UFF / TCE / TET
Circuitos Digitais
"Avaliação 1"
(Gabarito simplificado)

15/05/2023

Questão 1 (1.0 pts): Uma sinal de voz é gravado (*recorded*) por $t_{rec} = 2,25$ minutos. O sinal gravado é amostrado com uma frequência de amostragem (*sampling*) de $F_S = 44.1$ kHz. Quantos registros serão necessários para armazenar o total de amostras?

Solução:

A amostragem é a discretização das variáveis independentes. Sendo dado um período ou uma frequência de amostragem, isso indica que a discretização é uniforme. Logo, a resolução da amostragem é o período de amostragem, que, por sua vez, é o recíproco da frequência de amostragem, de tal forma que $t_{res} = T_S = 1/F_S$.

O total de registros deverá ser igual ao total de amostras.

O total de amostras é dado por $N = int\,(t_{rec}/t_{res}) + 1 = int\,(t_{rec}/T_S) + 1 = int\,(t_{rec}F_S) + 1$, onde $int(x)$ representa a parte inteira de x.

Uma vez que foram dados $t_{rec} = (2,25 \cdot 60)$ segundos e $F_S = 44.100$ Hz, o total de amostras é calculado como $N = int\,(2,25 \cdot 60 \cdot 44.100) + 1 = 5.953.501$ amostras.

Questão 2 (1.5 pts): Dada a função $f(A, B, C) = A\ XOR\ (B\ XOR\ C)$, atenda aos seguintes itens:

1. Expresse $f(\cdot)$ usando **APENAS** a função NAND. (0.75 pts)
2. Expresse $f(\cdot)$ usando **APENAS** a função NOR. (0.75 pts)

Solução:

A questão possui diversas soluções. Uma possível solução é escrever o operador XOR em função dos operadores NAND e NOR, de tal forma que

$$XOR(x, y) = (\overline{x} \cdot y) + (x \cdot \overline{y}) = \overline{\overline{(\overline{x} \cdot y) + (x \cdot \overline{y})}} = \overline{\overline{(\overline{x} \cdot y)} \cdot \overline{(x \cdot \overline{y})}} = (\overline{x} \uparrow y) \uparrow (x \uparrow \overline{y}) \ ,$$

$$XOR(x, y) = (x + y) \cdot (\overline{x} + \overline{y}) = \overline{\overline{(x + y) \cdot (\overline{x} + \overline{y})}} = \overline{\overline{(x + y)} + \overline{(\overline{x} + \overline{y})}} = (x \downarrow y) \downarrow (\overline{x} \downarrow \overline{y}) \ ,$$

$$NOT(x) = \overline{x} = (\overline{x} + \overline{x}) = \overline{(x \cdot x)} = (x \uparrow x)$$

e

$$NOT(x) = \overline{x} = (\overline{x} \cdot \overline{x}) = \overline{(x + x)} = (x \downarrow x) \ .$$

Questão 3 (1.0 pts): Prove que o Teorema de DeMorgan pode ser generalizado, de tal forma que:

1. $\overline{(A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E)} = \left(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D} + \overline{E}\right)$. (0.5 pts)
2. $\overline{(A + B + C + D + E)} = \left(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} \cdot \overline{E}\right)$. (0.5 pts)

Solução:

$$
\begin{aligned}
\overline{(A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E)} &= \left(\overline{(A \cdot B \cdot C \cdot D)} + \overline{E}\right) \\
&= \left(\overline{(A \cdot B \cdot C)} + \overline{D} + \overline{E}\right) \\
&= \left(\overline{(A \cdot B)} + \overline{C} + \overline{D} + \overline{E}\right) \\
&= \left(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D} + \overline{E}\right) \ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{(A + B + C + D + E)} &= \left(\overline{(A + B + C + D)} \cdot \overline{E}\right) \\
&= \left(\overline{(A + B + C)} \cdot \overline{D} \cdot \overline{E}\right) \\
&= \left(\overline{(A + B)} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} \cdot \overline{E}\right) \\
&= \left(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} \cdot \overline{E}\right) \ .
\end{aligned}
$$

Questão 4 (2.0 pts): Transforme a SOP em POS ou vice-versa, algebricamente, empregando distributividade, para cada uma das seguintes funções booleanas:

1. $f(A,B,C,D) = (A \cdot B) + (C \cdot D)$. (1.0 pts)
2. $f(A,B,C,D) = (A + \overline{C}) \cdot (\overline{B} + D)$. (1.0 pts)

