Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques

Topologia

Apunts de teoria i exercicis

Autor:
Víctor Santiago Blanco

2020 - 2021

Índex

Introducció

En el present document es troba la gran compilació d'apunts de totes les assignatures de topologia que he realitzat a la carrera. En total he realitzat tres assignatures relacionades amb la topologia: una anomenada *Topologia* que la vaig cursar a tercer de carrera, essent l'assignatura de segon en realitat, i durant el primer semestre de pandèmia, amb la qual cosa va ser una mica caòtica la docència i, per tant, és una assignatura que em vaig treure bastant autodidàcticament; la segona s'anomena *Topologia i Geometria Diferencial de Superfícies*, que constava de dues parts, la primera de les quals referida a la part de topologia algebraica que parla sobre el grup fonamental, que és la que incloc aquí. La tercera és una optativa que, a dia d'avui 17 de gener de 2022 estic cursant i, de fet, demà tinc l'examen final de l'assignatura. S'anomena *Topologia Algebraica* i consisteix en l'estudi de l'homologia simplicial i singular.

Aquestes notes no són gens rigoroses i no han estat pròpiament revisades, amb la qual cosa estaran plenes d'errors tipogràfics i de contingut, però ja em serveixen per a l'estudi. Cada part té la seva introducció amb la qual cosa ja no hi ha res més a dir aquí.

Part I

Topologia

Introducció

Al present capítol trobareu uns apunts detallats d'un curs molt bàsic i introductori sobre topologia. Aquest curs és l'assignatura anomenada "topologia", assignatura obligatòria en la carrera de matemàtiques de la Universitat de Barcelona, que jo he cursat aquest 2020. Ara però, el semestre al qual l'he cursada ha estat el semestre de la crisis de la COVID-19, que va obligar a fer les classes online. Així doncs, inicialment aquest curs està basat en els meus apunts de les classes magistrals impartides pel Dr. Ignasi Mundet, així com els problemes impartits pel Dr. Javier Gutiérrez. Ara bé, això va durar escasses setmanes i la veritat és que els professors esmentats van continuar donant-nos bibliografia i exercicis corregits per tal de continuar el curs des de casa.

He de dir, però, que no estic gaire satisfet amb la metodologia proposada pel Mundet, que es va basar en donar tres fonts, i anar actualitzant fins a quin capítol havíem de tenir llegit. Després va començar la iniciativa de fer classes virtuals pel BB Collaborate per resoldre dubtes. A mí em sembla insuficient, però què hi farem. Les fonts donades pel Dr. Mundet són les meves principals fonts per aquest document. Aquestes són [**naranjo**], [**llerena**], [**mathonline**]. Els primers són uns apunts bastant antics dels professors J. Naranjo i V. Navarro, que contenen una breu descripció de tots els temes del curs, així com més temes ja que són d'abans del pla Bologna. Els segons són uns apunts de la professora I. Llerena, que consisteixen en una molt més exhaustiva compilació de tot aquest curs, amb molt més material del necessari. Jo només n'he pres una o dues seccions d'aquí, i la resta per complementar (dibuixos, exemples, etc.). La última referència és una pàgina web proporcionada pels professors d'aquesta assignatura que conté un extens curs de topologia. Aquesta ha estat la meva principal font. Tots (o quasi tots) els dibuixos són extrets d'allà i gran part dels exemples també.

D'altra banda, els exercicis (no tots) van ser realitzats pel professor de laboratori, així com també pel Mundet (que a la mateixa vegada era el professor de problemes) i penjats al Campus Virtual seguint la línia cronològica establerta pel pla docent, de forma que la gran majoria d'exercicis realitzats en aquest document provenen directa o semi directament d'aquests exercicis. Altres, però, van ser realitzats del tot per mi, ja que donades les circumstàncies de la COVID-19, es van veure obligats a modificar el mètode d'avaluació i una part consistia en realitzar exercicis i entregar-los cada setmana.

Dit això, també volia agrair l'ajuda d'alguns dels meus companys com el Sixte Oriol Llenas Segura i el Roger Gibert que em van proporcionar apunts i exercicis fets per ells ja que van cursar l'assignatura un any abans que jo, i també a l'Eric Rubia Aguilera, que em va ajudar sempre que li ho vaig demanar i també em va proporcionar exercicis corregits i esclariments teòrics.

Per últim, volia afegir que aquest és un document que conté bàsicament apunts. No té cap intenció d'ésser un treball ben presentat ni res de l'estil, amb la qual cosa és bastant possible que hi hagi faltes o errors tipogràfics que se m'hagin passat ja que no ho he revisat com si fos un treball a avaluar, perquè no ho és. Si es detecten errors greus seria d'agrair que se m'avisés.

Capítol 1

Espais mètrics

1.1 Espais mètrics i isometries

Definició 1.1.1 (Espai mètric)**.** Un *espai mètric* és una parella (X, d) on X és un conjunt i $d : X \times X \to \mathbb{R}$ és una aplicació que satisfà

(1) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$;

(2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(3) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$;

(4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$ (desigualtat triangular).

Definició 1.1.2 (Distància)**.** Tota funció d que satisfà les propietats (axiomes) de la funció d de (**??**) s'anomena *distància* o *mètrica* a X i es llegeix $d(x, y)$ com *distància de x a y*.

Exemple 1.1.3. Vegem-ne alguns exemples.

(1) $X = \mathbb{R}^n$, $d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2\right)^{1/2} = \|x - y\|$. Distància euclidiana.

(2) $X = \mathbb{R}^n$, $d_1((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$. Distància de Manhattan.

(3) $X = \mathbb{R}^n$, $d_\infty((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max_i |x_i - y_i|$.

(4) X conjunt arbitrari i $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida com $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ i $d(x, y) = 0$ si $x = y$. Es diu distància discreta. .

(5) Si (X, d) és un espai mètric i $Y \subseteq X$ és un subconjunt qualsevol, aleshores $(Y, d|_{Y \times Y})$ és un espai mètric (es diu subespai mètric de (X, d)).

(6) $X = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \ : \ \text{contínua}\}$. Definim la distància de la següent manera:

$$d(f, g) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)| = \max_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)| < \infty$$

Definició 1.1.4 (Isometria)**.** Una *isometria* d'un espai mètric (X, d) cap a un altre espai mètric (Y, d_Y) és una bijecció $f : X \to Y$ que satisfà $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$ $\forall x, x' \in X$.

Definició 1.1.5 (Espais isomètrics)**.** Dos espais mètrics són *isomètrics* si hi ha una isometria d'un a l'altre.

1.2 Boles obertes i oberts

Definició 1.2.1 (Bola oberta)**.** Sigui (X, d) un espai mètric. Donat $x \in X$ i $r \in \mathbb{R}_+$ definim la *bola oberta* de radi r i centre x com

$$B_r(x) = \{y \in X \ : \ d(x, y) < r\}$$

Lema 1.2.2. *Propietats de les boles obertes:*

(1) $x \in B_r(x)$, $\forall r \in \mathbb{R}_+$. *En particular* $B_r(x) \neq \emptyset$.

(2) $X = \bigcup_{x \in X,\, r \in \mathbb{R}_+} B_r(x)$.

(3) Si $y \in B_r(x)$, $\exists s \in \mathbb{R}_+$ *tal que* $B_s(y) \subseteq B_r(x)$.

(4) $B_r(x) \cap B_{r'}(x')$ *és unió de boles obertes.*

Demostració. (1) $d(x, x) = 0 < r \ \forall r \in \mathbb{R}$.

(2) Conseqüència de (1).

(3) Sigui $y \in B_r(x)$ i sigui $s = r - d(x, y) > 0$. Aleshores, si $z \in B_s(y)$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = r - s + d(y, z) < r - s + s = r$. Així, $d(x, z) < r$ que implica $z \in B_r(x)$.

(4) Per tot $y \in B_r(x) \cap B_{r'}(x')$ $\exists s, s' > 0$ tal que $B_s(y) \subseteq B_r(x)$ i $B_{s'}(y') \subseteq B_{r'}(x')$ per (3). Aleshores, definim $\rho_y := \min\{s, s'\}$. Se satisfà $B_{\rho_y}(y) \subseteq B_r(x) \cap B_{r'}(x')$. Aleshores

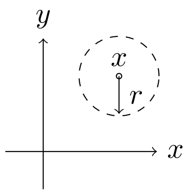
$$B_r(x) \cap B_{r'}(x') = \bigcup_{y \in B_r(x) \cap B_{r'}(x')} B_{\rho_y}(y).$$

(quan $B_r(x) \cap B_{r'}(x') = \emptyset$, a la dreta la unió es fa sobre el conjunt buit de subconjunts, i per tant és el buit.

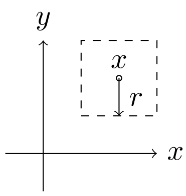
$\square$

Exemple 1.2.3. Exemples de boles obertes.

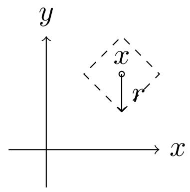
(1) Si $X = \mathbb{R}^2$ i d és la distància euclidiana, és a dir $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, la bola $B_r(x)$ és un disc al pla XY de centre x i radi r:



(2) Si $X = \mathbb{R}^2$ i $d = d_\infty$ de l'exemple anterior, és a dir, $d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\}$, aleshores la bola $B_r(x)$ es representa com un quadrat de costat $2r$ i centre x:



(3) Si $X = \mathbb{R}^2$ i $d = d_1$ de l'exemple anterior, és a dir, $d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$, aleshores la bola $B_r(x)$ té una forma com de rombe de diagonals iguals a $2r$ i de costat igual a $\sqrt{2}r$.



(4) Si prenem X un conjunt arbitrar i d la distància discreta, aleshores

$$B_r(x) = \begin{cases} \{x\} & si\ r \leq 1 \\ X & si\ r > 1 \end{cases} \qquad \forall x \in X.$$

Definició 1.2.4 (Obert d'un espai mètric)**.** Direm que un subconjunt $U \subset X$ és *obert* si i només si $\forall x \in U$ $\exists r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq U$.

Exemple 1.2.5. Alguns exemples.

(1) $\emptyset$ és obert per conveni.

(2) X és obert. En efecte, $B_r(x) \subseteq X$, $\forall x \in X$.

(3) Les boles obertes són oberts.

Demostració. Prenem $x \in X$ i $r > 0$, llavors si $y \in B_r(x)$, prenem $\rho = r - d(x, y) > 0$ ja que $d(x, y) < r$ perquè $y \in B_r(x)$. Se satisfà doncs, $B_\rho(y) \subseteq B_r(x)$ ja que si $z \in B_\rho(y)$, aleshores

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + r - d(x, y) = r \Rightarrow z \in B_r(x).$$

□

(4) $\forall x \in X$, $U = X \setminus \{x\}$ és un obert.

Demostració. Si $y \in U$, aleshores $r = d(x, y) > 0$. Per tant, $B_r(y)$ és una bola oberta centrada a y i continguda a U. □

(5) Sigui (X, d) un espai mètric arbitrari. Considerem $x \in X$ i $r \geq 0$ i definim

$$U_r(x) := \{y \in X \ : \ d(x, y) > 0\}$$

Aquest conjunt $U_r(x)$ és un obert.

Demostració. Si $y \in U_r(x)$, prenem $\rho = d(x, y) - r > 0$. Se satisfà, per la desigualtat triangular, que $B_\rho(y) \subseteq U_r(x)$. □

(6) Sigui (X, d) un espai mètric arbitrari, $x \in X$ i $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $0 < a < b$. El conjunt

$$U_{a,b}(x) := \{y \in X \ : \ a < d(x, y) < b\}$$

és un obert.

Demostració. Podem considerar $U_{a,b}(x) = B_b(x) \cap U_a(x)$ i com que $B_b(x)$ és obert perquè ho hem vist a aquest exemple i $U_a(x)$ també, aleshores $U_{a,b}(x)$ és intersecció d'oberts. Encara no ha sortit, però a la proposició (**??**) es demostra que la intersecció d'oberts és obert i aleshores $U_{a,b}(x)$ és obert, com volíem veure. $\square$

(7) Si considerem $X = \mathbb{R}^n$ i d_e la distància euclidiana, és a dir, $d_e(x, y) = \|x - y\|$, aleshores recuperem la noció d'obert que ja coneixíem.

(8) Si considerem $X = \mathbb{R}^n$ i d_∞ la distància donada per $d_\infty(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$, aleshores els oberts són els mateixos que els de l'espai mètric $(\mathbb{R}^n, d_e)$ tot i que si $n \geq 2$, aquests espais mètrics no són isomètrics.

Demostració. Anem a demostrar que els oberts de $(\mathbb{R}^n, d_e)$ són els mateixos que els de $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$. És suficient comprovar que, $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

- $\forall r > 0\ \exists s > 0$ tal que $B_s^{d_\infty}(x) \subseteq B_r^{d_e}(x)$ (que els oberts de d_∞ són oberts de d_e). En efecte, si $n = 2$, la bola $B_{r/\sqrt{2}}^{d_\infty}(x) \subseteq B_r^{d_e}(x)$. En general, si $x \in \mathbb{R}^n$, $B_{r/\sqrt{n}}^{d_\infty}(x) \subseteq B_r^{d_e}(x)$, ja que si $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se satisfà $\max_i |x_i| \leq \frac{r}{\sqrt{n}}$, aleshores $x_1^2 + \cdots + x_n^2 < \left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^2 = n \cdot \frac{r^2}{n} = r^2$.
- $\forall r > 0\ \exists s > 0$ tal que $B_s^{d_e} \subseteq B_r^{d_\infty}$ (que els oberts de d_e són oberts de d_s). En efecte, la bola $B_r^{d_e}(x) \subseteq B_r^{d_\infty}(x)$ ja que si $x_1^2 + \cdots + x_n^2 < r^2$, aleshores $\max_i\{x_i^2\} < r^2$ i per tant, trivialment, $\max_i |x_i| < r$.

$\square$

(9) Si $X = \mathbb{R}^n$ i d_1 és la distància donada per $d_1(x, y) = \sum_i |x_i - y_i|$, aleshores els oberts són els mateixos que a $(\mathbb{R}^n, d_e)$.

Proposició 1.2.6. *Algunes propietats dels oberts. Sigui (X, d) un espai mètric*

(1) $\emptyset$ i X són oberts.

(2) La unió arbitrària d'oberts és un obert. És a dir, si $\{U_i\}_{i \in I}$ és una col·lecció d'oberts de X (I arbitràriament gran) aleshores $\bigcup_{i \in I} U_i$ és obert de X.

(3) La intersecció finita d'oberts és obert. És a dir, si $U_1, \ldots, U_k$ són oberts de X, aleshores $U_1 \cap \cdots \cap U_k$ també és obert.

Demostració. (1) $\emptyset$ és obert per conveni. $\emptyset$ no té cap element.

X és obert perquè $B_1(x) \subseteq X$, $\forall x \in X$.

(2) Siguin $\{U_i\}_{i \in I}$ oberts. Si $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, aleshores $\exists i \in I$ tal que $x \in U_i$. Per tant, existeix $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq U_i$ (ja que U_i és obert). Aleshores,

$$B_r(x) \subseteq U_i \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i.$$

(3) Siguin $U_1, \ldots, U_k$ oberts i sigui $x \in U_1 \cap \cdots \cap U_k$. Aleshores, $\forall j = 1, \ldots, k$, $x \in U_j$ i per tant $\exists r_j > 0$ tal que $B_{r_j}(x) \subseteq U_j$ (ja que U_j és obert). Sigui $r = \min\{r_1, \ldots, r_k\} > 0$. Aleshores

$$B_r(x) \subseteq B_{r_j}(x) \subseteq U_j \quad \forall j \quad \Longrightarrow \quad B_r(x) \subseteq \bigcap_{j=1}^{k} U_j.$$

$\square$

Observació 1.2.7. *En general, les interseccions infinites d'oberts no són necessàriament oberts. Per exemple, si* $(X,d) = (\mathbb{R}, d_e)$*, agafem l'obert* $\left(-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right) \subset \mathbb{R}$ *que és obert* $\forall m \in \mathbb{N}$*. Però en canvi*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

no és obert.

1.3 Funcions contínues

Definició 1.3.1 (Funció contínua)**.** Sigui (X, d_X) i (Y, d_Y) dos espais mètrics. Sigui $f : X \to Y$ una aplicació. Direm que f *és contínua al punt* $x \in X$ si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tq. $\forall x' \in X$, si $d_X(x, x') < \delta$ aleshores $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Direm que f és contínua si ho és a tots els punts de X.

Observació 1.3.2. *Una definició alternativa de la definició* (**??**) *de funció contínua és la següent: Una funció* $f : X \to Y$ *és contínua al punt* x *si* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *tal que*

$$f\left(B_\delta^X(x)\right) \subseteq B_\varepsilon^Y(f(x)) \iff B_\delta^X(x) \subseteq f^{-1}\left(B_\varepsilon^Y(f(x))\right).$$

Teorema 1.3.3. *Donada una aplicació* $f : X \to Y$ *entre espais mètrics, es compleix que* f *és contínua si, i només si,* $\forall U \subseteq Y$ *obert,* $f^{-1}(U)$ *és un obert de* X*.*

Demostració. Suposem que f és contínua. Sigui $U \subseteq Y$ un obert, sigui $x \in f^{-1}(U)$. Aleshores $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. Com que f és contínua a x, $\exists \delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subseteq f^{-1}(U)$.

Recíprocament, suposem que $\forall$ obert $U \subseteq Y$, $f^{-1}(U)$ és obert de X. Sigui $x \in X, \varepsilon > 0$. Com que $B_\varepsilon(f(x))$ és un obert de Y, la hipòtesis implica que $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subseteq X$ és obert. Com que $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$, $\exists \delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. □

Exemple 1.3.4. Alguns exemples de funcions contínues:

(1) Tota aplicació constant és contínua.

(2) La composició de funcions contínues és una funció contínua. És a dir, si $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ són dues aplicacions contínues, on $(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z)$ són espais mètrics, aleshores $g \circ f : X \to Z$ és contínua.

   Demostració. Antiimatge d'un obert respecte composició és

   $$(g \circ f)^{-1}(obert) = f^{-1}(g^{-1}(obert)) = f^{-1}(obert) = obert$$

   pel teorema (**??**). □

(3) Dotem $\mathbb{R}$ de la distància euclidiana (que en dimensió 1 és la distància usual dels valors absoluts). Si (X, d) és un espai mètric, $\forall p \in X$ la funció

   $$\begin{aligned} d_p : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(p, x) \end{aligned}$$

   és contínua (i no és constant, a menys que $X = \{p\}$).

Demostració. Sigui $x \in X$ i sigui $\varepsilon > 0$. Suposem que $x' \in B_\varepsilon(x)$. Aleshores, $d_p(x') = d(p, x') \leq d(p, x) + d(x, x') < d_p(x) + \varepsilon$ que implica que $d_p(x') - d_p(x) < \varepsilon$. Repetint l'argument intercanviant x per x' obtenim que $d_p(x) - d_p(x') < \varepsilon$ i tot ajuntant-ho obtenim

$$|d_p(x) - d_p(x')| < \varepsilon$$

i resulta que el valor absolut és la distància euclidiana. □

(4) Sigui (X, d) un espai mètric. Dotem $X \times X$ de la següent distància:

$$\delta((x, x'), (y, y')) := \max\{d(x, y), d(x', y')\}$$

L'aplicació $d : X \times X \to \mathbb{R}$, $(x, x') \mapsto d(x, x')$ és contínua (on a $X \times X$ utilitzem la distància δ i a $\mathbb{R}$ la distància usual euclidiana).

Demostració. Primer de tot, caldria comprovar que δ és realment una distància. Es deixa com a exercici. Així doncs, per provar que d és contínua, és suficient veure que $d^{-1}((a, b)) \subseteq X \times X$ és un obert $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sigui

$$(x, x') \in d^{-1}((a, b)) \Longleftrightarrow a < d(x, x') < b$$

Sigui

$$r = \min\left\{\frac{d(x, x') - a}{2}, \frac{b - d(x, x')}{2}\right\} > 0$$

Suposem que $\delta((x, x'), (y, y')) < r$. Aleshores,

$$d(x, y) < r, \qquad d(x', y') < r$$

de la definició de δ. Aleshores, per la desigualtat triangular,

$$d(y, y') \leq \underbrace{d(y, x)}_{<r} + d(x, x') + \underbrace{d(x', y')}_{<r} < d(x, x') + 2r \leq b$$

També tenim,

$$a + 2r \leq d(x, x') \leq d(x, y) + d(y, y') + d(y', x') \Rightarrow d(y, y') > d(x, x') - 2r \geq a.$$

És a dir, hem demostrat que $\delta((x, x'), (y, y')) < r \Rightarrow a < d(y, y') < b$. Per tant, $B_r((x, x')) \subseteq d^{-1}((a, b))$. En conclusió $d^{-1}((a, b))$ és un obert de $X \times X$. □

Proposició 1.3.5. *Si (X, d) és un espai mètric i $f : X \to \mathbb{R}$ és contínua, aleshores, per $\lambda \in \mathbb{R}$, la funció λf és contínua.*

Demostració. Sigui $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Volem veure que $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x' \in X$ tal que si $d(x, x') < \delta$ aleshores $|\lambda f(x) - \lambda f(x')| < \varepsilon$ (definició **??**)

- Si $\lambda = 0$, qualsevol valor de δ funciona.
- Si $\lambda \neq 0$, per la continuïtat de f al punt x, sabem que $\exists \delta' > 0$ tal que si $d(x, x') < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$. En λf tenim que $|\lambda||f(x) - f(x')| < \varepsilon$ que implica que $|f(x) - f(x')| < \varepsilon/|\lambda|$ i per tant, podem prendre $\delta = \varepsilon|\lambda|$.

□

Proposició 1.3.6. *Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ són contínues (on (X, d) és un espai mètric), aleshores $f + g : X \to \mathbb{R}$ és contínua.*

Demostració. per tot $\varepsilon > 0$, al ser f contínua $\exists \delta_f > 0$ tal que $\forall x' \in X$ tal que $d(x, x') < \delta_f$ implica que $|f(x) - f(x')| < \varepsilon/2$. Anàlogament, $\exists \delta_g > 0$ tal que $\forall x' \in X$ complint que $d(x, x') < \delta_g$, implica que $|g(x) - g(x')| < \varepsilon/2$.

Prenem ara $\delta := \min\{\delta_f, \delta_g\} > 0$ i se satisfà que si $d(x, x') < \delta$, aleshores $|f(x) - f(x')| + |g(x) - g(x')| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Això implica que

$$|f(x) + g(x) - (f(x') + g(x'))| = |(f + g)(x) - (f + g)(x')| < \varepsilon$$

com volíem veure. □

Proposició 1.3.7. *Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ són funcions contínues, on (X, d) és un espai mètric, aleshores fg és contínua.*

Demostració. Siguin $x \in X$ i $\varepsilon > 0$. Volem trobar $\delta > 0$ tal que si $d(x, x') < \delta$, aleshores

$$|(fg)(x) - (fg)(x')| < \varepsilon \iff |f(x)g(x) - f(x')g(x')| < \varepsilon \iff$$

$$\iff |f(x)g(x) - f(x')g(x) + f(x')g(x) - f(x')g(x')| < \varepsilon \iff$$

$$\iff |g(x)(f(x) - f(x')) + f(x')(g(x) - g(x'))| \leq$$

$$\leq |g(x)||f(x) - f(x')| + |f(x')||g(x) - g(x')| < \varepsilon.$$

- Vegem que $\exists \delta_1 > 0$ tal que $\forall x' \in X$, si $d(x, x') < \delta_1$, aleshores $|g(x)||f(x) - f(x')| < \varepsilon/2$.
  - Si $g(x) = 0$ qualsevol δ_1 funciona.
  - Si $g(x) \neq 0$, al ser f contínua $\exists \delta_1$ tal que si $d(x, x') < \delta_1$, aleshores

    $$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2|g(x)|} \Longrightarrow |g(x)||f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

- Vegem que $\exists \delta_2 > 0$ tal que si $d(x, x') < \delta_2$, aleshores $|f(x')||g(x) - g(x')| < \varepsilon/2$. Sigui $c = |f(x)|$. Com que f és contínua, $\exists \delta_3 > 0$ tal que si $d(x, x') < \delta_3$ aleshores $|f(x) - f(x') \leq 1 = \varepsilon$ (per exemple). Aleshores $|f(x')| \leq |f(x)| + 1 = c + 1$.

  Com que g també és contínua, $\exists \delta_4 > 0$ tal que si $d(x, x') < \delta_4$, aleshores

  $$|g(x) - g(x')| < \frac{\varepsilon}{2(c+1)} \Longrightarrow |f(x')||g(x) - g(x')| < (c+1)\frac{\varepsilon}{2(c+1)} = \varepsilon/2$$

  Prenem $\delta_2 = \min\{\delta_3, \delta_4\}$ i aleshores si $d(x, x') < \delta_2$ es compleix $|f(x')||g(x) - g(x')| < \varepsilon/2$.

Finalment, prenent $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ satisfà que si $d(x, x') < \delta$, aleshores

$$|(fg)(x) - (fg)(x')| \leq |g(x)||f(x) - f(x')| + |f(x')||g(x) - g(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Definició 1.3.8 (Tancat)**.** Sigui (X, d) un espai mètric. Direm que un subconjunt qualsevol $Z \subseteq X$ és *tancat* si i només si $X \setminus Z$ és obert.

Proposició 1.3.9. *Sigui $f : X \to Y$ una aplicació entre espais mètrics. f és contínua si $\forall Z \subseteq Y$ tancat, $f^{-1}(Z)$ és un tancat de X.*

Demostració. $Z \subseteq Y$ tancat si i només si $Y \setminus Z$ obert. D'altra banda, $X \setminus f^{-1}(Z) = f^{-1}(Y \setminus Z)$ i llavors el teorema és conseqüència del teorema (**??**). $\square$

Capítol 2

Espais topològics

2.1 Espais topològics

Definició 2.1.1 (Conjunt de les parts)**.** Donat un conjunt X qualsevol, definim el conjunt de *les parts de* X com la família de tots els seus subconjunts. L'escrivim com $\mathscr{P}(X)$.

Exemple 2.1.2. Sigui $X = \{a, b, c\}$. Aleshores

$$\mathscr{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Observació 2.1.3. *Per qualsevol conjunt* X*,* $\emptyset, X \in \mathscr{P}(X)$*. En efecte, ja que* $\forall X$ *conjunt* $\emptyset \subseteq X$ *i* $X \subseteq X$*.*

Definició 2.1.4 (Topologia)**.** Sigui X un conjunt. Una *topologia* a X és un subconjunt

$$\tau \subseteq \mathscr{P}(X)$$

que satisfà

(1) $\emptyset, X \in \tau$.

(2) $\forall \{A_i\}_{i \in I},\ A_i \in \tau\ \forall i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$. És a dir, la unió arbitrària d'elements de τ és un element de τ.

(3) $A_1, \ldots, A_n \in \tau \Rightarrow A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \tau$. És a dir, la intersecció finita d'elements de τ és un element de τ.

Si τ és una topologia, els seus elements s'anomenen *els oberts de* τ.

Definició 2.1.5 (Espai topològic)**.** Un *espai topològic* és una parella (X, τ), on X és un conjunt i τ és una topologia a X.

Habitualment escriurem X directament en lloc d'escriure (X, τ) per referir-nos a l'espai topològic.

2.2 Exemples de topologies

2.2.1 Topologia discreta i grollera

Definició 2.2.1 (Topologia discreta i grollera)**.** Sigui X un conjunt. La *topologia discreta* és $\tau = \mathscr{P}(X)$. La *topologia grollera* és $\tau_g = \{\emptyset, X\}$.

2.2.2 Topologia usual i euclidiana

Sigui (X, d) un espai mètric on d és una mètrica o distància. Aleshores, podem definir una topologia a X que reculli tots aquells conjunts que siguin oberts amb la mètrica d. Així doncs, τ recollirà tots els conjunts oberts de X amb d. Per tant, els oberts de X (com a espai topològic amb la topologia aquesta) seran els oberts de X (com a espai mètric, amb la distància d). Així doncs:

Definició 2.2.2 (Topologia usual)**.** Si (X, d) és un espai mètric, aleshores la col·lecció dels oberts de X (amb la distància d)

$$\tau = \{A \subseteq X \ : \ A \text{ obert respecte de } d\}$$

és una topologia, és a dir, satisfà els axiomes de la definició (**??**) com a propietats. Se li'n diu la *topologia definida per d.* Si, a més, d és la distància euclidiana, se li'n diu topologia euclidiana i sovint l'escriuré com τ_e.

Exemple 2.2.3. Si prenem l'espai mètric $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, aleshores els oberts són els intervals (a, b), amb $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, i les unions arbitràries d'aquests intervals. Per tant, l'espai topològic $(\mathbb{R}, \tau_e)$ té la topologia euclidiana, els oberts de la qual són intervals oberts i unions d'aquests.

Exemple 2.2.4. Si prenem l'espai mètric $(\mathbb{R}^n, d)$, on d és la distància euclidiana $d(x, y) = \|x - y\|$, aleshores l'espai topològic provinent d'aquest espai mètric $(\mathbb{R}^n, \tau_e)$ tindrà com a obert les boles obertes (o unió d'aquestes) de $\mathbb{R}^n$, amb la distància euclidiana.

Observació 2.2.5. *Si d és la distància discreta (veure* **??** *i exemples), aleshores la topologia donada per d és la topologia discreta.*

Demostració. Si d és la distància discreta és de la forma

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases} \qquad \forall x, y \in X$$

Aleshores, $B_1(x) = \{x\}$ i amb això $\forall U \subseteq X$, $\forall x \in U$, $B_1(x) \subseteq U \Rightarrow U$ és un obert de la topologia definida per d. □

Observació 2.2.6. *Si X té més d'un punt, no hi ha cap mètrica a X que doni lloc a la topologia grollera a X.*

Demostració. Si d és una distància qualsevol a X i $x, y \in X$ són punts tals que $x \neq y$, prenent $r = d(x, y) > 0$ el subconjunt $B_r(x)$ és un obert de la topologia definida per d que conté x però no conté y, ergo $B_r(x) \neq \emptyset$ i $B_r(x) \neq X$. □

Observació 2.2.7. *L'assignació*

$$\{\textit{espais mètrics}\} \longrightarrow \{\textit{espais topològics}\}$$

- *No és injectiva.*
- *Ni tampoc és exhaustiva. És a dir, hi ha espais topològics que no provenen de cap espai mètric.*

  *Per exemple, si $X = \{a, b\}$ i $\tau = \{\emptyset, X\}$ (topologia grollera), no existeix cap mètrica d a X que tingui τ per conjunt d'oberts. Això és conseqüència de l'observació (**??**).*

Topologia dels intervals oberts $(-n, n)$

Considerem la col·lecció d'intervals oberts

$$\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-n, n) \; : \; n \in \mathbb{N}\} = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-1, 1), (-2, 2), \ldots\}$$

Proposició 2.2.8. *τ és una topologia.*

Demostració. Primerament, ja veiem que $\emptyset, \mathbb{R} \in \tau$. Per veure (2), veiem que

$$\emptyset \subset (-1, 1) \subset (-2, 2) \subset \cdots \subset (-n, n) \subset \cdots \subset \mathbb{R}$$

Per tant, una unió arbitrària

$$\bigcup_{i \in I} U_i, \qquad U_i \in \tau, \; \forall i \in I$$

serà igual a "l'interval més llarg" que hi hagi, i per tant estarà contingut en τ.

Per últim, per veure (3), veiem que les interseccions finits

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i, \qquad U_i \in \tau, \; i = 1, \ldots, n$$

donaran com a resultat "l'interval més curt" que hi hagi a la intersecció. Per tant, serà també a τ. $\square$

Es pot provar de forma anàloga que el conjunt

$$\tau = \{[-n, n] \; : \; n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

també és una topologia sobre $\mathbb{R}$.

2.2.3 Topologia del límit inferior o de Sorgenfrey

Aquesta és una topologia que s'utilitza en alguns exemples i/o exercicis i per tant la introduiré aquí. Font: [**problemasyecuaciones**].

Definició 2.2.9 (Topologia de Sorgenfrey)**.** La topologia de *Sorgenfrey*[1] o *topologia del límit inferior* és una topologia sobre $\mathbb{R}$ que té per base

$$\beta = \{[a, b) \; : \; a < b, \; a, b \in \mathbb{R}\}$$

A l'espai topològic resultat se'l denomina la *recta de Sorgenfrey* $\mathbb{R}_\ell$ i al producte de dues rectes de Sorgenrfey se'l denomina el *pla de Sorgenfrey* $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$:

2.2.4 Topologia del segment inicial i final

Definició 2.2.10 (Topologia del segment inicial)**.** Considerem el conjunt dels naturals $\mathbb{N}$. La col·lecció de subconjunts

$$\tau = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{1, 2, \ldots, n\} \; : \; n \in \mathbb{N}\}$$

de $\mathbb{N}$ és anomenada la *topologia del segment inicial*.

Proposició 2.2.11. *Aquesta τ és efectivament una topologia.*

[1] Robert Henry Sorgenfrey (1915 - 1996) va ser un matemàtic dels Estats Units, professor emèrit de Matemàtiques a la Universitat de Califòrnia. Font: [**wikisorgenfrey**]

Demostració. Veiem que compleix les tres propietats:

(1) Explícitament $\mathbb{R}, \emptyset \in \tau$.

(2) Notem que $\emptyset \subset \{1\} \subset \{1,2\} \subset \cdots \subset \{1,\ldots,n\} \subset \cdots \subset \mathbb{N}$ i que, per tant, la unió arbitrària de conjunts d'aquests donarà com a resultat el conjunt més gran dels que hàgim agafat.

(3) Per la mateixa raó que a (2), la intersecció finita de conjunts de τ donarà com a resultat el conjunt més petit dels que hàgim escollit.

Per tant, τ és una topologia i $(\mathbb{N}, \tau)$ és un espai topològic. □

De manera molt anàloga podem definir la següent topologia

Definició 2.2.12 (Topologia del segment final)**.** La col·lecció de subconjunts

$$\tau = \{\mathbb{N}, \emptyset\} \cup \} \{\{n, n+1, \ldots,\} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

de $\mathbb{N}$ s'anomena *la topologia del segment final.*

Proposició 2.2.13. *Aquesta és també una topologia sobre* $\mathbb{N}$.

Demostració. Com que es compleix la cadena

$$\emptyset \subseteq \{n, n+1, \ldots\} \subseteq \{n-1, n, n+1, \ldots\} \subseteq \cdots \subseteq \{2, 3, 4, \ldots\} \subset \mathbb{N}$$

la demostració és anàloga a l'anterior (**??**) □

2.2.5 Topologia dels complements finits i dels complements numerables

Definició 2.2.14 (Topologia dels complements finits)**.** Sigui X un conjunt no buit. Definim la *topologia dels complements finits* sobre X com

$$\tau_c = \{U \subseteq X \ : \ U = \emptyset, \text{ o bé } U^c \text{ és finit}\}.$$

Proposició 2.2.15. *La topologia τ_c és, en efecte, una topologia sobre X.*

Demostració. Veiem que satisfà les tres condicions:

(1) $\emptyset \in \tau$ per definició. $X \in \tau$ perquè $X = X \setminus \emptyset$ i $\emptyset$ es considera finit.

(2) Sigui $\{U_i\}_{i \in I}$ una col·lecció arbitrària d'oberts de τ. Tenim

$$\left(\bigcup_{i \in I} U_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} U_i^c.$$

Si algun $U_i = \emptyset$, la intersecció és $\emptyset \in \tau$. Suposem que $\forall i \in I$, $U_i \neq \emptyset$. Aleshores, U_i^c és finit $\forall i \in I$. Per tant $\cap_i U_i^c$ és finit i aleshores $\cup_i U_i \in \tau$

(3) Sigui $\{U_1, \ldots, U_n\}$ una col·lecció finita d'elements de τ. Aplicant les lleis de De Morgan, observem que

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} U_i^c.$$

Aleshores, si algun $U_i = \emptyset$, $\cap_i U_i = \emptyset$ i per tant $(\cap_i U_i)^c = \emptyset^c = X \in \tau$. Suposem que cap $U_i \neq \emptyset$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Aleshores, U_i^c és finit $\forall i = 1, \ldots, n$ i per tant $\cup_i U_i^c$ és finit, ergo $\cap_i U_i \in \tau$.

□

Proposició 2.2.16. *Si X és un conjunt finit, aleshores la topologia dels complements finits és la topologia discreta.*

Demostració. Si X és finit, tot subconjunt de X és finit, per tant $\forall U \subseteq X$, $U^c = X \setminus U$ també és finit. Així $\forall U \subseteq X$, $U \in \tau$ i per tant $\tau = \mathscr{P}(X)$ és la topologia discreta. □

Una topologia molt similar a l'anterior és la topologia dels complements numerables.

Definició 2.2.17 (Topologia dels complements numerables)**.** Sigui X un conjunt no buit. La *topologia dels complements numerables* és la col·lecció

$$\tau = \{U \subseteq X \ : \ U^c \text{ és numerable}\}$$

Proposició 2.2.18. *La topologia dels complements numerables és, efectivament, una topologia sobre X.*

Demostració. La demostració és anàloga a (**??** □

2.2.6 La topologia nidificada

Aquesta és una topologia que ni als apunts de classe ni als exercicis ni als apunts del Naranjo-Navarro surt, però que a la web mathonline la presenten i l'utilitzen a alguns exemples que jo també posaré, així que la presento aquí per tenir un exemple més.

Definició 2.2.19 (Topologia nidificada)**.** Sigui $X \neq \emptyset$ un conjunt. La topologia *nidificada* és una col·lecció de subconjunts

$$\tau = \{\emptyset, X\} \cup \{U_1, U_2, \ldots\} \cup \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} U_i \right\}$$

que compleixen que

$$\emptyset \subset U_1 \subset \cdots \subset U_n \subset \cdots \subset X.$$

Proposició 2.2.20. *La topologia nidificada és, en efecte, una topologia.*

Demostració. Vegem-ne les tres condicions:

(1) $\emptyset, X \in \tau$ explícitament per la definició.

(2) Sigui I un conjunt d'índexs arbitrari i considerem la col·lecció $\{U_i\}_{i\in I}$ de τ. Si $\{U_i\}_{i\in I}$ és una col·lecció finita de subconjunts de X, aleshores $\exists k \in I$ tal que $k = \max I \bigcup_i U_i = U_k \in \tau$.

Si, en canvi, $\{U_i\}_i$ és una família d'infinits subconjunts, com $U_i \in \tau$, $\forall i \in I$ i tenim la cadena $U_1 \subset U_2 \subset \cdots$, veiem que

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i=1}^{n} U_i \in \tau.$$

En qualsevol cas, se satisfà la segona condició.

(3) Per la tercera condició, siguin $U_{k_1}, U_{k_2}, \dots, U_{k_n} \in \tau$, on $k_1 < k_2 < \dots < k_n$. Aleshores, per la cadena, tenim
$$U_{k_1} \subseteq U_{k_2} \subseteq \dots \subseteq U_{k_n}.$$
Per tant,
$$\bigcup_{i=1}^{n} U_{k_i} = U_{k_1} \in \tau$$

Així doncs, hem provat que (X, τ) és un espai topològic. □

2.2.7 Topologia subespai

Definició 2.2.21 (Topologia subespai)**.** Si (X, τ) és un espai topològic i $Y \subseteq X$, definim la *topologia subespai* (o topologia induïda) a Y per τ com
$$\tau_Y := \{Y \cap A \ : \ A \in \tau\}.$$

Exemple 2.2.22. Un exemple per aclarir aquest concepte. Sigui $X = \{a, b, c\}$ i considerem la topologia $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$. Sigui $Y = \{a, c\} \subseteq X$. Aleshores
$$\tau_Y = \{\{a, c\} \cap \emptyset, \{a, c\} \cap \{a\}, \{a, c\} \cap \{a, b\}, \{a, c\} \cap X\} =$$
$$= \{\emptyset, \{a\}, \{a\}, X\} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$$

Proposició 2.2.23. *La topologia subespai és, efectivament, una topologia.*

Demostració. Provem que satisfà els tres axiomes.

(1) Clarament $\emptyset \in \tau_Y$, ja que $\emptyset \in \tau$ i $\emptyset \cap Y = \emptyset$. També és trivial que $Y \in \tau_Y$, ja que $X \in \tau$ i $X \cap Y = Y$, ja que $Y \subset X$.

(2) Si $\{B_i\}_{i \in I}$ són elements de τ_Y, aleshores podem escriure $B_i = Y \cap A_i$, $\forall i \in I$, on $A_i \in \tau$. Com τ és una topologia, se satisfà que
$$\bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} Y \cap A_i = Y \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \in \tau_Y.$$
perquè $\bigcup_i A_i \in \tau$.

(3) Si $B_1, \dots, B_n \in \tau_Y$, podem escriure $B_j = Y \cap A_j$, amb $A_j \in \tau$, per $j = 1, \dots, n$. Aleshores
$$\bigcap_{j=1}^{n} B_i = \bigcap_{j=1}^{n} (Y \cap A_j) = Y \cap \left(\bigcap_{j=1}^{n} \right) \in \tau_Y$$
Perquè $\bigcap_j A_j \in \tau$.

□

Direm que Y és un subespai de X i amb això voldrem dir que considerarem Y amb la topologia induïda per la topologia de X.

Exemple 2.2.24. Si τ és la topologia grollera en X, $\forall Y \subseteq X$ la topologia subespai τ_Y és la topologia grollera en Y. Anàlogament per a la discreta.

Exemple 2.2.25. Prenem a $\mathbb{R}$ la topologia euclidiana. Sigui $Y = [0, 1]$. Aleshores $V = [0, 1/2)$ és un obert de Y en la topologia subespai. En efecte, $V = (-1/2, 1/2) \cap Y$, on $(-1, 2, 1/2)$ és un obert a $\mathbb{R}$.

2.3 Comparació de topologies

Definició 2.3.1 (Més fina)**.** Sigui X un conjunt i siguin τ, σ dues topologies a X. Direm que τ és *més fina que* σ (o bé que σ és més grollera) si $\sigma \subsetneq \tau$.

Exemple 2.3.2. La topologia grollera a X és més grollera que qualsevol altra topologia a X, i la topologia discreta a X és més fina que qualsevol altra topologia a X.

Observació 2.3.3. *La relació "més fina que" defineix un ordre parcial en el conjunt de totes les topologies a X, però en general no és un ordre total. Per exemple, si $X = \{a, b\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ i $\sigma = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$, aleshores $\sigma \neq \tau$ però ni σ és més fina que τ ni τ és més fina que σ.*

Definició 2.3.4 (Topologia euclidiana)**.** Es defineix la *topologia euclidiana* (o usual o estàndard) a la topologia definida per la distància euclidiana a $\mathbb{R}^n$.

Observació 2.3.5. *Si $n \geq 1$, la topologia euclidiana a $\mathbb{R}^n$ és més fina que la grollera i més grollera que la discreta.*

stmaryrd

Capítol 3

Oberts i tancats

3.1 Oberts i tancats

Definició 3.1.1 (Obert)**.** Sigui (X, τ) un espai topològic. Es diuen *oberts* als elements de la topologia.

Definició 3.1.2 (Tancat)**.** Sigui X un espai topològic. Un subconjunt $Z \subseteq X$ és *tancat* si $X \setminus Z$ és obert.

Proposició 3.1.3. *La col·lecció dels tancats d'un espai topològic satisfà:*

(1) Tant $\emptyset$ com X són tancats.

(2) Si $\{Z_i\}_{i\in I}$ són tancats, aleshores $\bigcap_{i\in I} Z_i$ també és tancat.

(3) Si $Z_1, \ldots, Z_n$ són tancats de X, aleshores $Z_1 \cup \cdots \cup Z_n$ també ho és.

Demostració. (1) Podem escriure $\emptyset = X \setminus X$ veient X com un obert i $X = X \setminus \emptyset$, veient $\emptyset$ com un obert.

(2) En efecte,

$$X \setminus \bigcap_{i\in I} Z_i = \bigcup_{i\in I} (X \setminus Z_i$$

(3) En efecte,

$$X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n} Z_j \right) = \bigcap_{j=1}^{n} (X \setminus Z_j).$$

□

De fet, en termes de la bijecció

$$\begin{aligned} \{\text{oberts de } X\} &\longleftrightarrow \{\text{tancats de } X\} \\ A &\longmapsto X \setminus A \\ X \setminus Z &\longleftarrow\!\!\shortmid Z \end{aligned}$$

les propietats (1), (2) i (3) es corresponen amb els axiomes (1), (2) i (3) respectivament, de la definició (**??**) de topologia. Per tant, donat un conjunt X i $\zeta \subseteq \mathscr{P}(X)$, els elements ζ són els tancats d'una topologia si i només si satisfan (1), (2) i (3) de (**??**).

Per tant, per descriure una topologia en un conjunt X tenim dues possibilitats:

(i) especificar els oberts $\tau \subseteq \mathscr{P}(X)$, que han de satisfer els axiomes (1), (2) i (3) de la definició (**??**).

