Álgebra Linear. 2025.S1

Avaliação P2.

Turma **B1**.

Prof. Bely R Morales

UFF

Problema 1: (3 Pontos) Analise a veracidade das seguintes afirmações e justifique:

a) O conjunto $Sym_n(\mathbb{K}) = \left\{A \in M_n(\mathbb{K}) : A = A^t\right\}$ formado pelas matrizes simétricas é um subespaço vetorial de $M_n(\mathbb{K})$.

b) O sistema de vetores de $\mathbb{K}^3$ dado por $\{a_1 = (1,-1,0), a_2 = (1,1,1), a_3 = (2,0,1)\}$ é linearmente independente.

c) Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ é uma matriz tal que $\det(A) = 0$ então 0 é um autovalor de A.

Problema 2: (4 Pontos) Seja $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ a única aplicação linear que satisfaz:

$$
\begin{aligned}
f(1,0,0) &= (1,-1),\\
f(0,1,0) &= (-1,1),\\
f(0,0,1) &= (0,0).
\end{aligned}
$$

a) Calcule a matriz de f nas bases canônicas de $\mathbb{K}^3$ e $\mathbb{K}^2$.

b) Calcule a dimensão do núcleo de f.

c) Calcule a dimensão da imagem de f.

d) Será f injetora? Será f sobrejetora? Justifique.

Problema 3: (3 Pontos) Em cada caso determine si existe uma matriz diagonal $D \in M_3(\mathbb{K})$ e uma matriz invertível $P \in M_3(\mathbb{K})$ tais que $D = P^{-1}AP$. Em caso afirmativo calcule as matrizes D e P.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$, **b)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ponto Extra (Opcional): Seja E um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e sejam V e W dois subespaços. Mostre que $V + W = \langle V \cup W \rangle$.

Gabarito

Problema 1: Verdadeiro ou Falso.

a) Verdadeiro $Sym_n(K) = \{A \in M_n(K) : A = A^t\}$ é subespaço de $M_n(K)$.

i) $0^t = 0 \Rightarrow 0 \in Sym_n(K)$ $\therefore Sym_n(K) \neq \emptyset$

ii) Se $A, B \in Sym_n(K)$ e $\alpha, \beta \in K$ então $A = A^t$, $B = B^t$. Logo $(\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t$

$\alpha A + \beta B \in Sym_n(K) \Leftarrow (\alpha A + \beta B)^t = \alpha A + \beta B$

$\therefore Sym_n(K)$ é subespaço de $M_n(K)$

b) Falso Os vetores $a_1 = (1,-1,0)$, $a_2 = (1,1,1)$, $a_3 = (2,0,1)$ são l.i.

Comprovando: $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1(1,-1,0) + \alpha_2(1,1,1) + \alpha_3(2,0,1) = (0,0,0)$

$(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ não triviais $\therefore \{a_1, a_2, a_3\}$ é l.d.

c) Verdadeiro Se $A \in M_n(K)$ e $\det(A) = 0 \Rightarrow 0$ é autovalor de A.

0 é autovalor de $A \Leftrightarrow 0$ é raiz do polinômio característico de A $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$p(0) = \det(A - 0I) = \det(A) = 0 \Rightarrow 0$ é autovalor de A.

Problema 2: $f : K^3 \to K^2$ linear tal que

$f(1,0,0) = (1,-1)$
$f(0,1,0) = (-1,1)$
$f(0,0,1) = (0,0)$

a) Calcule $A = M(f, \{e_i\}, \{e_j\})$

$f(1,0,0) = (1,-1) = 1(1,0) + (-1)(0,1)$
$f(0,1,0) = (-1,1) = (-1)(1,0) + 1(0,1)$
$f(0,0,1) = (0,0) = 0(1,0) + 0(0,1)$

$$A = M(f, \{e_i\}, \{e_j\}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcule $\dim \operatorname{Ker} f$

$$\operatorname{Ker} f = \{(x_1, x_2, x_3) \in K^3 : f(x_1, x_2, x_3) = (0,0)\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in K^3 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = x_1$$