Solução:

$$\begin{aligned}
f(A,B,C,D) &= (A \cdot B) + (C \cdot D) \\
&= ((A \cdot B) + (C)) \cdot ((A \cdot B) + (D)) \\
&= ((A + C) \cdot (B + C)) \cdot ((A + D) \cdot (B + D)) \\
&= (A + C) \cdot (B + C) \cdot (A + D) \cdot (B + D) \ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(A,B,C,D) &= (A + \overline{C}) \cdot (\overline{B} + D) \\
&= \big((A + \overline{C}) \cdot (\overline{B})\big) + \big((A + \overline{C})) \cdot (D)\big) \\
&= \big((A \cdot \overline{B}) + (\overline{C} \cdot \overline{B})\big) + \big((A \cdot D) + (\overline{C} \cdot D)\big) \\
&= (A \cdot \overline{B}) + (\overline{B} \cdot \overline{C}) + (A \cdot D) + (\overline{C} \cdot D) \ .
\end{aligned}$$

Questão 5 (4.5 pts): A partir da expressão booleana $f(A,B,C) = \overline{\left\{ \left[\overline{\overline{(A+B)}+C} \right] + A \right\}}$, obtenha a expressão booleana para cada uma das seguintes formas:

1. SOP padrão, algebricamente. (1.0 pts)
2. POS padrão, algebricamente. (1.0 pts)
3. SOP mínima, algebricamente, a partir da SOP padrão, empregando apenas o processo sistemático que envolve replicação e aglutinação. (1.0 pts)
4. POS mínima, algebricamente, a partir da POS padrão, empregando apenas o processo sistemático que envolve replicação e aglutinação. (1.0 pts)
5. Indique, justificando, a menor forma mínima. (0.5 pts)

Solução:
A expressão original deve ser adaptada, de tal forma que

$$f(A,B,C) = \overline{\left\{ \left[\overline{\overline{(A+B)}+C} \right] + A \right\}} = \left\{ \left[\overline{(A+B)}+C \right] \cdot \overline{A} \right\} = \left\{ \left[\left(\overline{A} \cdot \overline{B} \right) + C \right] \cdot \overline{A} \right\} \ .$$

A partir da expressão adaptada, uma SOP pode ser gerada da seguinte forma:

$$f(A,B,C) = \left\{ \left[\left(\overline{A} \cdot \overline{B} \right) + (C) \right] \cdot \overline{A} \right\} = \left[\left(\overline{A} \cdot \overline{B} \right) \cdot \overline{A} \right] + \left[(C) \cdot \overline{A} \right] = \left(\overline{A} \cdot \overline{B} \right) + \left(\overline{A} \cdot C \right) \ .$$

Inserindo os literais que faltam, a SOP padrão é dada por

$$f(A,B,C) = \left[\left(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \right) + \left(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \right) \right] + \left[\left(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \right) + \left(\overline{A} \cdot B \cdot C \right) \right] = \sum m(0,1,3) \ .$$

Minimizando-se a SOP padrão, obtém-se

$$f(A,B,C) = \left(\overline{A} \cdot \overline{B} \right) + \left(\overline{A} \cdot C \right) \ .$$

A partir da expressão adaptada, uma POS pode ser gerada da seguinte forma:

$$f(A,B,C) = \left\{ \left[\left(\overline{A} \cdot \overline{B} \right) + (C) \right] \cdot \overline{A} \right\} = \left[\left(\overline{A} + C \right) \cdot \left(\overline{B} + C \right) \right] \cdot \overline{A} = \left(\overline{A} + C \right) \cdot \left(\overline{B} + C \right) \cdot \overline{A} \ .$$

Inserindo os literais que faltam, a POS padrão é dada por

$$\begin{aligned} f(A,B,C) &= \left[\left(\overline{A} + \overline{B} + C \right) \cdot \left(\overline{A} + B + C \right) \right] \cdot \\ &\quad \left[\left(\overline{A} + \overline{B} + C \right) \cdot \left(A + \overline{B} + C \right) \right] \cdot \\ &\quad \left[\left(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} \right) \cdot \left(\overline{A} + \overline{B} + C \right) \cdot \left(\overline{A} + B + \overline{C} \right) \cdot \left(\overline{A} + B + C \right) \right] \\ &= \prod M(2,4,5,6,7) \ . \end{aligned}$$

Minimizando-se a POS padrão, obtém-se

$$f(A,B,C) = \left(\overline{A} \right) \cdot \left(\overline{B} + C \right) \ .$$

Comparando-se as duas formas mínimas, observa-se que a POS mínima é a menor.