(ii) especificar els tancats $\zeta \subseteq \mathscr{P}(X)$, que han de satisfer els axiomes (1), (2) i (3) de la proposició (**??**).

Exemple 3.1.4. Sigui (X, τ) un espai topològic. Aleshores X i $\emptyset$ són oberts i tancats sempre. En efecte, clarament $\emptyset, X \in \tau$ per definició. Per tant $X, \emptyset$ són oberts. D'altra banda, $X \setminus X = \emptyset$ i $X \setminus \emptyset = X$, per tant també són tancats.

Exemple 3.1.5. Considerem $X = \{a, b, c\}$ i la topologia nidificada $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$. Aleshores $\emptyset, \{a\}$, $\{a, b\}$ i X són oberts de X i $\{b, c\}$ i $\{c\}$ són tancats (a més de $\emptyset, X$), ja que

$$\{b, c\} = X \setminus \{a\}, \quad \text{i} \quad \{c\} = X \setminus \{a, b\}$$

i $\{a\}$ i $\{a, b\}$ són oberts de (X, τ).

Exemple 3.1.6. Sigui $X = \{a, b, c, d\}$ i la topologia

$$\tau = \{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, X\}$$

Quins són els oberts i tancats de X amb τ?

- Els oberts de X són $\emptyset$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{c, d\}$, $\{a, b, c\}$ i X; és a dir, tots els elements de la topologia.
- Els tancats de X són $X \setminus \{\text{oberts}\}$, és a dir

$$X \setminus \{c\} = \{a, b, c\}, \qquad X \setminus \{a, b\} = \{c, d\}, \qquad X \setminus \{c, d\} = \{a, b\}$$

$$X \setminus \{a, b, c\} = \{d\}, \qquad X \setminus \emptyset = X, \qquad X \setminus X = \emptyset$$

Per tant, els que són oberts i tancats són $\emptyset, X$, $\{a, b\}$ i $\{c, d\}$.

Exemple 3.1.7. Trivialment, si X està dotat de la topologia discreta $\tau = \mathscr{P}(X)$ aleshores tot subconjunt és obert de X. A més, si $A \subseteq X$, A obert ergo $X \setminus A$ tancat. Però $X \setminus A \subseteq X$ i per tant també és obert i A és tancat. Per tant, podem concloure que tot subconjunt és obert i tancat.

Exemple 3.1.8. Sigui $(\mathbb{Z}, \tau_c)$ on τ_c és la topologia dels complements finits

$$\tau_c = \{U \subset \mathbb{Z} \;:\; U^c \text{ és finit}\}$$

Estudiem si $2\mathbb{Z} = \{2n \;:\; n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$ és obert. Veiem que $2\mathbb{Z}^c$ és el conjunt dels enters senars, que és infinit. Així doncs, $2\mathbb{Z} \notin \tau_c$ i $2\mathbb{Z}$ no és un obert. Altrament, $2\mathbb{Z}^c$ és el conjunt dels imparells que tampoc és obert ja que $(2\mathbb{Z}^c)^c = 2\mathbb{Z}$ tampoc no és finit. Així doncs no és ni obert ni tancat.

Exemple 3.1.9. Considerem l'espai topològic $(\mathbb{R}, \tau)$, on $\tau = \{(-n, n) \;:\; n \in \mathbb{N}\}$. Quin és l'obert més gran contingut en $(-\pi, e)$? Demostrem també que tot subconjunt $A \subseteq X$ no trivial ($A \neq X, \emptyset$) no pot ser obert i tancat a l'hora.

Veiem que els oberts de $(\mathbb{R}, \tau)$ són $(-1, 1), (-2, 2), \ldots$. Aleshores,

$$(-\pi, e) \approx (-3.141592..., 2.71828...)$$

Per tant, l'obert més gran és $I_2 = (-2, 2) \subseteq (-\pi, e)$. Podem veure clarament

$$(-1, 1) \subset (-2, 2) \subset (-\pi, e)$$

però $(-3, 3) \not\subset (-\pi, e)$ ja que $e < 3$.

Suposem que A és un obert. Aleshores $A = (-n, n)$ per algun $n \in \mathbb{N}$. Però A no pot ser tancat ja que si A és tancat, aleshores A^c és obert i $A^c = (-\infty, -n) \cup (n, +\infty) \notin \tau$.

Exemple 3.1.10. En general, si (X, τ) és un espai topològic, on τ és una topologia nidificada, no existeix cap obert i tancat no trivial. Vegem-ho:

Recordem que una topologia nidificada (**??**) era $\tau = \{U_1, U_2, \ldots\}$ de forma que $\emptyset \subset U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset X$. Suposem que $A \subset X$ és un obert no trivial. Si A és obert, aleshores $\exists m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $A = U_{m_1}$. És a dir, que $U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_{m_1-1} \subset U_{m_1}$. Suposem que A és també tancat. Aleshores $X \setminus A$ és obert, és a dir, existeix $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que $X \setminus A = U_{m_2}$. Aleshores $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$, Sigui $M = \min\{m_1, m_2\}$. Aleshores, per la nidificació $U_{m_1} \cap U_{m_2} = U_M$ la qual cosa és una contradicció.

Exemple 3.1.11. (1) Recordem que si (X, d) és un espai mètric, $\forall x \in X$, $X \setminus \{x\}$ és un obert de la topologia discreta per d. Per tant $\{x\}$ és un tancat de X.

(2) Si X té més d'un element, i dotem X de la topologia grollera, els subconjunts de X de la forma $\{x\}$ ($x \in X$ qualsevol) no són tancats.

3.2 Punts interiors d'un conjunt en un espai topològic

3.2.1 Definició de punt interior i exemples

Definició 3.2.1 (Punt interior)**.** Sigui (X, τ) un espai topològic i sigui $A \subseteq X$. Un punt $a \in X$ es diu *punt interior* de A si existeix un obert U que contingui a a tal que $a \in U \subseteq A$. El conjunt de tots els punts interiors d'A es diu *interior d'A* i s'escriu A^o.

Observació 3.2.2. *Per a qualsevol espai topològic (X, τ) se satisfà*

(1) $X^o = X$;

(2) $\emptyset^o = \emptyset$.

Demostració. (1) X és obert. $\forall x \in X$, X és un obert tal que $x \in X \subseteq X$, ergo $X^o = X$.

(2) $\emptyset$ obert. És trivial.

□

Proposició 3.2.3. *Sigui (X, τ) un espai topològic. Si $U \subseteq A \subseteq X$ i U és un obert, aleshores $U \subseteq A^o$.*

Demostració. Sigui A un subconjunt de X i U un obert tal que $U \subseteq A \subseteq X$. Aleshores, $\forall a \in U$ tenim $a \in A$. Així, per cada $a \in A$, U és un obert d'A tal que $a \in U \subseteq A$, ergo $a \in A^o \Rightarrow U \subseteq A^o$. □

Proposició 3.2.4. *Sigui (X, τ) un espai topològic. Si $A \subseteq X$, aleshores A^o és l'obert més gran contingut en A.*

Demostració. Suposem que no. Aleshores, per algun $p \notin A^o$, tenim $A^o \cup \{p\}$ és un obert més gran que A^o contingut en A. Si $U = A^\circ \cup \{p\} \in \tau$ aleshores $p \in U = A^\circ \cup \{p\} \subseteq A$ i per definició $p \in A^\circ$ que és una contradicció. □

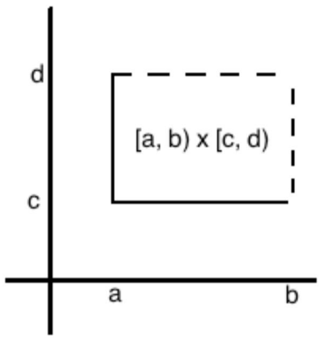
Proposició 3.2.5. *Sigui (X, τ) un espai topològic i $A \subseteq X$. Aleshores $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.*

Demostració. Per definició, $(A^\circ)^\circ$ és el conjunt de tots els punts interiors a A°. Per la proposició (**??**), A° és obert i per tant tot punt de A° és un punt interior d'A. Per tant $A^\circ = (A^\circ)^\circ$ i per definició $(A^\circ)^\circ \subseteq A^\circ$. □

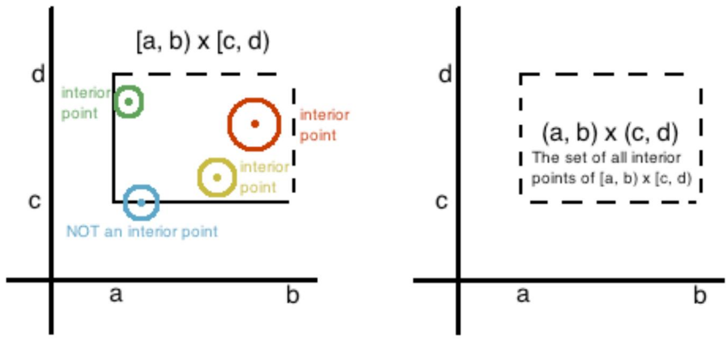
Exemple 3.2.6. Considerem el conjunt $X = \{a, b, c\}$ amb la topologia nidificada $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$. Si prenem $A = \{a, c\} \subset X$, notem que $a \in A$ és punt interior d'A ja que $U = \{a\} \in \tau$ i $a \in U \subseteq A$. Altrament, el punt $c \in A$ no és interior respecte τ perquè no existeix cap obert U tal que $c \in U \subseteq A$. L'únic obert de X que conté c és $U = \{a, b, c\}$ i $U \not\subseteq A$. Així doncs, $A^\circ = \{a\}$.

Exemple 3.2.7. Considerem l'espai topològic $(\mathbb{R}^2, \tau)$, on τ és la topologia induïda per la mètrica estàndard $\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Un conjunt $S \subseteq \mathbb{R}^2$ és obert si i només si $\forall x \in S$, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq S$.

Sigui ara $A = [a, b) \times [c, d) \subseteq \mathbb{R}^2$. Gràficament:



Els punts interiors a $A = [a, b) \times [c, d)$ són punts $x = (x_1, x_2)$ tals que $x_1 \in (a, b)$ i $x_2 \in (c, d)$. Qualsevol punt amb $x_1 = a$ i/o $x_2 = c$ no pot ser interior ja que no existiria cap real positiu $\varepsilon > 0$ tal que la bola centrada en x i de radi ε estigués continguda en A, com s'il·lustra a la imatge.



Així doncs, $A^\circ = (a, b) \times (c, d)$.

Teorema 3.2.8. *Sigui (X, τ) un espai topològic i sigui $A \subseteq X$. Aleshores A és obert si i només si $A^\circ = A$, és a dir, si i només si tot punt d'A és interior.*

Demostració. Doble implicació.

($\Rightarrow$) Suposem que A és obert. Aleshores, $A \in \tau$ i per tot $a \in A$, podem prendre $U = A$ tal que $a \in U \subseteq A$. Per tant tot punt d'A és interior i aleshores $A \subseteq A^\circ$. Com per definició $A^\circ \subseteq A$ ja tenim la igualtat.

($\Leftarrow$) Suposem $A = A^\circ$, és a dir, $\forall a \in A$, $a \in A^\circ$. Aleshores, $\forall a \in A$, $\exists U_a \in \tau$ tal que $a \in U_a \subseteq A$. Així, $A = \bigcup_{a \in A} U_a$ és obert ja que és la unió arbitrària d'oberts.

$\square$

Exemple 3.2.9. Considerem un conjunt arbitrari X amb la topologia discreta $\tau = \mathscr{P}(X)$. Sigui $S \subseteq X$ un subconjunt de X. Què és l'interior de S?

Com τ és la topologia discreta, $S \in \tau$, ergo S és obert i pel teorema (**??**), agafem $U = S$ i U satisfà $x \in U \subseteq S$, ergo $x \in S^\circ$. Així $S = S^\circ$.

Exemple 3.2.10. Sigui (X, τ_g) un espai topològic on $\tau_g = \{\emptyset, X\}$ és la topologia grollera. Sigui $S \subseteq X$. Quins són els punts interiors de S? Si $S \neq \emptyset$, aleshores $\emptyset \subseteq S \subseteq X$. $\forall x \in S$ veiem que $\nexists U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq S$. Per tant $S^\circ = \emptyset$.

Exemple 3.2.11. Considerem l'espai topològic (X, τ), on $\tau = \{(-n, n) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ i sigui $A = (-\pi, e)$. Recordant l'exemple (**??**) és fàcil veure que $(-\pi, e)^\circ = (-2, 2)$.

Corol·lari 3.2.12. *Sigui (X, τ) un espai topològic. Si $\forall A \subseteq X$ tenim $A^\circ = A$, aleshores τ és la topologia discreta.*

Demostració. Si $A = A^\circ$ $\forall A \subseteq X$ vol dir, pel teorema (**??**), que tot subconjunt de X és obert. Això vol dir: $\forall X \subseteq A$, $X \in \tau \Rightarrow \tau = \mathscr{P}(X)$. □

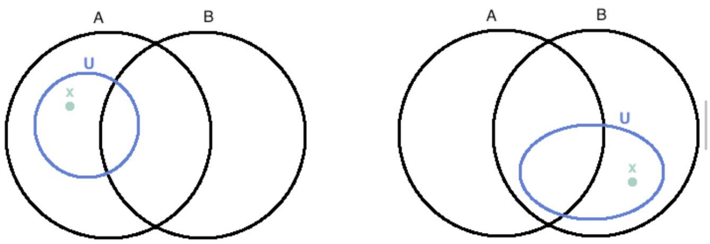
3.2.2 Propietats

Proposició 3.2.13. *Sigui (X, τ) un espai topològic i $A, B \subseteq X$. Si $A \subseteq B$, aleshores $A^\circ \subseteq B^\circ$.*

Demostració. Suposem $A \subseteq B$. Considerem A°; sabem que és l'obert més gran contingut en A. En particular, $A^\circ \subseteq A \subseteq B$ i A° és doncs un obert contingut en B. Ara bé, B° és l'obert més gran contingut en B, per tant $A^\circ \subseteq B^\circ$. □

Proposició 3.2.14. *Sigui (X, τ) un espai topològic i $A, B \subseteq X$. Aleshores, $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$.*

Demostració. Sigui $x \in A^\circ \cup B^\circ$. Aleshores $x \in A^\circ$, o bé $x \in B^\circ$.



Regardless of whether x is in A or x is in B, we have that the open neighbourhood U of x will always be an open neighbourhood of A ∪ B.

Si $x \in A^\circ$, existeix un obert $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq A$. Aleshores $x \in U \subseteq A \subseteq A \cup B$ i per tant $x \in (A \cup B)^\circ$. De la mateixa manera si $x \in B^\circ$ arribem a la mateixa conclusió. □

Observació 3.2.15. *En general $(A \cup B)^\circ \not\subseteq A^\circ \cup B^\circ$. Per exemple, si $A = (0, 1]$ i $B = (1, 2]$, aleshores $A^\circ = (0, 1)$ i $B^\circ = (1, 2)$ i $A^\circ \cup B^\circ = (0, 1) \cup (1, 2)$ mentre que $A \cup B = (0, 2)$ i per tant $(A \cup B)^\circ = (0, 2)$.*

Per veure un altre exemple d'això considerem $X = \{a, b, c, d\}$ amb la topologia donada per

$$\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, X\}$$

Considerem els conjunts $A = \{a\}$ i $B = \{b, c\}$. Clarament $A^\circ = \emptyset$ i $B^\circ = B$. Per tant,

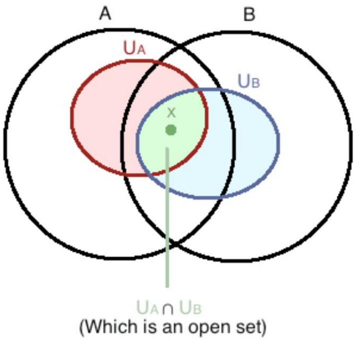
$$A^\circ \cup B^\circ = \emptyset \cup \{b, c\} = \{b, c\}$$

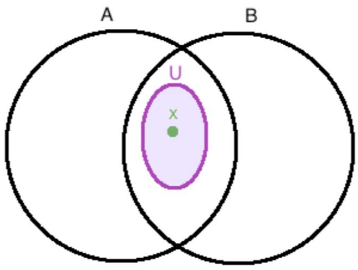
D'altra banda, $A \cup B = \{a\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\}$ i $\{a, b, c\}^\circ = \{a, b, c\} \not\subseteq \{b, c\}$.

És per això que no tenim la igualtat a la proposició (**??**)

Proposició 3.2.16. *Sigui (X, τ) un espai topològic i $A, B \subseteq X$. Aleshores $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$.*

Demostració. Sigui $x \in A^\circ \cap B^\circ$. Aleshores $x \in A^\circ$ i $x \in B^\circ$. Per tant $\exists U_A \in \tau$ tal que $x \in U_A \subseteq A$ i $\exists U_B \in \tau$ tal que $x \in U_B \subseteq B$. Sigui $U = U_A \cap U_B$. Com la intersecció finita d'oberts és obert, $U \in \tau$ és un obert.





The open neighbourhood U of x in A ∩ B is also an open neighbourhood of x in A and an open neighbourhood of x in B.

Llavors $x \in U \subseteq A \cap B$ i això implica $x \in (A \cap B)^\circ$.

Sigui ara $x \in (A \cap B)^\circ$. Aleshores $\exists U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq A \cap B$. Però si $U \subseteq A \cap B$ aleshores $U \subseteq A$ i $U \subseteq B$, ergo $x \in U \subseteq A$ i $x \in U \subseteq B$ que implica que $x \in A^\circ$ i $x \in B^\circ$ per tant $x \in A^\circ \cap B^\circ$. i amb això obtenim $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ que ens dóna la igualtat. □

3.3 Punts adherents d'un conjunt en un espai topològic

3.3.1 Definició de punt adherent o d'acumulació i exemples

Definició 3.3.1 (Acumulació)**.** Sigui (X, τ) un espai topològic i sigui $A \subseteq X$. Un punt $x \in X$ es diu *punt d'acumulació d'A* si tot obert contenint x conté algun punt d'A que no sigui x. És a dir, si $\forall U \in \tau$ tal que $x \in U$, $A \cap U \setminus \{x\} \neq \emptyset$. El conjunt de punts d'acumulació d'A es denota per A'.

Observem que un punt no és d'acumulació si $\exists U \in \tau$ tal que $x \in U$ i $U \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$. Això serà útil pels exercicis.

Proposició 3.3.2. *Sigui (X, τ) un espai topològic i sigui $A \subseteq X$ un conjunt. Aleshores $A \cup A'$ és tancat.*

Demostració. Sigui $x \in X \setminus (A \cup A')$. Aleshores $x \notin A$ i $x \notin A'$. Llavors x no és d'acumulació d'A, cosa que implica que existeix un obert $U \ni x$ que no conté cap altre punt d'A que no sigui x. Però també $x \notin A$ llavors $U \cap A = \emptyset$. Com que aquest U existeix per a cada $X \setminus (A \cup A')$ veiem que $X \setminus (A \cup A')$ és obert (perquè per a tot x existeix $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq X \setminus (A \cup A')$) i per tant $A \cup A'$ és tancat. □

Exemple 3.3.3. Considerem el conjunt finit $X = \{a, b, c\}$ i la topologia nidificada

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

Sigui $A = X$. El punt $a \in X$ no és punt d'acumulació d'A perquè l'obert $\{a\} \ni a$ no conté cap altre punt diferent d'a. D'altra banda, b i c sí són punts d'acumulació ja que tots els oberts contenint b són $\{a, b\}$ i $\{a, b, c\}$ i tots compleixen

$$\{a, b\} \cap A \setminus \{b\} = \{a\} \neq \emptyset, \qquad \{a, b, c\} \cap A \setminus \{b\} = \{a, c\} \neq \emptyset$$

i el mateix passa amb c. Així $A' = \{b, c\}$. Es pot comprovar que $A \cup A' = X$ és tancat.

Exemple 3.3.4. Sigui $\mathbb{R}$ amb la topologia euclidiana. Sigui $A = (0, 1)$. Aleshores tot $x \in A$ és un punt d'acumulació d'A. També 0 i 1 són punts d'acumulació d'A. De fet $A' = [0, 1]$. En efecte, $\forall x \in [0, 1]$ $\exists \varepsilon > 0$ tal que $U_x = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ és un obert contenint x i tal que la seva intersecció amb A conté més elements que x. Això prova que $[0, 1] \subseteq A'$.

Exemple 3.3.5. Considerem el conjunt dels reals $\mathbb{R}$ amb la topologia

$$\tau = \{\emptyset, X\} \cup \{(-n, n) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

Sigui $A = \mathbb{R}$. Considerem el punt $0 \in \mathbb{R}$. Aleshores $(-1, 1), (-2, 2), \ldots \mathbb{R}$ són oberts que contenen al 0. Cadascun d'aquests oberts conté punts diferents del 0, per tant $0 \in \mathbb{R}$ és un punt d'acumulació de $\mathbb{R}$ amb la topologia donada τ.

Més enllà, tot punt $x \in \mathbb{R}$ és punt d'acumulació. Per veure això, fixem $x \in \mathbb{R}$. Aleshores $|x| > 0$ i per la propietat arquimediana, existeix sempre $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $|x| < n_x$. Així $-n_x < x < n_x$ i per la densitat dels nombres reals existeix $\xi \neq x$ tal que $-n_x < x < \xi < n_x$. Per tant, $\xi \in (-n_x, n_x)$. Tots els altres oberts més grans que aquest contenint x són $(-n_x - k, n_x + k)$ amb $k \in \mathbb{N}$. A més, aquests oberts contenint x estan nidificats

$$x, \xi \in (-n_x, n_x) \subset (-n_x - 1, n_x + 1) \subset \cdots \subset (-n_x - k, n_x + k) \subset \cdots$$

Així doncs, per a cada obert contenint x existeix $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq x$ contingut en cada interval. Llavors $x \in A'$.

Corol·lari 3.3.6. *Sigui (X, τ) un espai topològic i sigui $S \subseteq X$. Aleshores $\{x\} \in \tau$ si i només si x no és punt d'acumulació de S.*

Demostració. Suposem que $\{x\} \in \tau$. Aleshores $\{x\}$ és un obert contenint x. Però $\{x\}$ no conté cap altre punt de S diferent de x. Per tant, $x \notin S'$.

Recíprocament, suposem x no és un punt d'acumulació de S. Aleshores existeix un entorn obert de x que no conté cap altre punt diferent de x, és a dir, $\{x\} \in \tau$. $\square$

Exemple 3.3.7. Sigui (X, τ) un espai topològic.

(1) Si τ és la topologia discreta, no existeixen punts d'acumulació ja que $\{x\}$ és un obert contenint x que no conté cap punt de X diferent de x.

(2) Si τ és la topologia grollera, l'únic obert contenint $x \in X$ és X per tot $x \in X$. Així doncs, X conté elements de X diferents de x i aleshores si X conté més d'un element, tot $x \in X$ és punt d'acumulació.

3.3.2 Propietats

Proposició 3.3.8. *Sigui (X, τ) un espai topològic i $A, B \subseteq X$. Aleshores, si $A \subseteq B$, llavors $A' \subseteq B'$.*

Demostració. Suposem que $A \subseteq B$, i sigui $x \in A'$. Si x és un punt d'acumulació de A, aleshores $\forall U \in \tau$ contenint x, se satisfà $A \cap U \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Com $A \subseteq B$ veiem que $A \cap U \setminus \{x\} \subseteq B \cap U \setminus \{x\}$ i per tot $U \in \tau$ amb $x \in U$ tenim que $B \cap U \setminus \{x\} \neq \emptyset$ i això implica que $x \in B'$. $\square$

Proposició 3.3.9. *Sigui (X, τ) un espai topològic i sigui $A, B \subseteq X$. Aleshores $A' \cup B' = (A \cup B)'$.*

Demostració. Sigui $x \in A' \cup B'$. Aleshores $x \in A'$ o bé $x \in B'$. Si $x \in A'$, x és un punt d'acumulació de A i aleshores $\forall U \in \tau$ amb $x \in U$ tenim $U \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Similarment, si $x \in B'$, $\forall U \in \tau$ tal que $x \in U$, $U \cap B \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Ara:

$$[A \cap U \setminus \{x\}] \cup [B \cap U \setminus \{x\}] = (A \cup B) \cap U \setminus \{x\} \neq \emptyset$$

És a dir, $\forall U \in \tau$ tal que $x \in U$ tenim que $(A \cup B) \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, ergo $x \in (A \cup B)'$.

Sigui ara $x \in (A \cup B)'$. Suposem que $x \notin A' \cup B'$. Aleshores, si $x \notin A'$, $\exists U_A \in \tau$ tal que $x \in U_A$ i $U_A \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$. Similarment, si $x \notin B'$, $\exists U_B \in \tau$ tal que $x \in U_b$ i $B \cap U_B \setminus \{x\} = \emptyset$. Sigui ara $U = U_A \cup U_B$. Aleshores $x \in U$ i $(A \cup B) \cap U \setminus \{x\} = \emptyset$ cosa que contradiu que $x \in (A \cup B)'$. $\square$

Proposició 3.3.10. *Sigui (X, τ) un espai topològic i $A, B \subseteq X$. Aleshores $A' \cap B' = (A \cap B)'$.*

Demostració. Sigui $x \in A' \cap B'$. Aleshores $x \in A'$ i $x \in B'$. Com $x \in A'$, $\forall U \in \tau$ tal que $x \in U$ tenim que $A \cap U \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Similarment, com $x \in B'$, $\forall U \in \tau$ tal que $x \in U$ tenim $B \cap U \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Així:

$$[A \cap U \setminus \{x\}] \cap [B \cap U \setminus \{x\}] = (A \cap B) \cap U \setminus \{x\} \neq \emptyset$$

Per tant, $\forall U \in \tau$ tal que $x \in U$, $(A \cap B) \cap U \setminus \{x\} \neq \emptyset$ i això implica que $x \in (A \cap B)'$.

Recíprocament, suposem que $x \in (A \cap B)'$. Aleshores $\forall U \in \tau$ amb $x \in U$, tenim que $(A \cap B) \cap U \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Aleshores,

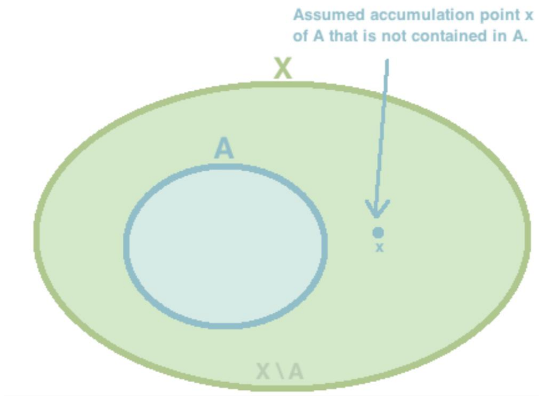
$$\emptyset \neq (A \cap B) \cap U \setminus \{x\} = [A \cap U \setminus \{x\}] \cap [B \cap U \setminus \{x\}]$$

Com que la intersecció és no buida, aleshores cap dels dos conjunts és buit. Així $A \cap U \setminus \{x\} \neq \emptyset \neq B \cap U \setminus \{x\}$ i $x \in A'$ i $x \in B'$. $\square$

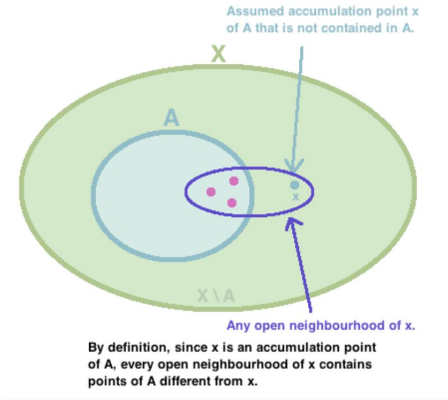
Teorema 3.3.11. *Sigui (X, τ) un espai topològic i $A \subset X$. Aleshores A és tancat si i només si A conté tots els seus punts d'acumulació. És a dir, si i només si $A' \subseteq A$.*

Demostració. Doble implicació

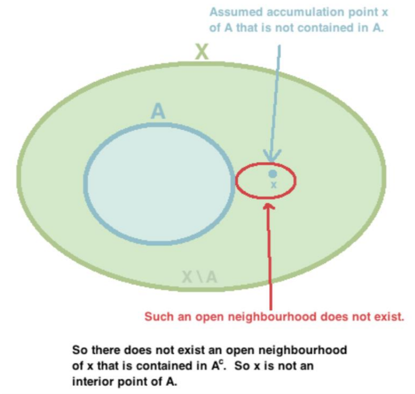
($\Rightarrow$) Suposem A tancat i suposem que no conté tots els punts d'acumulació. Aleshores $\exists x \in A' \setminus A$, ergo $x \in A^c = X \setminus A$.



com x és un punt d'acumulació d'A, per definició, tot obert $U \in \tau$ contenint x conté també punts d'A diferents de x.



Per tant, no existeix cap obert U tal que $x \in U \subseteq A^c = X \setminus A$ (ja que, si $x \in U$, aleshores $\exists a \in A$, $a \neq x$, tal que $a \in A$ i clarament $A \notin A^c$).



Així doncs, $x \notin (A^c)^\circ$, ergo $(A^c)^\circ \neq A^c \Rightarrow A^c$ no és obert. Contradicció. Aleshores és absurd suposar que no conté tots els punts d'acumulació

($\Leftarrow$) Suposem ara que A conté tots els punts d'acumulació d'A. Hem de veure que A és tancat o, equivalentment, que A^c és obert. A^c és obert $\Leftrightarrow (A^c)^\circ = A^c$ pel teorema (**??**). Sigui $x \in A^c$, com A conté tots els punts d'acumulació, x no pot ser d'acumulació, ergo $\exists U \in \tau$ obert contenint x tal que $A \cap U \setminus \{x\} = \emptyset$. Però $x \notin A$ ja que $x \in A^c$, així $U \subseteq A^c$ que implica que $x \in (A^c)^\circ$, així $A^c = (A^c)^\circ$ (ja que l'altra inclusió és trivial) i A^c és obert, per tant A és tancat.

$\square$

3.4 Clausura d'un conjunt en un espai topològic

3.4.1 Clausura d'un conjunt en un espai topològic

Definició 3.4.1 (Clausura)**.** Sigui (X, τ) un espai topològic i $A \subseteq X$. La *clausura* d'A és el tancat més petit contenint A. S'escriu $\overline{A}$.

Equivalentment podem dir que la clausura de A és la intersecció de tots els tancats de X que contenen A:

$$\overline{A} = \bigcup_{\substack{T \subseteq X \text{ tancat} \\ A \subseteq T}} T$$

Proposició 3.4.2. *Sigui (X,τ) un espai topològic qualsevol. Aleshores $\overline{\emptyset}=\emptyset$ i $\overline{X}=X$.*

Demostració. Per definició $\emptyset, X$ són tancats. □

Proposició 3.4.3. *Sigui (X,τ) un espai topològic i $A\subseteq X$. Aleshores $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$*

Demostració. Per definició, $\overline{\overline{A}}$ és el tancat més petit contenint $\overline{A}$, però $\overline{A}$ ja és un tancat contenint-se a ell mateix i n'és el més petit, ergo $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$. □

Proposició 3.4.4. *Sigui (X,τ) un espai topològic i $A\subseteq X$. Aleshores $a\in\overline{A}$ si i només si $U\cap A\neq\emptyset$ per tot obert U contenint a.*

Demostració. Doble implicació.

($\Rightarrow$) Sigui $a\in\overline{A}$, suposem que existeix un obert $U\ni a$ tal que $A\cap U=\emptyset$. Aleshores $A\subset X\setminus U$. Ara, com U és obert, $X\setminus U$ és tancat i $A\subset X\setminus U$. Però $\overline{A}$ és el tancat més petit que conté a A. Ergo $\overline{A}\subset X\setminus U$. Però això no pot ser ja que $a\in\overline{A}$ i $a\in U\Rightarrow A\notin X\setminus U$. Per tant, ha de ser $\forall U\ni a$, $U\cap A\neq\emptyset$.

($\Leftarrow$) Suposem ara que $U\cap A\neq\emptyset$ $\forall U\in\tau$ amb $a\in U$. Si $a\notin\overline{A}$ aleshores $a\in X\setminus\overline{A}$. Però $X\setminus\overline{A}$ és un obert contenint a i per tant $(X\setminus\overline{A})\cap A\neq\emptyset$ cosa impossible ja que $A\subseteq\overline{A}$ per definició.

□

Exemple 3.4.5. Considerem l'espai topològic $(\mathbb{R},\tau)$ on τ és la topologia usual (euclidiana), i sigui $A=[0,1)$. Què és $\overline{A}$? Veiem que $\overline{A}=[0,1]$. Per veure això hem de veure que és tancat i que n'és el més petit contenint A. Tancat és clar ja que $X\setminus[0,1]=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ i tots dos són oberts de τ_e.A més, $\nexists$ interval tancat més petit que $[0,1]$ contenint $[0,1)$.

Exemple 3.4.6. Considerem $X=\{a,b,c,d\}$ i la topologia

$$\tau=\{\emptyset,\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\},X\}$$

Sigui $A=\{b,d\}$. Quina és la clausura d'A? Primer estudiem els tancats de X que són els complementaris dels elements de τ:

$$\emptyset,\{d\},\{a,d\},\{c,d\},\{a,c,d\},X$$

Ara es tracta de trobar el tancat més petit que contingui a $\{b,d\}$. Aquest és X, per tant $\overline{A}=X$. Si en comptes considerem $B=\{a\}$, fàcilment es veu $\overline{B}=\{a,d\}$.

Exemple 3.4.7. Considerem l'espai topològic (X,τ_d) on τ_d és la topologia discreta. Quina és la clausura de $A\subseteq X$? Recordem que amb la topologia discreta, tot subconjunt de X és obert i per extensió, tot subconjunt de X és tancat. Així doncs, $\forall A\subseteq X$, $\overline{A}=A$.

Exemple 3.4.8. Considerem l'espai topològic (X,τ_g), on $\tau_g=\{\emptyset,X\}$ és la topologia grollera. Els únics tancats són, doncs $\emptyset$ i X. Per tant, $\forall A\neq\emptyset$, $A\subseteq X$, tenim $\overline{A}=X$; a més $\overline{\emptyset}=\emptyset$.

Exemple 3.4.9. Considerem l'espai topològic $(\mathbb{R},\tau)$, amb

$$\tau=\{\emptyset,X\}\cup\{(-n,n)\;:\;n\in\mathbb{N}\}$$

Siguin $A = \{0\}$ i $B = (2,3)$. Quines són les seves clausures? Notem que els oberts de $\mathbb{R}$ amb τ són $(-1,1)$, $(-2,2)$,.... Aleshores, els tancats de X seran

$$(-\infty,-1] \cup [1,+\infty), (-\infty,-2] \cup [2,+\infty), \ldots$$

Notem que cap d'aquests tancats conté el 0, excepte $\mathbb{R}$. Així doncs, $\overline{\{0\}} = \mathbb{R}$. D'altra banda veiem que $(2,3) \subseteq (-\infty,-2) \cup [2,+\infty)$ i així aquest és la seva clausura.

Exemple 3.4.10. Considerem l'espai topològic $(\mathbb{N},\tau)$ on τ és la topologia dels complements finits. Sigui $A = \{1,2,3\}$. Quina és la clausura de A? I sigui $E = 2\mathbb{Z}$, quina és la seva clausura? Veiem que els oberts són aquells els complementaris dels quals són finits, així doncs, els tancats són tots els conjunts finits, ja que si $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ és finit, $\mathbb{N} \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$ és un obert de $(\mathbb{N},\tau)$ i per tant $\{a_1, \ldots, a_k\}$ és tancat. Així doncs, $A = \overline{A}$ ja que A és finit. D'altra banda, E infinit, i el seu complementari és el conjunt dels nombres senars, que també és infinit. Per tant, $\overline{E} = \mathbb{N}$.

3.4.2 Propietats

Teorema 3.4.11. *Sigui (X,τ) un espai topològic i $A \subseteq X$. Se satisfà $\overline{A} = A' \cup A$.*

Demostració. Sigui $x \in \overline{A}$. Aleshores, x està contingut en el tancat més petit que conté a A. Així, $x \in A$ o bé $x \in \overline{A} \setminus A$. Si $x \in A$ ja tenim $x \in A \cup A'$. Si $x \in \overline{A} \setminus A$, $x \notin A$ i aleshores $x \notin A^\circ$. Així doncs, $\nexists U$ obert tal que $x \in U$ satisfent $x \in U \subseteq A$. Aleshores, $\forall U \in \tau$ amb $x \in U$ tenim que

$$A \cap U = A \cap U \setminus \{x\} \neq \emptyset$$

i per tant $x \in A'$. Així tenim $x \in A \cup A'$, és a dir $\overline{A} \subseteq A \cup A'$.

Recíprocament, suposem $x \in A \cup A'$. Si $x \in A$ ja hem acabat perquè $A \subseteq \overline{A} \Rightarrow x \in \overline{A}$. Suposem que $x \notin A$ i $x \in A' \setminus A$. Aleshores x és un punt d'acumulació i $\forall U \in \tau$ contenint x, $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Com $A \subseteq \overline{A}$, tenim doncs que $\forall U \in \tau$ tal que $x \in U$, $\overline{A} \cap U \setminus \{x\} \neq \emptyset$ i aleshores x és un punt d'acumulació d'$\overline{A}$. Però $\overline{A}$ és tancat i pel teorema (**??**) $\overline{A}$ conté tots els punts d'acumulació ($\overline{A} = (\overline{A})'$). Així, $x \in \overline{A}$. Amb això $A \cup A' \subseteq \overline{A}$ i ja tenim la igualtat. □

Teorema 3.4.12. *Sigui (X,τ) un espai topològic i $A \subseteq X$. Aleshores, A és tancat si i només si $\overline{A} = A$.*

Demostració. Suposem que A és tancat. Aleshores $\overline{A} = A$ ja que A és el tancat més petit contenint A. Recíprocament, si $\overline{A} = A$, com $\overline{A}$ és tancat per definició, A també ho és. □

Proposició 3.4.13. *Sigui (X,τ) un espai topològic i $A, B \subseteq X$. Si $A \subseteq B$, aleshores $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.*

Demostració. Suposem $A \subseteq B$. Sigui $x \in \overline{A}$. Com $\overline{A} = A \cup A'$ pel teorema (**??**) tenim $x \in A \cup A'$ que implica que $x \in A$ o bé $x \in A'$. Si $x \in A$ com $A \subseteq B$, $x \in B$ i $x \in B \cup B'$. Si $x \in A'$ ja hem provat que $A' \subseteq B'$ en (**??**) per tant $x \in B'$ i aleshores $x \in B \cup B' = \overline{B}$. □

Atenció perquè aquesta proposició afirma que $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$. Però això no vol dir que si $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ aleshores $A \subseteq B$. De fet, no és sempre cert. Per exemple: si $X = \{a,b,c,d\}$ i

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, X\},$$

els tancats són $\emptyset$, $\{d\}$, $\{c,d\}$, $\{b,c,d\}$, $\{a,c,d\}$ i X. Siguin $A = \{c,d\}$ i $B = \{a,c\}$. Aleshores $\overline{A}\{c,d\}$ i $\overline{B} = \{a,c,d\}$ i aleshores $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ però $A \nsubseteq B$.

Proposició 3.4.14. *Sigui (X,τ) un espai topològic i $A,B \subseteq X$. Se satisfà $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.*

Demostració. Sigui $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Aleshores:

$$x \in (A \cup A') \cup (B \cup B') = (A \cup B) \cup (A' \cup B') = (A \cup B) \cup (A \cup B)' = \overline{A \cup B}$$

Sigui ara $x \in \overline{A \cup B}$. Aleshores

$$x \in (A \cup B) \cup (A \cup B)' = (A \cup B) \cup (A' \cup B') = (A \cup A') \cup (B \cup B') = \overline{A} \cup \overline{B}$$

□

Proposició 3.4.15. *Sigui (X,τ) un espai topològic i $A,B \subseteq X$. Aleshores se satisfà $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.*

Demostració. Sigui $x \in \overline{A \cap B}$. Aleshores $x \in (A \cap B) \cup (A \cap B)' = (A \cap B) \cup (A \cap B)'$. Sigui $C = A' \cap B'$. Aleshores

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cup (A' \cap B') &= (A \cap B) \cup C \\ &= C \cup (A \cap B) \\ &= (C \cup A) \cap (C \cup B) \\ &= (A \cup C) \cap (B \cup C) \\ &= [A \cup (A' \cup B')] \cap [B \cup (A' \cup B')] \\ &= [(A \cup A') \cap (A \cup B')] \cap [(A \cup B') \cap (B \cup A')] \\ &= (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap [(A \cup B') \cap (B \cup A')] \end{aligned}$$

i per tant, en particular, $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. □

Atenció perquè en general no és cert que $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$. Per exemple, considerem $(\mathbb{R},\tau)$ amb τ euclidiana. Sigui $A = [0,1]$ i $B = (1,2]$. Aleshores $\overline{A} = [0,1]$ i $\overline{B} = [1,2]$, ergo $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$. Però $A \cap B = \emptyset$ i $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$ i no és cert que $\{1\} \subseteq \emptyset$.

3.4.3 Comparació de la clausura amb l'interior

Com a resum poso aquí una taula que he tret de [**mathonline**] on compararé les propietats de l'interior amb les de la clausura. En tota la taula, suposem donat un espai topològic X qualsevol i dos subconjunts $A,B \subseteq X$.

Interior	**Clausura**
A° és *l'obert més gran contingut* en A	$\overline{A}$ és *el tancat més petit contenint* A.
$A^\circ \subseteq A$	$\overline{A} \supseteq A$
A obert $\Leftrightarrow A^\circ = A$	A tancat $\Leftrightarrow \overline{A} = A$
$A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$	$A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$
$A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$	$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$
$A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$	$\overline{A} \cap \overline{B} \supseteq \overline{A \cap B}$

Taula 3.1: Comparació clausura amb interior

3.5 La frontera d'un conjunt a un espai topològic

3.5.1 La frontera d'un conjunt a un espai topològic

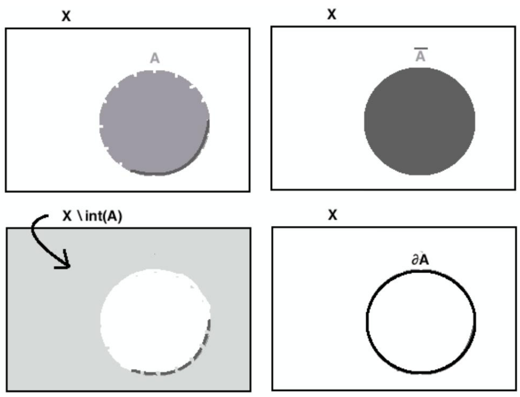
Definició 3.5.1 (Frontera)**.** Sigui (X, τ) un espai topològic. Un punt $x \in A$ es diu *punt de la frontera d'A* si x és de la clausura però no de l'interior. És a dir, $\partial A = \overline{A} \setminus A^{\circ}$.

Lema 3.5.2. *Sigui (X, τ) un espai topològic i sigui $A \subseteq X$. Aleshores $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^{\circ}$.*

Demostració. Sigui $x \in \overline{X \setminus A}$. Aleshores, $\forall U \in \tau$ amb $x \in U$ tenim $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Aleshores no existeix cap obert contenint x que estigui totalment contingut en A. Aleshores $x \notin A^{\circ}$ és a dir $x \in X \setminus A^{\circ}$.

Recíprocament, $x \in X \setminus A^{\circ}$ vol dir que $x \notin A^{\circ}$ i aleshores $\forall U \in \tau$ contenint x, $U \not\subseteq A$. Així, $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ i això implica que $x \in \overline{X \setminus A}$ (ja que $x \in (X \setminus A)'$). □

Proposició 3.5.3. *Sigui (X, τ) un espai topològic i $A \subseteq X$. Aleshores $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.*



Corol·lari 3.5.4. *Sigui (X, τ) un espai topològic i sigui $A \subseteq X$. Aleshores $\partial A = \partial(X \setminus A)$.*

Corol·lari 3.5.5. *Sigui (X, τ) un espai topològic i $A \subseteq X$. Aleshores ∂A és tancat.*

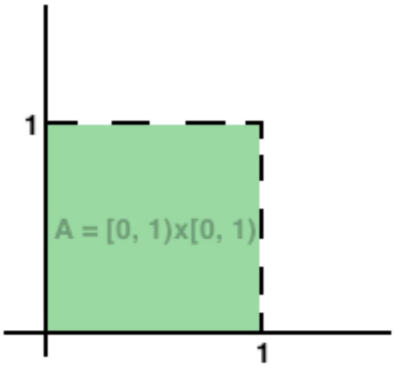
Les demostracions d'aquests dos corol·laris no les faig perquè són directes de la definició de frontera (**??**), del lema (**??**) i de la proposició (**??**).

