Álgebra Linear. 2025-1

Avaliação P3.

Turma **B1**.

Prof. Bely R Morales

UFF

Problema 1: (3 Pontos) Analise a veracidade das seguintes afirmações. Justifique em cada caso.

a) Os vetores $v_1 = (1, 1, -i, -i)$ e $v_2 = (1, 1, i, i)$ de $\mathbb{C}^4$ com o produto escalar usual são ortogonais.

b) Sejam E um $\mathbb{K}$-espaço com produto escalar e V um subespaço tal que $\dim E = 5$ e $\dim V = 3$ então $\dim V^\perp = 3$.

c) A aplicação dada por $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2$ define um produto escalar no espaço $\mathbb{R}^2$.

Problema 2: (2 Pontos) Seja E um $\mathbb{R}$-espaço com produto escalar, x, y dois vetores de E.

Mostre que $\|x\| = \|y\|$ se e somente se $\langle x + y, x - y \rangle = 0$.

Dica: Lembre que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Problema 3: (5 Pontos) Calcule, se existe, uma matriz diagonal D e uma matriz invertível P tais que $D = P^t A P$.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ponto Extra (Opcional): Seja E um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto escalar de dimensão finita, seja $f \in \mathbf{End}(E)$ um endomorfismo tal que $f^* = -f$. Mostre que todos os autovalores de f são números imaginários puros, ou seja, tem a parte real é zero.

Problema 1º: Verdadeiro ou Falso:

a) Verdadeiro ______ Os vetores $v_1=(1,1,-i,-i)$ e $v_2=(1,1,i,i)$ de $\mathbb{C}^4$ com o produto escalar usual são ortogonais.

$$\langle(1,1,-i,-i),(1,1,i,i)\rangle = 1\cdot\bar{1}+1\cdot\bar{1}+(-i)\bar{i}+(-i)\bar{i} = 1+1+(-i)^2+(-i)^2 = 1+1-1-1=0$$

b) Falso ______ Sejam E um K-espaço com produto escalar e V um subespaço tal que $\dim E=5$ e $\dim V=3$ então $\dim V^{\perp}=3$.

$$E=V\oplus V^{\perp} \Rightarrow 5=\dim E = \underbrace{\dim V}_{=3} + \dim V^{\perp} \Rightarrow \dim V^{\perp}=2.$$

c) Falso ______ A aplicação $\langle\cdot,\cdot\rangle: \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por $\langle(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 - x_2y_2$ define um produto escalar.

$$\langle(1,1),(1,1)\rangle = 1\cdot1-1\cdot1=0 \quad e \quad (1,1)\neq(0,0)$$

Problema 2º: E espaço com produto escalar $x,y\in E$ então

$$\|x\|=\|y\| \iff \langle x+y,x-y\rangle=0$$

Prova: Se $\|x\|=\|y\|$ então

$$\langle x+y,x-y\rangle = \langle x,x\rangle+\langle y,x\rangle-\langle x,y\rangle-\langle y,y\rangle =$$
$$= \|x\|^2+\langle y,x\rangle-\langle y,x\rangle-\|y\|^2$$
$$= \|x\|^2-\|x\|^2=0$$

Se $0=\langle x+y,x-y\rangle = \langle x,x\rangle+\langle y,x\rangle-\langle x,y\rangle-\langle y,y\rangle = \|x\|^2+\langle y,x\rangle-\langle y,x\rangle-\|y\|^2$

$$0=\|x\|^2-\|y\|^2 \Rightarrow \|x\|^2=\|y\|^2 \Rightarrow \|x\|=\|y\|$$

Problema 3:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

$A\in M_3(\mathbb{R})$ A é simétrica $\Rightarrow$ A representa um endomorfismo autoadjunto de $\mathbb{R}^3$ na base canônica com o produto escalar usual.

$\Downarrow$

Pelo Teorema Espectral A é diagonalizável em base ortonormal.

