Hoja de Problemas 1

Introducción al Cálculo Numérico

1.- Si consideramos que el número π viene dado por $\pi = 3.14159265\ldots$ y tomamos la aproximación $\tilde{x} = 3.142$, calcular el error absoluto y relativo de esta aproximación.

2.- En la Antigua Grecia, Arquímedes (278-212 a.C.) obtuvo las siguientes acotaciones para el número π:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

Hallar los errores absolutos y relativos cometidos en estas aproximaciones.

3.- Para alunizar un cohete se aceptaría un error absoluto en la distancia respecto al lugar de aterrizaje de unas decenas de metros respecto al punto marcado de antemano. Si el cohete ha recorrido una distancia de 350000 km para ir de la Tierra a la Luna ¿Sería aceptable en esta situación establecer un error relativo de 2/350000 en la variación respecto del punto de aterrizaje? Razona tu respuesta.

4.- Elegir las expresiones correctas para $n \to \infty$ y $x \to 0$:

(1) $5n^2 + 9n^3 + 1 = O(n^2)$ (2) $\sqrt{n+3} = O(1/n)$

(3) $\dfrac{n+1}{n^2} = O(1/n)$ (4) $\sqrt{n+3} = O(1)$

(5) $\dfrac{n+1}{\sqrt{n}} = o(1)$ (6) $e^{-n} = o(1/n^2)$

(7) $\dfrac{1}{n \ln n} = o(1/n)$ (8) $\dfrac{e^n}{n^5} = O(1/n)$

(9) $\dfrac{5}{n} + e^{-n} = O(1/n)$ (10) $e^{x-1} = O(x^2)$

(11) $x^{-2} = O(\cot x)$ (12) $\cot x = O(x^{-1})$

(13) $\ln 2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + O(1/n)$ (14) $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$

(15) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + O\left(x^3\right)$ (16) $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$

5.- Para comprobar la acumulación de errores de redondeo, determinar el valor de la suma:

$$S = \sum_{k=1}^{10^6} 0.1$$

de manera exacta y también escribiendo un programa de ordenador que lleve a cabo esta tarea con un bucle. Comparar los resultados. ¿A qué se debe la diferencia?

6.- Determinar el éspilon de la máquina. Para ello, calcular $1 + x$ para $x = 2^{-k}$ con $k = 1, 2, \ldots$ mientras que $1 + x > 1$. Comparar el resultado con el comando `eps` de Matlab.

7.- Explorar la estabilidad de los dos siguientes algoritmos para calcular el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci:

$$(A_1) \quad \begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad , \quad n \geq 2 \end{cases}$$

$$(A_2) \quad F_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}} \quad , \quad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Hacer una tabla para distintos valores de n y comparar los resultados.

8.- **Algoritmo de Herón:**

El algoritmo de Herón es un procedimiento que nos permite calcular aproximadamente la raíz cuadrada de un número $c > 0$ mediante el siguiente proceso iterativo:

$$\begin{cases} x_0 \ \text{ dato inicial} \\ x_n = \dfrac{1}{2}\left(x_{n-1} + \dfrac{c}{x_{n-1}}\right) \quad , \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

- Comprobar que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{c}$.
- Calcular la aproximación de $\sqrt{17}$ proporcionada por los términos x_3, x_5, x_6, x_8 de la sucesión, usando la condición inicial $x_0 = 17$.
- Comparar las aproximaciones obtenidas con el valor real de $\sqrt{17}$ dado por el ordenador.

9.- Aproximar la derivada de la función $f(x) = \sin x$ en el punto $x = 1$ utilizando la fórmula:

$$\frac{\sin(1+h) - \sin(1)}{h}$$

con $h = 10^{-k}$ para $k = 1, 2, \ldots, 20$ comparando los resultados obtenidos con el valor exacto. Comprobar que se produce una pérdida de precisión por cancelación.

10.- Las raíces exactas de la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - \left(64 + 10^{-15}\right) x + 64 \times 10^{-15} = 0$$

son $x_1 = 64$ y $x_2 = 10^{-15}$. Calcular sus raíces con la fórmula de segundo grado, comprobando que el resultado obtenido para la menor de ellas no coincide con el exacto en ninguna cifra significativa.

11.- Las raíces de la ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

vienen dadas por las fórmulas:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ahora, el cálculo de éstas podría dar problemas cuando $b^2 \gg 4ac$, ya que estaríamos restando en el numerador dos números muy próximos (dando lugar a errores de cancelación y pérdida de cifras significativas). Reescribir las fórmulas para x_1 y x_2 en los casos adecuados, de tal forma que se evite este comportamiento anómalo. Si aplicamos esta modificación al problema anterior, ¿se resuelve correctamente el problema?

12.- Cómo podemos reescribir la función:

$$f(x) = \frac{x^4 - x^3 - x + 1}{(x-1)^2}$$

para trabajar con números cercanos a $x = 1$. Hacer una tabla de valores en los que se compare el valor que toma la función (y su forma simplificada) para dstintos valores de x, por ejemplo, para $x = 1 + (1/4)^k$ con $k = 1, 2, \ldots, 20$.

13.- **Regla de Horner:**

El algoritmo de Horner (multiplicación anidada o división sintética) es un procedimiento para evaluar de forma rápida un polinomio en un punto dado. Si tenemos un polinomio de grado n de la forma:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

¿Cuántas operaciones son necesarias para calcular $P_n(\alpha)$? Una razón por la que no se evalúan los polinomios directamente es porque se ha demostrado que puede dar lugar a inestabilidades numéricas. El algortimo de Horner permite realizar estas operaciones de manera más eficiene y estable.