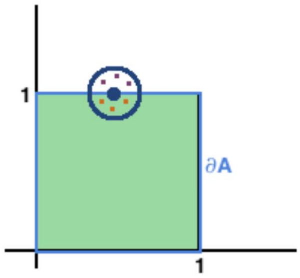
Exemple 3.5.6. Sigui $(\mathbb{R}, \tau)$ amb la topologia euclidiana. Considerem $A = [0, 1) \subseteq \mathbb{R}$. La clausura d'$A$ és $\overline{A} = [0, 1]$ i $A^{\circ} = (0, 1)$. Així doncs, $\partial A = \{0, 1\}$.

Exemple 3.5.7. Per $B = [0, 1) \cup (2, 3) \subset \mathbb{R}$ amb la topologia euclidiana, la clausura és $\overline{B} = [0, 1] \cup [2, 3]$ i l'interior és $B^{\circ} = (0, 1) \cup (2, 3)$. Finalment $\partial B = \{0, 1, 2, 3\}$.

Exemple 3.5.8. Sigui $X = \mathbb{R}^3$ amb la topologia euclidiana i considerem $A = [0, 1)^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Aleshores $A^{\circ} = (0, 1)^2$ i $\overline{A} = [0, 1]^2$. Així doncs,

$$\partial A = (\{0\} \times [0, 1]) \cup (\{1\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0\}) \cup ([0, 1] \times \{1\}).$$





For every point on the boundary of A, every open neighbourhood of that point contains points in A and points in A^C.

Exemple 3.5.9. Sigui $X = \{a, b, c\}$ i $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$. Considerem $A = \{a\}$. Què és ∂A? Com $A = \{a\}$, $A^c = \{b, c\}$. Podem dir que $A^\circ = \{a\}$ i que $\overline{A} = \{a\}$ ja que si $\{b, c\}$ és obert, $X \setminus \{b, c\} = \{a\}$ és tancat. Així doncs, $\partial A = \emptyset$.

Aquest últim exemple ens porta a deduir que si un subconjunt és obert i tancat a l'hora, aleshores la seva frontera serà el buit.

Proposició 3.5.10. *Sigui (X, τ) un espai topològic i $A \subseteq X$. Aleshores A és obert i tancat a l'hora si i només si $\partial A = \emptyset$*

Demostració. Cap a la dreta, suposem que A és obert i tancat. Aleshores $A^\circ = A$ i $\overline{A} = A$ i com que $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$ obtenim la igualtat $A^\circ = \overline{A}$. Per tant $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = A \setminus A = \emptyset$. Cap a l'esquerra, suposem que $\partial A = \emptyset$. Aleshores $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = \emptyset \Rightarrow \overline{A} = A^\circ$ i per tant A és obert i tancat perquè és igual a la seva clausura i al seu interior. □

Corol·lari 3.5.11. *$\partial\emptyset = \emptyset$ i $\partial X = \emptyset$*

Demostració. Com X i $\emptyset$ són sempre oberts i tancats a l'hora, per la proposició (**??**) obtenim el resultat. □

Exemple 3.5.12. Sigui $X = \{a, b, c, d\}$ dotat de la topologia

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}, X\}.$$

Considerem el conjunt $A = \{a, b, c\}$. Què és ∂A? Com $A = \{a, b, c\}$ tenim $A^c = \{d\}$.

Els oberts contenint a són $\{a\}, \{a, b\}$ i $\{a, b, d\}$ i X. Notem que $A^c \cap \{a\} = \emptyset$ i per tant $a \notin \partial A$. Fem el mateix amb b, c i d.

Els oberts contenint b són $\{b\}$, $\{a, b\}$, $\{b, d\}$, $\{a, b, d\}$ i X. Notem que $A^c \cap \{b\} = \emptyset$ i per tant $b \notin \partial A$.

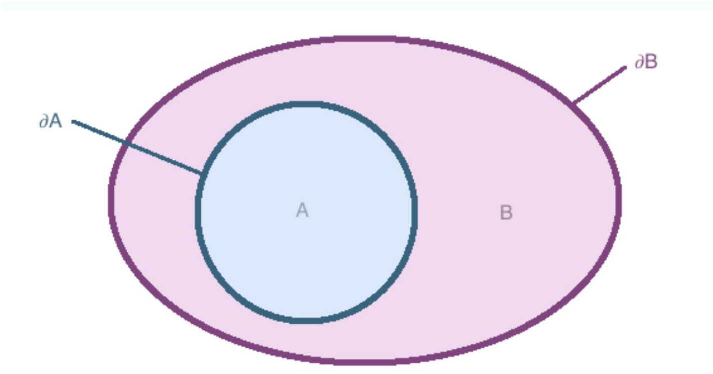
Prenem ara el punt $c \in X$. Veiem que l'únic obert que el conté és X i $A \cap X \neq \emptyset$ i $A^c \cap X \neq \emptyset$. Per tant, $c \in \partial A$.

Per últim mirem el punt $d \in X$. Els oberts contenint d són $\{b, d\}$, $\{a, b, d\}$ i X. Notem que $A \cap \{b, d\} = \{b\} \neq \emptyset$ i $A^c \cap \{b, d\} = \{d\} \neq \emptyset$. També $A \cap \{a, b, d\} = \{a, b\} \neq \emptyset$ i $A^c \cap \{a, b, d\} = \{d\} \neq \emptyset$. Finalment, $X \cap A \neq \emptyset \neq X \cap A^c$, per tant $d \in \partial A$.

Així doncs, hem trobat que $\partial A = \{c, d\}$.

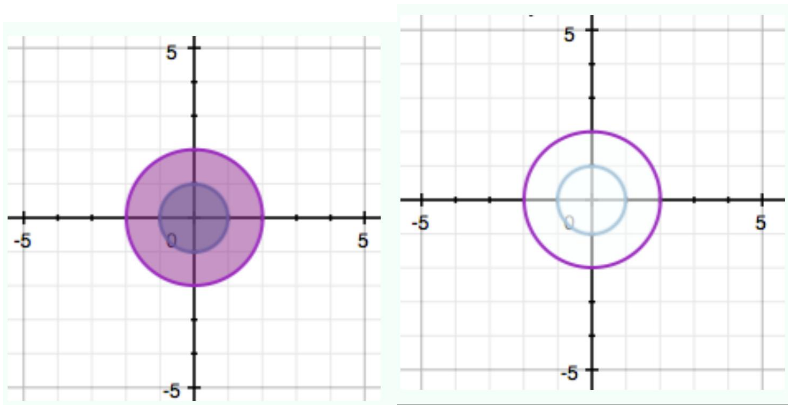
3.5.2 Propietats

Sigui $A, B \subseteq X$ on X és un espai topològic. Si $A \subseteq B$, és cert que $\partial A \subseteq \partial B$? La resposta és que no. En el dibuix es veu bastant trivialment:

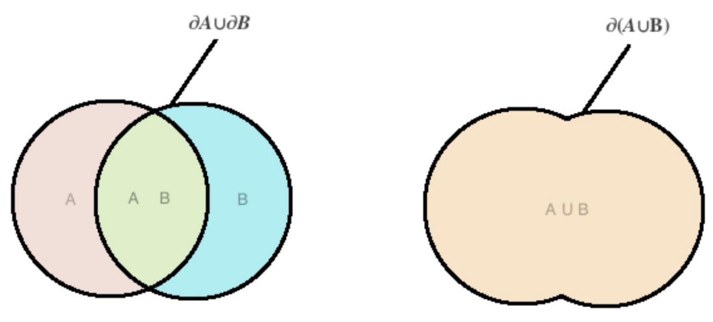


As you can see, A is a subset of B but the boundary of A is not a subset of the boundary of B.

Per exemple, considerem $(\mathbb{R}^2, \tau)$ amb la topologia euclidiana. Considerem els conjunts $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$ i $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 4\}$. Observem que $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$ i $\partial B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 4\}$. Aleshores $A \subseteq B$ però $\partial A \not\subseteq \partial B$.



Proposició 3.5.13. *Sigui (X, τ) un espai topològic i $A, B \subseteq X$. Se satisfà $\partial A \cup \partial B \supseteq \partial(A \cup B)$.*



We always have that $\partial A \cup \partial B \supseteq \partial(A \cup B)$

Demostració. Sigui $x \in \partial(A \cup B)$. Aleshores $x \in (\overline{A \cup B}) \setminus (A \cup B)^\circ$. Com $x \in \overline{A \cup B}$, $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ per la proposició (**??**) i per tant $x \in \overline{A}$ o bé $x \in \overline{B}$. Similarment $x \notin (A \cup B)^\circ$. Per tant $x \notin A^\circ \cup B^\circ$ per (**??**) i per tant $x \notin A^\circ$ o bé $x \notin B^\circ$. Combinant aquests fets:

$$x \in (\overline{A} \setminus A^\circ) \cup (\overline{B} \setminus B^\circ) = \partial A \cup \partial B$$

com volíem veure. $\square$

Atenció perquè no és cert que $\partial A \cap \partial B \subseteq \partial(A \cap B)$. Un contraexemple és si $X = \mathbb{R}$ i τ és la topologia euclidiana, prenem $A = [0, 1)$ i $B = (1, 2)$. Aleshores $A \cap B = \emptyset$, ergo $\partial(A \cap B) = \partial\emptyset = \emptyset$ per (**??**). D'altra banda, però, $\partial A = \{0, 1\}$ i $\partial B = \{1, 2\}$ així que $\partial A \cap \partial B = \{1\} \not\subseteq \emptyset$.

Tampoc és cert que $\partial A \cup \partial B \subseteq \partial(A \cup B)$. Un contraexemple pot ser el mateix que l'anterior.

Proposició 3.5.14. *Sigui* (X, τ) *un espai topològic i sigui* $A \subseteq X$. *Aleshores* A *és obert si i només si* $A \cap \partial A = \emptyset$.

Demostració. Suposem que A és obert. Aleshores $A = A^\circ$. Observem que si $x \in \partial A$, aleshores $x \in \overline{A} \setminus A^\circ$ i per tant $x \notin A^\circ = A$. Així $\partial A \cap A = \emptyset$. Recíprocament, suposem que $\partial A \cap A = \emptyset$. Sigui $x \in A$. Aleshores $x \notin \partial A$. Així, $x \notin \overline{A} \setminus A^\circ$ i aleshores $x \in A^\circ$, ergo $A = A^\circ$. $\square$

Proposició 3.5.15. *Sigui* (X, τ) *un espai topològic i sigui* $A \subseteq X$. *Aleshores* A *és tancat, si i només si* $\partial A \subseteq A$.

Demostració. Sigui A tancat. Aleshores $X \setminus A$ és obert i per la proposició anterior (**??**) obtenim que $(X \setminus A) \cap \partial(X \setminus A) = \emptyset$. Però per (**??**) $\partial(X \setminus A) = \partial A$. Així $X \setminus A$ i ∂A són disjunts i aleshores $\partial A \subseteq A$. Recíprocament, si $\partial A \subseteq A$, aleshores $(X \setminus A) \cap \partial A = \emptyset$. Equivalentment $(X \setminus A) \cap \partial(X \setminus A) = \emptyset$. Aleshores $X \setminus A$ és obert i per tant A és tancat. $\square$

3.6 Conjunt dens en un espai topològic

Definició 3.6.1 (Dens)**.** Sigui (X, τ) un espai topològic. El conjunt $A \subseteq X$ es diu *dens* en X si la intersecció de tot obert no buit amb A és no buida. És a dir, si $\forall U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$, $A \cap U \neq \emptyset$.

Donada una topologia τ en X, és important notar que X és dens en X, ja que tot $U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ tal que $U \subseteq X$ compleix que $U \cap X = U \neq \emptyset$.

Teorema 3.6.2 (Exemple)**.** *Considerem l'espai topològic* $(\mathbb{R}, \tau)$*, on* τ *és la topologia usual. Aleshores, el conjunt dels racionals* $\mathbb{Q}$ *és dens en* $\mathbb{R}$.

Demostració. Suposem que no ho és: suposem que $\exists U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\mathbb{Q} \cap U = \emptyset$. Com $U \in \tau$, tenim que $(a, b) \in U$, per a alguns $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ja que U és unió d'intervals oberts del tipus $(a, b) \subset \mathbb{R}$ (perquè és unió d'elements de la base, veure (**??**)). Suposant $\mathbb{Q} \cap U = \emptyset$, tenim que

$$\mathbb{Q} \cap U \Longrightarrow \mathbb{Q} \cap (a, b) = \emptyset.$$

Això implica que l'interval (a, b) no conté cap nombre racional, cosa que sabem és impossible perquè $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sempre existeix un racional $q \in \mathbb{Q}$ tal que $a < q < b$. Per tant això és una contradicció i $U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, $\forall U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$. $\square$

Proposició 3.6.3. *Sigui* (X, τ) *un espai topològic i* $A \subset X$. *Aleshores,* A *és dens si, i només si,* $\overline{A} = X$.

Exemple 3.6.4. Considerem l'espai topològic $(\mathbb{R}^2, \tau)$, on τ és la topologia usual dels discs oberts. Considerem

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Veiem que aquest conjunt no és dens. Hem de trobar un obert U de $\mathbb{R}^2$ per al qual $A \cap U = \emptyset$. Considerem el següent disc obert en $\mathbb{R}^2$:

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x - 1/2)^2 + y^2 < 1/4\}.$$

Aquest disc està centrat al punt $(1/2, 0)$ i té radi $1/2$. No interseca amb A (no hi ha cap punt a U que tingui la primera component natural), per tant és un contraexemple.

Capítol 4

Bases de topologies

4.1 Bases

4.1.1 Bases. Definició i exemples

Definició 4.1.1 (Base)**.** Sigui τ una topologia en un conjunt X. Una *base* de τ (o de l'espai topològic (X,τ)) és un subconjunt $\beta \subseteq \tau$ tal que tot element de τ és unió d'elements de β. És a dir,

$$\forall U \in \tau \; \exists \{U_i\}_{i\in I} \quad on \quad U_i \in \beta \; \forall i \in I \quad tq. \quad U = \bigcup_{i\in I} U_i.$$

A vegades direm *elements bàsics* per a referir-nos a elements de la base.

Observem que, en general, τ conté molts més elements que β. No tot obert és necessàriament una bola oberta en aquest exemple. Observem també que un subconjunt de τ donat és base si, per començar és subconjunt (és a dir, que tot element de β és de τ) i si es compleix que tot element de τ és unió d'elements de β.

Exemple 4.1.2. Sigui X un conjunt qualsevol no buit amb la topologia discreta $\tau = \mathscr{P}(X)$. Considerem la col·lecció

$$\beta = \{\{x\} \; : \; x \in X\}.$$

Aleshores β és una base de la topologia discreta. Vegem-ho: Primer, com que τ és la topologia discreta, tenim que tot subconjunt de X és a τ. Per tot $B = \{x\} \in \beta$, tenim aleshores,

$$B = \{x\} \in \beta \subseteq \tau.$$

Per a la segona condició, sigui $U \in \tau$. Aleshores, com τ és la topologia discreta, tenim que $U \subseteq X$. Per tot $x \in U$, tenim que U pot ser expressat com la unió d'elements (que són conjunts) de β. En particular, per tot $U \in \tau$, tenim

$$U = \bigcup_{x\in U} \{x\}$$

Així doncs, β és una base de la topologia discreta.

Exemple 4.1.3. Considerem el conjunt $X = \{a, b, c, d\}$ i la topologia

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X\}$$

a X. Considerem la següent col·lecció d'oberts:

$$\beta = \{\{a\}, \{d\}, \{b, c\}\}$$

Afirmem que β és una base de τ. En efecte, d'una banda és clar que tots els elements de β són de τ, és a dir, tots els elements de β són oberts. D'altra banda, per veure la segona condició, només cal veure que els elements restants de τ que no són a β poden ser expressats com a unió d'elements de β. Per conveni $\emptyset \in \beta$, o bé podem posar $\emptyset$ com la unió buida d'elements de β i aleshores, en qualsevol cas, $\emptyset \in \tau$. Pels altres:

$$\{a\} \cup \{d\} = \{a, d\}, \qquad \{a\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\}, \qquad \{a\} \cup \{b, c\} \cup \{d\} = X.$$

Així doncs, cada obert de τ és unió d'oberts de β i així demostrem que β és una base.

Exemple 4.1.4. Sigui $\mathbb{R}$ amb τ_e, la topologia euclidiana o usual dels intervals oberts de $\mathbb{R}$. Aleshores $\beta = \{(a, b)\ :\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ és una base de τ_e.

En efecte, notem que els oberts de $\mathbb{R}$ respecte τ_e són el conjunt buit $\emptyset$, el total $\mathbb{R}$, intervals oberts, unions arbitràries d'intervals oberts i interseccions finites d'intervals oberts. Ara hem de mirar que cadascun d'aquests oberts pot ser expressat com la unió d'elements de β.

Aleshores, per conveni suposem que $\emptyset \in \beta$ o sinó podem interpretar $\emptyset$ com la unió buida d'elements de β. Ara, el total $\mathbb{R}$ pot ser obtingut com

$$\mathbb{R} = \bigcup_{\substack{a,b\in\mathbb{R} \\ a<b}} (a, b).$$

A més, cada interval $(a, b) \in \tau_e$ està contingut en β perquè és la "unió amb sí mateix". Finalment considerem la unió d'un nombre arbitrari d'intervals $\{U_i\}_{i\in I}$ on $U_i = (a, b)$, per certs $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, per a cada $i \in I$. Aleshores, $\bigcup_{i\in I} U_i$és la unió d'elements de β. Finalment, considerem la intersecció finita d'intervals de $\mathbb{R}$ oberts. La intersecció, com és finita, és o bé un interval obert o bé $\emptyset$ i els dos casos hem vist que es poden expressar com a unió d'elements de β. Per tant β és una base de τ_e.

Exemple 4.1.5. Sigui X un espai mètric qualsevol. Aleshores $\beta = \{B(x, \varepsilon)\ :\ x \in X,\ \varepsilon > 0\}$ (la col·lecció de boles obertes en relació a la mètrica definida a X) és una base per la topologia resultant de la distància (topologia usual o euclidiana) a X.

Exemple 4.1.6. Considerem $X = \{a, b, c, d\}$ i

$$\beta = \{\{a\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}\}$$

dos conjunts. Volem determinar si existeix alguna topologia τ a X tal que β en sigui una base. Això s'anticipa a un teorema que veurem properament.

Notem que, de principi, ningú ens diu que β sigui una base de τ ja que de moment ni tan sols sabem si τ existeix. Donem totes les possibles unions d'elements de β:

$$\left\{ \bigcup_{B\in\beta^*} B\ :\ \beta^* \subseteq \beta \right\} = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X\}.$$

Si τ és una topologia que té com a base β ha de ser aquesta mateixa. Veiem, però, que

$$\{c, d\} \cap \{a, b, c\} = \{c\} \notin \tau$$

així que τ no pot ser cap topologia, ergo no existeix cap topologia que tingui el conjunt β com a base.

Exemple 4.1.7. Considerem l'espai topològic $(\mathbb{R}, \tau)$ on τ és la topologia usual d'intervals oberts de $\mathbb{R}$. Volem veure que $\beta = \{(p, q)\ :\ p, q \in \mathbb{Q},\ p < q\}$ és una base. És suficient provar que qualsevol interval obert $(a, b) \in \tau$ pot ser expressat com a unió d'elements bàsics (elements de la base) ja que tot obert de τ és unió d'intervals oberts. Aleshores, sigui $(a, b) \in \tau$.

- Si $a, b \in \mathbb{Q}$, aleshores $(a, b) \in \beta$ i ja hem acabat.
- Si $a \in \mathbb{Q}$, però $b \notin \mathbb{Q}$, aleshores,
$$(a, b) = \bigcup_{\substack{a<q<b \\ q\in\mathbb{Q}}} (a, q).$$
i per tant és unió d'elements de β.

  Anàlogament, si $b \in \mathbb{Q}$, però $a \notin \mathbb{Q}$, aleshores,
$$(a, b) = \bigcup_{\substack{a<p<b \\ p\in\mathbb{Q}}} (p, b)$$
i per tant és unió d'elements de β.
- Considerem el cas en què $a, b \notin \mathbb{Q}$. Aleshores,
$$(a, b) = \bigcup_{\substack{a<p<q<b \\ p,q\in\mathbb{Q}}} (p, q)$$
i, de nou, és unió d'elements de β.

Exemple 4.1.8. Considerem un altre cop l'espai topològic $(\mathbb{R}, \tau)$ on τ és la topologia usual d'intervals oberts a $\mathbb{R}$. Volem veure que $\beta = \{(w, z) \;:\; w, z \in \mathbb{Z},\; w < z\}$ NO és una base de τ. En efecte, si β fos una base de τ aleshores $\forall U \in \tau$ hauríem de trobar una col·lecció $\beta^* \subseteq \beta$ d'elements de β tal que $U = \bigcup_{B\in\beta^*} B$.

Considerem l'interval obert $U = (0, 1/2)$. Qualsevol conjunt de β contenint U ha de ser tal que $w \leq 0$ i $1/2 \leq z$. L'enter més petit z satisfent-ho és $z = 1$ i aleshores l'element més petit de β contenint U és l'interval $(0, 1)$. Però no hi ha conjunts en β que estiguin continguts en $(0, 1/2)$ i per tant β no és una base de τ.

4.1.2 Condició suficient per ser una base

Recordem de la definició de base (**??**) que si (X, τ) és un espai topològic, una base β de τ és una col·lecció de subconjunts que són a τ tal que tot obert $U \in \tau$ és la unió d'elements de β.

Proposició 4.1.9. *Sigui (X, τ) un espai topològic i $\beta \subseteq \tau$. Aleshores, β és una base de τ si, i només si,*

(1) $\emptyset \in \beta$,

(2) $\forall U \in \tau$, $\forall x \in U$, $\exists B \in \beta$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Demostració. ($\Leftarrow$) Suposem que $\beta \subseteq \tau$ satisfà (1) i (2). Sigui $U \in \tau$. Si $U = \emptyset$ aleshores $U \in \beta$ i ja hem acabat. Suposem $U \neq \emptyset$. Prenem, per a cada $x \in U$, $B_x \in \beta$ tal que $x \in B_x \subset U$. Aleshores
$$U = \bigcup_{x\in U} B_x$$

($\Rightarrow$) Recíprocament, si β és una base, aleshores $\emptyset \in \beta$. Si $U \in \tau$, existeix $\{B_i\}_{i\in I}$ elements de β tals que $U = \bigcup_{i\in I} B_i$. Si $x \in U$, $\exists i \in I$ tal que $x \in B_i \subseteq U$.

$\square$

Exemple 4.1.10. Sigui (X, τ) un espai topològic on

$$X = \{a, b, c, d\} \quad \text{i} \quad \tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, X\}.$$

Volem determinar si $\beta = \{\{a\}, \{a, b, c\}\}$ és una base de τ. Utilitzant aquesta proposició (**??**), si β és base de τ, aleshores per tot $U \in \beta$ i per tot $x \in U$, existeix $B \in \beta$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Considerem el conjunt $U = \{a, b\} \in \tau$. Per tot $x \in U$, existeix $B \in \beta$ tal que $x \in B \subseteq U$? Per a $a \in U$ tenim $B_a = \{a\} \in \beta$ que és tal que $a \in B_a \subseteq U$. Però per a $b \in U$, tenim $b \notin \{a\}$ i $b \in \{a, b, c\} \nsubseteq U$. Aleshores β no pot ser una base de τ.

4.1.3 Generant topologies a partir d'una col·lecció de subconjunts

Fins ara per parlar de bases suposàvem que teníem fixat un espai topològic. Ara canviem el punt de vista. Sigui ara X un conjunt i $\beta \subseteq \mathscr{P}(X)$. Ens podem preguntar si hi ha alguna topologia a X de la qual β sigui base. Observem que si β és base d'una topologia τ, aleshores forçosament

$$\tau = \tau_\beta := \{\text{subconjunts de } X \text{ que es poden posar com a unió d'elements de } \beta\}.$$

Proposició 4.1.11. *Sigui X un conjunt i $\beta \subseteq \mathscr{P}(X)$. Aleshores, β és base d'una topologia de X (que necessàriament serà τ_β) si, i només si, se satisfà:*

(i) $\emptyset \in \beta$,

(ii) $X = \bigcup_{B \in \beta} B$,

(iii) $\forall B, B' \in \beta$, $B \cap B' \in \tau_\beta$, *és a dir,* $B \cap B'$ *és unió d'elements de* β.

Demostració. Hem vist que si τ existeix, aleshores

$$\tau = \tau_\beta = \{Y \subseteq X \ : \ Y \text{ és unió d'elements de } \beta\} = \left\{ \bigcup_{i \in I} U_i \ : \ \{U_i\}_{i \in I} \text{ elements de } X \right\}.$$

Per tant, el lema és equivalent a dir que τ_β és una topologia si, i només si, se satisfan (i), (ii) i (iii).

($\Rightarrow$) Si τ_β és una topologia, $\emptyset \in \tau_\beta$ que implica (i); $X \in \tau_\beta$ que implica (ii); i com que $\beta \subseteq \tau_\beta$, del fet que la intersecció de dos elements qualssevol de τ_β pertanyi a τ_β, es dedueix (iii).

($\Leftarrow$) Suposem cert (i), (ii) i (iii). Aleshores $\emptyset \in \tau_\beta$ i $X \in \tau_\beta$. De la definició de τ_β es dedueix immediatament que la unió d'elements de τ_β pertany a τ_β. Per veure que les interseccions de col·leccions finites d'elements de τ_β pertany a τ_β és suficient veure que

$$U, V \in \tau_\beta \Rightarrow U \cap V \in \tau_\beta$$

Com que $U, V \in \tau_\beta$ vol dir que existeixen col·leccions $\{U_i\}_{i \in I}$ i $\{V_j\}_{j \in J}$ d'elements de β tals que

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i, \qquad V = \bigcup_{j \in J} V_j$$

aleshores

$$U \cap V = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap \left(V = \bigcup_{j \in J} V_j \right) = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} U_i \cap V_j$$

on $U_i \cap V_j$ pertany a τ_β per (iii). Així doncs, $U \cap V \in \tau_\beta$.

$\square$

4.1.4 Comparació de topologies a partir de les seves bases

Lema 4.1.12. *Suposem que X és un conjunt i $\tau_1, \tau_2 \subseteq \mathscr{P}(X)$ són topologies en X. Si β_1 és base de τ_1 i β_2 és base de τ_2, aleshores $\tau_1 \subset \tau_2 \Leftrightarrow \forall U \in \beta_1,\ \forall x \in U,\ \exists V \in \beta_2$ tal que $x \in V \subseteq U$.*

Demostració. $(\Rightarrow)$ Sigui $U \in \beta_1$, sigui $x \in U$. Volem provar que existeix $V \in \beta_2$ tal que $x \in V \subseteq U$.

Com que $U \in \beta_1 \subseteq \tau_1$ i $\tau_1 \subset \tau_1$, aleshores $U \in \tau_2$. Com β_2 és base de τ_2, aleshores U és unió d'elements de β_2, és a dir, $\exists \{V_i\}_{i \in I}$, $V_i \in \beta_2$ tal que $U = \bigcup_{i \in I} V_i$ i com $x \in U$, ha d'estar en algun d'aquests V_i, és a dir, existeix $i_0 \in I$ de forma que $x \in V_{i_0} \subset U$ i això és el que volíem.

$(\Leftarrow)$ Sigui $U \in \tau_1$. Volem veure que $U \in \tau_2$. Com que β_1 és base de τ_1, aleshores U és unió d'elements de β_1, és a dir, $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, on $U_i \in \beta_1$, $\forall i \in I$.

Hem de veure que per tot $i \in I$, $U_i \in \tau_2$ i amb això obtindrem que la unió dels U_i, que és U, està a τ_2.

Per hipòtesis, donat $x \in U_i$, existeix un $V_{i,x} \in \beta_2$ tal que $x \in V_{i,x} \subseteq U_i$ per hipòtesis. Això es compleix per a tot x. Aleshores, $U_i = \bigcup_{x \in U_i} V_{i,x}$ i com $V_{i,x} \in \beta_2$, la unió d'aquests elements és un element de $\tau_2 \Rightarrow U_i \in \tau_2$. Això per a tota $i \in I$. Per tant, $U \in \tau_2$.

□

Exemple 4.1.13. Sigui (X, d) un espai mètric i sigui τ la topologia donada per d. Sigui Y un subconjunt de X. Hi ha dues maneres de definir una topologia a Y:

(1) τ_Y, la topologia induïda per Y (veure (**??**)).

(2) Sigui $d_Y = d_{|Y \times Y}$, aleshores (Y, d_Y) és un espai mètric i podem prendre a Y la topologia τ'_Y induïda per d_Y. Aleshores, $\tau_Y = \tau'_Y$.

(En general, si β és una base de X i $Y \subseteq X$, el conjunt $\{B \cap Y \ :\ B \in \beta\}$ és una base de la topologia induïda a Y).

Demostració. Prenem

$$\beta_Y = \{B_r^d(x) \cap Y \ :\ r > 0 \ x \in X\} \quad \text{base de } \tau_Y$$
$$\beta'_Y = \{B_\rho^{d_Y}(y) \ :\ \rho > 0,\ y \in Y\}$$

Com que $d_Y = d_{|Y \times Y}$, $\beta'_Y \subseteq \beta_Y$. D'altra banda, si prenem $r > 0$, $x \in X$, $y \in B_r^d(x) \cap Y$, aleshores prenem $\rho = r - d(y, x) > 0$ se satisfà $y \in B_\rho^{d_Y}(y) \subseteq B_r^d(x) \cap Y$. Això demostra que $\tau_Y = \tau'_Y$. □

4.2 Subbases

Recordem que una base d'un espai topològic (X, τ) és una col·lecció $\beta \subseteq \tau$ tal que $\forall U \in \tau$ es pot escriure com a unió d'elements de τ, és a dir, $\forall U \in \tau$, $\exists \beta^* \subseteq \beta$ tq. $U = \bigcup_{B \in \beta^*} B$. Ara definirem un terme general anomenat subbase.

Definició 4.2.1 (Subbase)**.** Sigui (X, τ) un espai topològic. Una col·lecció $S \subseteq \tau$ es diu *subbase* (en anglès: subbase o subbasis) de τ si el conjunt d'interseccions finites d'elements de S formen una base de τ. És a dir, si

$$\beta_S = \{U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k \ :\ U_1, \ldots, U_k \in S\}$$

és base de τ.

La següent proposició ens dona una definició alternativa.

Proposició 4.2.2. *Sigui (X, τ) un espai topològic. S és una subbase de τ si, i només si, τ és la topologia més petita contenint S.*

Exemple 4.2.3. Considerem l'espai topològic $(\mathbb{R}, \tau)$ on τ és la topologia d'intervals oberts a $\mathbb{R}$. Considerem el següent conjunt d'intervals semi-infinits:

$$S = \{(-\infty, b)\ :\ b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty)\ :\ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}.$$

Notem que per $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tenim $(-\infty, b) \cap (a, +\infty) = (a, b)$. Per $a \geq b$ tenim $(-\infty, b) \cap (a, +\infty) = \emptyset$. Així doncs, la col·lecció de totes les interseccions finites d'elements de S són o bé intervals oberts o bé $\emptyset$. Recordem que la col·lecció d'intervals oberts ja sabem que forma una base de τ (usual) en $\mathbb{R}$. Per tant, S és una subbase de τ ja que β_S és base de τ.

Exemple 4.2.4. Considerem el conjunt $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ amb la topologia

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}, X\}.$$

Volem veure que el subconjunt $S = \{\{a\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, mf\}\} \subseteq \tau$ és una subbase de τ.

La col·lecció de totes les possibles interseccions finites entre elements de S és

$$\beta_S = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}.$$

Tots els altres elements de τ són unions trivials d'elements de β_S i $X = \{a\} \cup \{b, c, d, e, f\}$ així que β_S és una base i per tant S una subbase de τ.

Exemple 4.2.5. Sigui $X = \{a, b, c, d, e\}$ i $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}, X\}$. Volem veure que

$$S = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}, X\}$$

NO és una subbase. Considerem β_S el conjunt de totes les interseccions finites dels elements de S:

$$\beta_S = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}, X\}.$$

Veiem que tots els conjunts que hi ha, excepte $\{b, d\}$, poden ser expressats com a unió d'elements de τ. Però aquest $\{b, d\}$ no, i per tant β_S no és base de τ, ergo S no és subbase de τ.

4.3 Entorns i bases d'entorns

4.3.1 Entorn d'un punt en un espai topològic

Definició 4.3.1 (Entorn)**.** Sigui X un espai topològic i $x \in X$. Un *entorn* de x és un subconjunt $E \subseteq X$ tal que $x \in E^o$.

En altres paraules, un entorn d'un punt $x \in X$, és un conjunt $E \subseteq X$ per al qual existeix un obert $U \subseteq E$ tal que $x \in U$. Es diu entorn obert d'un punt $x \in X$ a qualsevol conjunt obert $U \in \tau$ tal que $x \in U$.

Sovint, però, el terme "entorn" s'utilitza volent dir "entorn obert" quan la distinció no és important.

Amb aquesta definició podem obtenir el següent criteri per veure si un conjunt és obert:

Proposició 4.3.2. *Sigui (X, τ) un espai topològic i sigui $U \subseteq X$. Aleshores U és obert si, i només si, $\forall x \in U$, $\exists U_x$ entorn obert de x tal que $U_x \subseteq U$.*

Demostració. ($\Rightarrow$) Suposem que U és obert. Aleshores, per tot $x \in U$, sigui $U_x = U$. Això ja compleix el que volíem: U_x és un entorn de x obert tal que $U_x \subseteq U$.

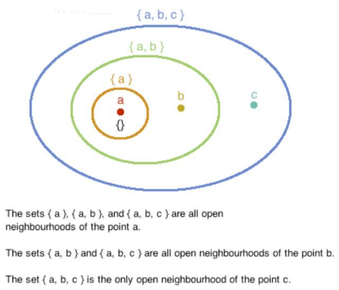
($\Leftarrow$) Suposem que per a tot $x \in U$ existeix un entorn obert U_x de x tal que $U_x \subseteq U$. Aleshores, $U = \bigcup_{x \in U} U_x$. Com la unió arbitrària d'oberts és un obert, tenim que U és obert.

□

Proposició 4.3.3. *Sigui (X, τ) un espai topològic i $C \subseteq X$. Aleshores C és tancat si i només si per a tot $x \in X \setminus C$ existeix un entorn obert U_x de x tal que $U_x \subseteq X \setminus C$. Equivalentment, C és tancat si i només si per tot $x \in X \setminus C$ existeix un entorn obert U_x de x tal que $U_x \cap C = \emptyset$.*

Demostració. Com C és tancat, $X \setminus C$ és obert, i el resultat se segueix de la proposició (**??**). □

Exemple 4.3.4. Considerem el conjunt finit $X = \{a, b, c\}$ i la topologia $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$. Considerem l'element $a \in X$. Els entorns oberts de a són $\{a\}, \{a, b\}$ i $\{a, b, c\} = X$. Ara considerem l'element $b \in X$. Els entorns oberts de b són $\{a, b\}$ i $\{a, b, c\}$. Finalment, l'únic entorn obert de c és X.



Exemple 4.3.5. Considerem $X = \mathbb{Z}$ amb la topologia dels complements finits:

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq \mathbb{Z} \ : \ \mathbb{Z} \setminus U \text{ és finit}\}$$

Considerem el punt $1 \in \mathbb{Z}$. Sigui $A \subseteq \mathbb{Z}$ un conjunt finit. Aleshores qualsevol conjunt de la forma $\{1\} \cup (\mathbb{Z} \setminus A)$ és un entorn obert de 1. Per veure això, notem que com A és finit, $\mathbb{Z} \setminus A$ és un conjunt infinit sense els elements d'A. Així doncs, $\{1\} \cup (\mathbb{Z} \setminus A)$ és també un conjunt infinit que conté tots els elements excepte els d'A i amb l'1 afegit de nou. El complementari d'aquest conjunt és

$$(\{1\} \cup (\mathbb{Z} \setminus A))^c = A \setminus \{1\}$$

Com A és finit, $A \setminus \{1\}$ també és finit i per tant $\{1\} \cup (\mathbb{Z} \setminus A) \in \tau$ és un obert. Més enllà, tenim que $1 \in \{1\} \cup (\mathbb{Z} \setminus A)$. Així doncs, cada conjunt de la forma $\{1\} \cup (\mathbb{Z} \setminus A)$ on $A \subseteq \mathbb{Z}$ és finit, és un entorn obert de 1.

Exemple 4.3.6. Considerem l'espai topològic $(\mathbb{R}, \tau)$ on $\tau = \{(-n, n) \ : \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 1\}$. Volem descriure tots els entorns oberts de $\pi \in \mathbb{R}$. La col·lecció de tots els oberts d'aquesta topologia és

$$\tau = \{(-1, 1), (-2, 2), \ldots, (-n, n), \cdots\}$$

A més, veiem que els oberts estan "encadenats" de la següent manera

$$(-1,1) \subset (-2,2) \subset \cdots \subset (-n,n) \subset \cdots \subset \mathbb{R}$$

Observem que $\pi \notin (-1,1)$, $\pi \notin (-2,2)$, $\pi \notin (-3,3)$, però $\pi \in (-4,4)$. I aleshores, pel que hem vist de la cadena, $\pi \in (-n,n)$, $\forall n \geq 4$. Per tant, una col·lecció d'entorns oberts de $\pi \in \mathbb{R}$ és $\{(-n,n) \,:\, n \geq 4\}$

Exemple 4.3.7. Sigui X un conjunt finit no buit de n elements i considerem l'espai topològic (X,τ) on τ és la topologia discreta en X. Veiem que $x \in X$ té 2^{n-1} entorns oberts.

En efecte, si τ és la topologia discreta, aleshores $\tau = \mathscr{P}(X)$. Per tant $\#\tau = 2^n$. Sigui $x \in X$. Per tot $A \in \tau = \mathscr{P}(X)$ tenim que, o bé $x \in A$, o bé $x \notin A$. Així doncs, $\mathscr{P}(X)$ es pot dividir en dos grups d'iguals dimensions: $2^n/2 = 2^{n-1}$. El primer grup de conjunts contenint x i el segon grup de conjunts que no contenen x. Així doncs, hi ha 2^{n-1} subgrups de X que contenen x, però cada conjunt de X és un obert, per tant hi ha 2^{n-1} entorns oberts de x, per tot $x \in X$.

Exemple 4.3.8. Considerem l'espai topològic $(\mathbb{Z},\tau)$ on τ és la topologia dels complements numerables. Quins són els entorns de $1 \in \mathbb{Z}$? I quin n'és el més petit? El conjunt d'entorns oberts de 1 és una col·lecció de conjunts de τ contenint 1. Notem que $\mathbb{Z}$ és un conjunt numerable. Aleshores, per tot $A \subseteq \mathbb{Z}$ tenim que $A^c = \mathbb{Z} \setminus A$ es un conjunt numerable. Per tant, tot $A \subseteq \mathbb{Z}$ és un obert. Així doncs, tot subconjunt de $\mathbb{Z}$ contenint 1 és un entorn obert de 1. Per exemple, el conjunt dels enters imparells

$$(2n+1)\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-1,1,3,\ldots\}$$

és un entorn obert de 1. El conjunt de quadrats $S = \{1,4,9,\ldots\}$ també n'és un entorn obert. Aleshores, és clar que l'entorn obert més petit de 1 és $\{1\}$.

Exemple 4.3.9. Considerem l'espai topològic $(\mathbb{R},\tau)$ on τ és la topologia dels complements numerables. Veurem dos exemples d'entorns oberts de $1 \in \mathbb{R}$. Els entorns oberts de 1 són els oberts contenint 1. Considerem el conjunt

$$A = (\mathbb{R} \setminus N) \cup \{1\}.$$

Aleshores $A^c = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ és numerable.

Per un altre exemple, considerem el conjunt $B = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Aleshores $B^c = \{2\}$ que és numerable així que $B \in \tau$ i $1 \in B$, per tant B és un entorn obert de 1.

De fet, per qualsevol $b \in \mathbb{R}$ on $b \neq 1$, si definim $B_b = \mathbb{R} \setminus \{b\}$, aleshores $B_b^c = \{b\}$ que és numerable i per tant $B_b \in \tau$ i $1 \in B_b$. Aleshores B_b és un entorn obert de 1, ja que $1 \in B_b$, $\forall b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exemple 4.3.10. Considerem el conjunt $X = \{a,b,c,d,e\}$. Volem trobar una topologia no discreta τ a X tal que $a,b \in X$ comparteixin exactament tres entorns oberts.

Si a i b comparteixen exactament 3 entorns oberts aleshores ha d'haver-hi 3 oberts contenint els dos elements, a i b. Considerem la següent topologia:

$$\tau = \{\emptyset, \{d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}, X\}.$$

Aleshores,

$$a,b \in U_1 = \{a,b,c\}, \qquad a,b \in U_2 = \{a,b,c,d\}, \qquad a,b \in U_3 = \{a,b,c,d,e\}$$

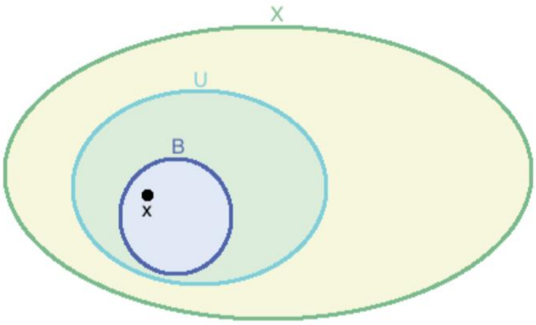
i per tant comparteixen exactament tres entorns oberts, com volíem. Caldria provar que τ és efectivament una topologia.

4.3.2 Bases d'entorns

Recordem que si (X, τ) és un espai topològic, una base β de τ és una subcol·lecció de τ tal que tot $U \in \tau$ és la unió d'alguna subcol·lecció $\beta^* \subseteq \beta$ de β, és a dir, $\forall U \in \tau$, $\exists \beta^* \subseteq \beta$ tal que $U = \bigcup_{B \in \beta^*} B$. Ara estudiarem una definició similar.

Definició 4.3.11 (Base d'entorns)**.** Una *base d'entorns* (o sistema fonamental d'entorns o base local) de x és una col·lecció d'entorns (oberts) de x, $\{E_i\}_{i \in I}$, amb la propietat que per tot entorn E de x existeix $i \in I$ tal que $E_i \subseteq E$.

En altres paraules, una base d'entorns del punt $x \in X$ és una col·lecció de conjunts β_x tal que per tot entorn obert de x existeix un element bàsic $B \in \beta_x$ contingut a aquest entorn obert.



Exemple 4.3.12. Considerem l'espai topològic $(\mathbb{R}, \tau)$ on τ és la topologia usual dels intervals oberts a $\mathbb{R}$. Considerem el punt $0 \in \mathbb{R}$. Una base d'entorns de 0 és la col·lecció

$$\beta_0 = \{(a, b) \ : \ a < 0 < b\}.$$

Per exemple, si considerem l'obert $U = (-1, 1) \cup (2, 3) \in \tau$ que conté el 0, aleshores per a $B = (-1/2, 1/2) \in \beta_0$ tenim que $0 \in B \subseteq U$.

Més en general, per a tot $x \in \mathbb{R}$, una base d'entorns de x és

$$\beta_x = \{(a, b) \ : \ a < x < b\}.$$

Això és perquè per qualsevol obert $U \in \tau$ contenint x, existirà un interval obert contenint x que estigui contingut en U.

Exemple 4.3.13. Considerem el conjunt $X = \{a, b, c, d, e\}$ i la topologia

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, X\}.$$

Què és una base d'entorns per a l'element $b \in X$? Primer mirem els conjunts de τ que continguin b. Aquests són

$$U_1 = \{a, b\}, \qquad U_2 = \{a, b, c\}, \qquad U_3 = \{a, b, c, d\}, \qquad U_4 = X.$$

Veiem que $\beta_b = \{\{b\}\}$ pot funcionar com a base d'entorns de b ja que

$$b \in \{b\} \subseteq U_1, \quad b \in \{b\} \subseteq U_2, \quad b \in \{b\} \subseteq U_3, \quad b \in \{b\} \subset U_4 = X.$$

Quina seria una base de c? Els conjunts de τ contenint C són $V_1 = \{a, c\}$, $V_2 = \{a, b, c\}$, $V_3 = \{a, b, c, d\}$ i $V_4 = X$. Veiem que $\beta_c = \{\{a, c\}\}$ funciona com a base d'entorns de c ja que

$$c \in \{a, c\} \subset V_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Proposició 4.3.14. *Sigui (X, τ) un espai topològic i sigui β una base de τ. Aleshores, per tot $x \in X$, $\beta_x = \{B \in \beta \,:\, x \in B\}$ és una base d'entorns de x.*

Demostració. Sigui $x \in X$ i sigui $\beta_x = \{B \in \beta \,:\, x \in B\}$. Per veure que β_x és una base d'entorns de x hem de veure que per tot $U \in \tau$ amb $x \in U$ existeix $B \in \beta_x$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Sigui $U \in \tau$ amb $x \in U$. Com β és una base de τ, tenim que existeix una subcol·lecció $\beta^* \subseteq \beta$ tal que $U = \bigcup_{B \in \beta^*} B$. Com $x \in U$, tenim que $x \in \bigcup_{B \in \beta^*} B$. Per tant, x està a al menys un dels $B \in \beta^*$. Sigui B_x aquest tal que $x \in B_x \in \beta^*$. Aleshores, $B_x \in \beta_x$ ja que $x \in B_x$ i $B_x \in \beta^* \subseteq \beta$ i per tant

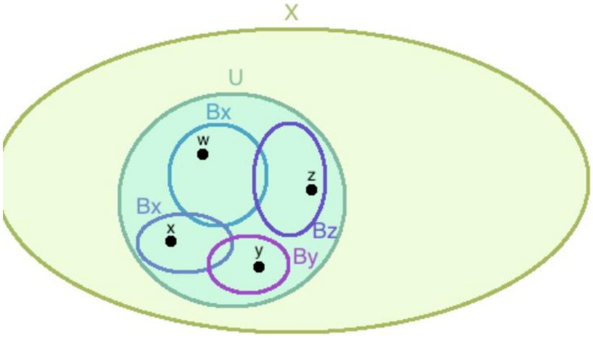
$$x \in B_x \in \bigcup_{B \in \beta^*} B = U.$$

Així doncs, per tot $U \in \tau$ amb $x \in U$, existeix $B_x \in \beta_x = \{B \in \beta \,:\, x \in B\}$ tal que $x \in B_x \subseteq U$. Aleshores β_x és una base d'entorns de x. □

Proposició 4.3.15. *Sigui (X, τ) un espai topològic. Si $\{\beta_x\}_{x \in X}$ és una col·lecció de bases d'entorns per cada $x \in X$, aleshores*

$$\beta = \bigcup_{x \in X} \beta_x$$

és una base de τ.