Calculando o Polinômio característico

$$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\1&2-\lambda&1\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\1&2-\lambda\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1&1\\1&2-\lambda\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1&2-\lambda\\1&1\end{vmatrix}$$

$$P_A(\lambda)=(2-\lambda)[\lambda^2-4\lambda+4-1]-[2-\lambda-1]+[\lambda-2+1]$$

$$P_A(\lambda)=-(\lambda-2)[\lambda^2-4\lambda+3]-[1-\lambda]+[\lambda-1] = -(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-1)+2(\lambda-1)$$

$$P_A(\lambda)=-(\lambda-1)[(\lambda-2)(\lambda-3)-2] = -(\lambda-1)[\lambda^2-5\lambda+6-2] = -(\lambda-1)[\lambda^2-5\lambda-4]$$
$$= -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-4)$$

$\therefore\ p_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-4)$

Autovalores $\to \lambda = 1$ com multiplicidade 2
$\quad\quad\quad\ \ \to \lambda = 4$ com multiplicidade 1

$V_1 = Ker(A - I)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x+y+z=0$$

$$z = -x-y$$

$\therefore\ V_1 = \{(x,y,-x-y) \in \mathbb{R}^3 : x,y \in \mathbb{R}\}$

$V_1 = \{x(1,0,-1) + y(0,1,-1) : x,y \in \mathbb{R}\}$

$V_1 = \langle\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}\rangle$

$a_1 = (1,0,-1)$, $a_2 = (0,1,-1)$

Gram-Schmidt

$b_1 = (1,0,-1)$ $\quad \langle b_1, b_1\rangle = 2 \quad \|b_1\| = \sqrt{2}$

$$b_2 = a_2 - \frac{\langle a_2, b_1\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1$$

$$b_2 = (0,1,-1) - \frac{\langle (0,1,-1),(1,0,-1)\rangle}{2}(1,0,-1)$$

$$b_2 = (0,1,-1) - \frac{1}{2}(1,0,-1)$$

$$b_2 = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\langle b_2, b_2\rangle = \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \quad \|b_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$\{b_1, b_2\}$ base ortogonal de V_1

$V_4 = Ker(A - 4I)$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{2L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_3 \to L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow -y + z = 0 \Rightarrow y = z$

$x - 2z + z = 0$

$x - z = 0$

$\Downarrow$

$x = z$

$\therefore\ V_4 = \{(z,z,z) : z \in \mathbb{R}\}$

$V_4 = \langle (1,1,1) \rangle \quad a_3 = (1,1,1)$

$\|a_3\| = \sqrt{3}$

$$v_3 = \frac{a_3}{\|a_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$v_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{2}(1,0,-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$v_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$\therefore\ \{v_1, v_2, v_3\}$ é base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores

$$\therefore D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = P^t A P$$

$$P = MMC(\{v_i\},\{e_i\}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$P^t = MMC(\{e_i\},\{v_i\}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$D = P^t \cdot A \cdot P$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Ponto Extra: $f^* = -f$ se $\lambda \in K$ é autovalor de f então $V_\lambda \neq 0 \Rightarrow \exists x \neq 0 : f(x) = \lambda x$

$$\langle f(x), x\rangle = \langle x, f^*(x)\rangle = \langle x, -f(x)\rangle$$

$$\langle f(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x,x\rangle$$

$$\langle x, -f(x)\rangle = \langle x, -\lambda x\rangle = -\bar{\lambda}\langle x, x\rangle$$

$$\Longrightarrow \lambda\langle x, x\rangle = -\bar{\lambda}\langle x,x\rangle$$

$$\lambda\langle x,x\rangle + \bar{\lambda}\langle x,x\rangle = 0$$

$$(\lambda + \bar{\lambda})\underbrace{\langle x,x\rangle}_{\neq 0} = 0$$

$$\lambda + \bar{\lambda} = 0 \Longrightarrow 2Re(\lambda) = 0$$

$$\Downarrow$$

λ é imaginário puro. $\Longleftarrow Re(\lambda) = 0$