Matemática Discreta — 2025/01 — Turma B1 — Prof. José Koiller

**Prova 3** (02/07/2025)

---

- *É recomendável fazer a avaliação a lápis, mas escreva* ***a caneta*** *as suas* ***respostas finais****, bem como o* ***número de cada questão e item****.*
- ***É proibido:*** *consultar livros ou anotações; comunicar-se com colegas; usar calculadora, celular, ou qualquer dispositivo eletrônico.*
- *Empregue a* ***língua portuguesa*** *e a* ***notação matemática*** *de maneira correta.*

***É necessário justificar as suas respostas!*** Para tanto, uma *sugestão* é usar a notação de teoria de conjuntos e/ou a terminologia de "objetos básicos," "configurações," "representações," além dos princípios de contagem propriamente ditos. *Listas* (sequências finitas) e *conjuntos* podem ser usados e combinados de diversas maneiras para formar representações.

✦ BOA PROVA! ✦

---

0,5 pts. **Q0.** Capricho, organização, clareza e legibilidade nas demais questões.

**Q1.** Em uma festa junina, *quatro* crianças, Ana, Beto, Cora e Dani, vão à mesa de doces, onde encontram 20 docinhos *distintos*.

1,0 pt. (a) De quantas maneiras pode-se distribuir os 20 doces distintos entre as quatro crianças? A ordem em que os doces são oferecidos é *irrelevante*: só interessa saber quais doces cada criança recebe, ao final da distribuição. Admite-se que alguma criança possa ficar sem doce algum.

0,5 pts. (b) De quantas maneiras pode-se distribuir os doces, de modo que *ao menos a Ana* não ganhe doce algum?

0,5 pts. (c) De quantas maneiras pode-se distribuir os doces, de modo que *ao menos a Ana e o Beto* não ganhem doce algum?

1,5 pts. (d) De quantas maneiras pode-se distribuir os doces, de modo que *ao menos uma* criança não ganhe doce algum?

*Dica*: Use os itens anteriores e o Princípio de Inclusão-Exclusão.

0,5 pts. (e) De quantas maneiras pode-se distribuir os doces, de modo que cada criança receba *ao menos um* doce?

1,0 pt. (f) De quantas maneiras pode-se distribuir os 20 doces distintos, de modo que cada criança receba *exatamente cinco* doces?

**Q2.** Uma mercearia oferece cinco tipos de frutas: ameixas, laranjas, maçãs, pêras e tangerinas. Uma "cesta para presente" contém 20 frutas, escolhidas dentre esses cinco tipos. As frutas são bem selecionadas, de modo que frutas do mesmo tipo são consideradas idênticas.

1,5 pts. (a) Quantas cestas distintas podem ser preparadas? Não há "ordem" entre as frutas na cesta. Só interessa saber quantas frutas de cada tipo a cesta contém.

1,0 pt. (b) Quantas cestas distintas podem ser preparadas, de modo que haja *ao menos duas* frutas de cada tipo?

**Q3.** Uma *sequência ternária* é uma sequência (uma lista) composta pelos algarismos 0, 1 e 2 (por exemplo, 0211210).

1,0 pt. (a) Quantas sequências ternárias de $n$ algarismos contêm exatamente $k$ "uns"?

1,0 pt. (b) Quantas sequências ternárias de $n$ algarismos *não* contêm dois algarismos consecutivos iguais? (*Sugestão*: Use um argumento simples. Não é necessário aplicar o Princípio de Inclusão-Exclusão em grande generalidade.)

---

## Respostas:

**Q1.** (a) Para cada um dos 20 doces distintos, há 4 "opções de criança" a quem entregá-lo. Pelo PM, o número de configurações (formas de distribuir os doces) é $4^{20}$.

Essa é uma "justificativa mínima" que já seria suficiente na avaliação. Aqui está uma versão mais precisa (neste problema simples, não seria necessário elaborar tanto):

Imagine que os doces sejam rotulados de "doce 1" até "doce 20". Cada *configuração*, assim, pode ser *representada* por uma *lista* de comprimento 20, onde cada entrada é um elemento do conjunto das crianças ("com repetição"): a lista $(c_1, c_2, \ldots, c_{20})$ representa a configuração em que a criança $c_i$ recebe o "doce $i$". Assim, por exemplo, a lista (Beto, Ana, Dani, Dani, ...) representa a configuração em que Beto ganha o doce 1, Ana ganha o doce 2, Dani ganha os doces 3 e 4, etc. A "ordem" na lista é relevante, já que os doces são distintos: a lista (Ana, Beto, ...) representa a configuração em que Ana ganha o doce 1 e Beto o doce 2, diferente do exemplo anterior. Assim, há uma bijeção entre o conjunto das listas e o das configurações. Há 4 "opções" de preenchimento em cada entrada na lista, e são 20 entradas. Pelo PM, o número de tais listas é $4^{20}$ e, pelo PB, este é, também, o número de configurações.

(b) $3^{20}$. O argumento é mesmo do item anterior, mas agora há apenas 3 "opções de criança", já que *Ana* foi excluída das opções...

(c) $2^{20}$. Mesmo argumento. Agora *Ana e Beto* foram excluídos.

(d) Como sugerido no quadro, no dia da prova, considere:

- $A$: conjunto das configurações em que Ana não recebe doce;
- $B$: conjunto das configurações em que Beto não recebe doce;
- $C$: conjunto das configurações em que Cora não recebe doce;
- $D$: conjunto das configurações em que Dani não recebe doce.