Per cada obert U i per a tot element x de U considerem la base d'entorns de x, β_x. Com β_x és base d'entorns de x, tenim un conjunt B_x de β_x tal que $x \in B_x$ i $B_x \subseteq U$. La unió de tots aquests B_x en β_x $\forall x \in U$ ens mostra que U pot ser escrit com la unió d'elements de β (la unió de tots els β_x per tot $x \in U$).

Demostració. Sigui

$$\beta = \bigcup_{B \in \beta} B.$$

Recordem que β és una base de la topologia τ si per tot $U \in \tau$, existeix una subcol·lecció de β tal que U n'és la unió dels seus elements.

Sigui $U \in \tau$ i $x \in U$. Aleshores existeix una base d'entorns de x, $\beta_x \subseteq \beta$. Com β_x és una base d'entorns de x, tenim que per $U \in \tau$ existeix un $B_x \in \beta_x$ tal que $x \in B_x \subseteq U$. Així que tenim:

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x$$

Per tant, tot $U \in \tau$ pot ser expressat com la unió d'elements de β, així $\beta = \bigcup_{x \in X} \beta_x$ és una base de τ. □

4.4 Axiomes de numerabilitat

4.4.1 Recordatori dels conjunts numerables

Recordem:

Definició 4.4.1 (Conjunt numerable)**.** Direm que un conjunt X és numerable si existeix una aplicació bijectiva $X \to \mathbb{N}$ (és a dir, una bijecció entre X i el conjunt dels naturals, de forma que se li pot assignar a cada element de X un cardinal).

Observació 4.4.2. *Observem*

- *Numerable no vol dir finit. Per exemple:* $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ *són numerables i infinits.*
- *Els conjunts finits no tenen per què ser numerables. Per exemple, els intervals de* $\mathbb{R}$ *són finits i no numerables, per petits que siguin.*

Proposició 4.4.3. *Propietats:*

- *Si* X, Y *són numerables, aleshores* $X \times Y$ *són numerables. Més general, per a* $n \in \mathbb{N}$*, si* $A_1, \dots, A_n$ *són numerables, aleshores* $A_1 \times \cdots \times A_n$ *és numerable.*
- *Si* X *és numerable i* $Y \subseteq X$ *és un subconjunt, aleshores* Y *és numerable. Si* Y *no és numerable i* $Y \subseteq X$*, aleshores* X *no és numerable.*
- *Si* I *és numerable i* $\{A_i\}_{i \in I}$*,* A_i *numerable, aleshores* $\bigcup_{i \in I} A_i$ *és numerable.*

Ara enunciem els axiomes.

4.4.2 Primer axioma de numerabilitat

Definició 4.4.4 (Primer axioma de numerabilitat (1AN))**.** Sigui (X, τ) un espai topològic. Direm que verifica el *primer axioma de numerabilitat* si per a cada $p \in X$, existeix β_p una base d'entorns de p numerable.

Exemple 4.4.5. Considerem l'espai topològic $(\mathbb{R}, \tau)$, on τ és la topologia usual dels intervals oberts en $\mathbb{R}$. Afirmem que aquest espai topològic satisfà el 1AN.

Per veure-ho, sigui $x \in X$. Aleshores, tot obert que contingui x ha de contenir un interval obert (a, b) de $\mathbb{R}$ contenint x, és a dir, tal que $x \in (a, b)$. Definim la base d'entorns per x com

$$\beta_x = \{B_{x_n} = (x - 1/n, x + 1/n) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

Per tant, per cada $U \in \tau$ tal que $x \in U$ tenim $x \in (a, b) \subseteq U$ i, de fet, existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in (x - 1/n, x + 1/n) \subseteq (a, b) \subseteq U$.

Notem que si $d := \min\{|x - a|, |x - b|\} > 0$, aleshores $n \in \mathbb{N}$ s'escull tal que $1/n < d$. Així β_x és una base d'entorns de x. A més, cadascuna d'aquestes bases d'entorns són numerables ja que existeix una bijecció $f : \mathbb{N} \to \beta_x$ definida com $f(n) = B_{x_n}$. Com $x \in \mathbb{R}$ és arbitrari, veiem que per cada $x \in \mathbb{R}$ es pot trobar d'aquesta forma una base d'entorns numerable i per tant $(\mathbb{R}, \tau)$ satisfà, efectivament, el primer axioma de numerabilitat.

Exemple 4.4.6. Estenem l'exemple (**??**) a un espai mètric qualsevol. Tots els espais mètrics X (vistos com a espais topològics amb la topologia usual de boles obertes) verifiquen el primer axioma de numerabilitat. En efecte, per tot $x \in X$ podem prendre la base d'entorns β_x que sigui el conjunt de boles obertes centrades a x i de radi $1/n$, és a dir,

$$\beta_x = \{B(x, 1/n) \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Amb això la demostració és anàloga.

Exemple 4.4.7. Si X és un conjunt finit, aleshores (X, τ) és un espai mètric que satisfà el primer axioma de numerabilitat. En efecte, veiem que com X és finit, posem $\#X = n$, per $n \in \mathbb{N}$. Aleshores, tenim

$$\#\tau \leq \#\mathscr{P}(X) = 2^n.$$

Per tant, el nombre d'oberts (elements de τ) és finit. Per a tot $x \in X$, si β_x és una base d'entorns de x, aleshores $\beta_x \subseteq \tau$ ja que β_x és una col·lecció d'entorns oberts que contenen x. Aleshores tot β_x és finit i també numerable i aleshores tot $x \in X$ té una base d'entorns numerable. Per tant (X, τ) satisfà el $1^r AN$.

4.4.3 Segon axioma de numerabilitat

Definició 4.4.8 (Segon axioma de numerabilitat (2AN))**.** Sigui (X, d) espai topològic. Direm que verifica el *segon axioma de numerabilitat* si existeix una base d'oberts numerable.

Exemple 4.4.9. Si X és un conjunt no buit i finit, amb $\#X = n$, aleshores l'espai topològic (X, τ) sempre satisfà (per qualsevol τ) el segon axioma de numerabilitat. En efecte, qualsevol base β de τ é sun subconjunt de τ i per tant

$$\#\beta \leq \#\tau \leq \#\mathscr{P}(X) = 2^n$$

i per tant és finita i numerable.

Exemple 4.4.10. Sigui (X, τ) un espai topològic on X és infinit i τ és la topologia nidificada:

$$\tau = \{U_1, \ldots, U_n, \ldots \ : \ U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_n \subset \cdots\}$$

Clarament podem establir una bijecció

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \tau \\ n &\longmapsto U_n \end{aligned}$$

Així, τ indueix la cadena $U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_n \subset \cdots$ i per tant és numerable (encara que no és finit) i això implica que qualsevol subconjunt $\beta \subseteq \tau$ és numerable.

4.4.4 Propietat important del segon axioma de numerabilitat

Els espais topològics que satisfan el segon axioma de numerabilitat tenen algunes propietats molt bones. Una d'elles és la següent:

Proposició 4.4.11. *Sigui (X, τ) un espai topològic que satisfà el segon axioma de numerabilitat, i sigui $A \subseteq X$ un subconjunt no numerable. Aleshores existeix un punt $a \in A$ que és punt d'acumulació d'A.*

Demostració. Sigui (X, τ) un espai topològic que satisfà el 2n AN i sigui β una base numerable de τ. Sigui A un conjunt no numerable i suposarem que tot $x \in A$ no és d'acumulació. Aleshores, per tot $x \in A$ existeix un entorn obert U_x de x pel qual no hi ha cap altre punt $d'A$ excepte x, és a dir,

$$U_x \cap A = \{x\}.$$

Com β és base de τ, per tot U_x existeix B_x tal que $x \in B_x \subseteq U_x$. Però aleshores $B_x \cap A = \{x\}$. Observem que, com β és numerable, el conjunt $\{B_x \cap A \ : \ x \in A\}$ és numerable, però la igualtat anterior i la no numerabilitat d'A implica una contradicció. $\square$

4.4.5 Relació entre el primer i el segon axioma de numerabilitat

Proposició 4.4.12. *Sigui (X, τ) un espai topològic. Si (X, τ) verifica el segon axioma de numerabilitat, aleshores verifica el primer axioma de numerabilitat. És a dir, $2AN \Rightarrow 1AN$.*

Demostració. Sigui β una base d'oberts numerable. Sigui $p \in X$, considerem

a) $\beta_p = \{U \in \beta \ : \ p \in U\} \subset \beta$, β és numerable $\Rightarrow \beta_p$ és numerable (per **??**).

b) Sigui V entorn de p, aleshores $p \in V^o$ que és un obert de τ i com β és base de τ, aleshores $V^o = \bigcup_i U_i$, amb $U_i \in \beta$. Com que $p \in \bigcup_i U_i$, $\exists i_0$ tal que $p \in U_{i_0} \subset V^o \subset V$.

$\square$

Observació 4.4.13. *En general no és cert que $1AN \Rightarrow 2AN$*

Demostració. Contraexemple: Sigui X un conjunt qualsevol no numerable dotat de la topologia discreta. Sigui β una base de X. Com que $\forall x \in X$, $\{x\}$ és un obert de X, i $\{x\}$ és necessàriament unió d'elements de β, cal que $\{x\} \in \beta$. Per tant, β és no numerable.

Conclusió: X no satisfà el 2AN, però sí que satisfà el primer, ja que la topo discreta és la definida per la distància discreta. $\square$

Exemple 4.4.14. Sigui X un conjunt no numerable amb la topologia dels complementaris finits (és a dir, $U \subseteq X$ és obert sii $U \neq \emptyset$ o $\#(X \setminus U) < \infty$). Sigui $x \in X$ un punt qualsevol i suposem que $\mathcal{E}$ és una base numerable d'entorns de x. Donat $U \subseteq \mathcal{E}$, com $x \in U^o$, se satisfà $U^o \neq \emptyset$ i, per tant, $X \setminus U^o$ és finit. Ara bé, això implica (ja que $U^o \subseteq U$) que $X \setminus U$ és finit perquè $X \setminus U \subseteq X \setminus U^o$. Aleshores, com que $\mathcal{E}$ és numerable,

$$Y = \bigcup_{U \in \mathcal{E}} (X \setminus U)$$

és numerable.

Com que X no és numerable, $X \setminus Y \neq \emptyset$. Sigui $z \in X \setminus Y$ i $V = X \setminus \{z\}$ (observem que $z \neq x$, perquè $x \in Y$), llavors V és un entorn de x. Però $\forall U \in \mathcal{E}$, $z \in U$ i per tant, $U \nsubseteq V$. Per tant, $\mathcal{E}$ no és base d'entorns.

Capítol 5

Aplicacions contínues

5.1 Aplicació contínua

5.1.1 Aplicacions contínues. Definició i exemples

Definició 5.1.1 (Aplicació contínua)**.** Sigui $f : X \to Y$ una aplicació entre espais topològics. Es diu que f és *contínua* si, i només si, per a qualsevol obert $U \subseteq Y$, $f^{-1}(U) = \{x \in X \ : \ f(x) \in U\}$ és un obert de X.

Exemple 5.1.2. Alguns exemples:

(1) Si la topologia a X (resp. Y) prové d'una distància d_X a X com espai mètric (resp. d_Y a Y) aleshores, f és contínua si i només si $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $x' \in X$ satisfà $d_X(x, x') < \delta$, aleshores $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$. (Aquesta és la definició d'aplicació contínua en un espai mètric, que és equivalent).

(2) Si τ_1, τ_2 són topologies en un conjunt X, aleshores la identitat $id_X : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ és contínua si i només si $\tau_2 \subseteq \tau_1$ (és a dir, τ_1 és igual o més fina que τ_2).

(3) Sigui $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ una aplicació qualsevol.

   (i) Si τ_Y és la topologia grollera, aleshores f és contínua.

   (ii) Si τ_X és la topologia discreta, aleshores f és contínua.

(4) Les aplicacions constants són contínues: Si $f : X \to Y$ satisfà $f(X) = \{y\}$, $y \in Y$, aleshores, per tot obert $U \subseteq Y$,

$$f^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } y \notin U \\ X & \text{si } y \in U \end{cases}$$

(5) Sigui X un espai topològic, i $A \subseteq X$ un subconjunt. Dotant A de la topologia subespai, la inclusió

$$i : A \to X$$

és contínua. En efecte, per definició de la topologia subespai, els oberts de A són de la forma $A \cap U = i^{-1}(U)$, $\forall U \subseteq X$ obert.

5.1.2 Propietats

Proposició 5.1.3. *Si $f : X \to Y$ és una aplicació entre espais topològics i β és una base a Y, aleshores f és contínua si, i només si, $\forall U \in \beta$, $f^{-1}(U) \subseteq X$ és obert.*

Demostració. ($\Rightarrow$) és immediat, ja que els elements de β són oberts de Y.

($\Leftarrow$) Sigui $U \subseteq Y$ un obert. Com que β és una base, podem escriure

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i, \quad U_i \in \beta, \ \forall i \in I$$

Llavors,

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$$

és un obert de X. □

Proposició 5.1.4. *Sigui $f : X \to Y$ una aplicació entre espais topològics. Se satisfà f és contínua si, i només si, $\forall T \subseteq Y$ tancat, $f^{-1}(T)$ és tancat en X.*

Demostració. Per a qualsevol subconjunt $A \subseteq Y$ se satisfà $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$. En efecte, els punts que van a parar a $Y \setminus A$ són precisament tots els que no van a parar a A. En particular, si $T \subseteq Y$ és tancat,

$$f^{-1}(Y \setminus T) = X \setminus f^{-1}(T)$$

això implica immediatament l'equivalència. □

Proposició 5.1.5. *Si $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ són aplicacions contínues, aleshores*

$$g \circ f : X \to Z$$

és contínua.

Demostració. Com g és contínua, $g^{-1}(V)$ és un obert que pertany a Y, per a qualsevol $V \subseteq Z$ obert. Aleshores, com f és contínua, per qualsevol U obert de Y, $f^{-1}(U)$ és un obert. En particular, $U = g^{-1}(V)$ és un obert de Y i aleshores $f^{-1}(g^{-1}(U))$ és un obert de X. Acabem de demostrar que $(g \circ f)^{-1}(U)$ és un obert de X per a qualsevol obert de Z i aleshores $g \circ f$ és contínua. □

Proposició 5.1.6. *Sigui $f : X \to Y$ una aplicació contínua.*

(i) Sigui $Z = f(X) \subseteq Y$ dotat de la topologia subespai. Aleshores, l'aplicació $f : X \to Z$ és contínua.

(ii) Sigui $A \subseteq X$ un subespai. Aleshores,

$$f_{|A} : A \to Y$$

és contínua.

Demostració. (i) Denotem per $f_Z : X \to Z$ la mateixa aplicació f, però vista com a aplicació de X a Z. Sigui $U \subseteq Z$ un obert. Aleshores, $\exists V \subseteq Y$ obert tal que $U = Z \cap V$. Llavors, $f_Z^{-1}(U) = f^{-1}(V) \subseteq X$ és obert.

(ii) Sigui $U \subseteq Y$ un obert. Aleshores, $(f_{|A})^{-1}(U) = A \cap f^{-1}(U)$ és un obert de A, perquè $f^{-1}(U)$ és un obert de X (per ser f contínua i U obert de Y).

□

Observació 5.1.7. *El recíproc de (i) és cert: Si $f : X \to Y$ és una aplicació entre espais topològics, i dotem $Z = f(X) \subseteq Y$ de la topologia subespai, aleshores escrivint $f = f_Z : X \to Z$ com abans, se satisfà que $f : X \to Y$ és contínua $\Leftrightarrow f_Z$ és contínua. La demostració és idèntica.*

Per últim escriuré una proposició que és necessària per alguns exercicis i que la demostració de la qual l'he tret de [**random**].

Proposició 5.1.8. *Sigui $f : X \to Y$ una aplicació contínua entre espais topològics. Aleshores, si $A \subseteq X$ se satisfà $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.*

Demostració. Sigui $x \in \overline{A}$. Considerem $f(x)$ i prenem un entorn obert V de $f(x)$ en Y. Aleshores, com V conté $f(x)$ i f és contínua, $f^{-1}(V)$ és un entorn obert de x. De (**??**) i (**??**) traiem que aleshores $f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$ la qual cosa implica que $V \cap f(A) \neq \emptyset$ i per tant, com V és un obert qualsevol que conté a $f(x)$, això implica que $f(x) \in \overline{f(A)}$. □

5.2 Homeomorfismes

5.2.1 Aplicacions obertes i tancades

Definició 5.2.1 (Aplicació oberta i tancada)**.** Una aplicació $f : X \to Y$ entre espais topològics es diu que és *oberta* si per a tot obert U de X, la seva imatge $f(U)$ és un obert en Y. Anàlogament, es diu que f és tancada si per a tot tancat T de X, la seva imatge $f(T)$ és un tancat en Y.

Aleshores, el concepte de continuïtat d'una aplicació entre espais topològics està més a prop d'aplicacions obertes o tancades quan $f : X \to Y$ és una bijecció. Provem dos resultats simples al següent teorema en relació a les aplicacions bijectives obertes o tancades entre espais topològics.

Proposició 5.2.2. *Siguin X i Y una aplicació bijectiva. Aleshores*

(a) Si f és obert, aleshores la inversa $f^{-1} : Y \to X$ és contínua.

(b) Si f és tancat, aleshores la inversa $f^{-1} : Y \to X$ és contínua

Demostració. Només demostraré (a) ja que (b) és anàleg. Suposem que tenim $f : X \to Y$ bijectiva i f oberta. Com f és bijectiva, la inversa $f^{-1} : Y \to X$ existeix i com f és oberta tenim que per tot obert U de X, $f(U)$ és obert en Y, és a dir, tenim que per tot obert V del domini de f^{-1}, $(f^{-1})^{-1}(V)$ és un obert, i això és $f(V)$, que sabem que és obert perquè f és oberta. Per tant f^{-1} és contínua. □

5.2.2 Homeomorfismes. Definició i exemples

Definició 5.2.3 (Homeomorfisme)**.** Sigui $f : X \to Y$ una aplicació entre espais topològics. Direm que f és un *homeomorfisme* si i només si

(i) f és contínua,

(ii) f és bijectiva,

(iii) $f^{-1} : Y \to X$ (que si és bijectiva, aleshores existeix) és contínua.

Observació 5.2.4. *(iii) no és conseqüència de (i) més (ii). Per exemple, considerem*

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi) &\longrightarrow S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\} \\ t &\longmapsto (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

Aquesta funció és contínua i bijectiva, però en canvi

$$f^{-1} : S^1 \to [0, 2\pi)$$

no és contínua. En efecte, considerem $V = [0, \pi) = (-\pi, \pi) \cap [0, 2\pi)$*, on* $(-\pi, \pi)$ *és un obert de* $\mathbb{R}$*.* V *és un obert de* $[0, 2\pi)$*. D'altra banda,*

$$(f^{-1})^{-1}(U) = f(U) = \{(x, y) \in S^1 \; : \; y > 0\} \cup \{(1, 0)\}$$

no és un obert de S^1*. Si ho fos podríem escriure* $f(U) = V \cap S^1$*, essent* $V \subseteq \mathbb{R}^2$ *un obert. En particular, podríem afirmar* $(1, 0) \in V$*. Aleshores, existiria* $\varepsilon > 0$ *tal que* $B_\varepsilon((1, 0)) \subseteq V$*. Si fos així tindríem que* $B_\varepsilon((1, 0)) \cap S^1 \subseteq f(U)$*, però hi ha punts de* $B_\varepsilon((1, 0)) \cap S^1$ *amb* $y < 0$ *per tant no pot ser.*

Definició 5.2.5 (Espais topològics homeomorfs)**.** Direm que dos espais topològics X i Y són *homeomorfs* si existeix un homeomorfisme $f : X \to Y$.

Aleshores, si dos espais topològics X i Y són homeomorfs vol dir que tindran les mateixes propietats topològiques. Per exemple, X satisfà el primer axioma de numerabilitat si i només si ho satisfà Y.

Proposició 5.2.6. *Donada una aplicació* $f : X \to Y$ *entre espais topològics, són equivalents:*

(1) f *és un homeomorfisme.*

(2) f *és contínua, bijectiva i oberta.*

(3) f *és contínua, bijectiva i tancada.*

Demostració. Demostrem la cadena d'implicacions:

- $\boxed{(1)\Rightarrow(2)}$ Cal veure que f és oberta. Sigui $U \subseteq X$ un obert. Aleshores, $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$ és obert de Y perquè al ser f homeomorfisme es compleix que f^{-1} és contínua.

- $\boxed{(2)\Rightarrow(3)}$ Cal veure que f és tancada. Sigui $T \subseteq X$ un tancat. Com que f és bijectiva, $f(X \setminus T) = Y \setminus f(T)$ és un obert que implica que $f(T)$ és un tancat. Aleshores f és tancada.

- $\boxed{(3)\Rightarrow (1)}$ Cal veure que f^{-1} és contínua. Sigui $T \subseteq X$ un tancat. Aleshores, $(f^{-1})^{-1}(T) = f(T)$ és un tancat, ja que f és tancada. Per tant f^{-1} és contínua.

□

Exemple 5.2.7. Exemples d'homeomorfismes.

(1) La identitat $id_X : X \to X$ és un homeomorfisme per a qualsevol espai topològic X.

(2) Siguin (a, b), (c, d) intervals oberts de $\mathbb{R}$. Aleshores,

$$\begin{aligned} f : (a, b) &\longrightarrow (c, d) \\ t &\longmapsto c + (t - a)\left(\tfrac{d-c}{b-a}\right) \end{aligned}$$

és un homeomorfisme. Amb això demostrem que tots els intervals oberts i acotats de $\mathbb{R}$ són homeomorfs entre sí.

(3) Considerem la funció

$$f(x) = -\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) = \frac{2x}{1-x^2}, \quad x \in (-1,1)$$

és a dir,

$$\begin{aligned} f : (-1,1) &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \tfrac{2t}{1-t^2} \end{aligned}$$

A l'interval on està definida es veu clarament que és continua. A més,

$$f'(t) = \frac{2(1-t^2) - 2t(-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{2+2t^2}{(1-t^2)^2} > 0, \quad \forall t \in (-1,1)$$

Per tant, f és injectiva. Si no ho fos, aleshores tindríem $f(t_1) = f(t_2)$ amb $t_1 < t_2$ i $t_1, t_2 \in (-1,1)$. Per tant, hauria d'existir $t \in (t_1, t_2)$ tal que $f'(t) = 0$ però hem vist que era sempre positiva la derivada.

D'altra banda, f és exhaustiva: donat $s \in \mathbb{R}$, podem trobar $s_2 > s$ tal que

$$s_2 \in f((-1,1)), \quad \text{perquè} \quad \lim_{t \to 1^-} f(t) = +\infty,$$

i també un $s_1 < s$ tal que

$$s_1 \in f((-1,1)), \quad \text{perquè} \quad \lim_{t \to -1^+} f(t) = -\infty$$

i pel teorema del valor intermig $s \in f((-1,1))$.

D'altra banda, f és oberta. És suficient veure que, per tot interval $(a,b) \subseteq (-1,1)$, $f((a,b))$ és un obert de $\mathbb{R}$. Ara bé,

$$f((a,b)) = (f(a), f(b))$$

ja que f és estrictament creixent. Per tant, és obert. Amb això, per la proposició (**??**) hem trobat que $(-1,1) \cong \mathbb{R}$.

(4) Si agafem la f de l'exemple anterior, restringida a $(0,1)$ obtenim un homeomorfisme. En efecte, $f_{|(0,1)}$ és contínua, bijectiva pel que hem vist abans anàleg i oberta perquè $(0,1) \subseteq (-1,1)$ és obert. Amb això provem que $(0,1) \cong (0,+\infty)$

Finalment $g : (0,+\infty) \to (-\infty, 0)$, $g(x) = -x$ també és homeomorfisme, per raons anàlogues als anteriors casos.

Observació 5.2.8. *Als dos últims exemples hem provat que tots els intervals de $\mathbb{R}$ oberts (siguin acotat o no) són homeomorfs.*

Exemple 5.2.9. Més exemples:

(1) $f : S^1 \setminus \{(0,1)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{2x}{1-y}$ és un homeomorfisme.

(2) $f : (0, 2\pi) \to S^1 \setminus \{(1,0)\}$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$ també és un homeomorfisme.

(3) Sigui $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$. Considerem la funció

$$\begin{aligned} \varphi : S^n \setminus \{(0,\dots,0,1)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_0, \dots, x_n) &\longmapsto \tfrac{2}{1-x_n}(x_0, \dots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

és un homeomorfisme.

(4) $S^1 \ncong \mathbb{R}$. De fet, cap esfera és homeomorfa a un espai euclidià.

(5) $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \Longrightarrow n = m$.

(6) $S^n \cong S^m \Longrightarrow n = m$.

5.2.3 Interior, clausura, etc. d'un subconjunt sota homeomorfismes

Interior

Teorema 5.2.10. *Siguin X i Y espais topològics i $f : X \to Y$ un homeomorfisme i sigui $A \subseteq X$. Aleshores $f(A^o) = (f(A))^o$.*

Demostració. Sigui $x \in f(A^o)$. Aleshores $f^{-1}(x) \in A^o$ i per tant $f^{-1}(x)$ és un punt interior de A. Llavors existeix un entorn obert U en X de $f^{-1}(x)$ tal que

$$f^{-1} \in U \subseteq A.$$

Per tant, tenim que $x \in f(U) \subseteq f(A)$. Com f és un homeomorfisme i U és obert en X, tenim que $f(U)$ és obert en Y per tant $f(U)$ és un entorn obert de x contingut en $f(A)$. Així, x és un punt interior de $f(A)$, és a dir, $x \in (f(A))^o$. Aleshores

$$f(A^o) \subseteq (f(A))^o$$

Sigui ara $x \in (f(A))^o$. Aleshores x és un punt interior de $f(A)$ i per tant existeix un entorn obert V en X de x tal que

$$x \in V \subseteq f(A)$$

Així doncs, $f^{-1}(x) \in f^{-1}(V) \subseteq A$ i com f és un homeomorfisme i V és obert en Y, tenim que $f^{-1}(V)$ és obert en X. Per tant, $f^{-1}(V)$ és un entorn obert de $f^{-1}(x)$ contingut en A i així $f^{-1}(x) \in A^o$ amb la qual cosa $x \in f(A^o)$ i obtenim

$$(f(A))^o \subseteq f(A^o).$$

Podem concloure, doncs, que $f(A^o) = (f(A))^o$. □

Clausura

Teorema 5.2.11. *Sigui X i Y dos espais topològics i $f : X \to Y$ un homeomorfisme, i sigui $A \subseteq X$. Aleshores $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.*

Demostració. Sigui $x \in f(\overline{A})$. Aleshores $f^{-1}(x) \in \overline{A}$. Per tant $f^{-1}(x) \in A \cup A'$, on A' és el conjunt de punts d'acumulació o adherents a A. Si $f^{-1}(x) \in A$, aleshores $x \in f(A)$ i $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$, per tant $x \in \overline{f(A)}$ i ja tindríem una inclusió. Si, en canvi, $f^{-1}(x) \in A'$, aleshores és un punt d'acumulació i per tant tot obert U de X tal que $f^{-1}(x) \in U$ compleix que

$$A \cap U \setminus \{f^{-1}(x)\} \neq \emptyset.$$

Així doncs, tenim,

$$f(A \cap U \setminus \{f^{-1}(x)\}) = f(A) \cap f(U) \setminus \{x\} \neq \emptyset.$$

Com f és un homeomorfisme i U un obert en X, $f(U)$ és un obert de Y. Però cada obert de Y és de la forma $f(U)$ ja que f és una bijecció. Així doncs, x és un punt d'acumulació de $f(A)$ per tant $x \in (f(A))'$. Però $(f(A))' \subseteq f(A) \cup (f(A))' = \overline{f(A)}$. Obtenim doncs que $x \in \overline{f(A)}$ que ens dona la inclusió

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

Sigui ara $x \in \overline{f(A)}$. Aleshores x és un punt d'acumulació de $f(A)$, per tant $x \in f(A) \cup (f(A))'$. Si $x \in f(A)$ aleshores $f^{-1}(x) \in A$. Però $A \subseteq A \cup A' = \overline{A}$ aleshores $f^{-1}(x) \in \overline{A}$ i obtenim $x \in f(\overline{A})$. Si, en canvi, $x \in (f(A))'$, tenim que x és un punt d'acumulació de $f(A)$ i per tot obert V de Y amb $x \in V$ tenim que

$$f(A) \cap V \setminus \{x\} \neq \emptyset.$$

Per tant

$$A \cap f^{-1}(V) \setminus \{f^{-1}(x)\} \neq \emptyset.$$

Com f és un homeomorfisme i V un obert en Y tenim que $f^{-1}(V)$ és un obert en X. Però tot obert en X és de la forma $f^{-1}(V)$ ja que f és bijectiva. Per tant $f^{-1}(x)$ és un punt d'acumulació d'A per tant $f^{-1}(x) \in A'$. Llavors $x \in f(A')$. Però $f(A') \subseteq f(A \cap A') = f(\overline{A})$. I així $x \in f(\overline{A})$ i obtenim

$$\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$$

que ens proporciona la igualtat que buscàvem. □

El conjunt de punts d'acumulació

A la demostració de (??) ja hem demostrat que la imatge del conjunt de punts d'acumulació és igual al conjunt de punts d'acumulació de la imatge. És a dir, que si $f : X \to Y$ és un homeomorfisme entre dos espais topològics i $A \subseteq X$, aleshores $f(A') = (f(A))'$.

Frontera

Teorema 5.2.12. *Siguin X i Y dos espais topològics, $f : X \to Y$ un homeomorfisme i $A \subseteq X$. Aleshores $f(\partial A) = \partial f(A)$.*

Demostració. Sigui $x \in f(\partial A)$. Aleshores $f^{-1}(x) \in \partial A$, és a dir, $f^{-1}(x) \in \overline{A} \setminus A^o$. I així

$$x \in f(\overline{A}) \setminus f(A^o)$$

Pels teoremes que hem vist ara a (??) i (??) i com f és un homeomorfisme tenim que

$$f(\overline{A}) = \overline{f(A)} \quad \text{i} f(A^o) = (f(A))^o.$$

Per tant tenim que $x \in \overline{f(A)} \setminus (f(A))^o$ i per tant

$$f(\partial A) \subseteq \partial f(A)$$

Sigui ara $x \in \partial f(A)$. Aleshores

$$x \in \overline{f(A)} \setminus (f(A))^o$$

i, de nou, per (??) i (??) obtenim que $x \in f(\overline{A}) \setminus f(A^o)$ i per tant $x \in f(\partial A)$, amb la qual cosa

$$\partial f(A) = f(\partial A)$$

i obtenim la igualtat. □

5.2.4 El primer i segon axioma de numerabilitat sota homeomorfismes

Teorema 5.2.13. *Siguin X i Y dos espais topològics homeomorfs per $f : X \to Y$. Aleshores, si X satisfà el primer axioma de numerabilitat, també el satisfà Y.*

Demostració. Sigui X un espai topològic que satisfà el primer axioma de numerabilitat. Aleshores, tot $x \in X$ té una base d'entorns numerable, sigui β_x. Per definició, cada base d'entorns numerable β_x és una col·lecció d'entorns oberts de x tals que per tot entorn obert U en X de x tenim que existeix $B \in \beta_x$ tal que $x \in B \subseteq U$. Ara, com $B \in \beta_x$ és un obert en X i $x \in B$, aleshores $f(x) \in f(B)$ per tot $B \in \beta_x$ i com f és un homeomorfisme, veiem que $f(B)$ és obert en Y per tot $B \in \beta_x$ contenint $f(x)$, és a dir, un entorn obert de $f(x)$. A més, com f és bijectiva, tenim que per tot $y \in Y$, $y = f(x)$ per algun $x \in X$ i per tant considerem el següent conjunt d'entorns oberts de $y = f(x)$:

$$\beta_y = \{f(B) \ : \ B \in \beta_x\}$$

Afirmem doncs que β_y és una base d'entorns numerable per cada $y = f(x)$ en Y. En efecte, β_y és numerable, per tant queda veure només que és una base d'entorns. Suposem que β_y no és una base d'entorns de $y = f(x)$. Per tant, existeix un entorn obert V de $y = f(x)$ en Y tal que per tot $f(B) \in \beta_y$ tenim que $f(x) \in f(B) \not\subseteq V$. Però aleshores $x \in B \not\subseteq f^{-1}(V)$ per tot $B \in \beta_x$. En qualsevol cas, com V és un entorn obert de $y = f(x)$ tenim que $y = f(x) \in V$ i $f^{-1}(y) = x \in f^{-1}(V)$, per tant $f^{-1}(V)$ és un entorn obert de x tal que no existeix cap element $B \in \beta_x$ que compleixi $x \in B \subseteq f^{-1}(V)$. Però això contradiu el fet que β_x és una base d'entorns de x. Aleshores no pot ser que β_y no sigui una base d'entorns de y i per tant ho és. □

Teorema 5.2.14. *Siguin X i Y dos espais topològics i $f : X \to Y$ un homeomorfisme. Aleshores si X satisfà el segon axioma de numerabilitat, Y també el satisfà.*

Demostració. Sigui X un espai que satisfà el segon axioma de numerabilitat. Aleshores existeix una base numerable β a la topologia τ_X definida a X. Aleshores per tot obert U en X existeix $\beta^* \subseteq \beta$ tal que

$$U = \bigcup_{B \in \beta^*} B.$$

Aleshores

$$f(U) = f\left(\bigcup_{B \in \beta^*} B\right) = \bigcup_{B \in \beta^*} f(B)$$

Com f és un homeomorfisme tenim que $f(U)$ és obert en Y. Afirmem que el següent conjunt és una base numerable de Y:

$$\overline{\beta} = \{f(B) \ : \ B \in \beta\}.$$

Clarament $\overline{\beta}$ és numerable ja que β és numerable. Només queda veure que tot obert de Y s'expressa com a unió d'oberts en $\overline{\beta}$. Però és que això ja ho hem dit ja que, com f és bijectiva, tots els oberts de Y són de la forma $f(U)$, on U és obert de X. I abans ja hem vist que

$$f(U) = f\left(\bigcup_{B \in \beta^*} B\right) = \bigcup_{B \in \beta^*} f(B)$$

i això demostra que tot obert de Y s'expressa com a unió d'elements de $\overline{\beta}$ i així $\overline{\beta}$ és una base de τ_Y numerable. □

5.3 Successions a espais topològics

5.3.1 Tancats, continuïtat i convergència

Definició 5.3.1 (Successió convergent)**.** Una successió $(x_n)_n$ de punts d'un espai topològic es diu que és una successió convergent, si existeix un punt $x \in X$ tal que tot entorn U de x conté tots els termes de la successió a partir d'un lloc, és a dir, a partir d'una certa $n_0 \in \mathbb{N}$. És a dir, existeix una $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$, $x_n \in U$. x es diu punt límit d'una successió.

Exemple 5.3.2. Una successió pot tenir molts límits:

- Topologia grollera: tota successió convergeix a tots els punts.
- Topologia discreta: una successió convergeix a un punt x si, i només si, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,:\, \forall n \geq n_0$, $x_n = x$.
- En el cas d'espais amb topologia euclidiana, les successions tenen, com a màxim, un únic límit.

Proposició 5.3.3. *Si un subconjunt $A \subseteq X$ és tancat i una successió $(a_n)_n$ de punts de A convergeix a un límit $x \in X$, aleshores $x \in A$.*

Demostració. Si $(a_n)_n$, amb $a_n \in A$ $\forall n$, convergeix a x, tot entorn de x conté punts de la successió (a partir d'un cert n_0) i per tant, conté punts d'A. Això vol dir que $x \in \overline{A} = A$ ja que A és tancat. □

Proposició 5.3.4. *Si $f : X \to Y$ és contínua i $(x_n)_n$ és una successió de X convergent a un punt x, aleshores $(f(x_n))_n$ és una successió convergent al punt $f(x)$.*

Demostració. Suposem que $f : X \to Y$ és contínua i que $(x_n)_n$ és convergent a $x \in X$. Per a tot entorn obert $U \ni f(x)$ la antiimatge $f^{-1}(U)$ és un entorn obert de x. Com que x és límit de $(x_n)_n$, existirà $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in f^{-1}(U)$ $\forall n \geq n_0$. D'on resulta que $f(x_n) \in U$ $\forall n \geq n_0$ i això ens diu que la successió $(f(x_n))_n$. □

5.3.2 Convergència uniforme

Definició 5.3.5 (Convergència de funcions)**.** Es pot definir la convergència d'una successió de funcions $f_n : X \to Y$ entre espais topològics a una certa funció $f : X \to Y$ de la següent forma: demanant que $\forall x \in X$, la successió $f_n(x)$ tingui límit $f(x)$.

Observació 5.3.6. *Amb aquesta definició la continuïtat de les funcions f_n no assegura la continuïtat de f.*

Exemple 5.3.7. La successió de les aplicacions contínues $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \leq 0 \\ nx, & \text{si} \quad x \in [0, 1/n] \\ 1, & \text{si} \quad x \geq 1/n \end{cases}$$

convergeix a l'aplicació $f(x) = 0$, si $x \leq 0$, $f(x) = 1$, si $x > 0$ que no és contínua.

Capítol 6

Construcció d'espais topològics

6.1 Topologies inicials i finals

6.1.1 Topologia inicial

En el capítol (**??**) hem vist com definir una topologia en un subconjunt Y d'un espai topològic X. És a dir, induïm una topologia en Y mitjançant l'aplicació $Y \hookrightarrow X$. Canviant la inclusió per una aplicació arbitrària $f : Y \to X$ es defineix la topologia

$$\tau_Y = \{f^{-1}(U) \ : \ U \text{ obert de } X\}.$$

Aquesta topologia és la més grollera sobre Y que fa contínua l'aplicació f. Generalitzem al cas de n aplicacions.

$$f_i : Y \to X_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

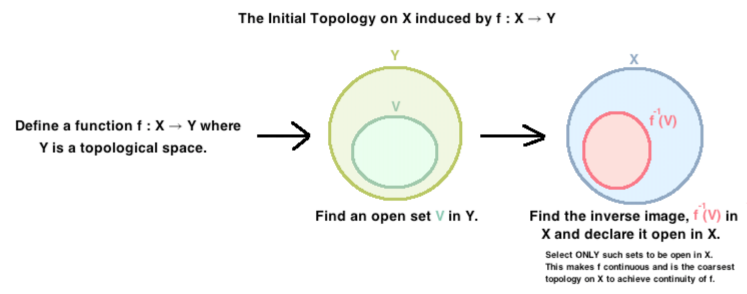
on $X_1, \ldots, X_n$ són espais topològics.

Així doncs, donant una definició d'aquesta topologia, la topologia inicial, podem veure que la topologia subespai és un cas particular d'aquesta topologia. Més endavant dedico un apartat sencer a explicar la topologia subespai des d'aquest punt de vista.

La qüestió és que tenim un espai topològic Y i un conjunt X i volem fer que la funció $f : X \to Y$ sigui contínua i construir un espai topològic a X induït per f (tal que sigui contínua).

Definició 6.1.1 (Topologia inicial)**.** Sigui X un conjunt i Y un espai topològic. La *topologia inicial* induïda per f en X és la topologia més grollera a X que fa l'aplicació $f : X \to Y$ contínua. En general, sigui X un conjunt i $\{Y_i \ : \ i \in I\}$ una col·lecció d'espais topològics. Aleshores la topologia inicial induïda per $\{f_i \ : \ i \in I\}$ és la topologia més grollera a X que fa cada aplicació $f_i : X \to Y_i$ contínua.

Aleshores, prenem un conjunt X i un espai topològic Y. Considerem $f : X \to Y$ i considerem el conjunt de tots els oberts de Y. Aleshores, per a que la funció f sigui contínua s'ha de complir que la antiimatge de tots els oberts de Y sigui obert de X. Per això cal dotar X d'una topologia. Si el dotem de la topologia inicial, aleshores el conjunt d'oberts de X és justament això: per a cada obert V de Y tenim $f^{-1}(V)$ com obert de X. Aquest seran, doncs, els únics oberts de X amb la topologia inicial. No hi posarem més oberts perquè volem que sigui la més grollera possible.



Però necessitarem alguna cosa més a part d'una definició com la que hem donat per poder jugar amb aquestes topologies. El següent teorema ens donarà una subbase per a aquesta topologia. Cal destacar que a la classe de teoria de topologia es va donar aquest teorema com la definició de la topologia inicial.

Teorema 6.1.2. *Sigui X un conjunt i $\{(Y_i, \tau_i) \ : \ i \in I\}$ una col·lecció d'espais topològics, i $\{f_i \ : \ i \in I\}$ una col·lecció d'aplicacions. Aleshores la topologia inicial induïda per $\{f_i \ : \ i \in I\}$ en X té la subbase*

$$S = \{f_i^{-1}(U) \ : \ U \in \tau_i\}$$

Alternativament, podem dir que té com a base

$$\beta_X = \{f_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(U_n) \ : \ U_i \text{ obert de } Y_i, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

Demostració. Per veure que la topologia inicial induïda per $\{f_i \ : \ i \in I\}$ en X té la subbase S hem de provar que la topologia τ generada per aquesta subbase és igual a la inicial induïda en X. Per fer això, hem de provar que τ és la topologia que fa cada aplicació $f_i : X \to Y_i$ continua, $\forall i \in I$, i que aquesta τ és la més grollera que ho fa.

- Clarament, la topologia τ generada per la subbase S, o per la base β (que està formada per interseccions finites d'elements de S) fa totes les $f_i : X \to Y_i$ perquè $\forall U \in \tau_i$ tenim $f_i^{-1}(U) \in \tau$ (és obert en X respecte la topologia τ generada per S). Així, $\forall i \in I$, f_i és contínua.

- Ara hem de veure que τ és la topologia més grollera que compleix això. Suposem que τ' és una altra topologia que fa que $f_i : X \to Y_i$ sigui continua per tot $i \in I$. Aleshores, $f_i^{-1}(U) \in \tau'$ per tot $i \in I$. Però com τ' és una topologia en X, compleix que totes les interseccions finites de τ' és de τ', per la definició (**??**) de topologia, és a dir, que les interseccions finites dels $f_i^{-1}(U_i)$ estan en τ'. Així, $\tau \subseteq \tau'$.

Per tant, qualsevol possible τ' que també compleix que fa contínues les f_i per tot $i \in I$, ha de contenir τ. Així que la topologia inicial τ induïda per $\{f_i \ : \ i \in I\}$ en X té subbase $S = \{f_i^{-1}(U) \ : \ U \in \tau_i\}$. □

Exemple 6.1.3. Si X és un espai topològic i $Y \subseteq X$ és un subconjunt, la topologia subespai de Y coincideix amb la topologia inicial respecte la inclusió

$$Y \overset{\iota}{\hookrightarrow} X$$

En efecte, si $U \subseteq X$ és un obert, aleshores $Y \cap U = \iota^{-1}(U)$.

Proposició 6.1.4. *Suposem que Y està dotat de la topologia inicial respecte a $f_j : Y \to X_j$, $j = 1, \ldots, n$. Sigui Z un espai topològic i $g : Z \to Y$ una aplicació. Aleshores, g és contínua, si i només si, $f_1 \circ g, \ldots, f_n \circ g$ són contínues.*

Demostració. Doble implicació:

($\Rightarrow$) És conseqüència del fet que la composició d'aplicacions contínues és contínua (**??**).

