta — 2022/02 — Turma B1 — **Prova 2** (30/11/2022)

- *É recomendável fazer a avaliação a lápis, mas escreva **a caneta** as suas **respostas finais**, bem como o **número de cada questão e item**.*
- ***É proibido:** consultar livros ou anotações; comunicar-se com colegas; usar calculadora, celular, ou qualquer dispositivo eletrônico.*
- ***É necessário exibir seus cálculos e/ou raciocínio.** Respostas finais sem justificativa, ainda que corretas, não receberão crédito.*
- *Tenha atenção para o emprego correto da **língua portuguesa** e da **notação matemática**. A **clareza**, o **capricho** e a **legibilidade** são fundamentais, e fazem parte da avaliação!*

BOA SORTE!

2 pts. **Q1.** Obtenha a solução da equação de recorrência

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2^n, \qquad \text{com} \quad y_0 = \frac{3}{4} \quad \text{e} \quad y_1 = -\frac{1}{4}.$$

2 pts. **Q2.** Considere a relação R no conjunto $\{a, b, c, d\}$ dada pela matriz

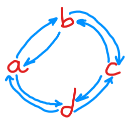
$(5,2) \to a+d = c+b$

$5+d = c+2$

$3 = c-d$

$(c,d) = (a,b)$

(a)



$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$R = \{(a,b), (a,d), (b,a), (b,c), (c,b), (c,d), (d,a), (d,c)\}$

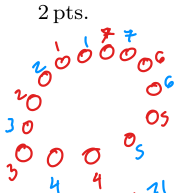
(ii) é anti-reflexiva pois $\forall (x,y) \in R, x, y \in \mathbb{N}, y \neq x$

· (iii) é simétrica pois $\forall (x,y) \in R, \exists (y,x) \in R$

(a) Represente a relação R na forma de um grafo orientado.

(b) Verifique se a relação R é (i) reflexiva, (ii) anti-reflexiva (irreflexiva), (iii) simétrica, (iv) anti-simétrica e/ou (v) transitiva.

2 pts. **Q3.** Sete homens e sete mulheres dão-se as mãos para formar uma roda de ciranda.



$6! \cdot 7!$

(a) De quantas maneiras essa ciranda pode ser formada? Consideramos que rotações da ciranda não alteram a configuração.

$\to 13!$

(b) De quantas maneiras a ciranda pode ser formada, supondo que homens e mulheres devam alternar-se?

1,5 pts. **Q4.** Quantos estudantes deve ter uma turma, de forma a garantir que pelo menos dois deles(as) fiquem com a mesma nota, considerando que as notas são múltiplos de 0,5 e variam de 0 a 10 pontos?

$0 \propto 1 \propto 2 \propto 3 \propto 4 \propto 5 \propto 6 \propto 7 \propto 8 \propto 9 \propto 10 \to 21$

$21+1=22$

2,5 pts. (a) 1,5 pts. (b) 1 pt. **Q5.** Seja $Z = \{(p,q) : p, q \in \mathbb{N}\}$. Considere a relação $\sim$ em Z definida da seguinte forma:

$[(5,2)]$

$5+d = 2+c$

$5-2 = c-d$

$c-d = 3$

$$(a,b) \sim (c,d) \quad \text{quando} \quad a+d = b+c.$$

(a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.

Atenção: É *obrigatório* argumentar que $\sim$ é uma relação *reflexiva*, *simétrica* e *transitiva*. Mostre que $\sim$ satisfaz cada uma dessas condições.

$(a,b) \sim (c,d)$,

$(c,d) \sim (x,y)$

$(a,b) \sim (x,y)$

$a+d = b+c$

$a-b = c-d$

(b) Descreva o conjunto $[(5,2)]$. $[(x,y), x, y \in \mathbb{N} : x-y=3]$

Lembrete: $[(5,2)]$ denota a classe de equivalência do elemento $(5,2)$ de Z.

(a) $\sim$ é reflexiva pois $a+b = a+b$

$\sim$ é simétrica pois $\boxed{a+d = b+c} = \boxed{c+b = d+a}$

$\sim$ é transitiva pois se $a-b = c-d$ e $c-d = x-y$, chamemos: $(a-b) \to \alpha$, $(c-d) \to \beta$, $(x-y) \to \gamma$

dado que a igualdade é transitiva, se $\alpha = \beta$ e $\beta = \gamma$, então $\alpha = \gamma$ e $\sim$ é transitiva

Respostas

Q1. A solução é $y_n = \frac{3}{4} \cdot 2^n - n \cdot 2^n + \frac{1}{8} \cdot n^2 \cdot 2^n$. A solução geral da recorrência homogênea associada é $y_n^H = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n$ e uma solução particular é da forma $y_n^P = A \cdot n^2 \cdot 2^n$.

Q2. (a)
$$\begin{array}{ccc} a & \rightleftarrows & b \\ \upharpoonleft\downharpoonright & & \upharpoonleft\downharpoonright \\ d & \rightleftarrows & c \end{array}$$

(b) (i) R não é reflexiva: $a \not R\, a$, por exemplo. (De fato, o mesmo vale para b, c e d.)

(ii) R é irreflexiva: $x \not R\, x$, $\forall x \in \{a, b, c, d\}$.

(iii) R é simétrica: $x \, R \, y \implies y \, R \, x$, $\forall x, y$.

(iv) R não é anti-simétrica: $a \, R \, b$ e $b \, R \, a$ (e $a \neq b$), por exemplo.

(v) R não é transitiva: $a \, R \, b$ e $b \, R \, c$, mas $a \not R\, c$, por exemplo.

Q3. (a) $\frac{14!}{14} = 13!$ Esse é o número de "permutações circulares" de 14 elementos.

(b) $6! \cdot 7!$
Permutações circulares das 7 mulheres: $6!$
Formas de dispôr os homens nos "espaços" entre as mulheres, em seguida: $7!$
(Há outras formas interessantes de obter a solução deste problema.)

Q4. Há 21 notas possíveis de 0 a 10, em intervalos de 0,5. Assim, se a turma tiver ao menos 22 estudantes, duas(dois) delas(es) necessariamente terão a mesma nota.

Q5. (a) Mostraremos que $\sim$ é uma relação *transitiva*. Deixaremos a demonstração das outras propriedades como exercício.

Suponha que $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$, para (a, b), (c, d), $(e, f) \in Z$. (Vamos mostrar que $(a, b) \sim (e, f)$.)

Por definição de $\sim$, temos $a + d = b + c$ e $c + f = d + e$. Somando os lados correspondentes dessas equações, temos

$$a + d + c + f = b + c + d + e.$$

Os termos c e d se cancelam, e ficamos com $a + f = b + e$, ou seja, $(a, b) \sim (e, f)$.

(b) Há diversas formas de descrever $[(5, 2)]$:

$$\begin{aligned}[(5,2)] = \{(p,q) : p, q \in \mathbb{N},\, p = q + 3\} &= \{(q+3, q) : q \in \mathbb{N}\} \\ &= \{(3,0), (4,1), (5,2), (6,3), (7,4), \dots\}\end{aligned}$$

Essa questão é relevante no contexto da "construção" dos números inteiros. Veja:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Integer#Equivalence_classes_of_ordered_pairs`