O objetivo, neste item, é calcular $|A \cup B \cup C \cup D|$ (reflita e entenda a razão — não basta "decorar" isso!). O "PIE4" (ver `https://www.uel.br/eventos/colmatsul/livros/cerioli_viana.pdf`, página 126; página 131 do PDF), aplicado a estes conjuntos, nos dá:

$$
\begin{aligned}
|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| \\
- |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| \\
- |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| \\
+ |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| \\
+ |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| \\
- |A \cap B \cap C \cap D| = 4 \cdot 3^{20} - 6 \cdot 2^{20} + 4.
\end{aligned}
$$

*Sugestão para estudo*: Reflita e endenda como calcular cada um dos termos que aparecem na expressão acima. Alguns desses termos foram obtidos em itens anteriores... Apesar de a formulação do "PIE4" ser um pouco extensa, apresentá-la inteiramente, como foi feito acima, é a forma mais direta e objetiva de justificar sua resposta nesta questão.

*Observação*: Alguns(mas) alunos(as) indicaram na prova, *incorretamente*, que a soma de termos $|A|+|B|+|C|+|C|$ corresponde à "quantidade de configurações em que *exatamente uma* criança" fica sem doce, a soma de termos $|A \cap B| + \cdots + |C \cap D|$ corresponde à "quantidade de configurações em que *exatamente duas* crianças" ficam sem doce, etc. Essas afirmativas *não* estão corretas! Reflita sobre a razão... Lembre que os conjuntos $A$, $B$, $C$ e $D$ têm interseções não-vazias. Há elementos de $A$ ("Ana sem doce") que também pertencem aos outros conjuntos, há elementos de $A \cap B$, por exemplo, que também pertencem a $C$, etc. A "vantagem" do PIE é justamente lidar com situações assim.

(e) Seja $X$ o conjunto de todas as configurações (todas as maneiras de distribuir os 20 doces). No item (a), calculamos $|X| = 4^{20}$. Observe/reflita que o objetivo aqui é calcular

$$|X \setminus (A \cup B \cup C \cup D)| = |X| - |A \cup B \cup C \cup D| = 4^{20} - 4 \cdot 3^{20} + 6 \cdot 2^{20} - 4.$$

(f) Justificativa “simplificada” (seria suficiente na avaliação): Há $\binom{20}{5}$ maneiras de escolher, dentre os 20 doces, os 5 doces da Ana. Dentre os 15 doces que “sobram”, há $\binom{15}{5}$ maneiras de escolher os 5 do Beto. Há $\binom{10}{5}$ e $\binom{5}{5} = 1$ maneiras de escolher os doces da Cora e da Dani, respectivamente. Pelo PM, o número de maneiras de distribuir 5 doces para cada criança, portanto, é $\binom{20}{5}\binom{15}{5}\binom{10}{5}\binom{5}{5} = \dfrac{20!}{(5!)^4}$.

**Q2.** (a) Represente uma cesta de frutas (ou seja, uma configuração) usando uma sequência binária de “barras” e “estrelas”, com *exatamente* 20 estrelas e 4 barras. As barras agem como “divisórias”, que determinam 5 categorias ou “compartimentos”, correspondentes às 5 frutas. A quantidade de estrelas em cada “compartimento” representa a quantidade de frutas do tipo correspondente.

Para o propósito da representação, vamos considerar arbitrariamente as “categorias” nesta ordem: ameixa, laranja, maçã, pêra e tangerina (qualquer outra ordem seria igualmente válida). Assim, por exemplo, a sequência

$$*** \mid **** \mid ******* \mid \mid ******$$

representa a configuração (a cesta) com 3 ameixas, 4 laranjas, 7 maçãs, nenhuma pêra e 6 tangerinas. Há uma bijeção entre o conjunto de tais sequências binárias e o conjunto das configurações.

O número de sequências binárias de comprimento 24, com exatamente 20 estrelas e 4 barras é $\binom{24}{4}$. *Atenção:* É importante entender e saber justificar a razão para isso! Tivemos uma aula inteira em que este era o ponto central... O argumento está dado, sucintamente, no último parágrafo da prova do Teorema 18.8, no livro do Scheinerman (3a Ed), logo antes do Exemplo 18.9.

O número de cestas, portanto, também é $\displaystyle\binom{24}{4}$, pelo PB.

(b) A resposta é $\displaystyle\binom{14}{4}$. O argumento é análogo ao dado acima (não é ncecessário repeti-lo...).

**Q3.** (a) $\displaystyle\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$.

Justificativa sucinta: Escolher, entre as $n$ posições em uma sequência, as $k$ posições dos “uns”. Em seguida, preencher as demais $n - k$ posições com 0 ou 2.

(Recomendo refletir e reescrever a justificativa com suas próprias palavras, de forma mais clara e contextualizada. Mas não é necessário escrever um “textão”.)

(b) $3 \cdot 2^{n-1}$. Há 3 opções (0, 1 ou 2) para a primeira entrada de uma sequência (observe que você pode começar o argumento com qualquer uma das entradas, não necessariamente a primeira...). Para as $n - 1$ entradas seguintes, há apenas 2 opções (0, 1 ou 2, mas excluindo o algarismo na posição anterior).