($\Leftarrow$) Per veure que g és contínua podem comprovar la continuïtat de g utilitzant els oberts de la base donada a l'observació anterior. És suficient doncs veure que $\forall U \in \beta_Y$, $g^{-1}(U)$ és obert de Z. Ara bé,

$$g^{-1}(f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap f_{i_n}^{-1}(U_{i_n})) = (f_{i_1} \circ g)^{-1}(U_{i_1}) \cap \circ \cap (f_{i_n} \circ g)^{-1}(U_{i_n}).$$

$\square$

6.1.2 Topologia final

A l'apartat anterior hem vist que donat un conjunt X, un espai topològic Y i una aplicació $f : X \to Y$, aleshores la topologia inicial induïda per f a X és la topologia més grollera que fa f contínua. Més en general, si tenim un conjunt X, una col·lecció d'espais topològics $\{Y_i\}_{i\in I}$ i una col·lecció d'aplicacions $\{f_i\}_{i\in I}$ aleshores la topologia inicial induïda per les f_i a X és la més grollera que fa $f_i : X \to Y_i$ sigui contínua, $\forall i \in I$. També vam veure que la topologia inicial induïda per $\{f_i\}_{i\in I}$ a X tenia com a subbase

$$S = \{f_i^{-1}(U) \ : \ U \in \tau_i\}$$

i, que per tant tenia com a base

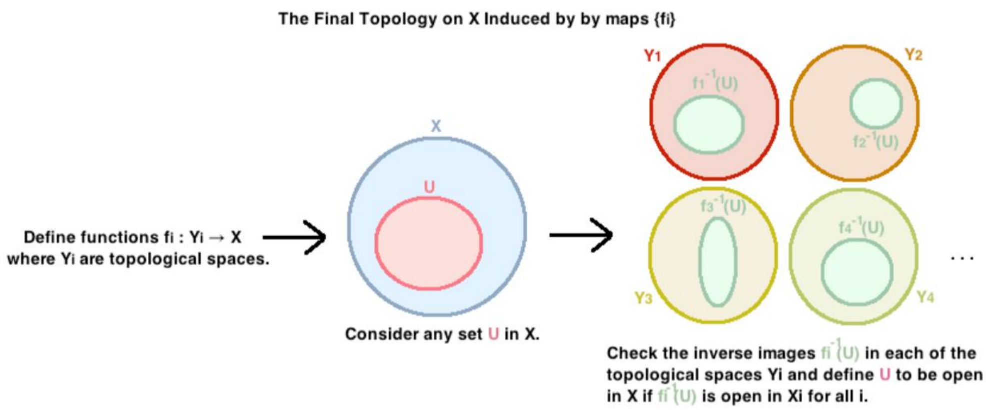
$$\beta_X = \{f_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(U_n) \ : \ U_1, \ldots, U_n \text{ oberts de } Y_1, \ldots, Y_n \text{ resp.}\}$$

A continuació, veurem una topologia bastant anàloga anomenada topologia final.

Definició 6.1.5 (Topologia final)**.** Sigui X un conjunt i $\{Y_i \ : \ i \in I\}$ una família d'espais topològics i $\{f_i : Y_i \to X \ : \ i \in I\}$ una col·lecció d'aplicacions. La *topologia final induïda per* $\{f_i\}_{i\in I}$ en X és la topologia més fina τ en X que fa que $f_i : Y_i \to X$ sigui contínua, $\forall i \in I$.

És important emfatitzar que la topologia final induïda per $\{f_i\}_{i\in I}$ és la MÉS FINA que fa que $f_i : Y_i \to X$ sigui contínua $\forall i \in I$.

Per construir la topologia final a X induïda per les aplicacions $f_i : Y_i \to X$, considerem qualsevol subconjunt U de X. Prenem la antiimatge de U respecte cadascuna de les f_i, és a dir, $f_i^{-1}(U)$. Si $f_i^{-1}(U)$ és obert en Y_i en cada $i \in I$, aleshores declarem U com a obert de X:



El següent teorema ens donarà una forma explícita per a la topologia final induïda per $\{f_i\}_{i\in I}$ en X.

Teorema 6.1.6. *Sigui X un conjunt, $\{(Y_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una col·lecció d'espais topològics i $\{f_i : Y_i \to X\}_{i\in I}$ una col·lecció d'aplicacions. Aleshores, la topologia final induïda per $\{f_i\}_i$ a X ve donada per $\tau = \{U \subseteq X : f_i^{-1}(U) \in \tau_i,\ \forall i \in I\}$.*

Demostració. Per provar que τ és la topologia final induïda per $\{f_i\}_{i\in I}$ en X hem de veure que τ fa contínua $f_i : Y_i \to X$, per tot $i \in I$, i que qualsevol altra topologia τ' que també ho faci sigui més grollera que τ.

- Clarament, $f_i : Y_i \to X$ és contínua amb aquesta topologia ja que per tot $U \in \tau$ tenim que $f_i^{-1}(U)$ és obert $\forall i \in I$. Així que f_i és contínua $\forall i \in I$.

- Ara suposem que τ' és una altra topologia que ho compleix. Si $\tau \subsetneq \tau'$, existeix $V \in \tau'$ tal que $v \notin \tau$. Aleshores, si $V \in \tau'$, V és obert de X, però ara $f_i^{-1}(V)$ no pot ser obert de Y_i per tot $i \in I$, perquè sinó $V \in \tau$ per com està definida τ. Això implica que f_i no serà contínua, per algun i, i aleshores τ' no satisfà ser la topologia que fa totes les f_i contínues. Per tant, $\tau \not\subseteq \tau'$ i així $\tau' \subsetneq \tau$.

Així que qualsevol topologia τ' en X que també fa $f_i : Y_i \to X$ contínua per tot $i \in I$ ha de ser més grollera que τ, per tant τ és la topologia final. □

Proposició 6.1.7. *Amb les mateixes hipòtesis i la mateixa notació, sigui $g : X \to Z$ una aplicació entre espais topològics. Aleshores g és contínua si i només si $g \circ f_i$ són contínues per a tot $i = 1, \dots, n$.*

Demostració. Si g és contínua, $g \circ f_i$ és composició d'aplicacions contínues. Recíprocament, sigui U un obert de Z. Per definició de topologia final, $g^{-1}(U)$ és obert si, i només si, $f_i^{-1}(g^{-1}(U))$ és obert per a tot i, la qual cosa es verifica per la continuïtat de les aplicacions $g \circ f_i$. □

6.1.3 Identificació

Definició 6.1.8 (Identificació)**.** Una *identificació* és una aplicació contínua i exhaustiva $f : X \to Y$ tal que Y té la topologia final respecte de f.

Proposició 6.1.9. *Sigui $f : X \to Y$ una aplicació contínua, exhaustiva i oberta (respectivament tancada). Aleshores f és una identificació.*

Demostració. Només cal veure que Y té la topologia final, és a dir, que si $U \subset Y$ verifica que $f^{-1}(U)$ és un obert, aleshores U és obert. Suposem que f és oberta, per l'exhaustivitat $I = f(f^{-1}(U))$, i, per tant, U és obert. Suposem ara que f és tancada, novament per ser exhaustiva tenim que $f(X \setminus f^{-1}(U)) = Y \setminus U$. Així, $Y \setminus U$ és tancat i, per tant, U és obert. □

Exemple 6.1.10. $X = [0, 1]$, $Y = S^1$, $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. L'aplicació f és contínua i exhaustiva, i tancada. Per la proposició és una identificació.

Més endavant veurem exemples d'identificacions d'espais topològics en el conjunt de les seves classes per una relació d'equivalència definida a aquest espai.

6.2 Topologia subespai

Recordem de la topologia inicial que si X és un conjunt, $\{Y_i\}_{i\in I}$ una col·lecció d'espais topològics i $\{f_i\}_{i\in I}$ una col·lecció d'aplicacions, aleshores la topologia inicial induïda per $\{f_i\}_{i\in I}$ en X és la topologia τ més grollera que fa $f_i : X \to Y_i$ contínua per tot $i \in I$.

A continuació veurem un tipus molt important de topologia: La topologia subespai. Tot i que ja es va donar aquesta definició a (**??**) la torno a escriure perquè ara, al context en el que estem, crec que s'entén millor, sabent tot el que sabem de la topologia inicial. També veurem més exemples i aplicacions que no s'han vist i que a classe no s'han donat.

6.2.1 Definició alternativa de subespai topològic

Definició 6.2.1 (Topologia subespai)**.** Sigui (X, τ) un espai topològic i $A \subseteq X$. La *topologia subespai* en A és la topologia donada per $\tau_A = \{A \cap U \ : \ U \in \tau\}$.

Però amb aquesta definició no queda del tot clar si τ_A és realment la topologia d'un espai topològic (A, τ_A). Al proper teorema veurem que la topologia subespai τ_A és, de fet, una topologia en A.

Teorema 6.2.2. *Sigui (X, τ) un espai topològic i $A \subseteq X$. Aleshores, $\tau_A = \{U \cap A \ : \ U \in \tau\}$ és una topologia en A.*

Demostració. Sigui A un subconjunt de l'espai topològic X i considerem la inclusió

$$\iota : A \to X$$

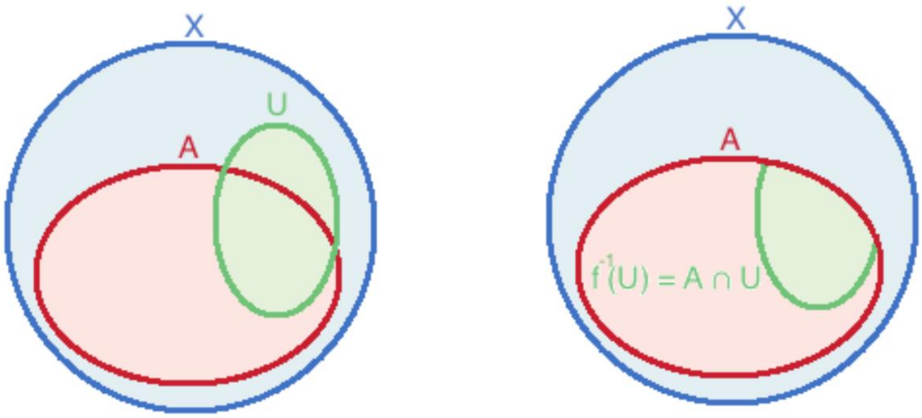
definida per $\iota(a) = a$, $\forall a \in A$. La topologia inicial induïda en A per ι és la topologia més grollera que fa que $\iota : A \to X$ sigui contínua. aquesta topologia té com a subbase

$$S = \{\iota^{-1}(U) \ : \ U \in \tau\},$$

pel que vam veure a (**??**). Com U és obert de X i $A \subseteq X$, tenim que

$$\iota^{-1}(U) = A \cap U \quad \forall U \in \tau.$$

Per tant, $\tau_A = \{A \cap U \ : \ U \in \tau\}$ és a dir, la topologia subespai τ_A és de fet la topologia inicial induïda per ι.



If A is a subset of X then the subspace topology on A is the initial topology induced by the inclusion map i(a) = a.

□

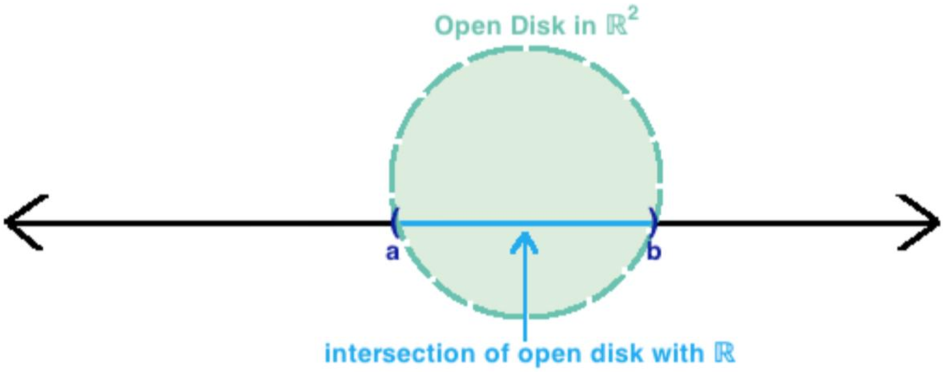
Definició 6.2.3 (Subespai topològic)**.** Sigui (X, τ) un espai topològic i $A \subseteq X$ un subconjunt dotat de la topologia τ_A subespai. Aleshores, (A, τ_A) és un espai topològic que anomenarem *subespai topològic* de X. Normalment direm que A és subespai topològic de X, i haurem d'entendre que A està dotat de la topologia subespai.

Proposició 6.2.4 (Transitivitat de subespais)**.** *Sigui (X, τ) un espai topològic. Si Y és un subespai topològic de X i Z és un subespai topològic de Y, aleshores Z és un subespai topològic de X.*

Exemple 6.2.5. Considerem l'espai topològic $(\mathbb{R}^2, \tau_e)$, on τ_e és la topologia usual dels discs oberts de $\mathbb{R}^2$. Determinem quina és la topologia subespai per al subconjunt

$$A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

Notem que A és simplement la recta real $\mathbb{R}$. Geomètricament, podem veure que la topologia subespai τ_A serà simplement la topologia usual a $\mathbb{R}$. Per veure això, considerem qualsevol obert a $\mathbb{R}$ amb la topologia usual d'intervals oberts a $\mathbb{R}$. Aleshores, qualsevol interval obert $(a, b) \subset \mathbb{R}$ pot ser construit prenent un disc obert de $\mathbb{R}^2$ que intersequi amb la recta $y = 0$ als punts $(a, 0), (b, 0)$:



Com que tot obert de $\mathbb{R}$ és una unió d'aquests intervals oberts, podem veure que la topologia subespai és simplement la topologia usual a $\mathbb{R}$.

Exemple 6.2.6. Considerem l'espai topològic $(\mathbb{R}, \tau)$, on τ és la topologia usual dels intervals oberts a $\mathbb{R}$. Hem de veure que la topologia subespai en $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ és la topologia discreta en $\mathbb{Z}$.

En efecte, sigui $x \in \mathbb{Z}$. Aleshores, l'interval obert $(x - 1/2, x + 1/2) \cap \mathbb{Z} = \{x\}$. Aleshores tot singletó $\{x\}$ està contingut a la topologia subespai en $\mathbb{Z}$. Però això implica que $\tau_{\mathbb{Z}}$ és la topologia discreta a $\mathbb{Z}$.

Exemple 6.2.7. Sigui X un conjunt dotat de la topologia discreta τ i sigui $A \subseteq X$ un subconjunt. El subespai topològic (A, τ_A) també té la topologia discreta (en A).

En efecte, sigui $A \subseteq X$. Per veure que A té la topologia discreta en A, el que hem de veure és que tot subconjunt d'A és obert en A. Sigui $U \subseteq A$ un obert de A. Aleshores $U \subseteq X$. Per tant, U és obert de X. A més, $A \cap U = U$ és obert de A, per tant τ_A és la topologia discreta en A.

Exemple 6.2.8. Sigui (X, τ) un espai topològic i $A \subseteq X$. Aleshores $\tau_A \subseteq \tau \Leftrightarrow A \in \tau$.

Suposem que $\tau_A \subseteq \tau$. Com A és un obert en A, $A \in \tau_A \Rightarrow A \in \tau$.

Recíprocament, suposem que $A \in \tau$. Sigui $U \in \tau_A$. Aleshores U és obert de A. Llavors existeix un obert $V \subset X$ tal que $U = A \cap V$. Però A és obert en X ja que $A \in \tau$, així que $A \cap V = U$ és obert en X (la intersecció finita d'oberts és obert). Per tant, $U \in \tau$, ergo $\tau_A \subseteq \tau$.

6.2.2 Oberts i tancats en subespais topològics

Recordem que si (X, τ) és un espai topològic i $A \subseteq X$, aleshores podem definir una topologia τ_A en A anomenada la topologia subespai en A explicitada com

$$\tau_A = \{A \cap U \ : \ U \in \tau\}.$$

Junts, (A, τ_A) formen el que anomenem subespai topològic. Notem que, per la definició, un subconjunt $V \subseteq A$ és obert en A amb la topologia subespai τ_A si, i només si, existeix un obert U en X tal que $V = A \cap U$. Aleshores, que se'n pot dir dels tancats d'A? El següent teorema ens dona exactament el que esperem.

Teorema 6.2.9. *Sigui (X, τ) un espai topològic i sigui $A \subseteq X$. Un subconjunt $C \subseteq A$ és tancat en A si i només si existeix un tancat D de X tal que $C = A \cap D$.*

Demostració. $(\Rightarrow)$ Sigui $C \subseteq A$ un tancat d'A. Aleshores $A \setminus C$ és obert en A. Per tant, existeix un obert U en X tal que $A \setminus C = A \cap U$. Agafant el complementari a ambdues bandes respecte A tenim

$$A \setminus (A \setminus C) = A \setminus (A \cap U) \Longrightarrow C = A \cap U^c$$

Així que sigui $D = U^c$ i obtenim el que volíem: D és tancat a X i $C = A \cap D$.

$(\Leftarrow)$ Suposem que existeix D tancat de X tal que $C = A \cap D$. Aleshores

$$A \setminus C = A \setminus (A \cap D) \Longrightarrow A \setminus C = A \cap D^c$$

on D^c és un obert en X, aleshores $A \cap D^c$ és un obert en A. En altres paraules, $A \setminus C$ és obert en A, així que C és tancat en A.

□

6.2.3 Propietats hereditàries de subespais topològics

Recordem que si tenim un espai topològic (X, τ) i $A \subseteq X$ un subconjunt, aleshores la topologia subespai τ_A ve donada com la col·lecció de les interseccions de tots els oberts de X amb A, és a dir,

$$\tau_A = \{U \cap A \ : \ U \in \tau\}.$$

Hem provat que τ_A és realment una topologia i que és la topologia inicial induïda per l'aplicació inclusió

$$\begin{aligned} \iota : A &\to X \\ a &\mapsto \iota(a) = a \end{aligned}$$

(la topologia més grollera que fa ι contínua). Ara mirarem de classificar propietats de (X, τ) que es "transmeten" o es "passen" a (A, τ_A).

Definició 6.2.10 (Propietat hereditària)**.** Sigui (X, τ) un espai topològic. Una propietat de (X, τ) es diu *hereditària* si per tot $A \subseteq X$ es compleix que el subespai topològic (A, τ_A) també satisfà aquesta propietat. Una propietat de X que no sigui hereditària es dirà *no-hereditària*.

Herència del primer axioma de numerabilitat

Provarem a continuació que el primer axioma de numerabilitat és hereditari.

Teorema 6.2.11. *El primer axioma de numerabilitat és hereditari. És a dir, si (X,τ) és un espai topològic que satisfà el primer axioma de numerabilitat i $A \subseteq X$ és un subconjunt, aleshores el subespai topològic (A,τ_A) també satisfà el primer axioma de numerabilitat.*

Demostració. Sigui (X,τ) un espai topològic que satisfà el 1r AN. Sigui $A \subseteq X$. Com X satisfà el 1r AN tenim que $\forall a \in A \subset X$ ($\Rightarrow a \in X$) té una base d'entorns numerable. Sigui β_a. Per a cada $a \in A$ afirmem que la següent col·lecció és una base d'entorns numerable d'$a \in A$ en A:

$$\tilde{\beta_a} = \{A \cap B \,:\, B \in \beta_a\}$$

Clarament és un conjunt numerable ja que β_a és un conjunt numerable. Recordem que una col·lecció de conjunts és una base d'entorns d'$a \in A$ si per tot obert d'A existeix un obert V en X tal que $a \in U = A \cap V$. Com V és obert en X i β_a és una base d'entorns d'a en X tenim que existeix un conjunt $B \in \beta_a$ tal que $a \in B \subseteq V$. Finalment veiem que

$$a \in A \cap B \subseteq A \cap V = U.$$

El conjunt $A \cap B$ és un obert en A (amb la topologia subespai τ_A), així que, tot obert U en A i per tot $a \in U$ existeix un element $A \cap B \in \beta_a$ tal que $a \in A \cap B \subseteq U$, així que $\tilde{\beta_a}$ és una base d'entorns de a en A. □

Herència del segon axioma de numerabilitat

Veurem ara que el segon axioma de numerabilitat també és hereditari.

Teorema 6.2.12. *El segon axioma de numerabilitat és hereditari. És a dir, si (X,τ) és un espai topològic que satisfà el segon axioma de numerabilitat i $A \subseteq X$ és un subconjunt, aleshores el subespai topològic (A,τ_A) també satisfà el segon axioma de numerabilitat.*

Demostració. Sigui (X,τ) un espai topològic que satisfà el 2n AN i $A \subseteq X$. Aleshores existeix una base numerable β de X. Afirmo que la següent col·lecció és una base numerable de A:

$$\beta_A = \{A \cap B \,:\, B \in \beta\}$$

Clarament β_A és numerable ja que β és numerable. Només queda veure que és una base de τ_A en A. Per veure això hem de provar que tot obert d'A (respecte la topologia subespai τ_A) és unió d'una subcol·lecció de conjunts de β_A. Sigui $U \subseteq A$ un obert de A. Com U és obert en A i $A \subseteq X$ tenim que existeix un obert V en X tal que $U = A \cap V$. Com V és obert en X i β és base de X, tenim que existeix $\beta^* \subseteq \beta$ tal que

$$V = \bigcup_{B \in \beta^*} B \Longrightarrow U = A \cap \left(\bigcup_{B \in \beta^*} B \right) = \bigcup_{B \in \beta^*} (A \cap B)$$

Ara, $A \cap B \in \tau_A$ per cada $B \in \beta^* \subset \beta$. Per tant, tot obert U de A pot ser expressat com a unió d'elements de β_A i aleshores β_A és una base de τ_A en A, com volíem veure. □

6.3 Topologia suma

6.3.1 Suma topològica d'espais topològics

Estudiarem ara un espai topològic que podem crear a partir d'altres espais topològics.

Definició 6.3.1 (Suma topològica)**.** Sigui $\{(X_i, \tau_i) \,:\, i \in I\}$ una col·lecció d'espais topològics disjunts. La *suma topològica* (o espai topològic dotat de la topologia suma, o espai topològic suma), denotat

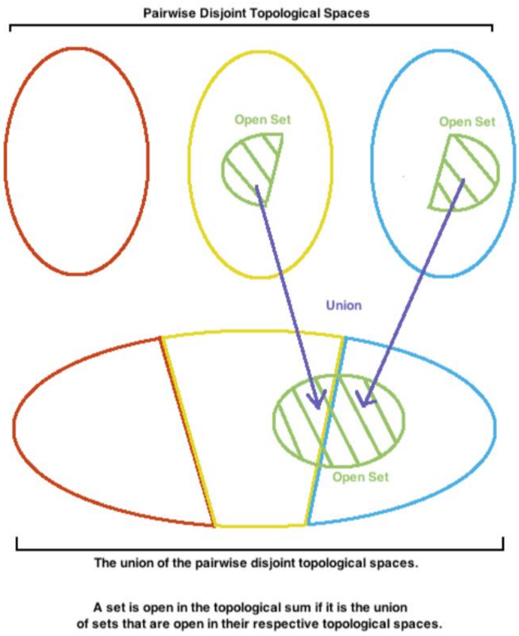
$$\bigoplus_{i \in I} X_i,$$

és l'espai topològic amb el conjunt

$$\bigcup_{i \in I} X_i$$

i la topologia τ donada per la base

$$\beta = \{U \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i \,:\, U \in \tau_i, \text{ per algun } i \in I\}.$$



Teorema 6.3.2. *Sigui $\{(X_i, \tau_i) \,:\, i \in I\}$ una col·lecció d'espais topològics disjunts. Aleshores, un conjunt V és obert a l'espai topològic suma $\bigoplus_{i \in I} X_i$ si, i només si, $U \cap X_i$ és obert de τ_i, per a cada $i \in I$.*

Demostració. Suposem que V és obert en l'espai topològic suma $\bigoplus_{i \in I}$. Per la definició, tenim que la base de la topologia en $\bigoplus_{i \in I} X_i$ ve donada per

$$\beta = \left\{ U \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i \,:\, U \in \tau_i, \text{ per algun } i \in I \right\}.$$

Aleshores, per algun $\beta^* \subseteq \beta$, tenim que

$$V = \bigcup_{B \in \beta^*} B.$$

Cada $B \in \beta^*$ és tal que $B \in \tau_i$ per cert $i \in I$. Aleshores $V \cap X_i$ és o bé una unió arbitrària d'oberts de X_i, que és un obert en X_i, o bé és el buit (que també és obert). Per tant $V \cap X_i$ és obert per tot $i \in I$.

Recíprocament, suposem que $V \cap X_i$ és obert per tot $i \in I$. Aleshores, com els espais topològics X_i, $i \in I$ són disjunts, tenim

$$V = V \cap \bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} (V \cap X_i)$$

Cadascun dels $V \cap X_i$ està a β, aleshores com V és una unió arbitrària d'elements de la seva base (que són oberts) tenim que V és obert en l'espai topològic suma $\bigoplus_{i \in I} X_i$. $\square$

6.4 Topologia producte

6.4.1 Topologia producte

Siguin (X, τ_X) i (Y, τ_Y) dos espais topològics. Volem definir una topologia sobre el producte cartesià $X \times Y$. És natural demanar que, amb aquesta topologia, les projeccions

$$p_X : X \times Y \to X, \qquad p_Y : X \times Y \to Y$$

siguin aplicacions contínues.

Definició 6.4.1 (Topologia producte)**.** Siguin (X, τ_X) i (Y, τ_Y) dos espais topològics. La *topologia producte* a $X \times Y$ és la topologia inicial a $X \times Y$ respecte a les projeccions $p_X : X \times Y \to X$ i $p_Y : X \times Y \to Y$.

Per tant, la topologia producte a $X \times Y$ té per base

$$\beta_{X \times Y} = \{p_X^{-1}(U) \cap p_Y^{-1}(V) = U \times V \;:\; U \in \tau_X,\; V \in \tau_Y\}.$$

Observem que aquesta $\beta_{X \times Y}$ en general no és una topologia, ja que poden existir elements $U, V \in \beta_{X \times Y}$ tals que $U \cup V \notin \beta_{X \times Y}$. En canvi, la topologia inicial en un conjunt Y respecte a una única aplicació $f : Y \to X$ té per conjunts d'oberts $\{f^{-1}(U) \;:\; U \in \tau_X\}$ (per exemple, quan definim la topologia subespai en un subconjunt d'un espai topològic).

Exemple 6.4.2. Vegem-ne exemples:

(1) Sigui $X = \mathbb{R}$ amb la topologia euclidiana. La topologia producte a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ és la que té com a oberts reunions arbitràries de subconjunts de la forma $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ amb $a_1 \leq b_1$ i $a_2 \leq b_2$ (és a dir, producte cartesià d'intervals). Per tant, coincideix amb la topologia euclidiana d'$\mathbb{R}^2$. En particular, no tots els oberts són de la forma $U \times V$.

Anàlogament, la topologia producte sobre $\mathbb{R} \times \overset{n)}{\cdots} \times \mathbb{R}$ és la topologia euclidiana sobre $\mathbb{R}^n$.

(2) Si (X, d_X) i (Y, d_Y) són espais mètrics, la topologia associada a la mètrica producte

$$d_{X \times Y}((a, b), (x, y)) := \max\{d_X(a, x), d_Y(b, y)\}$$

és la topologia producte.

Les dues projeccions anteriors impliquen:

Proposició 6.4.3. *La topologia producte a $X \times Y$ és la més grollera respecte a la qual les dues projeccions p_X, p_Y són contínues.*

Proposició 6.4.4. *Si $X \times Y$ està dotat de la topologia producte i Z és un espai topològic, aleshores una aplicació $g : Z \to X \times Y$ qualsevol si i només si les composicions $p_X \circ g$ i $p_Y \circ g$ són contínues.*

Proposició 6.4.5. *Siguin X, Y, Z espais topològics i $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ aplicacions. L'aplicació*

$$\begin{aligned} \varphi : Z &\to X \times Y \\ z &\longmapsto (f(z), g(z)) \end{aligned}$$

és contínua si i només si f i g són contínues.

Si X i Y són espais topològics, quan escrivim $X \times Y$ sobreentendrem (a menys que diguem el contrari) que parlem de la topologia producte.

Tot el que hem dit es generalitza de manera immediata al producte cartesià de n espais topològics $X_1, \ldots, X_n$.

Proposició 6.4.6. *Quan es tracta de dos espais topològics, es poden mirar dos productes: $X \times Y$ i $Y \times X$. Afortunadament, aquests dos espais topològics són homeomorfs. Un homeomorfisme explícit és $f : X \times Y \to Y \times X$ donat per $f(x, y) = (y, x)$.*

Demostració. Per veure que f és un homeomorfisme hem de veure que f és contínua, bijectiva i que f^{-1} és contínua.

- No és molt difícil veure que és bijectiva: Sigui $(x, y), (z, w) \in X \times Y$ i suposem que $f(x, y) = f(z, w)$. Aleshores $(y, x) = (w, z)$ que implica que $y = w$ i $x = z$, és a dir $(x, y) = (z, w)$, per tant és injectiva.

  Sigui ara $(z, w) \in Y \times X$. Aleshores $f(w, z) = (z, w)$ que mostra que f és exhaustiva i per tant és bijectiva.

- Veiem ara que f és contínua. Sigui $V \times U \subseteq Y \times X$, on V és obert en Y i U en X. Aleshores $f^{-1}(V \times U) = U \times V$. Però U és obert en X i V és obert en Y, aleshores $U \times V$ és obert en $X \times Y$ i per tant ho és $f^{-1}(V \times U)$ i així f és contínua.

- Sigui, per últim $U \times V \subseteq X \times Y$, on U és obert de X i V és obert de Y. Aleshores $f(U \times V) = V \times U$ i com V és obert en Y i U en X, aleshores $V \times U$ és obert en $Y \times X$ i per tant $f(U \times V) = (f^{-1})^{-1}(V \times U)$ és un obert en X que implica que f^{-1} és contínua.

□

Exemple 6.4.7. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$. De fet, l'aplicació

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+m} \\ ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_m)) &\longmapsto (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \end{aligned}$$

és un homeomorfisme. En efecte:

(i) φ és una bijecció.

(ii) Prenent com a base de la topologia euclidiana a $\mathbb{R}^{n+m}$ el conjunt

$$\gamma = \{(a, b) \times \cdots \times (a_{n+m}, b_{n+m}) \ : \ a_i, b_i \in \mathbb{R}\},$$

és clar que $\forall U \in \gamma$, $\varphi^{-1}(U)$ és un obert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ amb la topologia producte.

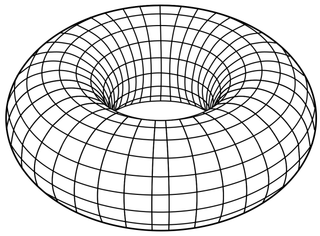
(iii) φ^{-1} és contínua perquè les composicions

$$p_X \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

$$p_Y \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

són contínues.

Exemple 6.4.8. El producte $S^1 \times S^1$ s'anomena el *tor*.



És homeomorf a $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \left(\sqrt{x^2+y^2} - 2\right)^2 + z^2 = 1\}$.

En efecte, identificant $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$, les aplicacions

$$\begin{aligned} f : S^1 \times S^1 &\longrightarrow X \\ ((a, b), (c, d)) &\longmapsto (a(c+2), b(c+2), d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow S^1 \times S^1 \\ (x, y, z) &\longmapsto \left[\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \left(\sqrt{x^2+y^2} - 2, z\right)\right] \end{aligned}$$

són simultàniament inverses i, per tant, són bijeccions. D'altra banda, g és contínua perquè les composicions de g amb les dues projeccions $S^1 \times S^1 \to S^1$ són contínues. Finalment, f és contínua.

6.4.2 Oberts i tancats a la topologia producte

Recordem que donada la col·lecció d'espais topològics $\{X_1, \ldots, X_n\}$ (finita) aleshores la topologia resultant del producte cartesià

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times \cdots \times X_n$$

és la topologia donada per la base

$$\beta = \left\{ \prod_{i=1}^{n} U_i \ : \ U_i \text{ és obert de } X_i, \ i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Així doncs, els oberts de l'espai topològic producte són unions d'elements de β. Eles elements de la base són els oberts "més simples" de l'espai producte.

Però, quins són exactament els oberts de la base? Doncs, si $U_1, \ldots, U_n$ són oberts de $X_1, \ldots, X_n$ respectivament, aleshores $U_1 \times \cdots \times U_n$ és un element de la base β.

Exemple 6.4.9. Considerem l'espai topològic $\mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}^n$ és en realitat un espai producte:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \overset{n)}{\cdots} \times \mathbb{R}$$

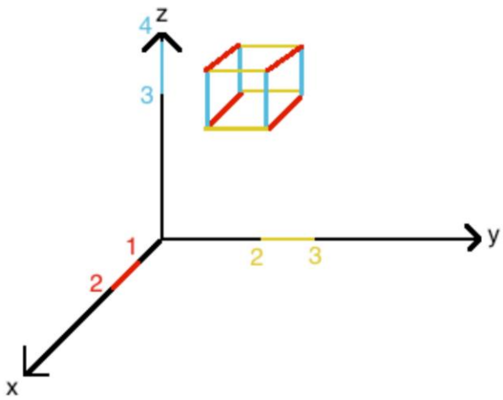
i el següent conjunt és obert en $\mathbb{R}^n$ amb la topologia producte:

$$U = \prod_{i=1}^{n} (i, i+1) = (1,2) \times (2,3) \times \cdots \times (n, n+1)$$

Fem $n = 3$ per visualitzar-ho millor. Considerem

$$U = (1,2) \times (2,3) \times (3,4)$$

que és un obert en $\mathbb{R}^3$. Es pot representar de la següent manera:



Per tant, el producte d'oberts és un obert en l'espai producte. La següent proposició ens dirà un resultat anàleg pels tancats.

Proposició 6.4.10. *Sigui $\{X_1, \ldots, X_n\}$ una col·lecció finita d'espais topològics. Si C_i és un tancat de X_i, $i = 1, \ldots, n$, aleshores el producte d'aquests tancats $C_1 \times \cdots \times C_n$ és tancat a l'espai producte $X_1 \times \cdots \times X_n$.*

Demostració. Si C_i és tancat a X_i ($i = 1, \ldots, n$) aleshores $X_i \setminus C_i$ és obert de X_i, per $i = 1, \ldots, n$. Aleshores:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} X_i \right) \setminus \left(\prod_{i=1}^{n} C \right) =$$

$$= \big[(X_1 \setminus C_1) \times \cdots \times X_n\big] \cup \big[X_1 \times (X_2 \setminus C_2) \times \cdots \times X_n\big] \cup \cdots \cup \big[X_1 \times \cdots \times (C_n \setminus X_n)\big]$$

Això mostra que $\prod_i X_i \setminus \prod_i C_i$ és unió d'oberts en $X_1 \times \cdots \times X_n$. Així doncs, és un obert en $X_1 \times \cdots \times X_n$ i per tant $C_1 \times \cdots \times C_n$ és un tancat. □

6.4.3 L'interior, la clausura i la frontera de l'espai producte

Interior

Al següent teorema veurem que donada una col·lecció finita $\{X_1, \ldots, X_n\}$ d'espais topològics i $A_i \subseteq X_i$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, aleshores l'interior del producte d'aquests conjunts és igual al producte de l'interior d'aquests conjunts.

Teorema 6.4.11. *Sigui $\{X_1, \ldots, X_n\}$ una col·lecció finita d'espais topològics i siguin $A_i \subseteq X_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Aleshores*

$$\left(\prod_{i=1}^{n} A_i \right)^o = \prod_{i=1}^{n} A_i^o.$$

Demostració. Sigui $x = (x_1, \dots, x_n) \in A_1^o \times \cdots \times A_n^o$. Aleshores existeix un obert $U = U_1 \times \cdots \times U_n$ en $X_1 \times \cdots \times X_n$ tal que

$$x \in U = \prod_{i=1}^{n} U_i \subseteq \prod_{i=1}^{n} A_i.$$

Aleshores, per tot $i \in \{1, \dots, n\}$ tenim que $x_i \in U_i \subseteq X_i$. Cadascun dels oberts U_i és obert en X_i, per tant $x_i \in X_i^o$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Així doncs $x \in \prod_{i=1}^{n} A_i^o$ que demostra que

$$\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)^o \subseteq \prod_{i=1}^{n} A_i^o$$

Sigui ara $x = (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} A_i^o$. Aleshores $x_i \in A_i^o$ per cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Per tant, $\forall i$, existeix U_i obert de X_i tal que $x_i \in U_i \subseteq X_i$. Sigui

$$U = \prod_{i=1}^{n} U_i.$$

Aleshores U és obert en $\prod_{i=1}^{n} X_i$, ja que és producte d'oberts. A més,

$$x \in U = \prod_{i=1}^{n} U_i \subseteq \prod_{i=1}^{n} A_i,$$

per tant

$$x \in \left(\prod_{i=1}^{n}\right)^o$$

que demostra que $\prod_{i=1}^{n} A_i^o \subseteq \left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)^o$ i per tant ja tenim la igualtat. □

Clausura

A continuació veurem que la clausura del producte és el producte de les clausures.

Teorema 6.4.12. *Sigui $\{X_1, \dots, X_n\}$ una família d'espais topològics i sigui $A_i \subseteq X_i$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Aleshores*

$$\overline{\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)} = \prod_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

Demostració. Suposem que $x = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)}$, $\forall i = 1, \dots, n$. Sigui U_i un entorn obert de x_i. Aleshores, $U = \prod_{i=1}^{n} U_i$ és un entorn obert de x i tenim que

$$\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) \cap U = \left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) \cap \left(\prod_{i=1}^{n} U_i\right) = \prod_{i=1}^{n} (A_i \cap U_i) \neq \emptyset.$$

Això implica que $A_i \cap U_i \neq \emptyset$, $\forall i = 1, \dots, n$. Per tant, $x_i \in \overline{A_i}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, aleshores $x \in \prod_{i=1}^{n} \overline{A_i}$. Així,

$$\overline{\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)} \subseteq \prod_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

Recíprocament, suposem ara que $x = (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n \overline{A_i}$. Per tant $x_i \in \overline{A}_i$ per tot $i \in \{1, \dots, n\}$. Sigui $U = \prod_{i=1}^n U_i$ un entorn obert de x en $X_1 \times \cdots \times X_n$. Aleshores U_i és un entorn obert de x_i, $\forall i = 1, \dots, n$. Per tant, $A_i \cap U_i \neq \emptyset$ $\forall i$. Així doncs, obtenim que

$$\prod_{i=1}^n (A_i \cap U_i) = \left(\prod_{i=1}^n A_i\right) \cap \left(\prod_{i=1}^n U_i\right) = \left(\prod_{i=1}^n A_i\right) \cap U \neq \emptyset.$$

Això demostra que $x \in \overline{\left(\prod_{i=1}^n A_i\right)}$ i per tant obtenim la inclusió contrària. Per tant obtenim la igualtat que buscàvem. $\square$

Conjunt de punts d'acumulació

A continuació veurem que el producte dels conjunts de punts d'acumulació d'un conjunt està contingut al conjunt de punts d'acumulació del producte dels conjunts. Observem que en aquest cas només tenim una inclusió.

Teorema 6.4.13. *Sigui $\{X_1, \dots, X_n\}$ una col·lecció finita d'espais topològics i $A_i \subseteq X_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Aleshores,*

$$\left(\prod_{i=1}^n A_i\right)' \supseteq \prod_{i=1}^n A_i'.$$

Demostració. Sigui $x = (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n A_i'$. Aleshores $x_i \in A_i'$, per tot $i \in \{1, \dots, n\}$. Sigui

$$U = \bigcup_{i=1}^n U_i$$

un entorn de x en $\prod_{i=1}^n X_i$. Aleshores, cada U_i és un entorn de cada x_i respectivament. Per tant,

$$(A_i \cap U_i) \setminus \{x_i\} \neq \emptyset \Longrightarrow \prod_{i=1}^n \big((A_i \cap U_i) \setminus \{x_i\}\big) \neq \emptyset.$$

Per tant,

$$\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) \cap \left(\prod_{i=1}^n U_i\right) \setminus \{x\} \neq \emptyset.$$

Així doncs, x és un punt d'acumulació de $\prod_{i=1}^n A_i$, és a dir, $x \in \left(\prod_{i=1}^n A_i\right)'$ i per tant $\left(\prod_{i=1}^n A_i\right)' \supseteq \prod_{i=1}^n A_i'$. $\square$

6.5 Topologia quocient

Recordem de (??) que si X és un conjunt i $\{Y_i\}_{i \in I}$ una col·lecció arbitrària d'espais topològics, aleshores la topologia final induïda per $\{f_i : Y_i \to X\}_{i \in I}$ és la topologia τ més fina que fa les aplicacions

$$f_i : Y_i \to X$$

contínues per tot $i \in I$. Recordem que vam veure que si τ era la topologia final induïda per $\{f_i\}_{i \in I}$, aleshores podia ser donada com

$$\tau = \{U \subseteq X \ : \ f^{-1}(U) \in \tau_i, \ \forall i \in I\}.$$

Això és, la topologia final induïda per $\{f_i\}_{i \in I}$ és igual a la col·lecció de subespais de X l'antiimatge dels quals està continguda en cada τ_i, per $i \in I$.

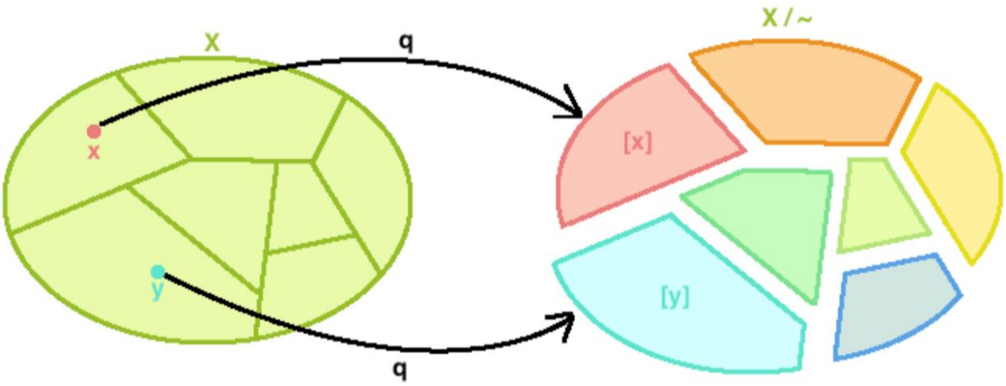
6.5.1 Topologia quocient

Ara mirarem de definir un tipus especial de topologia en un conjunt coneguda com la topologia quocient. Abans, però, necessitem descriure una aplicació especial coneguda com aplicació quocient o pas al quocient o, simplement, quocient.

Definició 6.5.1 (Pas al quocient)**.** Sigui (X, τ) un espai topològic i sigui $\sim$ una relació d'equivalència a X. Per a cada $x \in X$, denotem la seva classe d'equivalència com $[x] = \{y \in X \ : \ x \sim y\}$ i sigui $X/\sim$ el conjunt de totes les classes d'equivalència. L'*aplicació quocient* o *pas al quocient* respecte el conjunt X i la relació $\sim$ es defineix com l'aplicació

$$\begin{aligned} q : X &\longrightarrow X/\sim \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

que envia cada element a la seva classe.



Ara ja estem preparats per definir la topologia quocient al conjunt de les classes d'equivalència $X/\sim$, on $\sim$ és una relació d'equivalència a X.

Definició 6.5.2 (Topologia quocient)**.** Sigui (X, τ) un espai topològic i $\sim$ una relació d'equivalència a X. La *topologia quocient* en $X/\sim$ és la topologia final induïda per l'aplicació quocient $q : X \to X/\sim$. Així, el resultant espai topològic $(X/\sim, \tau_\sim)$, anomenat *espai topològic quocient* és un espai topològic que té com a conjunt $X/\sim$ i com a topologia $\tau_\sim$ la topologia quocient.

Veiem doncs que, la topologia quocient $\tau_\sim$ a $X/\sim$ és la topologia més fina que fa que l'aplicació pas al quocient $q : X \to X/\sim$ sigui contínua. Així doncs, ens trobem davant d'un cas particular de la topologia final (**??**). Als apunts del Naranjo això era un exemple o una observació a l'apartat d'identificacions i topologies finals.

6.5.2 Oberts i tancats a la topologia quocient

Els següents teoremes ens caracteritzaran quan un conjunt $U \subseteq X/\sim$ és obert o tancat.

Teorema 6.5.3. *Sigui (X, τ) un espai topològic i $\sim$ una relació d'equivalència a X. Sigui $X/\sim$ l'espai topològic quocient (dotat de la topologia quocient) respecte $\sim$. Aleshores $U \subseteq X/\sim$ és obert a $X/\sim$ si, i només si,*

$$\bigcup_{[x] \in U} [x]$$

és obert en X.