Consideremos la siguiente sucesión de términos:

$$\begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_k = \alpha\, b_{k+1} + a_{k+1} \quad , \quad k = n-2, n-3, \ldots, 0, -1 \end{cases}$$

Demostrar que podemos escribir:

$$P_n(x) = (x-\alpha)\, Q_{n-1}(x) + b_{-1} \quad , \quad Q_{n-1}(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$$

y por tanto $P_n(\alpha) = b_{-1}$ ¿Cuántas operaciones realizamos en este algoritmo para calcular $P_n(\alpha)$? Implementar una función que permita evaluar un polinomio dado con la regla de Horner.

Pista: La regla de Horner es esencialmente la Regla de Ruffini, ya que:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\
\alpha & & \alpha\, b_{n-1} & \alpha\, b_{n-2} & \cdots & \alpha\, b_2 & \alpha\, b_1 & \alpha\, b_0 \\
\hline
 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_1 & b_0 & b_{-1}
\end{array}
$$

La razón por la que la regla de Horner se conoce como multiplicación anidada es debido a que estamos haciendo las siguientes operaciones:

$$P_n(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_1\alpha + a_0 = ((\cdots(a_n\,\alpha + a_{n-1})\,\alpha + \cdots)\,\alpha + a_1)\,\alpha + a_0$$

14.- **Polinomios de Hermite:**

Los polinomios de Hermite, $\{H_n(x)\}_n$, son una famila de polinomios que satisfacen la ecuación diferencial:

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Para calcularlos podemos utilizar la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{cases} H_0(x) = 1 \\ H_1(x) = 2x \\ H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x) \quad , \quad \text{para } n \geq 2 \end{cases}$$

Implementar una función que determine el n-ésimo polinomio de Hermite tanto de forma simbólica como numérica y dibujar los 6 primeros polinomios obtenidos.

Estos polinomios son muy importantes en Física Matemática, ya que aparecen por ejemplo para describir los autoestados del oscilador armónico cuántico de masa m y velocidad angular de oscilación ω, que vienen dados por:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \quad , \quad n = 0, 1, \ldots$$

Estas funciones cumplen la Ecuación de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi_n(x) = E_n\psi_n(x) \quad , \quad E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

donde E_n es el nivel de energía asociado con $\psi_n(x)$. Utilizando la función que has implementado para los polinomios de Hermite, escribe otra función que calcule el autoestado n-ésimo, ψ_n, del oscilador armónico. Puedes trabajar suponiendo que $\hbar = 1$.

15.- **Fórmula de Stirling:**

La fórmula de Stirling es una aproximación asintótica muy utilizada en distintos ámbitos de la Física como por ejemplo la Mecánica Estadística. Ésta nos asegura que el comportameinto del factorial viene dado por:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

cuando $n \to \infty$. Es decir, las dos expresiones anteriores son del mismo orden para $n \to \infty$. De hecho, se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

Comprobar que esta propiedad es cierta dibujando las dos funciones y haciendo una tabla con valores cada vez más grandes de n.

16.- Consideremos el sistema lineal $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$$

Determinar la solución del sistema. Ahora, si modificamos ligeramente el sistema de ecuaciones utilizando:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{bmatrix} \quad , \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{bmatrix}$$

¿Varía mucho la solución? ¿Qué podemos concluir acerca del condicionamiento de este problema?

17.- Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, los dos algoritmos siguientes nos permiten calcular sus potencias sucesivas:

$$(A_1) \quad \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = \alpha\, x_{n-1} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$$(A_2) \quad \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = \alpha \\ x_n = (3+\alpha)\, x_{n-1} - 3\alpha\, x_{n-2} \quad , \quad n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

(a) Comprobar que la sucesión $x_n = \alpha^n$ es solución de ambos algoritmos.

(b) Si cogemos $\alpha = 1/7$, hacer una tabla para calcular las potencias $(1/7)^k$ hasta $k = 100$ y comparar las salidas de los dos algoritmos. ¿Cuál de los dos es inestable numéricamente?

18.- Sea $x > 0$ y supongamos que queremos calcular el valor aproximado de e^x mediante la serie de Taylor:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Esta tarea se podría llevar a cabo con un programa que acumulase de forma sucesiva en una variable los términos de la forma $x^k/k!$ hasta que el valor de la variable no se modifique al añadir el siguiente término. El problema con esta estrategia es que, para calcular los cocientes $x^k/k!$, si primero determinamos x^k y $k!$, haciendo después la división, encontraremos dificultades para $k \geq 80$ aproximadamente, ya que $k!$ puede exceder el valor de los números máquina representables en el ordenador (esto daría lugar a lo que se conoce como "overflow"). ¿Cómo podemos calcular el término $x^k/k!$ sin calcular explícitamente $k!$?

Ahora, si queremos calcular e^{-x} para $x > 0$, la serie de Taylor nos daría:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

que es alternada (y puede por tanto estar sujeta a errores de cancelación) ¿Cómo calcularías e^{-x} con $x > 0$ para evitar este problema?

19.- Dada la sucesión de valores:

$$y_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

(a) Demostrar que $y_0 = e - 1$ y además se tiene la relación de recurrencia:

$$y_n = e - n\, y_{n-1}$$

(b) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

(c) Programar esta recurrencia en un ordenador y hacer una tabla con distintos valores de n. ¿Observas algo raro en los resultados obtenidos cuando n es grande?

(d) ¿Cómo se propagaría en el ordenador un error $\delta = 2^{-53}$ (error más pequeño admisible en doble precisión) añadido al valor de y_1?