Matemática Discreta — 2025/01 — Turma B1 — Prof. José Koiller

Prova 1 (28/04/2025)

- *É recomendável fazer a avaliação a lápis, mas escreva* ***a caneta*** *as suas* ***respostas finais****, bem como o* ***número de cada questão e item****.*
- ***É proibido:*** *consultar livros ou anotações; comunicar-se com colegas; usar calculadora, celular, ou qualquer dispositivo eletrônico.*
- ***É necessário justificar as suas respostas.*** *Exiba seus cálculos e/ou raciocínio. Respostas finais sem justificativa, ainda que corretas, não receberão crédito.*
- *Empregue a* ***língua portuguesa*** *e a* ***notação matemática*** *de maneira correta.*

BOA PROVA!

0,5 pts. **Q0.** Organização, clareza e legibilidade nas demais questões.

3,0 pts. **Q1.** Seja $A = \big\{\{1\}, 2, \{1,2\}\big\}$. Em cada item, preencha a lacuna com $\in$, $\subseteq$ ou com um valor numérico, de modo que a afirmação seja verdadeira.

(a) $\{2\} \ \square \ A$.

(b) $\varnothing \ \square \ A$.

(c) $\big\{\{1\}\big\} \ \square \ \mathcal{P}(A)$.

(d) $\big\{\{2\}\big\} \ \square \ \mathcal{P}(A)$.

(e) $\big\{\{1\}, \{1,2\}\big\} \ \square \ \mathcal{P}(A)$.

(f) $\big|\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(A)\big)\big| = \square$.

2,5 pts. **Q2.** (a) Papai Noel tem uma sacola com 12 brinquedos *distintos*. De quantas maneiras ele pode distribuir 4 destes brinquedos para as crianças Ana, Beto, Cora e Dani, *de modo que cada uma ganhe exatamente um brinquedo*?

(b) Papai Noel tem uma sacola mágica, de onde ele pode sacar uma quantidade ilimitada de brinquedos. Os brinquedos da sacola vêm em 12 tipos distintos (bonecos, ursinhos, carrinhos, bolas, etc), mas brinquedos do mesmo tipo são idênticos. De quantas maneiras ele pode presentear Ana, Beto, Cora e Dani, *de modo que cada criança ganhe exatamente um brinquedo*? Admite-se a possibilidade de que crianças recebam brinquedos idênticos.

(c) *Papai Cruel* tem uma sacola com 12 brinquedos *distintos*, e pretende distribuir *todos eles* entre quatro crianças: Ana, Beto, Cora e Dani. Ao menos uma das crianças receberá vários brinquedos, evidentemente. Por outro lado, admite-se a possibilidade de que uma ou mais crianças fiquem sem brinquedo algum, para tristeza delas... De quantas maneiras ele pode distribuir esses 12 brinquedos entre as quatro crianças?

4,0 pts. **Q3.** Demonstre as seguintes afirmativas, *usando o Princípio de Indução.*

(a) Para todo número natural $n \geqslant 1$, vale

$$2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1.$$

(b) Para todo número natural $n \geqslant 4$, vale $n! \geqslant 2^n$.

Em cada uma de suas demonstrações, é *obrigatório* seguir o roteiro abaixo.

(i) Enuncie o caso-base: ____ = ____ (ou ____ $\geqslant$ ____ , ou ____ $\leqslant$ ____).

(ii) Prove o caso-base.

(iii) Enuncie o passo de indução: *Se* ____ *, então* ____ *, para todo* ____ *.*

(iv) Prove o passo de indução.

Respostas:

Q1. Lembre que $\mathcal{P}(A)$ é *o conjunto das partes de A*, ou seja, é o conjunto de todos os subconjuntos de A. Para justificar as respostas, convém escrever explicitamente:

$$\mathcal{P}(A) = \Big\{\varnothing, \{\{1\}\}, \{2\}, \{\{1,2\}\}, \{\{1\},2\}, \{\{1\},\{1,2\}\}, \{2,\{1,2\}\}, \underbrace{\{\{1\},2,\{1,2\}\}}_{A}\Big\}.$$

(a) $\{2\} \subseteq A$. (Pois $2 \in A$.)

(b) $\varnothing \subseteq A$.

(c) $\big\{\{1\}\big\} \in \mathcal{P}(A)$.

(d) $\big\{\{2\}\big\} \subseteq \mathcal{P}(A)$. (Pois $\{2\} \in \mathcal{P}(A)$.)

(e) $\big\{\{1\},\{1,2\}\big\} \in \mathcal{P}(A)$.

(f) $\big|\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(A)\big)\big| = 2^{(2^3)} = 256$. *Observação*: $|A| = 3$, logo $|\mathcal{P}(A)| = 2^3 = 8$.

Q2. (a) $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 12!/8!$.

(b) 12^4. (Cada uma das 4 crianças tem 12 opções de brinquedo.)

(c) 4^{12}. (Cada um dos 12 brinquedos tem 4 "opções de crianças".)

Q3. Indicamos a seguir apenas os enunciados. Faça as provas por conta própria...

(a) (i) Enunciado do caso-base (caso $n = 1$): $2 \cdot 3^0 = 3^1 - 1$.

(iii) Enunciado do passo de indução:
Se

$$2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + 2 \cdot 3^{k-1} = 3^k - 1, \tag{H.I.}$$

então

$$2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + 2 \cdot 3^{k-1} + 2 \cdot 3^k = 3^{k+1} - 1,$$

para todo $k \geqslant 1$.

(b) (i) Enunciado do caso-base (caso $n = 4$): $4! \geqslant 2^4$.

(iii) Enunciado do passo de indução:
Se $\underbrace{k! \geqslant 2^k}_{\text{(H.I.)}}$, então $(k+1)! \geqslant 2^{k+1}$, para todo $k \geqslant 4$.

Observação: "H.I." representa a hipótese de indução em cada caso acima.