Demostració. Per definició, la topologia quocient, sigui τ_q, en $X/\sim$ és la topologia final al quocient $q : X \to X/\sim$ i es pot descriure com el següent conjunt:

$$\tau_q = \{U \subseteq X/\sim :\ q^{-1}(U) \in \tau\}.$$

Aleshores, suposem que $U \subseteq X/\sim$ és obert en $X/\sim$. Per l'observació, $q^{-1}(U)$ és obert de X. I aleshores

$$q^{-1}(U) = \bigcup_{[x]\in U} [x].$$

Per tant, $\bigcup_{[x]\in U}[x]$ és obert en X.

Recíprocament, sigui $U \subseteq X/\sim$ i suposem que $\bigcup_{[x]\in U}[x]$ és obert en X. Aleshores

$$q\left(\bigcup_{[x]\in U}[x]\right) = U.$$

Aleshores $q^{-1}(U)$ és obert i com q és oberta per la definició de τ_q, tenim que U és obert en $X/\sim$. □

Teorema 6.5.4. *Amb les mateixes hipòtesis del teorema anterior, un conjunt $C \subseteq X$ és tancat en $X/\sim$ si, i només si $\bigcup_{[x]\in C}[x]$ és tancat en X.*

Demostració. Bastant anàloga a la anterior, agafant complementaris de tancats que són oberts. □

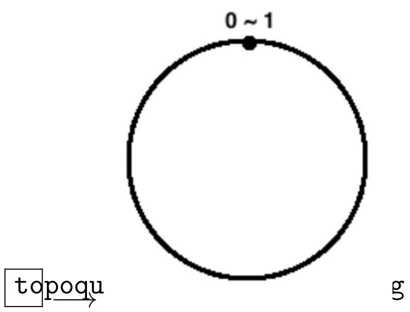
6.5.3 Topologia quocient en espais euclidians

Ara veurem alguns exemples d'espais topològics quocients en espais euclidians, amb la topologia usual respectiva.

Exemple 6.5.5. Considerem $X = [0,1]$. Sigui τ_X la topologia usual d'intervals oberts en X i considerem l'espai topològic (X, τ_X). Definim a X la relació següent:

$$x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{o bé} \\ \{x,y\} = \{0,1\} \end{cases}$$

Aquesta relació d'equivalència es pot pensar com "enganxar" els punts extrems de l'interval $[0,1]$ per formar com un cercle. És a dir, enganxem els punts que siguin equivalents (que són tots els punts amb ells mateixos i el zero amb l'1):



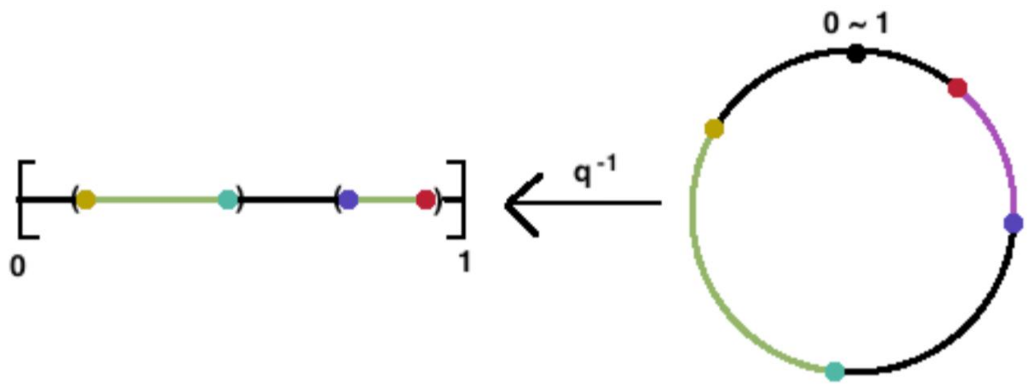
Notem que $\sim$ és efectivament una relació d'equivalència. És reflexiva, simètrica i transitiva clarament. Considerem doncs el conjunt de les classes d'equivalència

$$X/\sim = \{[x]\ :\ x \in [0,1]\} \cup \{\{0,1\}\}.$$

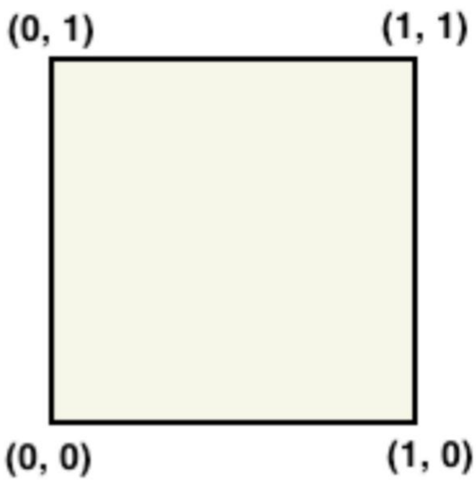
Considerem l'aplicació pas al quocient $q : X \to X/\sim$ definida per tot $x \in [0,1]$ per $q(x) = [x]$. Aleshores, la topologia final induïda per q és

$$\tau_q = \{q^{-1}(U) \ : \ U \in \tau_X\}.$$

Així doncs, la topologia τ_q pot ser descrita de forma informal com les unions "d'arcs oberts" que no contenen ni el 0 ni el 1, com indica el dibuix:

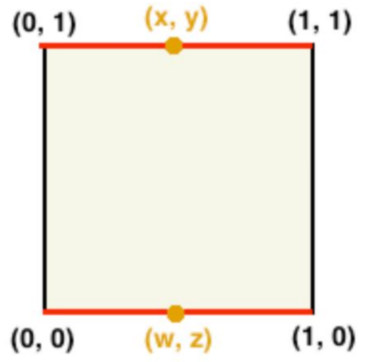


Exemple 6.5.6. Considerem $X = [0,1] \times [0,1]$ i (X, τ_X)

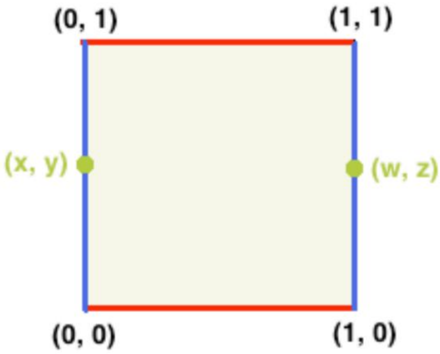


l'espai topològic on τ_X és la topologia usual dels discs oberts en $\mathbb{R}^2$. Definim la següent relació d'equivalència en X:

$$(x,y) \sim (w,z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = w \quad \text{i} \quad \{y,z\} = \{0,1\} \\ \qquad\quad \text{o bé} \\ y = z \quad \text{i} \quad \{x,w\} = \{0,1\} \end{cases}$$

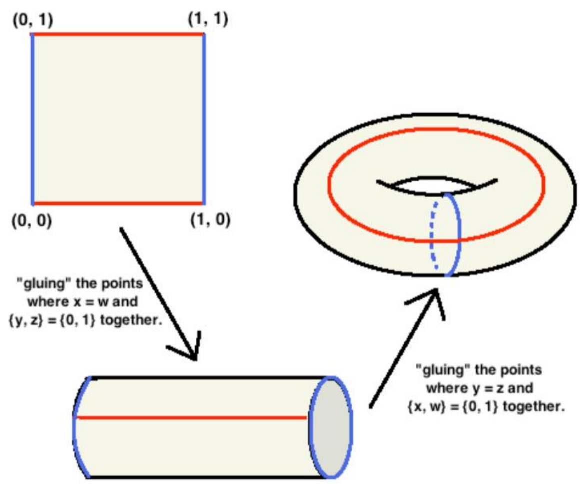


Here, x = w and {y, z} = {0, 1}



Here y = z and {x, w} = {0, 1}.

"Enganxant" els punts equivalents junts podem visualitzar $X/\sim$ amb el següent diagrama:



La topologia en $X/\sim$ serà generada per "superfícies obertes" del tor del dibuix, que no intersequin les "línies d'enganxament".

6.6 Espais localment euclidians

6.6.1 Espais localment euclidians

Entre espais topològics destaquen pel seu interès geomètric els que localment tenen el mateix comportament que $\mathbb{R}^n$.

Definició 6.6.1 (Espais localment euclidians)**.** Un espai topològic és *localment euclidià de dimensió* n si tot punt té un entorn obert homeomorf a la bola de $\mathbb{R}^n$ de centre 0 i radi 1.

Observem que ser localment euclidià és una propietat invariant per homeomorfisme. Veurem exemples a les pròximes seccions.

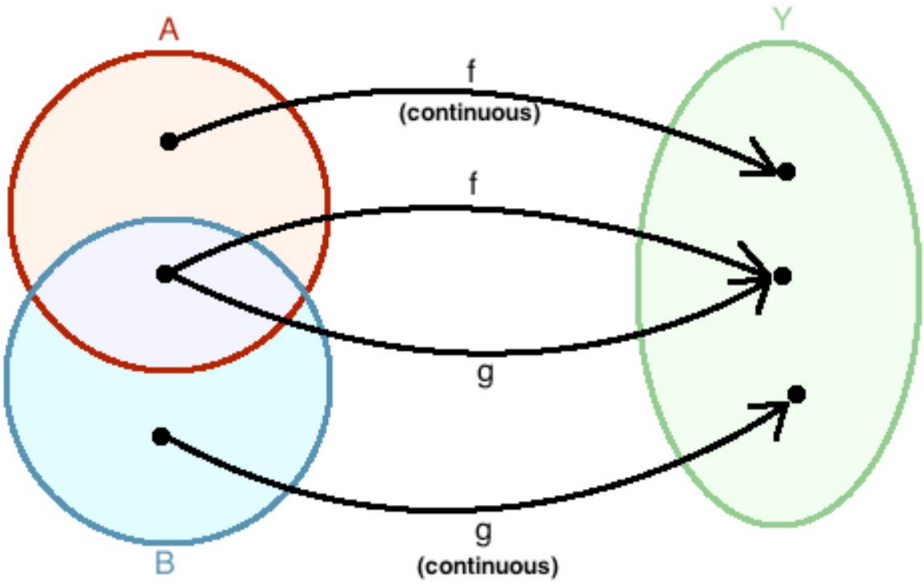
6.6.2 El lema de l'enganxament

Lema 6.6.2 (Lema de l'enganxament)**.** *Siguin X i Y i sigui $A, B \subseteq X$ subconjunts tancats de X tals que $X = A \cup B$. Sigui $f : A \to Y$ i $g : B \to Y$ aplicacions contínues tals que $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A \cap B$. Aleshores la funció*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in A \\ g(x) & si \quad x \in B \end{cases}$$

és una funció contínua.

Notem que és necessari que $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A \cap B$ per a que estigui ben definida.



Demostració. Per veure que h és contínua, veurem que per tot tancat $V \subseteq Y$ tenim $h^{-1}(V)$ és tancat en X. Sigui $V \subseteq Y$ un tancat. Aleshores

- $f^{-1}(V)$ és tancat en A perquè f és contínua. Però com A té la topologia subespai en X, existeix un tancat $F \subseteq X$ tal que $f^{-1}(V) = A \cap F$. Tenim que A és tancat i per tant la intersecció aquesta és tancada en X.

- De manera similar, com g és contínua, $g^{-1}(V)$ és tancat en B que, de nou, té la topologia subespai en X i per tant existeix un tancat $G \subseteq X$ tal que $g^{-1}(V) = G \cap B$ i la intersecció de tancats és tancada, així doncs, $g^{-1}(V)$ és un tancat en X.

Observem que, per a qualsevol $V \subseteq Y$ es compleix que $h^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cup g^{-1}(V)$ i si prenem V tancat, ambdós són tancats i per tant, la unió finita de tancats és tancat, això implica que $h^{-1}(V)$ és tancat en X. □

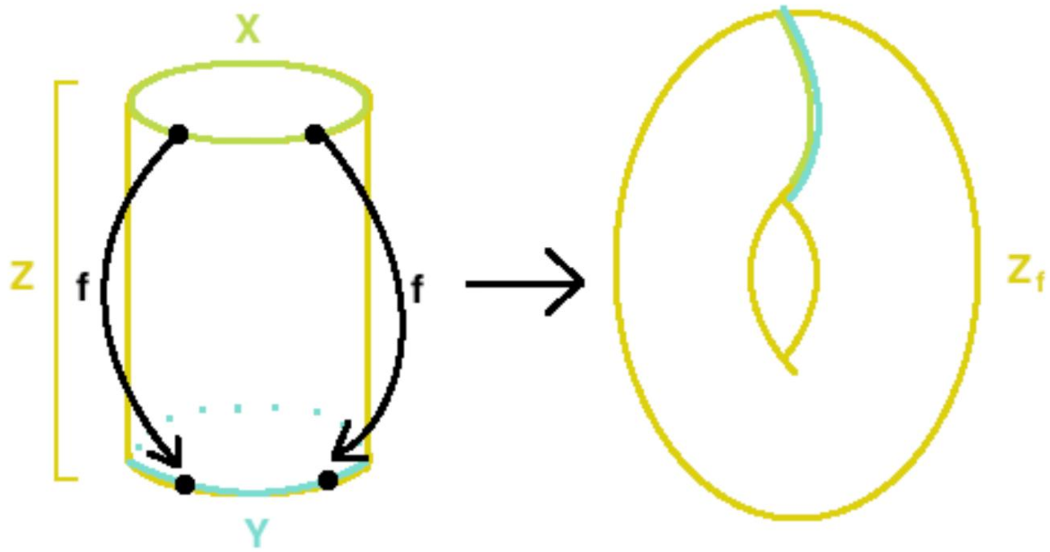
6.6.3 Enganxant espais topològics a ells mateixos

Definició 6.6.3 (Espai enganxament)**.** Sigui Z un espai topològic i siguin X i Y subespais topològics disjunts de Z. Sigui $f : X \to Y$ una aplicació exhaustiva tal que $f(X) = Y$ és la imatge. Es defineix una relació d'equivalència $\sim$ per $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ i $x \sim x$, $\forall x \in Z$. Aleshores les classes d'equivalència de $\sim$ són

$$\{\{y\} \cup f^{-1}(y) \ : \ y \in Y\}, \qquad \text{i singletons} \quad \{y\}.$$

L'espai resultant denotat $\mathcal{Z}_f$ es diu *espai enganxament de* X *i* Y *a partir de* f.

Molt sovint (als apunts del Naranjo-Navarro, per exemple) s'utilitza la notació R_f per a la definició de $\sim$.



Lema 6.6.4. *Sigui $f : X \to Y$ una identificació. Aleshores Y és homeomorf a X/R_f.*

Demostració. Per definició de la relació d'equivalència tenim una aplicació de conjunts injectiva $\varphi : X/R_f \to Y$ tal que $f = \varphi \circ q$, on q és l'aplicació de pas al quocient (**??**) $q : X \to X/R_f$. A més a més, com f és exhaustiva, tenim que φ és exhaustiva i, per tant, bijectiva. Com que Y i X/R_f tenen les topologies finals, per a un subconjunt U de Y tenim: U és obert si, i només si $f^{-1}(U) = q^{-1}(\varphi^{-1}(U))$ és obert, i si i només si $\varphi^{-1}(U)$ és obert. Així doncs, φ és un homeomorfisme. □

Exemple 6.6.5. Sigui X un espai topològic i sigui $A \subset X$ un subconjunt. Definim la relació d'equivalència

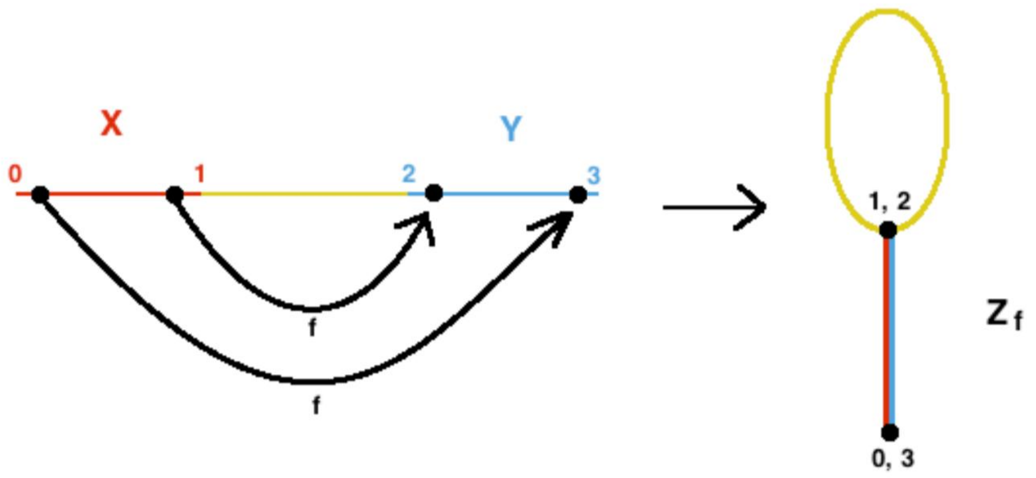
$$xR_Ax \quad \text{per a tot} \quad x \in X,$$

$$xR_Ay \quad \text{per a tot} \quad x, y \in A$$

Denotem per X/A el conjunt X/R_A amb la topologia final respecte de l'aplicació quocient (per tant, topologia quocient). Diem que hem identificat A en un punt.

Per exemple, siguin $X = [0,1]$ i $A = \{0,1\}$. La relació d'equivalència R_A coincideix amb R_f, on f és l'aplicació $f : [0,1] \to S^1$, $f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$. Segons el lema, X/A és homeomorf a S^1.

Exemple 6.6.6. Considerem l'espai $Z = [0,3]$ i els subespais $X, Y \subset Z$ donats per $X = [0,1]$ i $Y = [2,3]$. Definim la funció $f : X \to Y$ per $f(x) = 3 - x$. L'espai resultant $\mathcal{Z}_f$ pot ser representat com:



6.6.4 Enganxant espais topològics disjunts

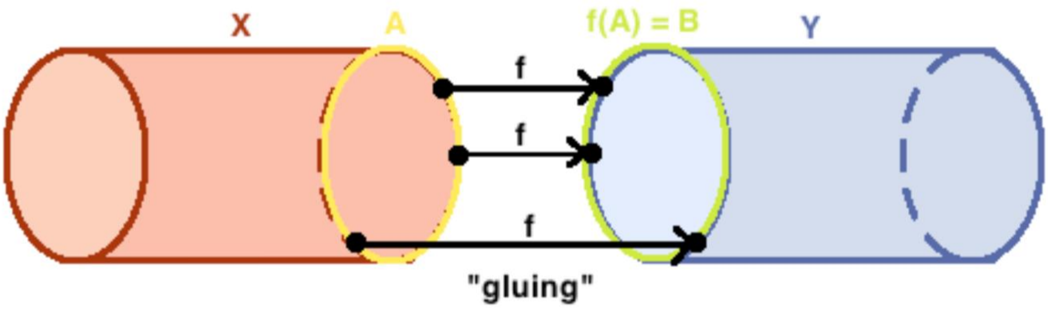
Definició 6.6.7 (Enganxament de dos espais topològics)**.** Siguin X i Y dos espais topològics disjunts. Sigui $A \subseteq X$ no buit i $f : A \to Y$ una aplicació tal que $f(A) = B$. Definim la relació d'equivalència $\sim$ a $X \cup Y$ d'aquesta forma:

$$x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ \text{o bé} \\ x = y \end{cases}$$

És a dir, amb la relació $\sim$ associem punts que estan associats per f així com els que estan associats per si mateixos. Les classes d'equivalència de $\sim$ són

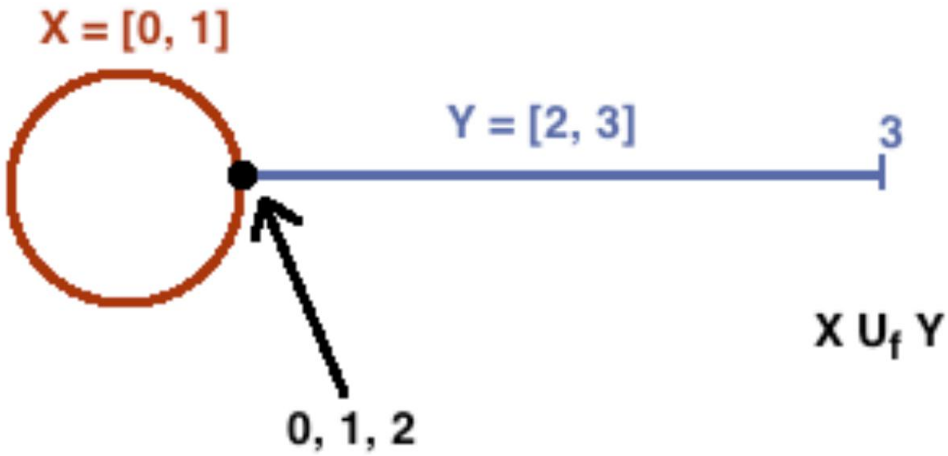
$$\{\{y\} \cup f^{-1}(y) \ : \ y \in B\}, \quad \text{i els singletons} \quad \{\{y\} \ : \ y \in B\}.$$

El resultat es diu *enganxament de X i Y a partir de f* i es denota $(X \oplus Y)/\sim$ o també $X \cup_f Y$.



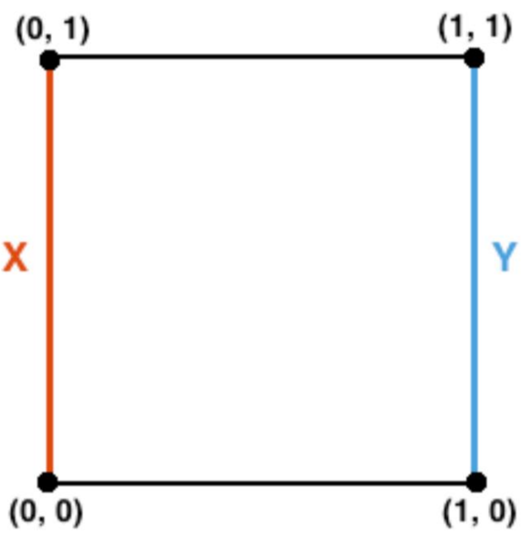
En termes més simples, considerem espais topològics disjunts X i Y i considerem un subconjunt A de X. Sigui $f : A \to Y$ una funció on $f(A) = B$. Aleshores nosaltres enganxem els punts d'A amb les seves respectives imatges per f (que estan a $B \subseteq Y$ i també enganxem els punts que no siguin a A amb ells mateixos.

Exemple 6.6.8. Un exemple molt simple és considerar els següents espais topològics disjunts: $X = [0, 1]$ i $Y = [2, 3]$, amb les topologies subespais de $\mathbb{R}$. Sigui $A = \{0.1\}$ i definim, per $x \in A$, la funció $f(x)$ com $f(0) = 2$ i $f(1) = 2$. Aleshores, enganxant els punts $0, 1 \in [0, 1]$ amb les seves imatges (que és el 2) obtenim $(X \oplus Y)/\sim$.

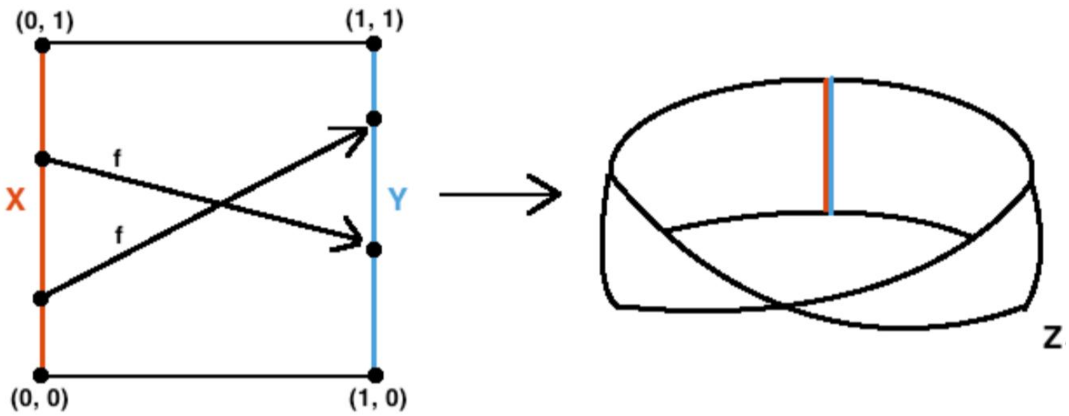


6.6.5 La construcció de la banda de Möbius

Considerem el quadrat unitat $Z = [0.1] \times [0, 1]$ en $\mathbb{R}^2$ i sigui $X = \{0\} \times [0, 1]$ i $Y = \{1\} \times [0, 1]$ com al dibuix:



Definim la funció $f : X \to Y$ per $f(0, x) = (1, 1 - x)$.



El resultant espai topològic $\mathcal{Z}_f$ és la coneguda banda de Möbius.

6.6.6 La construcció del pla projectiu real

Aquest apartat el copiaré de Wikipedia, ja que està bastant ben explicat.

La construcció d'aquest pla projectiu està basada en la Banda de Möbius: si es pogués enganxar la vora simple de la tira de Möbius en la direcció correcta, s'obtindria el pla projectiu (la qual cosa no és possible a l'espai tridimensional sense ue la superfície s'intersequi amb si mateixa). De manera equivalent, enganxar un disc al llarg del límit de la banda de Möbius da el pla projectiu.

Com que la banda de Möbius hem vist que es pot construir a partir d'un quadrat enganxant dos dels seus costats, el pla projectiu es pot presentar com un quadrat unitari $[0, 1] \times [0, 1]$ amb els seus costats identificats per les següents relacions d'equivalència:

$$(0, y) \sim (1, 1 - y), \qquad 0 \leq y \leq 1$$

i

$$(x, 0) \sim (1 - x, 1), \qquad 0 \leq x \leq 1$$

6.6.7 Altres construccions

Veiem altres exemples d'aquest tipus:

1. El cilindre $(0, 1) \times S^1$.

   Com que S^1 és la identificació dels punts 0 i 1 en l'interval $[0, 1]$ com ja es va veure, tenim que el cilindre també es pot descriure identificant en $X = [0, 1] \times (0, 1)$ els punts de la forma $(0, t)$ amb els de la forma $(1, t)$. Això està explicat en (**??**) i en (**??**). Observem que aquest cilindre és localment euclidià de dimensió 2, ja que un entorn d'un punt és la unió de dos semicercles

2. El tor o torus $\mathbb{T}$.

   Ja vam veure a (**??**) que el torus s'obtenia fent les identificacions que diu el dibuix. Vam veure també a (**??**) que el tor era homeomorf a $S^1 \times S^1$.

3. El pla projectiu real $\mathbb{P}^2$. (alternativa)

   Aquest espai s'obté identificant a S^2 els punts antipodals. Sigui H^+ la semiesfera superior tancada. No és difícil provar que la restricció $H^+ \to \mathbb{P}^2$ és també una identificació (aquest no és un fet general!). Utilitzant que H^+ i $X = I \times I$ són homeomorfs, aconseguim presentar el pla projectiu ral com l'espai obtingut identificant en el quadrat X els punts de la frontera.

Capítol 7

Propietats de separació

7.1 Espais topològics separables

Definició 7.1.1 (Espai topològic separable)**.** Sigui (X, τ) un espai topològic. Aleshores X es diu *separable* si conté un subconjunt dens i numerable.

Exemple 7.1.2. Considerem l'espai topològic $(\mathbb{R}, \tau)$ amb la topologia τ usual. Recordem que $\mathbb{Q}$ és dens a $\mathbb{R}$, (**??**). Això és perquè qualsevol obert de $\mathbb{R}$ és o bé $\emptyset$, o bé una unió d'una col·lecció arbitrària d'intervals oberts i tot interval obert conté un racional. Per tant, la intersecció de qualsevol obert de $\mathbb{R}$ amb $\mathbb{Q}$ és no buida.

A més, el conjunt dels racionals és numerable. Per tant, $\mathbb{Q}$ és un subconjunt dens i numerable i per tant $\mathbb{R}$ és un espai topològic separable.

Exemple 7.1.3. Considerem $\mathbb{R}$ amb la topologia $\tau = \{[a, b) \ : \ a, b \in \mathbb{R}, \ a < b\}$. Volem determinar si $(\mathbb{R}, \tau)$ és un espai topològic separable. Veiem que $\mathbb{Q}$ també és dens en aquesta topologia.

En efecte, sigui $U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$. Aleshores U és una d'aquestes dues opcions

$$U = \begin{cases} [a, b) & \text{per a alguns} \quad a, b \in \mathbb{R}, \ a < b \\ \text{unió d'intervals } [a, b) & \text{per a alguns} \quad a, b \in \mathbb{R}, \ a < b; \end{cases}$$

i en qualsevol cas $[a, b) \subseteq U$ per a alguns $a, b \in \mathbb{R}, \ a < b$. Aleshores, per certs $a, b \in \mathbb{R}$, suposem que $\mathbb{Q} \cap U = \emptyset$. Això implica que $\mathbb{Q} \cap [a, b) = \emptyset$. Però això diu aleshores que $\forall x$ tal que $a \leq x < b$, $\nexists q \in \mathbb{Q}$ tal que $a \leq x < q < b$. Però sabem que, donat qualsevol $x \in [a, b)$ sempre existeix un racional $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < b$ i això aleshores és una contradicció, ergo $\mathbb{Q} \cap U \neq \emptyset$, $\forall U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$.

Exemple 7.1.4. Construir una topologia τ a $X = \{a, b, c, d\}$ tal que (X, τ) sigui separable. Considerem la topologia

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, X\}.$$

Clarament cada subconjunt de X és numerable ja que X és numerable. Aleshores només queda trobar-ne un de dens.

Considerem $A = \{a, b\} \in \tau$. Aleshores, tenim

$$A \cap \{a\} = \{a\} \neq \emptyset, \quad A \cap \{b\} = \{b\} \not\emptyset, \quad , \cdots , \quad A \cap X = \{a, b\} \neq \emptyset.$$

i així A és un subconjunt dens i numerable, ergo (X, τ) és un espai topològic separable.

Proposició 7.1.5 (Exemple)**.** *Si X és un conjunt finit i τ la topologia discreta en X, aleshores l'espai topològic (X, τ) és separable*

Demostració. Sigui X un conjunt finit amb n elements. Posem $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Si τ és la topologia discreta, aleshores $\tau = \mathscr{P}(X)$. Clarament tot subconjunt de X és numerable, ja que X és numerable. Per tant, només cal trobar un subconjunt dens de X. Prenent $A = X$, $\forall U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ es compleix que $U \subseteq A$ i per tant $U \cap A = U \neq \emptyset$. Per tant A és numerable i dens en X i per tant (X, τ) és separable. □

Proposició 7.1.6 (Exemple)**.** *Si X és un conjunt numerable i τ la topologia discreta, aleshores l'espai topològic (X, τ) és separable.*

Demostració. Si X és numerable, aleshores és o bé finit, o bé infinit i numerable. Si X és finit, ja ho hem demostrat a (**??**). Suposem doncs que X és un conjunt infinit i numerable. Sigui $X = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Prenent $A = X$ obtenim que $\forall U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ és tal que $U \subseteq A$ i així doncs $A \cap U = U \neq \emptyset$. Per tant A és numerable i dens, ergo (X, τ) és separable. □

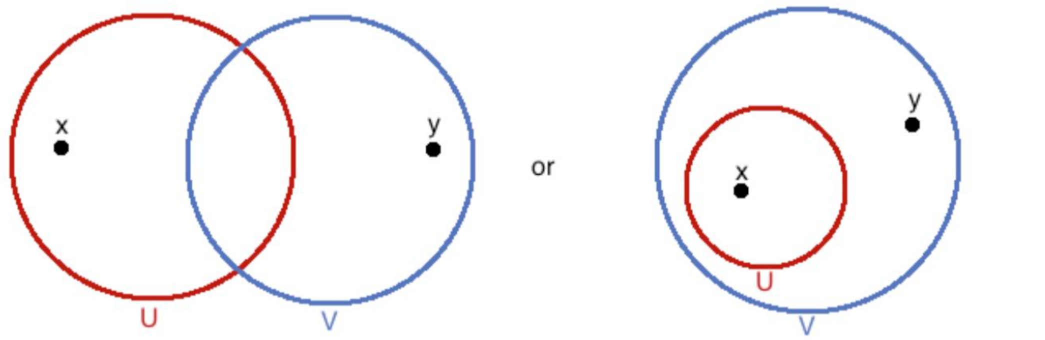
Teorema 7.1.7. *Sigui (X, τ) un espai topològic. Si X és numerable, aleshores (X, τ) és un espai topològic separable.*

Demostració. Sigui X un conjunt numerable i τ qualsevol topologia en X. Per definició, τ conté X. Aleshores, si prenem $A = X$ ja es compleix que A és numerable (trivial) i dens, ja que $\forall U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ tenim que $U \subseteq A$ i per tant $U \cap A = U \neq \emptyset$. Per tant, (X, τ) és separable. □

7.2 Espais topològics de Kolmogorov

Definició 7.2.1 (Espai topològic de Kolmogorov)**.** Un espai topològic X es diu que és T_0 o de *Kolmogorov* si per tot parell de punts diferents $x, y \in X$, $x \neq y$, existeixen entorns oberts U_x de x i U_y de y tals que o bé $y \notin U_x$, o bé $x \notin U_y$.

Gràficament:



The distinct points x and y have open neighbourhoods U of x and V of y such that x is not in V and y is not in U.

The distinct points x and y have open neighbourhoods U of x and V of y such that x is in V but y is **not** in U.

Aquesta és la forma més feble de separació.

Exemple 7.2.2. Sigui $X = \{a, b, c, d\}$ i sigui τ_g la topologia grollera a X, $\tau_g = \{\emptyset, X\}$. Aleshores (X, τ_g) no és T_0 perquè si dos punts diferents $x, y \in X$, els únics entorns oberts són el total per als dos.

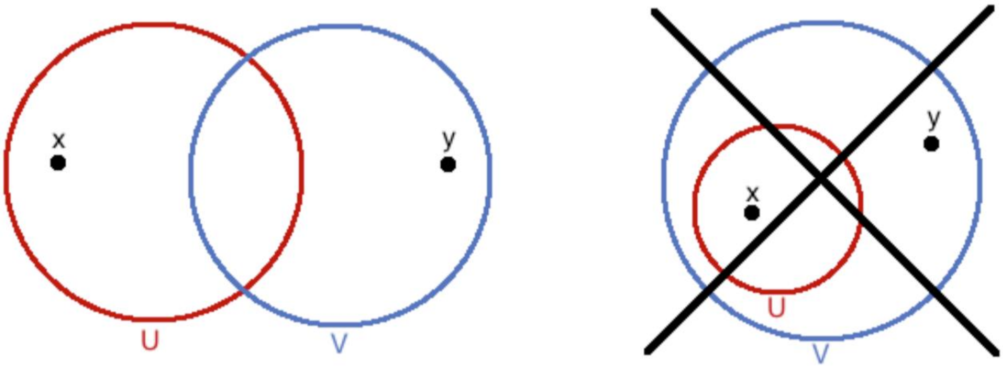
Proposició 7.2.3. *Un espai topològic és T_0 o de Kolmogorov si, i només si, per tot parell de punts diferents $x, y \in X$, $x \neq y$, existeix un obert U que conté només un dels dos, x o bé y.*

Demostració. Suposem que X és T_0 i siguin $x, y \in X$, $x \neq y$. Aleshores existeixen entorns oberts U de x i V de y tals que o bé $x \notin V$ o bé $y \notin U$. Si $x \notin V$, aleshores V és un obert que només conté a y. Si $y \notin U$, aleshores U és un obert que només conté a x. Així obtenim el que volíem.

Recíprocament, suposem que per a tot parell $x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists U$ obert tal que només un dels dos elements està a U. Suposem, sense pèrdua de generalitat, que $x \in U$ només. Aleshores U és un entorn obert de x que no conté a y, ergo X és T_0. □

7.3 Espais topològics de Fréchet

Definició 7.3.1 (Espai de Fréchet)**.** Un espai topològic X es diu que és T_1 o de *Fréchet* si per tot parell $x, y \in X$, $x \neq y$, existeixen entorns oberts U de x i V de y tal que $x \notin V$ i $y \notin U$.



The distinct points x and y have open neighbourhoods
U of x and V of y such that x is not in V and y is not in U.

Els diferents punts x i y tenen diferents entorns oberts U de x i V de y tal que x no és a V ni y a U.

Exemple 7.3.2. Si $X = \{a, b, c, d\}$ i τ és la topologia discreta, aleshores X és T_1. Això és perquè $\forall x, y \in X$, els entorns oberts $U = \{x\}$ i $V = \{y\}$ de x i y respectivament, satisfan que $x \notin V$ i $y \notin U$.

Teorema 7.3.3. *Si un espai topològic X és T_1, aleshores també és T_0. És a dir, $T_1 \Rightarrow T_0$.*

Demostració. Suposem que X és T_1 i siguin $x, y \in X$, $x \neq y$. Aleshores, com X és T_1, $\exists$ entorns oberts U de x i V de y tal que $x \notin V$ i $y \notin U$. Aleshores se satisfà que $x \notin V$ o bé $y \notin U$. □

Exemple 7.3.4. Sigui (X, d) un espai mètric i siguin $x, y \in X$. Posem $r = d(x, y)$ i trobem que $x \notin B_r(y)$ i $y \notin B_r(x)$. Per tant, tot espai topològic que provè d'un espai mètric és de Fréchet.

Exemple 7.3.5. Sigui $\mathbb{R}$ amb la topologia següent:

$$\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R} \setminus X \ : \ X \text{ finit}\}$$

(la topologia dels complements finits). Aleshores, si $x, y \in \mathbb{R}$ són diferents, $\mathbb{R} \setminus \{y\} \in \tau$ i $y \notin \mathbb{R} \setminus \{y\}$ i $x \in \mathbb{R} \setminus \{y\}$, i també $x \notin \mathbb{R} \setminus \{x\}$ i $x \in \mathbb{R} \setminus \{y\}$, per tant és de Fréchet.

Proposició 7.3.6. *Un espai topològic X és de Fréchet si i només si tot singletó de X (subconjunt de X amb un sol element) és tancat en X.*

Demostració. ($\Rightarrow$) Suposem que X és T_1. Sigui $x \in X$ i considerem el singletó $\{x\}$. Hem de provar que $\{x\}^c = X \setminus \{x\}$ és obert. Sigui $y \in X \setminus \{x\}$. Aleshores $x \neq y$. Com X és de Fréchet, existeix un entorn obert V de y tal que $x \notin V$. Però aleshores $V \subseteq X \setminus \{x\}$ i $y \in \big(\{x\}^c\big)^o = \big(X \setminus \{x\}\big)^o$ que prova que $X \setminus \{x\}$ és obert. Per tant, tot singletó $\{x\}$, amb $x \in X$, és tancat.

($\Leftarrow$) Suposem ara que tot singletó $\{x\}$ és tancat. Siguin $x, y \in X$ i suposem que $x \neq y$. Aleshores $\{x\}$ i $\{y\}$ són tancats. Sigui $U = \{y\}^c = X \setminus \{y\}$ i $V = \{x\}^c = X \setminus \{x\}$. Aleshores U i V són entorns oberts de x i y respectivament, satisfent que $y \notin U$ i $x \notin V$. Per tant X és T_1. □

Observació 7.3.7. *No tot espai topològic és de Fréchet. Per exemple, si X té més d'un punt i τ és la topologia grollera, aleshores (X, τ) no és de Fréchet, atès que els seus punts no són tancats (punts aquí vol dir singletons, és a dir, conjunts que contenen només un punt).*

Observem que és clar que un espai homeomorf a un espai de Fréchet és de Fréchet. En canvi, la imatge per una aplicació contínua d'un espai de Fréchet no és, en general, de Fréchet. Per exemple, sigui X amb més d'un punt i sigui τ_d la topologia discreta i τ_g la topologia grollera. Aleshores,

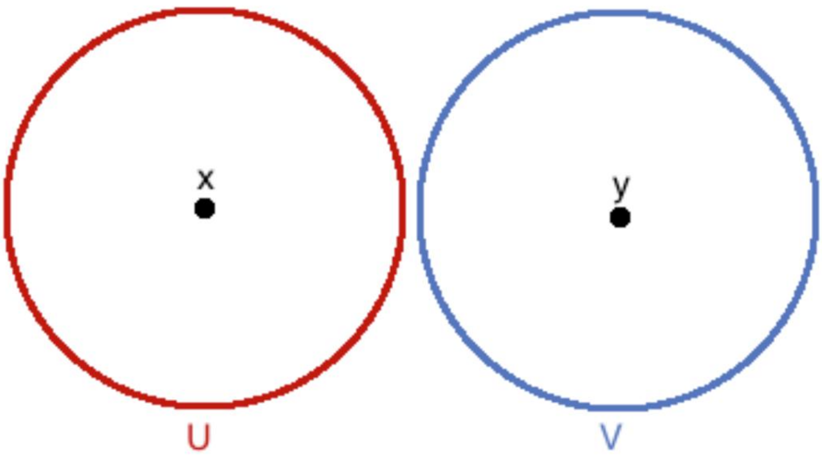
$$\begin{aligned} id : (X, \tau_d) &\longrightarrow (X, \tau_g) \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

és contínua i (X, τ_d) és T_1, però (X, τ_g) no.

7.4 Espais topològics de Hausdorff

Definició 7.4.1 (Espai de Hausdorff)**.** Sigui (X, τ) un espai topològic. Si per tot $x, y \in X$, $x \neq y$, existeixen entorns oberts U_x i U_y respectivament, tals que $x \in U_x$ i $y \in U_y$ però $U_x \cap U_y = \emptyset$, aleshores (X, τ) es diu que és de *Hausdorff* o T_2

Essencialment, (X, τ) és de Hausdorff si podem separar cada element de X amb entorns oberts disjunts com il·lustra la imatge:



The distinct points x and y have open neighbourhoods U of x and V of y that are disjoint.

Teorema 7.4.2. *Si X és un espai topològic de Hausdorff, aleshores també és de Fréchet.*

Demostració. Sigui X un espai topològic T_2 i siguin $x, y \in X$, $x \neq y$. Com X és T_2, $\exists U_x, U_y$ entorns oberts de x i y respectivament, tals que $U_x \cap U_y = \emptyset$. Aleshores, en particular, $y \notin U_x$ i $x \notin U_y$ i per tant X és T_1. $\square$

Observació 7.4.3. *En general, no tot espai de Fréchet és de Hausdorff. Per exemple, considerem un conjunt X infinit dotat de la topologia dels complements finits*

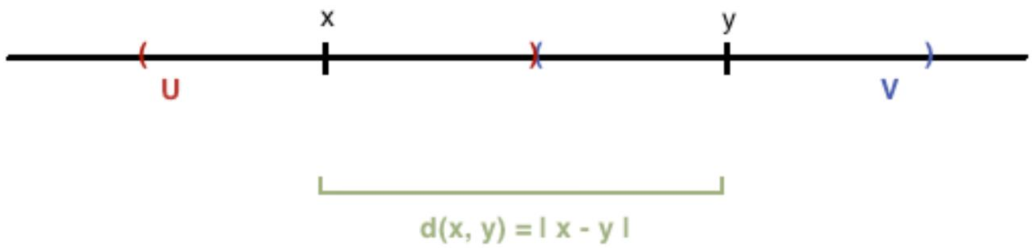
$$\tau = \{U \subset X \ : \ U^c \text{ és finit o bé } U = \emptyset\} \cup \{X\}$$

Siguin $x, y \in X$ amb $x \neq y$. Considerem els conjunts $U = X \setminus \{x\}$ i $V = X \setminus \{y\}$. Aleshores U i V són entorns oberts de x i y respectivament i $x \notin V$ ni $y \notin U$. Per tant X és un espai de Fréchet.

Però per altra banda, tot entorn obert de x és de la forma $U \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, on $x \neq x_i$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ i anàlogament, els entorns de y són de la forma $V = X \setminus \{y_1, \ldots, y_m\}$, amb $y \neq y_j$, $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$. En qualsevol cas tenim $U \cap V =\neq \emptyset$, per tant no pot ser T_2.

Exemple 7.4.4. Potser l'exemple més familiar d'espais de Hausdorff és $(\mathbb{R}, \tau)$ on τ és la topologia usual d'intervals oberts a $\mathbb{R}$. Per provar que aquest espai topològic és de Hausdorff, siguin $x, y \in X$, $x \neq y$, i sense pèrdua de generalitat, suposem $x < y$. La distància euclidiana entre x i y és $d(x, y) = |x - y|$. Ara, siguin

$$U = \left(x - \frac{d(x,y)}{2}, x + \frac{d(x,y)}{2}\right), \qquad V = \left(y - \frac{d(x,y)}{2}, y + \frac{d(x,y)}{2}\right)$$



Aleshores $U, V \in \tau$ i $U \cap V = \emptyset$. Però $x, y \in X$ són arbitràries, per tant això se satisfà $\forall x, y \in X$, $x \neq y$. Per tant, $(\mathbb{R}, \tau_e)$ és un espai de Hausdorff (també de Fréchet, per (**??**)).