$\therefore \operatorname{Ker} f = \{(x_1, x_1, x_3) : x_1, x_3 \in K\} = \{x_1(1,1,0) + x_3(0,0,1) : x_1, x_3 \in K\} = \langle \{(1,1,0), (0,0,1)\} \rangle$

Logo $\boxed{\dim \operatorname{Ker} f = 2}$

Gabarito

c) Calcule $\dim(\mathrm{Im}\, f)$

Aplicando o Teorema do Posto temos $\dim K^3 = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, f)$

$$\boxed{\dim(\mathrm{Im}\, f) = 1} \Leftarrow \underset{\|}{3} = \underset{\|}{2} + \dim(\mathrm{Im}\, f)$$

d) Será f injetora? Não porque $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 2 \Rightarrow \mathrm{Ker}\, f \neq 0$

Será f sobrejetora? Não porque $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 1 < 2 = \dim K^2$.
Portanto $\mathrm{Im}\, f \subsetneq K^2$

Problema 3:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

Calculando o polinômio característico

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[\lambda^2 - 9 + 8] = (1-\lambda)(\lambda^2-1) = (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-1)$$

$\therefore p(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1) \Rightarrow$ $\lambda = 1$ é autovalor de multiplicidade 2
$\lambda = -1$ é autovalor de multiplicidade 1

Calculando autoespaços:

$V_1 = \mathrm{Ker}(A - 1\cdot I) = \mathrm{Ker}(A - I)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x_2 + 2x_3 = 0 \Downarrow x_2 = -x_3$$

$\therefore V_1 = \{(x_1, -x_3, x_3) : x_1, x_3 \in K\} = \{x_1(1,0,0) + x_3(0,-1,1) : x_1, x_3 \in K\}$

$V_1 = \langle\{\underbrace{(1,0,0)}_{a_1}, \underbrace{(0,-1,1)}_{a_2}\}\rangle$ $\therefore \dim V_1 = 2 =$ multiplicidade de $(\lambda = 1)$

$V_{-1} = \mathrm{Ker}(A - (-1)I) = \mathrm{Ker}(A + I)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -2x_2 \end{array}$$

$x_1 + x_2 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore V_{-1} = \{(x_2, x_2, -2x_2) : x_2 \in K\}$

$V_{-1} = \langle \underbrace{(1,1,-2)}_{a_3} \rangle$ $\dim V_{-1} = 1 =$ multiplicidade de $(\lambda = -1)$

Logo A é diagonalizável $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $D = P^{-1}AP$ $P = M_{MC}(\{a_i\}, \{e_i\}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$P^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^2(\lambda-1)$

$\lambda = 2$ autovalor de multiplicidade 2

$\lambda = 1$ autovalor de multiplicidade 1

Calculando autoespaços:

$V_2 = Ker(A - 2I)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = x_3 = 0 \quad \therefore V_2 = \{(x_1, 0, 0) : x \in K\} = \langle (1,0,0) \rangle$$

$$\dim V_2 = 1 < 2 = \text{multiplicidade de } (\lambda = 2)$$

Logo a matriz não é diagonalizável.

Ponto Extra: Provar que $V + W = \langle V \cup W \rangle$

Prova:

$$\left.\begin{array}{l} V \subseteq V \cup W \subseteq \langle V \cup W \rangle \\ W \subseteq V \cup W \subseteq \langle V \cup W \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow V + W \subseteq \langle V \cup W \rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} V \subseteq V + W \\ W \subseteq V + W \end{array}\right\} \Rightarrow V \cup W \subseteq V + W \Rightarrow \langle V \cup W \rangle \subseteq V + W$$

logo $V + W \subseteq \langle V \cup W \rangle \subseteq V + W \Rightarrow V + W = \langle V \cup W \rangle$ $\square$

Gabarito