Exemple 7.4.5. Generalitzem l'exemple 1 a espais mètrics qualssevol. Donat un espai mètric (X, d) prenem $x, y \in X$ diferents i definim $r = \frac{1}{2}d(x, y)$. Aleshores $x \in B_r(x)$ i $y \in B_r(y)$ però $B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$.

Exemple 7.4.6. Sigui $X \neq \emptyset$ i τ la topologia discreta a X. Aleshores, $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, tenim que $\{x\}, \{y\} \in \tau$. Si diem $U = \{x\}$ i $V = \{y\}$ obtenim que $x \in U$, $y \in V$ i que $U \cap V = \emptyset$. Per tant (X, τ) és de Hausdorff.

Exemple 7.4.7. Considerem $X = \{a, b, c, d\}$ i

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, X\}.$$

Veiem si (X, τ) és de Hausdorff.

Notem que per $d \in X$, l'únic entorn obert possible és X. D'altra banda, però, per a $a \in X$, tenim que els seus entorns oberts són $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$ i X, i per tots aquests conjunts, la intersecció amb X no és buida. Per tant (X, τ) no és de Hausdorff.

Exemple 7.4.8. Sigui X un conjunt no buit i τ_g la topologia grollera, $\tau_g = \{\emptyset, X\}$. Aleshores, $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, tenim que els seus únics entorns possibles són X, per als dos, i aleshores $X \cap X = X \neq \emptyset$. Per tant no és de Hausdorff.

Exemple 7.4.9. Considerem l'espai topològic $(\mathbb{R}, \tau)$, on $\tau = \{(-n, n) \;:\; n \in \mathbb{N}\}$. Considerem els nombres $0, 1/2 \in \mathbb{R}$. Observem que

$$0, \frac{1}{2} \in (-1, 1) \subset (-2, 2) \subset \cdots \subset (-n, n) \subset \cdots$$

és a dir, tot obert de τ és un entorn obert per $0, \frac{1}{2}$. Així doncfs, si U i V són entorns de 0 i $\frac{1}{2}$, respectivament, aleshores $U \cap V \neq \emptyset$. Per tant, $(\mathbb{R}, \tau)$ no és de Hausdorff.

Exemple 7.4.10. Considerem el conjunt $\mathbb{R}$ amb la topologia dels complements finits

$$\tau = \{U \subseteq X \;:\; U = \emptyset \text{ o bé } U^c \text{ és finit}\}$$

És de Hausdorff?

Primer considerem qualsevol obert de $\mathbb{R}$ amb τ. Mostrarem que cap obert és disjunt i, per tant, cap entorn serà disjunt. Siguin $U, V \in \tau$. Aleshores U^c i V^c són finits. Escrivim

$$U^c = \{x_1, \ldots, x_n\}, \qquad V^c = \{y_1, \ldots, y_n\}, \quad x_i, y_j \in \mathbb{R}, \ \forall i, j.$$

Per tant,

$$U = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}, \qquad V = \mathbb{R} \setminus \{y_1, \ldots, y_m\}$$

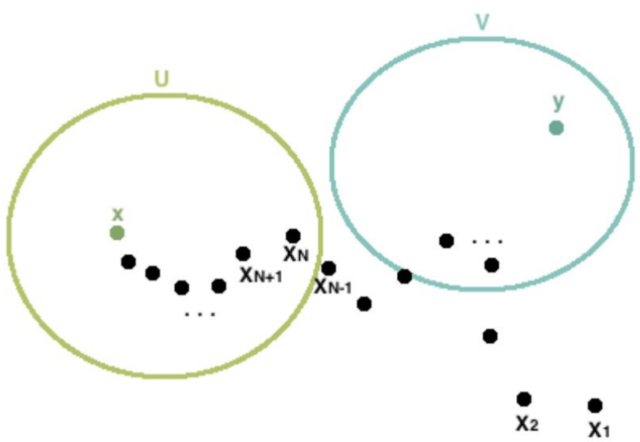
i aleshores

$$U \cap V = (\mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}) \cap (\mathbb{R} \setminus \{y_1, \ldots, y_m\}) = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$$

Però $\{x_i, y_j\}_{i=1,\ldots,n;\, j=1,\ldots,m}$ és finit i per tant $U \cap V \neq \emptyset$ (és un obert de τ). Per tant $(\mathbb{R}, \tau)$ no pot ser de Hausdorff.

Proposició 7.4.11. *Si (X, τ) és de Hausdorff, aleshores qualsevol successió $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X convergeix com a màxim a un punt $x \in X$.*

Demostració. Suposem que $x, y \in X$, $x \neq y$, i sigui $(x_n)_n$ una successió convergent a x. Com (X, τ) és de Hausdorff, tenim que $\exists U, V$, entorns oberts de x i y respectivament, tals que $U \cap V = \emptyset$. Com $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergeix a x, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $x_n \in U$ (veure (**??**)). Però com $U \cap V = \emptyset$, implica que aquests x_n no estaran a V, per tant $(x_n)_n$ no convergeix a y.



Since the sequence (xn) converges we have that Xn is in U for all n ≥ N and hence cannot converge to any other point y which is separated by the open disjoint neighbourhood V of y arising from the space being Hausdorff.

□

Proposició 7.4.12. *(1) Un subespai topològic (subconjunt dotat de la topologia subespai, (??)) d'un espai de Hausdorff és de Hausdorff.*

(2) El producte d'espais topològics de Hausdorff és de Hausdorff.

Demostració. (1) És equivalent a dir que la propietat 'ser de Hausdorff' és hereditària (recordem **??**). És a dir, que si (X, τ) és de Hausdorff i $A \subseteq X$, aleshores, el subespai topològic (A, τ_A), on τ_A és la topologia subespai, és de Hausdorff.

Siguin $x, y \in A$. Aleshores $x, y \in X$, ja que $A \subseteq X$. Com X és de Hausdorff, $\exists U, V$ entorns oberts de x i y respectivament, tals que

$$U \cap V = \emptyset$$

Com U i V contenen x i y respectivament, tenim que $A \cap U$ i $A \cap V$ són entorns oberts de x i de y en A, respectivament. A més, veiem que

$$(A \cap U) \cap (A \cap V) = A \cap (U \cap V) = A \cap \emptyset = \emptyset$$

Per tant, $\forall x, y \in A$, $x \neq y$, existeixen entorns oberts de x i y disjunts.

(2) Siguin X i Y dos espais de Hausdorff. Veiem que el producte $X \times Y$ és de Hausdorff. Si $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ són punts diferents, aleshores alguna de les dues coordenades és diferent. Suposem, per exemple, que $x_1 \neq x_2$, i siguin U_1 i U_2 dos oberts disjunts tals que $x_i \in U_i$, $i = 1, 2$. Aleshores, $V_i = U_i \times Y$ són dos oberts disjunts de $X \times Y$ tals que $(x_i, y_i) \in V_i$, per $i = 1, 2$.

□

Amb petites modificacions es prova el mateix resultat per a espais de Fréchet.

Proposició 7.4.13. *Sigui (X, τ) un espai topològic i sigui*

$$\Delta = \{(x, y) \in X \times X \ : \ y = x\}$$

la diagonal. Aleshores X és de Hausdorff si i només si Δ és tancat a $X \times X$.

Demostració. Δ és tancat si i només si tot punt $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta$ és interior a $X \times X \setminus \Delta$. Com que els oberts de la forma producte d'oberts formen una base de la topologia producte, $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta$ és interior si i només si existeixen oberts U de X i V de X tals que $(x, y) \in U \times V \subset X \times X \setminus \Delta$. Aquesta condició és equivalent a la de Hausdorff ja que

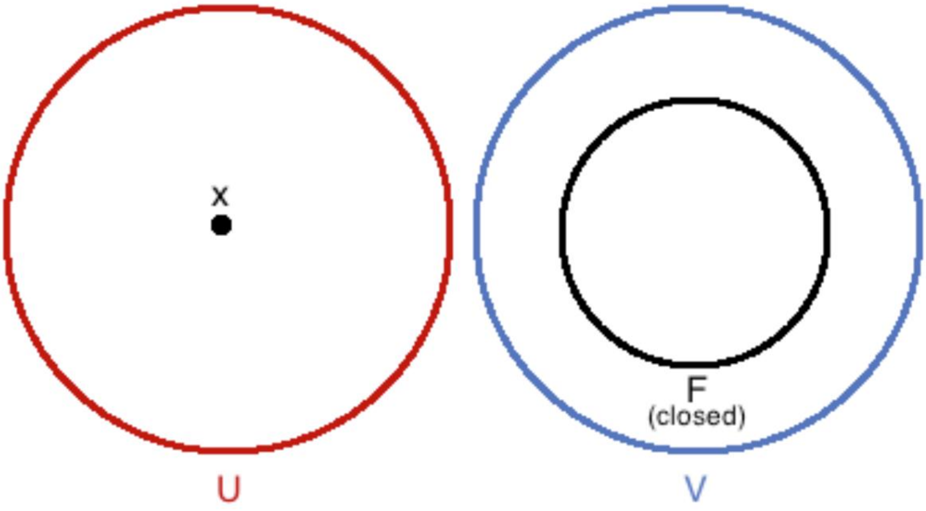
$$(U \times V) \cap \Delta = \{(x, x) \ : \ x \in U \times V\}$$

□

7.5 Espais topològics regulars i normals

7.5.1 Espais topològics regulars

Definició 7.5.1 (Espai regular)**.** Sigui (X, τ) un espai topològic. Diem que X és *regular* o T_3 si per a tot punt $p \in X$ i per a tot tancat F de X amb $p \notin F$, existeixen oberts disjunts U_1 i U_2 tals que $p \in U_1$ i $F \subset U_2$.

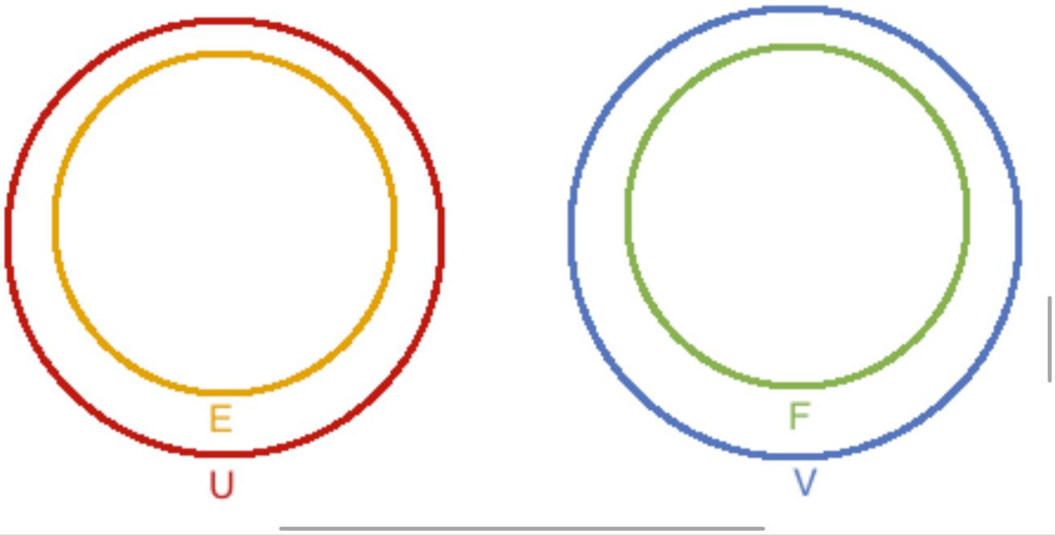


Teorema 7.5.2. *Si un espai topològic X és regular, aleshores és també de Hausdorff. És a dir, $T_3 \Rightarrow T_2$.*

Demostració. Sigui X un espai topològic regular. Aleshores, siguin $x, y \in X$, $x \neq y$. Com T_3 és també T_1 trivialment, tot singletó $\{x\}$ és tancat. Per tant, $\{x\}$ és tancat i $\{y\}$ també. Si diem $F = \{y\}$ ja tenim que existeix U entorn obert de x i V de F tals que $U \cap V = \emptyset$. Per tant, X és T_2. □

7.5.2 Espais topològics normals

Definició 7.5.3 (Espai normal)**.** Sigui (X, τ) un espai topològic. Diem que X és *normal* o T_4 si per a tota parella F_1, F_2 de tancats disjunts de X, existeixen oberts disjunts U_1 i U_2 tals que $F_1 \subset U_1$ i $F_2 \subset U_2$.



Teorema 7.5.4. *Si un espai topològic X és normal, aleshores és també regular. És a dir, $T_4 \Rightarrow T_3$.*

Demostració. Sigui X un espai T_4. Aleshores, hem de veure que és regular. Sigui $x \in X$ i F un tancat de X que no conté x. Com $T_4 \Rightarrow T_1$ trivialment, tot singletó és tancat. Per tant, en particular, $\{x\}$ és tancat. Per tant, per ser T_4, existeixen entorns oberts U_1 i U_2 de $\{x\}$ i F respectivament, que compleixen $U \cap V = \emptyset$. □

7.5.3 Relació entre ells

Als teoremes (**??**), (**??**), (**??**) i (**??**) hem vist la següent cadena d'implicacions:

$$T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0. \tag{7.1}$$

Veiem ara una caracterització dels espais topològics que provenen dels espais mètrics, que ens servirà com a exemple.

Proposició 7.5.5. *Tot espai mètric (és a dir, espai topològic provinent d'un espai mètric) és normal i regular.*

Demostració. Atès que tot espai mètric és de Fréchet, serà suficient provar que és normal. Siguin F_1 i F_2 tancats d'un espai mètric (X, d) tals que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Sigui $x \in F_1$ i definim

$$r_x = \inf\{d(x, y) \ : \ y \in F_2\} \in [0, +\infty).$$

Si $r_x = 0$, aleshores $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in F_2$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$, és a dir, $F_2 \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$. Anàlogament, es defineix un obert U_2 que conté F_2. Veiem, finalment, que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. En efecte, si existís un $p \in U_1 \cap U_2$, aleshores tindríem punts $x_1 \in F_1$ i $x_2 \in F_2$ tals que

$$p \in B_{\frac{r_{x_1}}{2}}(x_1) \cap B_{\frac{r_{x_2}}{2}}(x_2).$$

Per definició, $d(x_1, x_2) \geq r_{x_i}, \ i = 1, 2$. Així:

$$\frac{r_{x_1}}{2} + \frac{r_{x_2}}{2} \leq d(x_1, x_2) \leq d(x_1, p) + d(p, x_2) < \frac{r_{x_1}}{2} + \frac{r_{x_2}}{2},$$

la qual cosa és absurda. □

Lema 7.5.6 (Lema de Urysohn)**.** *Sigui (X, τ) un espai topològic. X és normal si i només si per a tota parella F_1, F_2 de tancats disjunts de X existeix una aplicació contínua*

$$f : X \to [0, 1]$$

tal que $F_1 = f^{-1}(\{0\})$ i $F_2 = f^{-1}(\{1\})$.

Finalment, cal destacar que les implicacions recíproques de la cadena d'implicacions (**??**) no són sempre certes. Ja vam veure que $T_1 \not\Rightarrow T_2$. Es poden trobar contraexemples per veure que $T_2 \not\Rightarrow T_3$ i $T_3 \not\Rightarrow T_4$.

Capítol 8

Compacitat

8.1 Recobriments i subrecobriments

Definició 8.1.1 (Recobriments)**.** Sigui X un espai topològic i $A \subseteq X$. Un *recobriment d'A* és una col·lecció de subconjunts $\mathcal{F}$ de X tal que

$$A \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U.$$

Si $\mathcal{F}$ és una col·lecció d'oberts, aleshores es diu recobriment obert. Anàlogament, si $\mathcal{F}$ és una col·lecció de tancats, es diu recobriment de tancats. Si $\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{F}$ també cobreix A, es diu que $\mathcal{F}^*$ és un *subrecobriment d'A de $\mathcal{F}$*. Un *recobriment de tot l'espai* X és una família de subconjunts $\{X_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ tals que

$$X = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma.$$

Exemple 8.1.2. Una base forma un recobriment obert de tot l'espai. Prenent l'adherència de cada element del recobriment obtenim un recobriment tancat.

Exemple 8.1.3. Considerem l'espai topològic $\mathbb{R}$ amb la topologia usual. Considerem $A = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$. Tot singletó de $\mathbb{R}$ és tancat i per tant la col·lecció

$$\{\{n\} \,:\, n \in \mathbb{N}\}$$

és un recobriment tancat de $\mathbb{N}$ ja que $\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}$. D'altra banda, la col·lecció

$$\left\{ \left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} \right) \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

és un recobriment obert de $\mathbb{N}$ ja que cada conjunt en aquesta família és un interval obert centrat en n i de radi $1/2$ i

$$\mathbb{N} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} \right).$$

Exemple 8.1.4. Considerem $A = [0, 1) \subset \mathbb{R}$. Aleshores, la col·lecció $\mathcal{F} = \{(-1, 2/3), (1/2, 2)\}$ és un recobriment obert de $[0, 1)$.

Recordem la construcció següent de la teoria de conjunts. Siguin X, Y dos conjunts i sigui $f : X \to Y$ una aplicació. Si $\{X_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ és un recobriment de X, les restriccions $f_\gamma : X_\gamma \to Y$ verifiquen

$$f_{\gamma | X_\gamma \cap X_{\gamma'}} = f_{\gamma' | X_\gamma \cap X_{\gamma'}}, \quad \forall \gamma, \gamma' \in \Gamma$$

i, recíprocament, donades aplicacions $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, $f_\gamma : X_\gamma \to Y$ que verifiquen les condicions anteriors, existeix una única aplicació de conjunts $f : X \to Y$ tal que f_γ és $f_{|X_\gamma}$, per a tot $\gamma \in \Gamma$. Les construccions que buscàvem per construir aplicacions contínues són les següents:

Proposició 8.1.5. *Siguin ara X, Y espais topològics. Amb la mateixa notació, suposem f_γ contínua per a tot $\gamma \in \Gamma$. Aleshores*

(1) Si el recobriment és tancat i finit, f és contínua.

(2) Si el recobriment és obert, f és contínua.

Demostració. (1) Sigui T un tancat de Y. Aleshores

$$f^{-1}(T) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(f^{-1}(T)\cap X_\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma^{-1}(T)$$

Com que $f_\gamma^{-1}(T)$ és un tancat de X_γ, que és tancat de X, $f_\gamma^{-1}(T)$ és tancat de X i $f^{-1}(T)$, en ser reunió finita de tancats, és tancat.

(2) Sigui U obert de Y. Aleshores

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(f^{-1}(U)\cap X_\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma^{-1}(U).$$

Com que $f_\gamma^{-1}(U)$ és un obert de X_γ i X_γ és obert, tenim que $f_\gamma^{-1}(U)$ és un obert de X. Així, $f^{-1}(U)$ és reunió d'oberts i per tant és un obert.

□

Observació 8.1.6. *En cas d'un recobriment tancat la condició de finitud és una condició necessària. Per exemple, siguin $X = [0,1], X_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, amb $n > 0$, i $X_\infty = \{0\}$. Sigui $f : X \to \mathbb{R}$ l'aplicació identitat a $(0,1]$ i $f(0) = 1$. Aquesta aplicació no és contínua i, en canvi, fa $f_n = f_{|X_n}$, $f_\infty = f_{|X_\infty}$ són contínues i $f_{n|X_n\cap X_m} = f_{m|x_n\cap X_m}$ per a tot $n, m \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$.*

8.2 Espais quasi-compactes

8.2.1 Espais quasi-compactes

Definició 8.2.1 (Quasi-compacte)**.** Sigui (X,τ) un espai topològic. Diem que X és *quasi-compacte* si per a tot recobriment obert $\{U_i\}_{i\in I}$ de X existeix un subrecobriment finit, és a dir, un subconjunt $J \subset I$ finit tal que $\{U_j\}_{j\in J}$ és un recobriment.

Caracteritzem ara els subconjunts d'un espai topològic X compactes. Si X és un espai topològic i $A \subseteq X$ és un subconjunt dotat de la topologia subespai, quan és A quasi-compacte?

Proposició 8.2.2. *Si X és un espai topològic i $A \subseteq X$ un subespai topològic amb la topologia induïda per la inclusió, aleshores A és compacte si i només si per tota col·lecció d'oberts $\{U_i\}_{i\in I}$ tals que $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ existeix un conjunt finit $\{i_1,\ldots,i_n\} \subset I$ tal que $A \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{i_j}$.*

Demostració.
- $\boxed{\Rightarrow}$ A és compacte si $\forall\{U_i\}_{i\in I}$ tal que $A = \bigcup_{i\in I} U_i$ (és a dir, per tot recobriment d'A) $\exists\{i_1,\ldots,i_n\} \subset I$ tal que $A = \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$.

Ara, si $\{U_i\}_{i\in I}$ és un recobriment obert d'A, $\forall i \in I$ U_i és obert d'A amb la topologia subespai. Per tant, $\exists W_i$ obert de X tal que $U_i = W_i \cap A$. D'aquesta manera

$$A = \bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I}(W_i \cap A) \Longrightarrow A \subseteq \bigcup_{i\in I} W_i$$

Més enllà, per la hipòtesis de compacitat de A, existeix un conjunt d'índexs finit $\{i_1,\dots,i_n\} \subset I$ tal que $U_{i_1},\cdots,U_{i_n}$ és un recobriment obert de A. Així doncs, existiran oberts de X, $\{W_{i_1},\dots,W_{i_n}\} \subset \{W_i\}_{i\in I}$ tals que $U_{i_k} = W_{i_k} \cap A$ i així obtenim que $A \subseteq \bigcup_{k=1}^n W_{i_k}$.

- $\boxed{\Leftarrow}$ Suposem que es compleix que $\forall \{U_i\}_{i\in I}$ col·lecció d'oberts de X tals que $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ existeix $\{i_1,\dots,i_n\} \subset I$ tal que $A \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$. Aleshores, prenem un recobriment obert d'A, $\{V_i\}_{i\in I}$ de forma que $A = \bigcup_{i\in I} V_i$. Escollim $\forall i$ un obert U_i de X tal que $V_i = U_i \cap A$. D'aquesta manera, per hipòtesis

$$A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i \Longrightarrow \exists J \subset I,\ |J| < \infty,\ tq\ A = \bigcup_{j\in J} V_j.$$

D'aquesta manera obtenim que A és compacte.

□

Tot això ho fem motivats pel teorema de Heine-Borel d'anàlisi, que diu que un conjunt tancat i acotat de $\mathbb{R}$ admet, per a tot recobriment obert, un subrecobriment finit. Aquest teorema el demostrarem al final d'aquest capítol.

Exemple 8.2.3. Pel teorema esmentat de Heine-Borel, tot subconjunt tancat i acotat de $\mathbb{R}$ és quasi-compacte. En particular, tot interval $[a,b]$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ és quasi-compacte. Més en general, si $X = \mathbb{R}^n$ amb la topologia usual, aleshores $A \subset X$ és compacte si i només si és tancat i acotat. Això més tard ho veurem millor.

Exemple 8.2.4. Un espai topològic finit és quasi-compacte.

Exemple 8.2.5. Un conjunt infinit amb la topologia discreta no és quasi-compacte, ja que el recobriment obert donat pels punts no té un subrecobriment finit.

Corol·lari 8.2.6 (Exemple)**.** *$\mathbb{N}$ no és quasi-compacte en $\mathbb{R}$ (amb la topologia usual).*

Demostració. Considerem el següent recobriment obert de $\mathbb{N}$:

$$\mathcal{F} = \left\{ \left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Aleshores, cada element de $\mathcal{F}$ conté exactament un nombre natural i la col·lecció $\mathcal{F}$ conté un nombre numerable però infinit d'elements. Si $\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{F}$, aleshores $\mathbb{N} \not\subset \bigcup_{I\in\mathcal{F}^*} I$, ja que $\mathcal{F}^* \subseteq \mathbb{F}$ és finit implica que existeix alguna $n \in \mathbb{N}$ que no està continguda a cap conjunt de $\mathcal{F}^*$ i per tant $\mathcal{F}^*$ no és un recobriment. □

8.2.2 Quasi-compacitat de conjunts finits

A l'exemple 2 (**??**) hem vist que tot espai topològic finit és quasi-compacte. Ara intentarem provar aquest fet, provant abans que tot subconjunt finit d'un espai topològic és quasi-compacte.

Proposició 8.2.7. *Sigui X un espai topològic qualsevol. Si $A \subseteq X$ és un subconjunt finit, aleshores és quasi-compacte en X.*

Demostració. Sigui $A \subseteq X$ un conjunt finit. Sigui, per exemple, $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Sigui $\mathcal{F} = \{A_i \ : \ i \in I\}$ un recobriment obert d'A. Així

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Com $\mathcal{F}$ recobreix A, el conjunt A pot ser partit en com a màxim n grups d'elements d'A on cada element d'aquests grups està contingut en algun $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in I$. Per tant, existeix una subcol·lecció $I^* \subseteq I$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I^*} A_i,$$

a més $|I^*| \leq n$. Per tant,

$$\mathcal{F}^* = \{A_i \ : \ i \in I^*\}$$

és un subrecobriment finit de A. □

Corol·lari 8.2.8. *Tot espai topològic X finit és quasi-compacte.*

Demostració. Per la proposició, com tot subconjunt $A \subseteq X$ és finit, aleshores és quasi-compacte. Així X és quasi-compacte. □

8.2.3 Propietat de la intersecció finita

En aquest apartat donaré una definició equivalent de subconjunt quasi-compacte, en forma de teorema. Als apunts del Naranjo-Navarro surt com una definició alternativa, però jo ho entenc millor així.

Teorema 8.2.9. *Sigui X un espai topològic. Aleshores X és quasi-compacte si, i només si, per a tota col·lecció $\mathcal{F}$ de tancats de X satisfent que tota subcol·lecció finita de $\mathcal{F}$, $\{F_1, \ldots, F_n\} \subset \mathcal{F}$ compleix que $\bigcap_{i=1}^n F_i \neq \emptyset$, satisfà*

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$$

Demostració.

- $\boxed{\Rightarrow}$ Suposem que X és compacte. Sigui $\mathcal{F}$ una família de tancats de X tal que tota subfamília finita $\{F_1, \ldots, F_n\}$ de $\mathcal{F}$ satisfà

  $$\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset.$$

  Hem de veure que $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \neq \emptyset$. Suposem que no, és a dir, que aquesta intersecció és buida. Prenent complementaris,

  $$\left(\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \right)^c = \emptyset^c \Leftrightarrow \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F^c = X.$$

  Com F és tancat, $\forall F \in \mathcal{F}$, F^c és obert. Per tant, $\{F^c \ : \ F \in \mathcal{F}\}$ és un recobriment obert de X. Com X és compacte, existeix un subrecobriment finit, sigui $\{F_1^c, \ldots, F_n^c\} \subseteq \{F^c \ : \ F \in \mathcal{F}\}$ tal que

  $$\bigcup_{i=1}^{n} F_i^c = X.$$

  Tornant als complementaris

  $$\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i^c \right)^c = X^c \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} F_i = \emptyset$$

  cosa que contradiu la hipòtesis inicial.

- $\boxed{\Leftarrow}$ Suposem que X no és compacte i prenent complementaris s'arriba de manera anàloga a una contradicció.

$\square$

8.3 Propietats dels espais quasi-compactes

8.3.1 Tancats a espais quasi-compactes

Proposició 8.3.1. *Sigui X un espai topològic quasi-compacte i sigui $A \subseteq X$. Si A és tancat, aleshores A és quasi-compacte.*

Demostració. Sigui $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$ un recobriment obert de A. Aleshores,

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Com A és tancat, A^c és obert. Notem que $\{A_i\}_{i \in I} \cup \{A^c\}$ és un recobriment obert de tot X. Com X és un espai quasi-compacte, existeix un subrecobriment finit obert $\{A_1, \ldots, A_n\} \cup \{A^c\}$ tal que

$$X \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \cup (A^c)$$

però aleshores $\{A_1, \ldots, A_n\}$ és un subrecobriment finit de A, ergo A és quasi-compacte en X. $\square$

8.3.2 Conjunts quasi-compactes a espais de Hausdorff

A l'apartat anterior hem vist que si X és un espai topològic quasi-compacte i $A \subseteq X$, aleshores A tancat implica A quasi-compacte. Ara veurem que si X és de Hausdorff, aleshores se satisfà la implicació recíproca.

Proposició 8.3.2. *Sigui X un espai topològic de Hausdorff i $A \subseteq X$. Si A és quasi-compacte en X, aleshores és tancat.*

Demostració. Sigui A un conjunt quasi-compacte en X. Sigui $y \in A^c$ un punt fix. Com X és un espai de Hausdorff, i la propietat de Hausdorff és hereditària (**??**), A també és de Hausdorff. Aleshores, $\forall x \in A$, $\exists U_x$ entorn obert de x i $V_{(y,x)}$ de y tals que

$$U_x \cap V_{(y,x)} = \emptyset.$$

Aleshores tenim que $\{U_x\}_{x \in A}$ és un recobriment obert d'A. Com A és quasi-compacte, existeix un subrecobriment finit $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$ on $x_i \in A$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ i

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}.$$

Corresponentment, el conjunt $\{V_{(y,x_1)}, \ldots, V_{(y,x_n)}\}$ d'entorns oberts tals que

$$U_{x_i} \cap V_{(y,x_i)} = \emptyset, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Sigui

$$V \equiv \bigcap_{i=1}^{n} V_{(y,x_i)}.$$

Aleshores, V és una intersecció finita d'oberts i per tant és obert. A més, V és un entorn obert de y. Addicionalment, $A \cap V = \emptyset$ ja que $\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ recobreix A. Com $A \cap V = \emptyset$ això implica que $V \subseteq A^c$. Aleshores V és un entorn obert de y, que està contingut totalment en A^c, és a dir, $y \in (A^c)^o$. Per tant $(A^c)^o = A^c \Rightarrow A$ és tancat. $\square$

8.3.3 Preservació de la quasi-compacitat per aplicacions contínues

Proposició 8.3.3. *Sigui $f : X \to Y$ una aplicació contínua i exhaustiva (aquesta condició es pot canviar dient $f : X \to Y$ contínua i que si X és compacte aleshores $f(X)$, el conjunt imatge, és compacte en Y. Més en general, si $A \subseteq X$ és compacte en Y, no cal l'exhaustivitat) entre espais topològics. Si X és quasi-compacte, aleshores Y també ho és.*

Demostració. Sigui $\{U_i\}_{i\in I}$ un recobriment obert de Y. Aleshores $\{f^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ és un recobriment obert de X i, per tant, existeix $J \subseteq I$ finit tal qeu

$$X = \bigcup_{i\in J} f^{-1}(U_i).$$

Així, com f és exhaustiva, $Y = \bigcup_{i\in J} U_i$. □

Proposició 8.3.4. *Sigui X i Y dos espais topològics i $f : X \to Y$ una aplicació contínua i bijectiva. Si X és quasi-compacte i Y és de Hausdorff, aleshores f és un homeomorfisme.*

Demostració. Com f ja és contínua i bijectiva d'hipòtesis, només queda veure que f^{-1} és contínua. Això és, veure que per a qualsevol obert U de X, $(f^{-1})^{-1}(U)$ és obert en Y (equivalentment, que f és oberta).

Sigui U un obert de X. Aleshores U^c és tancat en X i com X és quasi-compacte, U^c és també quasi-compacte. Per la proposició anterior (**??**) $f(U^c)$ és quasi-compacte, i per la proposició (**??**), com Y és de Hausdorff, $f(U^c)$ és tancat en Y. Finalment $f(U^c) = f(U)^c$ que és tancat i aleshores $(f(U)^c)^c = f(U)$ és obert com volíem veure. □

Lema 8.3.5. *Sigui X un espai topològic quasi-compacte i Y un espai topològic de Hausdorff, i sigui $f : X \to Y$ contínua. Aleshores f és tancada.*

Demostració. Sigui C un tancat en X. Per la proposició (**??**) C és quasi-compacte en X i per la proposició (**??**) com f és contínua, $f(C)$ és quasi-compacte en Y. Per la proposició (**??**) tot quasi-compacte en un espai T_2 és tancat, per tant $f(C)$ és tancat. □

8.3.4 Quocients a espais quasi-compactes

Teorema 8.3.6. *Siguin X i Y espais topològics i $f : X \to Y$. Si X és quasi-compacte, Y de Hausdorff i f contínua i exhaustiva, aleshores si $\sim_f$ és la relació d'equivalència definida com $x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, tenim que $X/\sim_f \cong Y$.*

Demostració. Del lema (**??**) veiem que com X és compacte, Y de Hausdorff i f, contínua, que f és una aplicació tancada. Com, a més, és exhaustiva, $f(X) = Y$. Pel teorema (**??**) $X/\sim_f \cong f(X) = Y$. □

8.4 Productes i espais quasi-compactes

8.4.1 El lema del tub

Per tractar el producte d'espais quasi-compactes necessitem un resultat previ.

Lema 8.4.1 (Lema del tub)**.** *Sigui X un espai topològic i sigui Y un espai topològic quasi-compacte. Per a tot punt $x_0 \in X$ i per a tot entorn E de $\{x_0\} \times Y$ a $X \times Y$, existeix un entorn obert U de x_0 a X tal que $U \times Y \subset E$.*

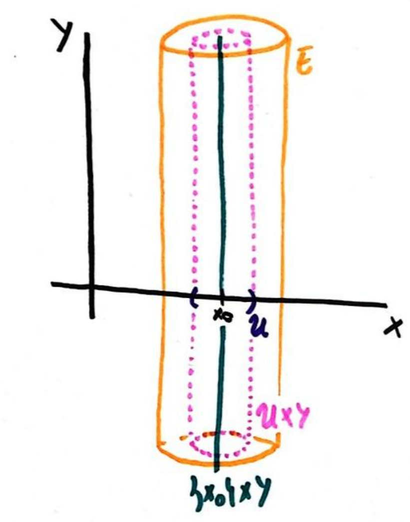
Demostració. Utilitzant que els oberts de la forma $U \times V$ formen base (recordem de (**??**)) obtenim que, per a tot $y \in Y$, existeixen oberts U_y de X i V_y de Y tal que

$$(x_0, y) \in U_y \times V_y \subset E.$$

Aleshores $\{V_y\}_{y \in Y}$ formen un recobriment de Y. Per la quasi-compacitat existeixen $y_1, \ldots, y_n \in Y$ tals que $Y = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$. Sigui $U = U_{y_1} \cup \cdots \cup U_{y_n}$ un entorn obert de x_0. Tenim que si $(x, y) \in U \times Y$ aleshores existeix $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $y \in V_j$. Així

$$(x, y) \in U \times V_j \subset U_v \times V_j \subset E.$$

Per tant $U \times Y \subset E$. □



Observació 8.4.2. *Si Y no és compacte el lema és fals. Per exemple, siguin $X = Y = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ i sigui E el complementari del conjunt $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy = 1\}$. Aleshores no existeix un entorn U del 0 a $\mathbb{R}$ com al lema.*

Corol·lari 8.4.3. *Amb les mateixes hipòtesis del lema, la projecció $p_X = X \times Y \to X$ és tancada.*

Demostració. Sigui T un tancat de $X \times Y$ i sigui $x_0 \in X \setminus p_X(T)$. Per construcció, $X \times Y \setminus T$ és un obert que conté $\{x_0\} \times Y$ i, pel lema, existeix un obert U tal que $x_0 \in U$ i $U \times Y \subset X \times Y \setminus T$. Projectant sobre X: $U \subset X \setminus p_X(T)$. En conseqüència, x_0 és interior a $X \setminus p_X(T)$. □

8.4.2 Producte de quasi-compactes

Teorema 8.4.4. *Siguin $X_1, \ldots, X_n$ espais topològics. El producte $X_1 \times \cdots \times X_n$ és quasi-compacte si i només si els espais $X_1, \ldots, X_n$ ho són.*

Demostració. Si $X_1 \times \cdots \times X_n$ és quasi-compacte, cada factor ho és aplicant a les projeccions la proposició anterior.

Per veure la implicació contrària, per inducció, és suficient tractar el cas $n = 2$. Sigui $\mathcal{A} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recobriment obert de $X \times Y$. Fixat $x_0 \in X$, $\mathcal{A}$ és també un recobriment obert de $\{x_0\} \times Y$ i, per tant, existeixen $i_1, \ldots, i_n \in I$ tals que $\{x_0\} \times Y \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$. Aplicant el lema del tub (**??**)a $E = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ deduïm: per a tot punt $x_0 \in X$ existeix un entorn obert W_{x_0} de x_0 a X tal que $W_{x_0} \times Y$ està recobert per un nombre finit d'elements de $\mathcal{A}$. Com que $\{W_{x_0}\}_{x_0 \in X}$ és un recobriment de l'espai quasi-compacte X obtenim que

$$X = W_{x_1} \cup \cdots \cup W_{x_n}$$

per a certs $x_1, \ldots, x_n \in X$. Ajuntant els oberts que per a cada $i = 1, \ldots, n$, donen un recobriment finit de $W_{x_i} \times Y$ per elements de $\mathcal{A}$, obtenim un subrecobriment finit. □

Exemple 8.4.5. Alguns exemples:

(1) $I = [0, 1]$ és quasi-compacte

(2) $I^n \subset \mathbb{R}^n$ és quasi-compacte, ja que és $I \times I \times \cdots \times I$, n vegades.

Corol·lari 8.4.6. *Tot subconjunt tancat i afitat (o acotat) de $\mathbb{R}^n$ (amb τ_e) és quasi-compacte.*

Demostració. Si $T \subseteq \mathbb{R}^n$ és afitat, existeix un interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tal que $T \subset [a, b]^n$. Així T és un tancat en un quasi-compacte, per tant és quasi-compacte. □

8.5 Espais compactes

Definició 8.5.1 (Espais compactes)**.** Sigui (X, τ)

Recordem que un subespai tancat d'un espai quasi-compacte és quasi-compacte. En canvi, no és cert que un subespai quasi-compacte d'un espai topològic sigui tancat. Per exemple, sigui $X = \{1, 2\}$ amb la topologia grollera. Aleshores $\{1\}$ és un subespai quasi-compacte, però no és tancat. La introducció de la propietat de separació permet tenir aquesta propietat en els espais compactes.

Veiem que ja vam afirmar a (**??**) que si X és de Hausdorff, aleshores un subespai $A \subseteq X$ quasi-compacte és tancat. La hipòtesi de Hausdorff és necessària. Però jo pensava: cal que el subconjunt $A \subseteq X$ sigui de Hausdorff, a més de quasi-compacte? (és a dir, cal que sigui compacte?). Bé, doncs si A és quasi-compacte i X és de Hausdorff, com la propietat de Hausdorff és hereditària (**??**), automàticament A és de Hausdorff, ergo A és compacte. Veiem doncs, que el següent teorema és, en realitat, el mateix teorema que (**??**). Tot i així, l'enunciaré perquè aquí (als apunts del Naranjo-Navarro) és una mica més precís.

Proposició 8.5.2. *Tot subconjunt compacte d'un espai de Hausdorff és tancat.*

Demostració. Amb l'observació que he fet al principi i la demostració de la proposició (**??**) ja tenim suficient. □

Una conseqüència de la proposició aquesta és la caracterització següent dels compactes de $\mathbb{R}^n$:

Corol·lari 8.5.3. *$X \subseteq \mathbb{R}^n$ és compacte si, i només si, X és tancat i afitat.*

Demostració. Ja s'ha vist que si X és tancat i afitat, aleshores és quasi-compacte al corol·lari (**??**) i, en ser $\mathbb{R}^n$ de Hausdorff, per (**??**) X és compacte.

Recíprocament, si X és compacte és tancat per la proposició (**??**), i si X no fos afitat, $\mathcal{A} = \{B_n(0) \cap X\}_{n \in \mathbb{N}}$ és un recobriment obert sense recobriment finit (això, pel contrarrecíproc, prova que X és afitat). □

Exemple 8.5.4. Alguns exemples:

(1) La esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ és compacta.

(2) $\mathbb{R}^n$, amb $n > 0$, els hiperplans de $\mathbb{R}^n$, la paràbola,... no són compactes.

També a conseqüència de la proposició s'obté el corol·lari següent:

Corol·lari 8.5.5. *Sigui $f : X \to Y$ una aplicació contínua entre espais topològics tals que X és quasi-compacte i Y és de Hausdorff. Aleshores f és tancada.*

Demostració. Sigui T un tancat de X. Com que X és quasi-compacte, per (**??**) T és quasi-compacte. Com f és contínua, per (**??**) $f(T)$ és quasi-compacte. Com Y és de Hausdorff, $f(T)$ és tancat. Aleshores f és tancada. □

És clar que la compacitat és una propietat invariant per homeomorfismes i, per tant, podem utilitzar el corol·lari anterior per obtenir que certs espais topològics no són homeomorfs. Per exemple:

(1) L'el·lipse i la paràbola no són homeomorfes.

(2) El cilindre obert i l'esfera no són homeomorfs.

(3) $(0,1)$ i $[0,1]$ no són homeomorfs.

Proposició 8.5.6. *Tot espai topològic compacte és normal.*

Demostració. Siguin F_1, F_2 dos tancats disjunts d'un espai compacte X. Com que F_1 és compacte, per a cada punt $x \in F_2$ existeixen, pel lema, oberts disjunts U_x i V_x tals que $F_1 \subset U_x$ i $x \in V_x$. Aleshores

$$F_2 \subset \bigcup_{x \in F_1} V_x$$

i, per la compacitat de F_2, existeixen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tals que $F_2 \subset V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$. Definint $V = V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$ i $U = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$, obtenim dos oberts disjunts tals que $F_1 \subset U$ i $F_2 \subset V$. □

8.6 Espais mètrics compactes

Tot espai mètric dóna lloc, de manera natural, a un espai topològic (veure topologia usual (**??**)). Així doncs, quan ens referim a espais mètrics compactes estem tractant la relació entre la compacitat a espais mètrics i la compacitat als espais topològics als que donen pas. El Teorema de Heine-Borel (**??**) caracteritza els subconjunts de $\mathbb{R}^n$ que són compactes, identificant-los amb els tancats i acotats. Per tant, és un teorema que es refereix **únicament a espais topològics amb la topologia euclidiana**.

Exemple 8.6.1. $(\mathbb{R}, d)$ espai mètric amb d distància euclidiana. El subconjunt $S = (0,1) \subset \mathbb{R}$ no és compacte en $\mathbb{R}$. Per veure-ho, hem de trobar un recobriment obert $\mathcal{F}$ de S que no tingui un subrecobriment finit. Considerem el següent recobriment obert de S:

$$\mathcal{F} = \left\{ \left(0, 1 - \frac{1}{n}\right) \,:\, n \in \mathbb{Z},\ n \geq 1 \right\} = \left\{ \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{2}{3}\right), \left(0, \frac{3}{4}\right), \cdots \right\}.$$

Clarament $\mathcal{F}$ és un subrecobriment infinit de $(0,1)$. A més,

$$(0,1) \subseteq \bigcup_{k=2}^{\infty} \left(0, 1 - \frac{1}{k}\right).$$

Sigui $\mathcal{F}^*$ un subconjunt finit de $\mathcal{F}$ que conté p elements. Aleshores

$$\mathcal{F}^* = \left\{ \left(0, 1 - \frac{1}{n_1}\right), \ldots, \left(0, 1 - \frac{1}{n_p}\right) \right\}$$

Sigui $n^* = \max\{n_1, \ldots, n_p\}$. Donada la naturalesa dels oberts de $\mathcal{F}$,

$$\bigcup_{k=1}^{p} \left(0, 1 - \frac{1}{n_k}\right) \subseteq \left(0, 1 - \frac{1}{n^*}\right)$$

Però per a que $(0,1) \subseteq (0, 1 - 1/n^*)$ necessitem $1 \leq 1 - 1/n^*$ i $n^* \in \mathbb{N}$, per tant $n^* > 0$, és a dir, $1/n^* > 0$, aleshores $1 - 1/n^* > 1$. Per tant qualsevol subconjunt $\mathcal{F}^*$ finit de $\mathcal{F}$ no pot cobrir a tot $S = (0,1)$. Per tant, no és compacte.

8.6.1 Espais seqüencialment compactes

En aquest apartat (X, d) és un espai mètric. Compararem la noció de compacitat en espais mètrics amb la noció següent associada a successions.

Definició 8.6.2 (Espais mètris seqüencialment compactes)**.** (X, d) és *seqüencialment compacte* (o compacte per successions) si per a tota successió $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, amb $x_n \in X$, existeix una successió parcial $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que és convergent.[1]

L'objectiu és veure que, en espais mètrics, compacte i seqüencialment compacte signifiquen el mateix. Necessitem alguns resultats previs. Tot això no ho acabo d'entendre i, més encara, no entenc per què ho fem a topologia. Així doncs, ho copiaré tal qual està als apunts del Naranjo-Navarro.

Definició 8.6.3 (Diàmetre)**.** Sigui $A \subset X$. El *diàmetre* es defineix com

$$diam(A) = \sup_{x,y\in A} \{d(x,y)\}.$$

és un element de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Exemple 8.6.4. Exemples de diàmetres:

(1) $diam(\mathbb{R}) = \infty$.

(2) $diam([a,b]) = diam((a,b)) = b - a$.

(3) En general, el diàmetre d'una bola de radi r en un espai mètric és menor o igual a $2r$.

(4) Si A és compacte, com que d és contínua, $d(A \times A)$ és un compacte de $\mathbb{R}$ i per tant $diam(A) < \infty$.

Definició 8.6.5 (Nombre de Lebesgue)**.** Sigui $\mathcal{A} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recobriment obert de X. Diem que $\lambda \in \mathcal{R}$, $\lambda > 0$ és un número de Lebesgue per al recobriment $\mathcal{A}$ si per a tot subconjunt $A \subset X$ amb $diam(A) < \lambda$ existeix $i \in I$ tal que $A \subset U_i$.

Proposició 8.6.6. *Si X és seqüencialment compacte per a tot recobriment obert d'X existeix un número de Lebesgue.*

[1] Recordem que si $(x_n)_n$ és una successió, definíem una successió parcial $(x_{n_k})_k$ com una subsuccessió tal que $(n_k)_k$ és estrictament creixent. Es denotava per $(x_{n_k})_k \vdash (x_n)_n$.

Demostració. Raonem per absurd. Suposem que no existeix cap número de Lebesgue per a un recobriment obert $\{U_i\}_{i\in I}$. Per a tot natural n existirà un subconjunt A no contingut en cap obert U_i tal que $diam(A) < 1/n$. Observem que si $x_n \in A$, tenim, per definició del diàmetre, que $B_{1/n}(x_n) \supset A$. En particular, cap obert del recobriment conté la bola $B_{1/n}(x_n)$.

Sigui x el límit d'una parcial convergent de la successió $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i sigui $j \in I$ tal que $x \in U_j$. Si m és prou gran, $B_{\frac{1}{m}}(x) \subset U_j$. Un element x_n de la parcial convergent tal que $n > 2m$ i $d(x_n, x) < \frac{1}{2m}$ verifica, per a tot $y \in B_{1/n}(x_n)$:

$$d(x,y) \leq d(y,x_n) + d(x_n,x) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2m} < \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m}$$

Per tant $B_{1/n}(x_n) \subset B_{1/m}(x) \subset U_i$ absurd. □

Veiem ara el teorema central de la secció:

Teorema 8.6.7. *Sigui (x,d) un espai mètric. Són equivalents*

(a) X és compacte.

(b) X és seqüencialment compacte.

Demostració. $\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Sigui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successió a X, i posem $F_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Primer provarem que $\cap_n \overline{F_n} \neq \emptyset$. Per absurd, suposem que $\cap_n \overline{F_n} = \emptyset$. Per la compacitat $\overline{F_{n_1}} \cap \cdots \cap \overline{F_{n_k}} = \emptyset$. Això porta a una contradicció: si $m = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$, aleshores

$$\emptyset \neq F_m \subset F_{n_1} \cap \cdots \cap F_{n_k} \subset \overline{F_{n_1}} \cap \cdots \cap \overline{F_{n_k}}.$$

Sigui ara $a \in \cap_n \overline{F}_n$. Per ser adherent a F_m tenim que

$$B_{\frac{1}{m}}(a) \cap F_m \neq \emptyset.$$

Considerem X_{n_m} en aquesta intersecció, i considerem la successió $\{x_{n_m}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Per a tot m, $d(x_{n_m}, a) < \frac{1}{m}$. Per tant, $\lim_{m\to\infty} x_{n_m} = a$.

$\boxed{(b) \Rightarrow (a)}$ Sigui $U = \{U_i\}_{i\in I}$ un recobriment obert de X. Per la proposició, existeix un número de Lebesgue λ per a aquest recobriment. Sigui $0 < \lambda_0 < \frac{\lambda}{2}$. Aleshores, per a tot $x \in X$, existeix $j \in I$ tal que $B_{\lambda_0}(x) \subset U_j$. Sigui $x_1 \in X$ arbitrari i sigui U_1 un obert del recobriment tal que $B_{\lambda_0}(x_1) \subset U_1$. De la mateixa manera seleccionem per a $x_2 \in X \setminus U_1$ un obert U_2 tal que $B_{\lambda_0}(x_2) \subset U_2$. Suposant que U no admet un subrecobriment finit, podem repetir aquest procés indefinidament, fins a construir una successió $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'elements de X verificant la propietat següent: per a tot n, si $x_m \in B_{\lambda_0}(x_n)$, aleshores $m = n$.

En particular, per a tot n, m diferents $d(x_n, x_m) \geq \lambda_0$. És clar que una successió amb aquesta propietat no pot tenir una successió parcial convergent, absurd. □

Definició 8.6.8 (Aplicació uniformement contínua)**.** Una aplicació $f : X \to Y$ entre dos espais mètrics és *uniformement contínua* si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que per a tot $x \in X$, $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$ (és a dir, δ no depèn de x).

Proposició 8.6.9. *Si $f : X \to Y$ és una aplicació contínua entre espais mètrics i X és compacte, aleshores f és uniformement contínua.*

Demostració. Considerem el recobriment obert de X: $\{f^{-1}(B_{\varepsilon/2}(y))\}_{y\in Y}$. Com que X és compacte existeix un número de Lebesgue λ per a aquest recobriment. Tenim així que, per a tot $x \in X$, existeix $y \in Y$ tal que

$$f(B_{\lambda/2}(x)) \subset B_{\varepsilon/2}(y).$$

En particular, $f(x) \in B_{\varepsilon/2}(y)$, i, per la desigualtat triangular, es té que $B_{\varepsilon/2}(y) \subset B_\varepsilon(f(x))$.

Definint $\delta = \lambda/2$ arribem a

$$f(B_\delta(x)) \subset B_{\varepsilon/2}(y) \subset B_\varepsilon(f(x)).$$

□

8.7 El lema de Heine-Borel

Per completar el tema, afegim aquí una demostració del teorema de Heine-Borel.

Teorema 8.7.1 (Heine-Borel)**.** *Tot subconjunt tancat i afitat de $\mathbb{R}$ és quasi compacte.*

Demostració. Sigui $X \subseteq \mathbb{R}$ tancat i afitat. En particular, existeixen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tals que $X \subset [a, b]$. Com que un tancat és quasi compacte, és suficient veure que $[a, b]$ ho és. Sigui $\mathcal{A}$ un recobriment obert de $[a, b]$. Definim

$$\mathcal{C} = \{x \in (a, b] \ : \ [a, x] \text{ pot ser recobert per un nombre finit d'oberts de } \mathcal{A}\}$$

$\mathcal{C}$ no és buit, ja que donat $U \in \mathcal{A}$ tal que $a \in U$, existirà un $y' > a$ tal que $[a, y') \subset U$, ja que els intervals oberts són base. Aleshores, per a qualsevol $a < y < y'$, tindrem $[a, y] \subset U$ i, per tant, $y \in \mathcal{C}$. Sigui $c = \sup \mathcal{C}$. La resta de la demostració consisteix a provar que $c \in \mathcal{C}$ i que $c = b$.

Veiem primer que $c \in \mathcal{C}$, és a dir, que $[a, c]$ es pot recobrir per un nombre finit d'elements de $\mathcal{A}$. Sigui $V \in \mathcal{A}$ tal que $c \in V$. Com que $c > a$, existeix $a < c' < c$ tal que $(c', c] \subset V$. Com c és el suprem de $\mathcal{C}$, existeix $x \in \mathcal{C} \cup (c', c]$. Aleshores $[a, c] = [a, x] \cup [x, c]$. Per definició de $\mathcal{C}$, $[a, x]$ es pot recobrir per un nombre finit d'elements de $\mathcal{A}$ i $[x, c] \subset V \in \mathcal{A}$.

Finalment provem que $c = b$. Si $c < b$, agafant $V \in \mathcal{A}$ com abans, trobem un d tal que $c < d \leq b$ i $[c, d] \subset V$. Com que $[a, d] = [a, c] \cup [c, d]$ i $c \in \mathcal{C}$, tenim que $d \in \mathcal{C}$, la qual cosa contradiu que c sigui el suprem. □

8.8 Espais localment compactess

El propòsit d'aquest capítol és construir espais compactes (quasi-compactes + Hausdorff) a partir d'altres no compactes. Aquest procés no és únic i aquí ens concentrem en el cas que únicament s'afegeix un punt a l'espai inicial per obtenir un espai compacte. La construcció gaudeix de propietats especialment agradables quan l'espai inicial verifica condicions de caire local, que són estudiades en el primer apartat.

Definició 8.8.1 (Localment compacte)**.** Sigui (X, τ) un espai topològic. Diem que X és *localment compacte* si és de Hausdorff i tot punt de X té un entorn compacte.

Exemple 8.8.2. $\mathbb{R}^n$ és localment compacte (amb la topologia euclidiana). En efecte, clarament és de Hausdorff pel que ja vam veure al capítol de Propietats de separació (**??**). Veiem que tot punt $x \in \mathbb{R}^n$ té un entorn compacte. Sigui $x \in \mathbb{R}^n$ un punt qualsevol. Prenem $r > 0$ i la bola tancada $\overline{B(x, r)}$ és un entorn compacte de x. Com ja vam veure, a tot espai topològic amb la topologia usual, un subespai era compacte si era tancat i acotat. Aleshores, com $\overline{B(x, r)}$ és tancada i acotada, és compacte. Observem, però, que $\mathbb{R}^n$ no és compacte per sí sol. Així doncs, tenim un contraexemple que localment compacte no implica compacte.

Exemple 8.8.3. Sigui X un conjunt dotat de la topologia discreta. Aleshores, tenim que $\forall x \in X$, $\{x\}$ és un conjunt compacte (X és de Hausdorff, veure **??**) i és un entorn de x. Aleshores, X és un espai topològic localment compacte. Notem que si X és finit o infinit però numerable, aleshores és compacte. Però si és infinit no numerable, no.

Proposició 8.8.4. *Tot espai compacte és localment compacte.*

Demostració. $\forall x \in X$, podem prendre X com a entorn de x i X és compacte, per tant tot punt té un entorn compacte. □

Proposició 8.8.5. *Sigui X un espai topològic localment compacte i sigui $A \subset X$ un tancat. Aleshores A és localment compacte.*

Demostració. Sigui $x \in A$ i sigui K un entorn compacte de x en X. Aleshores $K \cap A$ és un entorn de x a A i, en ser $K \cap A$ un tancat del compacte K, és compacte. □

La mateixa propietat és certa per a subconjunts oberts. Aquest fet s'obté com a conseqüència del fet següent:

Proposició 8.8.6. *Tot punt d'un espai localment compacte té una base d'entorns compactes.*

Demostració. Sigui $x \in X$ i sigui U un entorn obert de x. Per hipòtesis, existeix un entorn compacte K de x. Aleshores $U \cap K$ és un obert de K i, per tant, $T = K \setminus U \cap K$ és un tancat de K i $x \notin T$. Com que K és normal, existeixen oberts de K, W_x i W_T tals que $x \in W_x$ i $T \subset W_T$ i $W_x \cap W_T = \emptyset$. Per tant, $K \setminus W_T$ és un entorn de x a K. Com que K és un entorn de x, també $K \setminus W_T$ és entorn de x a X. Finalment observem que $K \setminus W_T$ és un tancat en un compacte, per tant és compacte i $K \setminus W_T \subset K \setminus T \subset U$. □

Definició 8.8.7 (Localment)**.** Sigui P una propietat dels espais topològics, com per exemple T_1, o compacte,... Diem que un espai topològic és *localment* P si tot punt de X té una base d'entorns verificant P.

La proposició anterior ens diu que en espais T_2 la definició d'espai localment compacte que hem donat al principi coincideix amb la que hauríem d'haver donat seguint aquesta definició general de "localment P".

Com havíem dit, tot obert d'un espai localment compacte és localment compacte, i ara ho veiem:

Corol·lari 8.8.8. *Un obert d'un espai localment compacte és localment compacte.*

Demostració. Sigui X localment compacte i $U \subset X$ un obert, i $x \in U$. Per la proposició (**??**) existeix un entorn compacte K de x tal que $x \in K \subset U$. Per tant, U és localment compacte. □

Proposició 8.8.9. *El producte de dos espais topològics localment compactes és localment compacte.*

Demostració. Siguin X, Y localment compactes. Com que el producte d'espais de Hausdorff és de Hausdorff, $X \times Y$ és de Hausdorff, per (**??**). Sigui $(x, y) \in X \times Y$ i siguin K_x, K_y entorns compactes de x, y respectivament. Aleshores $K_x \times K_y$ és un entorn compacte de (x, y). □

8.9 Compactificacions

Considerem un espai topològic (X, τ). Aleshores, X pot no ser compacte, depenent de la topologia τ. Si X no és compacte, potser volem construir un espai topològic compacte a partir de X que conservi tot el possible la topologia τ. El que farem serà estudiar espais topològics compactes que continguin a X com a subespai dens (és a dir, que $\overline{X}$ serà tot l'espai)

La definició que donen a [**mathonline**] és la següent: donat (X, τ) un espai topològic que no és compacte, una compactificació és un altre espai espai topològic (Y, τ') tal que X és subespai de Y i tal que X és dens en Y, és a dir, $\overline{X} = Y$. Jo posaré la definició que dóna els apunts [**naranjo**], encara que al cap i a la fi arribem a dos conceptes equivalents.

Definició 8.9.1 (Compactificació)**.** Sigui X un espai topològic. Una *compactificació* de X és un espai topològic compacte X^* i una aplicació contínua $h : X \to X^*$ tal que $X \to h(X)$ és homeomorfisme i $\overline{h(X)} = X^*$.

Exemple 8.9.2. Exemples de compactificacions:

(1) $X = (0, 1)$, $X^* = [0, 1]$ i $h : X \hookrightarrow X^*$ la inclusió.

(2) $X = \mathbb{R}^n$, $X^* = S^n$ i $h : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{p\} \hookrightarrow S^n$ la inversa de la projecció estereogràfica.

(3) Com que $(0, 1)$ és homeomorf a $\mathbb{R}$, l'exemple anterior ens dona una compactificació diferent de l'exemple 1 per al $(0, 1)$.

(4) $X = \mathbb{N}$, $X^* = \{0\} \cup \{1/n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ i $h(n) = 1/n$.

8.9.1 Compactificació per un punt o d'Alexandroff

Definició 8.9.3 (Compactificació d'Alexandroff)**.** Una compactificació $h : X \to X^*$ és d'*Alexandroff* o *per un punt* si $X^* \setminus h(X)$ és un punt. Aquest punt el denotem per ∞. De vegades posem $X^* = X_\infty$.

És a dir, la compactificació d'Alexandroff consisteix a agafar l'espai topològic corresponent i afegir-hi un punt que el fa compacte.

Per demostrar l'existència d'una tal compactificació definim sobre $X^* = X \cup \{\infty\}$, on ∞ és un objecte arbitrari fora de X, la topologia següent:

$$\tau^* = \{U = X^* \setminus C \,:\, C \subset X \text{ compacte}\} \cup \tau_X$$

on τ_X és la topologia que hi ha definida sobre X.

Lema 8.9.4. *τ^* és una topologia sobre X^*.*

Demostració. Demostrem els tres punts de la definició de topologia.

(i) $\emptyset \in \tau_X \subset \tau^*$ i com $\emptyset$ és compacte, $X^* \setminus \emptyset = X^* \in \tau^*$.

(ii) Sigui $\{U_i\}_{i \in I}$ una família d'elements de τ^*. Si per a tot i, $U_i \in \tau_X$, tenim que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau_X$ i ja hem acabat. En cas contrari, suposem que $I = I_1 \cup I_2$ de manera que

$$I_1 = \{i \in I \,:\, U_i \in \tau_X\}, \qquad I_2 = \{i \in I \,:\, U_i = X^* \setminus C_i, \text{ on } C_i \subset X \text{ és compacte}\}.$$

Aleshores,

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \left(\bigcup_{i\in I_1 U_i}\right) \cup \left(\bigcup_{i\in I_2}(X^* \setminus C_i)\right) =$$

$$\left(\bigcup_{i\in I_1} U_i\right) \cup \left(X^* \setminus \bigcup_{i\in I_2} C_i\right) = X^* \setminus \left[\left(\bigcup_{i\in I_2} C_i\right) \setminus \left(\bigcup_{i\in I_1} U_i\right)\right]$$

Com que $I_2 \neq \emptyset$, el conjunt $\bigcup_{i\in I_2} C_i \setminus \bigcup_{i\in I_1} U_i$ és compacte i, per tant, $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau^*$.

(iii) És suficient veure que la intersecció de dos elements de τ^* és de τ^*. Si U i V són dos oberts de τ_X, aleshores $U \cap V \in \tau_X \subset \tau^*$. Si $U = X^* \setminus C$, amb $C \subset X$ compacte i $V \in \tau_X$, aleshores

$$U \cap V = (X^* \setminus C) \cap V = (X \setminus C) \cap V \in \tau_X \subset \tau^*$$

Finalment si $U = X^* \setminus C_1$ i $V = X^* \setminus C_2$, amb $C_1, C_2 \subset X$ compactes de X, aleshores

$$(X^* \setminus C_1) \cap (X^* \setminus C_2) = X^* \setminus (C_1 \cup C_2) \in \tau^*$$

ja que la unió finita de compactes és compacte (veure exercicis de compacitat).

□

Demostrem ara que, en efecte, la compactificació d'Alexandroff és una compactificació.

Teorema 8.9.5. *El parell (X^*, h) és una compactificació de X.*

Demostració. Primer demostrem que X^* és quasi-compacte. Sigui $\{U_i\}_{i\in I}$ un recobriment de X^*. Recordem $X^* = X \cup \{\infty\}$, per tant $\exists i_0 \in I$ tal que $\infty \in U_{i_0}$. Existeix un compacte K tal que $U_{i_0} = X^* \setminus K$ (perquè l'element U_{i_0} és un element de τ^* i no de τ_X perquè conté el ∞). Aleshores

$$\{K \cap U_i\}_{i\in I\setminus\{i_0\}}$$

ens dóna un recobriment obert de K. Siguin $i_1, \ldots, i_n \in I$ tals que

$$K = (K \cap U_{i_1}) \cup \cdots \cup (K \cap U_{i_n}).$$

Així, $X^* = U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.

Per veure que X^* és de Hausdorff només cal veure que ∞ se separa de tot punt $x \in X$. Sigui K un entorn compacte de x, i sigui $U \in \tau_X \subset \tau^*$ tal que $x \in U \subset K$. Aleshores, $V = X^* \setminus K$ és un entorn obert del punt ∞ i $U \cap V = \emptyset$.

Observem que h és oberta, atès que $\tau_X \subset \tau^*$. Per tant, $h : X \to h(X)$ és un homeomorfisme.

Finalment, provem que $\overline{h(X)} = X^*$. Atès que X no és compacte, $h(X)$ no és tancat. Per tant, $h(X) \subsetneq \overline{h(X)}$ la qual cosa obliga a tenir $\overline{h(X)} = X^*$. □

Proposició 8.9.6. *Sigui (X^+, g) una altra compactificació de X tal que $g(X)$ és un obert. Aleshores, existeix $f : X^+ \to X^*$ contínua tal que $X \xrightarrow{g} X^+ \xrightarrow{f} X^*$ és h i $f(X^+ \setminus g(X)) = \{\infty\}$.*

En particular, si X^+ és una altra compactificació per un punt, f és un homeomorfisme

Demostració. Com a aplicació de conjunts f està determinada per les condicions demanades:

$$\begin{array}{lll} \text{si} & a = g(x) \in g(X) \subset X^*, & f(a) = h(x) \\ \text{si} & a \in X^* \setminus g(X), & f(a) = \infty. \end{array}$$

Veiem que f és contínua: si $U \subset \tau_X$, aleshores $f^{-1}(U) = g(h^{-1}(U))$. Com que $g : X \to g(X)$ és un homeomorfisme i $g(X) \subset X^+$ és un obert, tenim que $f^{-1}(U)$ és un obert. Si $U = X^* \setminus C$, on $C \subset X$ és un compacte:

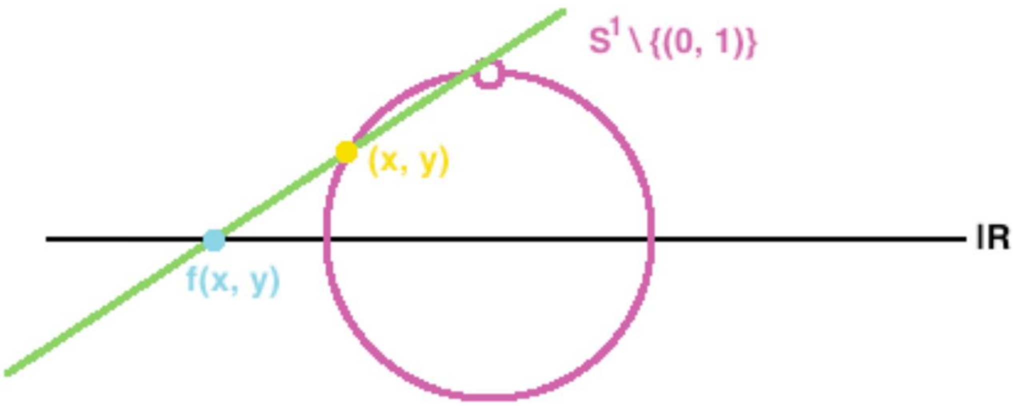
$$f^{-1}(U) = X^+ \setminus f^{-1}(C) = X^* \setminus g(h^{-1}(C)).$$

Com que $g(h^{-1}(C))$ és compacte a X^+, és tancat i, per tant, el seu complementari és obert. □

Exemple 8.9.7. Considerem la recta real $\mathbb{R}$ i el cercle unitat amb el punt $(0,1)$ extret: $S^1 \setminus \{(0,1)\}$. Aleshores $S^1 \setminus \{(0,1)\}$ és homeomorf a $\mathbb{R}$ a través del que es coneix com a projecció estereogràfica (veure apèndix)

$$f : S^1 \setminus \{(0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{x}{1-y}.$$

Per a tot punt $(x,y) \in S^1 \setminus \{(0,1)\}$ el valor de $f(x,y)$ serà la intersecció de la línia que passa pel $(0,1)$ i (x,y) amb l'eix x.

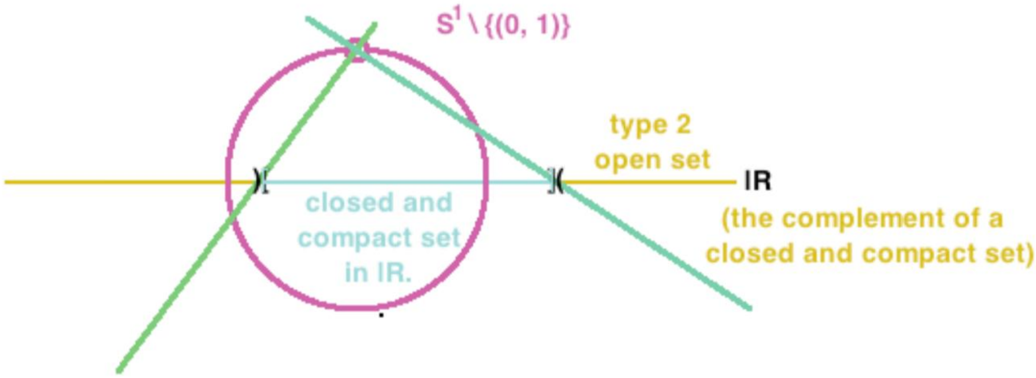


Si pensem en el punt ∞ com el punt final de la recta numèrica (equivalent al punt que falta $(0,1)$) aleshores podem construir la compactificació d'Alexandroff de $\mathbb{R}$ com (R^*, τ^*), on $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ i els oberts de $\mathbb{R}^*$ són de dos tipus:

1) El primer tipus són els "oberts normals" de $\mathbb{R}$

fotos_topo_1/ejemploalexandroff2.jpeg

2) El segon tipus d'oberts són els complementaris de tancats i compactes de $\mathbb{R}$



Proposició 8.9.8. *Siguin X i Y dos espais topològics i X_∞, Y_∞ els seus compactificats d'Alexandorff. Si $X \cong Y$, aleshores $X_\infty \cong Y_\infty$.*

Demostració. Si $f : X \to Y$ és un homeomorfisme, definim l'aplicació $f_\infty : X_\infty \to Y_\infty$ com

$$f_\infty(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si} \quad x \neq \infty_X \\ \infty_Y, & \text{si} \quad x = \infty_X \end{cases}$$

i clarament és un homeomorfisme. $\square$

Capítol 9

Propietats de connexió

En aquest capítol explorem la noció intuïtiva que un espai topològic sigui “d’una peça”. Hi ha dues maneres de visualitzar aquesta idea: l’espai no es trenca en reunió de trossos oberts disjunts, o bé podem “connectar per un camí” qualsevol parella de punts de l’espai. Aquests dos punts de vista porten a les definicions d’espai connex i d’espai arc-connex, que, com veurem, no són equivalents. Comencem amb el concepte d’arc-connexió, ja que és un concepte més intuïtiu. La seva definició utilitza la topologia euclidiana sobre la recta real, contrastant-la amb la de l’espai topològic que s’estudia.

9.1 Espais arc-connexos

9.1.1 Camins i espais arc-connexos

Definició 9.1.1 (Camí)**.** Sigui (X, τ) un espai topològic. Un *camí* en X és una aplicació contínua $\alpha : I \to X$, on $I = [0, 1]$. Diem que $\alpha(0)$ és el *punt inicial* del camí i $\alpha(1)$ n’és el punt final. Si $\alpha(0) = \alpha(1)$ diem que el camí és tancat.

Definició 9.1.2 (Arc-connex)**.** Un espai topològic (X, τ) és *arc-connex* si per a tot $x, y \in X$ existeix un camí amb punt inicial x i punt final y.

Exemple 9.1.3. Considerem $X = (0, 1)$ amb la topologia usual. Per a tot $x, y \in (0, 1)$ definim una funció

$$\alpha : [0, 1] \to (0, 1), \qquad \alpha(t) = (1 - t)x + ty$$

Aleshores α és clarament contínua i $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$. Per tant, és un camí i aleshores $\forall x, y \in X$ existeix un camí tal que $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$. Per tant X és arc-connex.

Exemple 9.1.4. $\mathbb{R}^n$ és arc-connex. Si considerem $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, la mateixa aplicació d’abans

$$\begin{aligned} \alpha : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto x + t(y - x) \end{aligned}$$

veiem que és contínua i $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$.

Exemple 9.1.5. Pel teorema de Bolzano, tot camí $\alpha : I \to \mathbb{R}$ amb $\alpha(0) < 0$ i $\alpha(1) > 0$ passa pel 0. Per tant, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exemple 9.1.6. L’esfera S^n és arc-connexa. En efecte, si $x, y \in S^n$, triem un punt $p \neq x$ i $p \neq y$. Per projecció estereogràfica $S^n \setminus \{p\}$ és homeomorf a $\mathbb{R}^n$, per tant, és arc-connex i existeix un camí a $S^n \setminus \{p\}$ (i per tant a S^n) amb inici a x i final a y.

9.1.2 Propietats dels espais arc-connexos

Proposició 9.1.7. *Sigui $f : X \to Y$ una aplicació contínua i exhaustiva entre espais topològics. Si X és arc-connex, Y també ho és. En particular, un espai homeomorf a un espai arc-connex és arc-connex.*

Demostració. Siguin $y_1, y_2 \in Y$ i siguin $x_1, x_2 \in X$ tals que $f(x_1) = y_1$ i $f(x_2) = y_2$. Com X és arc-connex, existeix un camí α d'inici x_1 i final x_2. Aleshores $f \circ \alpha$ és un camí d'inici y_1 i final y_2. $\square$

Corol·lari 9.1.8. *$\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$ no són homeomorfs.*

Demostració. Si existís un homeomorfisme $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, aleshores $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ seria homeomorf a $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ però el primer espai no és arc-connex per (**??**) i el segon sí. $\square$

Proposició 9.1.9. *Siguin X, Y espais topològics. El producte $X \times Y$ és arc-connex si i només si X i Y són arc-connexos.*

Demostració. Si $X \times Y$ és arc-connex, aplicant la proposició anterior (**??**) a les aplicacions

$$\pi_X : X \times Y \longrightarrow X \qquad \pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$$

(que són funcions contínues i exhaustives) obtenim que X i Y són arc-connexes.

Recíprocament, suposem que X i Y són arc-connexos i siguin $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$. Siguin σ, η camins a X i Y respectivament, tals que $\sigma(0) = x_1$, $\sigma(1) = x_2$ i $\eta(0) = y_1$ i $\eta(1) = y_2$. Aleshores

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow X \times Y \\ t &\longmapsto (\sigma(t), \eta(t)) \end{aligned}$$

és un camí amb punt inicial (x_1, y_1) i punt final (x_2, y_2). $\square$

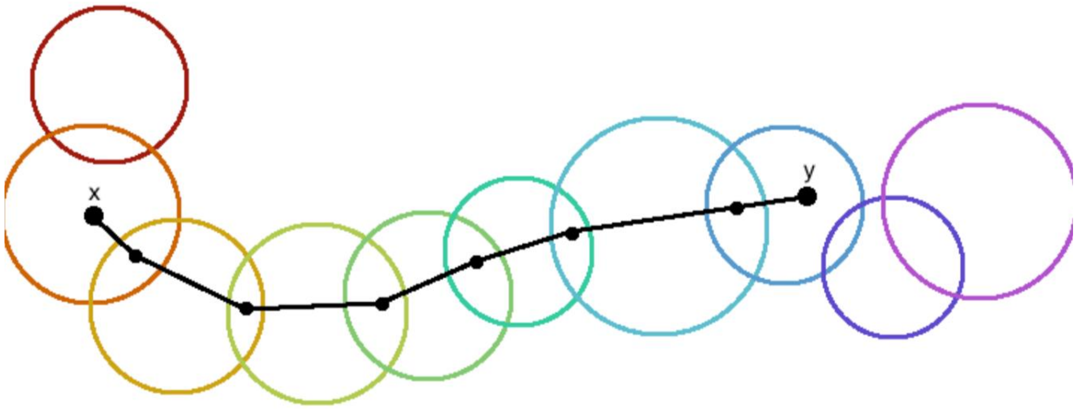
Definició 9.1.10. Definim el producte de dos camins $\sigma \cdot \eta$ de la següent manera:

$$\sigma \cdot \eta : I \longrightarrow X, \quad (\sigma \cdot \eta)(t) = \begin{cases} \sigma(2t) & \text{si} \quad 0 \le t \le 1/2 \\ \eta(2t-1) & \text{si} \quad 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Proposició 9.1.11. *Sigui X un espai topològic i sigui $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una col·lecció numerable (no té per què ser finita) de subespais arc-connexos de X. Si $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, $\forall i = 1, \ldots,$ aleshores $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ és arc-connex.*

Demostració. Sigui $\{A - i\}_{i=1}^{\infty}$ una família numerable de subespais arc-connexos de X. $\forall i \in \{1, 2, \ldots\}$ sigui $a_i \in A_i \cap A_{i+1}$ que és possible ja que per hipòtesis $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$. Ara, com que A_i és connex, existeix un camí $\alpha_i : I \to X$ tal que $\alpha_i(0) = a_i$, $\alpha_i(1) = a_{i+1}$. Siguin ara $x, y \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $x \neq y$. Aleshores, $\exists j, k \in \{1, 2, \ldots\}$ tals que $x \in A_j$ i $y \in A_k$. Podem assumir, sense pèrdua de generalitat, que $j < k$. Aleshores, existeixen camins $\eta_1, \eta_2 : I \to X$ tals que $\eta_1(0) = x$ i $\eta_1(1) = a_j$, mentre $\eta_2(0) = a_k$ i $\eta_2(1) = y$. Considerem el següent camí:

$$\eta_1 \cdot \alpha_j \cdot \alpha_{j+1} \cdot \cdots \cdot \alpha_{k-1} \cdot \alpha_k \cdot \eta_2$$



Aleshores és un camí de x a y, per tant $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ és arc-connex. $\square$

9.1.3 Components arc-connexes

Definició 9.1.12 (Arc-connectats)**.** Sigui (X, τ) un espai topològic. Diem que dos punts $x, y \in X$ estan *arc-connectats* si existeix un camí amb punt inicial x i punt final y.

Proposició 9.1.13. *La relació x "arc-connectat amb" y és d'equivalència.*

Demostració. Veiem que compleix les tres propietats: reflexivitat, simetria i transitivitat.

(i) És reflexiva, atès que les aplicacions constants són contínues.

(ii) Si $\sigma : I \to X$ és tal que $\sigma(0) = x$ i $\sigma(1) = y$, aleshores la composició:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma} : I \to I &\xrightarrow{\sigma} X \\ t &\longmapsto 1 - t \end{aligned}$$

és contínua, $\overline{\sigma}(0) = y$ i $\overline{\sigma}(1) = x$; per tant es verifica la propietat simètrica.

(iii) Veiem finalment que és transitiva:

- x arc-connectat amb $y \Rightarrow \exists$ camí $\sigma : I \to X$ tal que $\sigma(0) = x$ i $\sigma(1) = y$.
- y arc-connectat amb $z \Rightarrow \exists$ camí $\eta : I \to X$ tal que $\eta(0) = y$ i $\eta(1) = z$.

Aleshores prenem la definició (**??**) i com que $\sigma(2 \cdot \frac{1}{2}) = \sigma(1) = y = \eta(0) = \eta(2 \cdot \frac{1}{2} - 1)$, l'aplicació $\sigma \cdot \eta$ és contínua i

$$(\sigma \cdot \eta)(0) = \sigma(0) = x, \qquad (\sigma \cdot \eta)(1) = \eta(1) = z$$

Per tant x està arc-connectat amb z pel camí $\sigma \cdot \eta$.

$\square$

Definició 9.1.14 (Component arc-connexa)**.** Sigui X un espai topològic i sigui $x \in X$. La component arc-connexa de x és

$$ca(x) := \{y \in X \ : \ x \text{ està arc-connectat amb } y\}$$

Així, X és reunió disjunta de components arc-connexes. Òbviament X és arc-connex si i només si té una única component arc-connexa.

Exemple 9.1.15. Exemples

1. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \ : \ y=0\}$ té dues components arc-connexes.

2. Considerem $\mathbb{Q}$ amb la topologia induïda per $\mathbb{R}$. Aleshores, per a tot $q \in \mathbb{Q}$, $ca(q) = \{q\}$.

Proposició 9.1.16. *Sigui X un espai topològic i sigui $x \in X$. La component arc-connexa $ca(x)$ és el subespai arc-connex més gran que conté x.*

Demostració. Veiem primer que $ca(x)$ és arc-connex; si $y \in ca(x)$, aleshores existeix un camí $\sigma : I \to X$ tal que $\sigma(0) = x$ i $\sigma(1) = y$. Cal veure que $\sigma(I) \subset ca(x)$. En efecte, si $y = \sigma(t)$, aleshores

$$\begin{aligned} \overline{\sigma} : I \ &\to X \\ s \ &\longmapsto \sigma(s \cdot t) \end{aligned}$$

és contínua i $\overline{\sigma}(0) = \sigma(0) = x$, $\overline{\sigma}(1) = \sigma(t) = y$. Per tant $y \in ca(x)$.

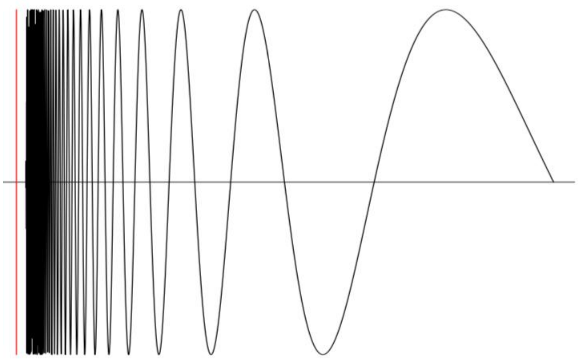
Sigui ara $A \subset X$ un subespai arc-connex tal que $x \in A$. Per a tot punt $y \in A$, y està arc-connectat amb x a A i, per tant, també a X. En conseqüència, $y \in ca(x)$. $\square$

9.1.4 Localment arc-connex

Definició 9.1.17 (Localment arc-connex)**.** Un espai topològic X es diu *localment arc-connex* si per a tot punt $x \in X$ i tot entorn U de x existeix un entorn arc-connex de x contingut en U.

Alternativament, i recuperant la definició de *localment P*, on P simbolitza una propietat sobre un espai topològic, podríem dir que un espai topològic X és localment arc-connex, si per a tot punt $x \in X$ existeix una base d'entorns arc-connexos.

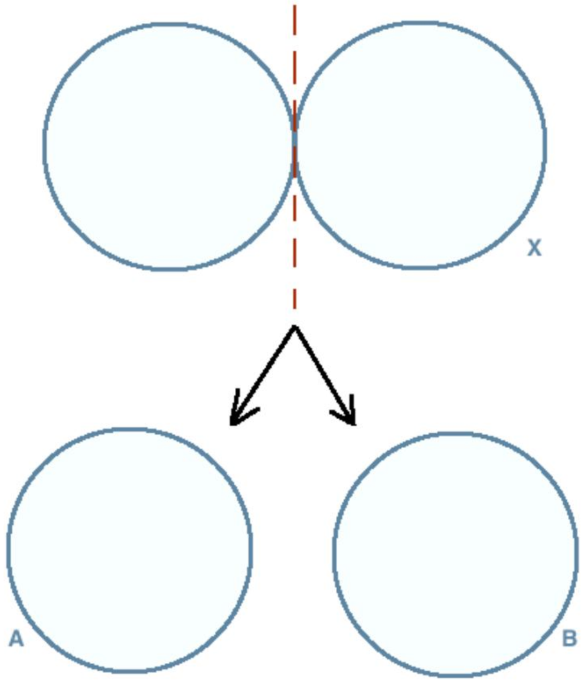
Exemple 9.1.18. $\mathbb{R}^n$ és arc-connex (per tant és localment arc-connex). $X = \{(0,y) \ : \ y \in [-1,1]\} \cup \{(x, \sin(\pi/x)) \ : \ x \in (0,1]\}$ no és localment arc-connex en els punts de la forma $(0,x)$, $-1 \leq x \leq 1$.



9.2 Espais connexos

9.2.1 Definició i exemples

Definició 9.2.1 (Connex)**.** Sigui X un espai topològic. Diem que X és *connex* si no es pot expressar com a unió de dos oberts disjunts no buits. És a dir, X és connex si $X = U \cup V$, amb U, V oberts tals que $U \cap V = \emptyset$, implica que $U = \emptyset$ o bé $V = \emptyset$.



De vegades es diu que $\{U, V\}$ és una separació de X, si $U, V \neq \emptyset$ són oberts tals que $U \cap V = \emptyset$ i $X = U \cup V$.

Exemple 9.2.2. Considerem l'espai topològic $\mathbb{R}$ amb la topologia euclidiana. Considerem el subespai topològic $\mathbb{Q}$. Afirmem que $\mathbb{Q}$ és un espai topològic no connex.

En efecte, considerem $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ i considerem els subconjunts

$$A = \{q \in \mathbb{Q} \ : \ q < \sqrt{2}\}, \qquad B = \{q \in \mathbb{Q} \ : \ q > \sqrt{2}\}$$

Afirmem que $\{A, B\}$ és una separació de $\mathbb{Q}$. Primer notem que A i B són oberts de $\mathbb{Q}$, ja que $A = \mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})$ i $B = \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, +\infty)$, amb $(-\infty, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, \infty) \subset \mathbb{R}$ oberts de $\mathbb{R}$. (Recordem de la topologia subespai com eren els oberts (**??**), (**??**)). A més, A i B són no buits ja que, per exemple, $0 \in A$ i $2 \in B$. Finalment veiem que $A \cap B = \emptyset$ ja que $\nexists q \in \mathbb{Q}$ tal que $q < \sqrt{2}$ i $q > \sqrt{2}$ a la vegada. Per últim, no és difícil veure que $\mathbb{Q} = A \cup B$.

Demostrar que un espai topològic és connex és molt més difícil que demostrar que no ho és. Per això, al final veure que arc-connex implica connex i és molt més fàcil veure que és arc-connex.

Exemple 9.2.3. $\mathbb{R}$ és connex. En efecte, si $\mathbb{R} = U \cap V$ amb U i V oberts no buits disjunts, aleshores l'aplicació

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1 \qquad \text{si } x \in U \\ x &\longmapsto -1 \quad \textit{si } x \in V \end{aligned}$$

és contínua, la qual cosa contradiu el Teorema de Bolzano. Amb el mateix argument obtenim que els intervals oberts i els tancats són connexos.

Exemple 9.2.4. $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0\}$ no és connex. En efecte, podem escriure $X = X^+ \cup X^-$, on $X^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > 0\}$ i $X^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y < 0\}$ són oberts no buits i $X * + \cap X^- = \emptyset$.

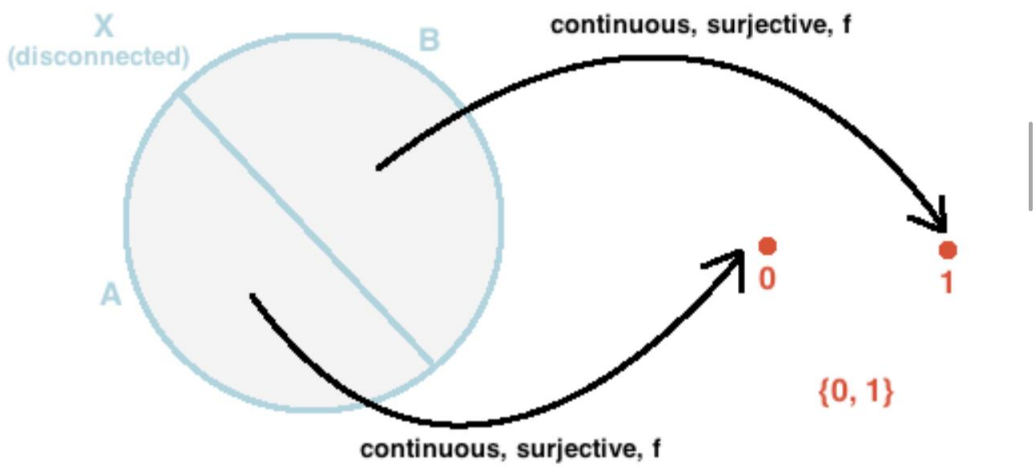
9.2.2 Criteris de connexió

Proposició 9.2.5. *Un espai topològic X és connex si i només si els únics subconjunts oberts i tancats*[1] *de X són X i $\emptyset$.*

Demostració. Suposem que X és connex i sigui $A \subseteq X$ obert i tancat. Com A és obert, $X \setminus A$ és tancat, i com A és tancat, $X \setminus A$ és obert. Aleshores $X = A \cup (X \setminus A)$ és una unió disjunta de dos oberts. Com X és connex, ha de ser $A = \emptyset$ o bé $X \setminus A = \emptyset \Rightarrow A = X$.

Recíprocament, suposem $X = U \cup V$ on U i V són oberts disjunts, aleshores U és obert i tancat, ja que $X \setminus U = V$ que és obert, i per tant $U = \emptyset$ o bé $U = X$, que implica que X és connex. $\square$

Proposició 9.2.6. *Sigui X un espai topològic i sigui $\{0, 1\}$ l'espai topològic amb la topologia discreta. Aleshores X no és connex si i només si existeix una funció contínua i exhaustiva $f : X \to \{0, 1\}$*



Demostració.

- ($\Rightarrow$) Suposem que X és un espai topològic no connex. Aleshores existeixen $A, B \subset X$ oberts no buits tals que $A \cap B = \emptyset$ i $A \cup B = X$. Definim la funció següent:

$$f : X \to \{0, 1\}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in A \\ 1 & \text{si} \quad x \in B \end{cases}$$

  Clarament $f(X) = \{0, 1\}$ i per tant és exhaustiva. Veiem que sigui contínua. Com $\{0, 1\}$ té la topologia discreta, tot subconjunt de $\{0, 1\}$ és un obert. Més precisament, $\emptyset, \{0\}, \{1\}$ i $\{0, 1\}$ són oberts de $\{0, 1\}$. Notem que

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad f^{-1}(\{0\}) = A, \quad f^{-1}(\{1\}) = B, \quad f^{-1}(\{0, 1\}) = A \cup B = X$$

  En tots els casos és un obert de X, ergo f és contínua.

- ($\Leftarrow$) Suposem que existeix una aplicació contínua i exhaustiva $f : X \to \{0, 1\}$. Afirmo que $\{f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\})\}$ és una separació de X. En efecte, com que f és contínua i $\{0, 1\}$ està amb la topologia discreta, $f^{-1}(\{0\})$ i $f^{-1}(\{1\})$ són oberts en X, que a més són no buits per l'exhaustivitat de f. D'altra banda,

$$\emptyset = f^{-1}(\emptyset) = f^{-1}(\{0\} \cap \{1\}) = f^{-1}(\{0\}) \cap f^{-1}(\{1\})$$

  i finalment, com $\{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\}$, aleshores $X = f^{-1}(\{0, 1\}) = f^{-1}(\{0\} \cup \{1\}) = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\})$

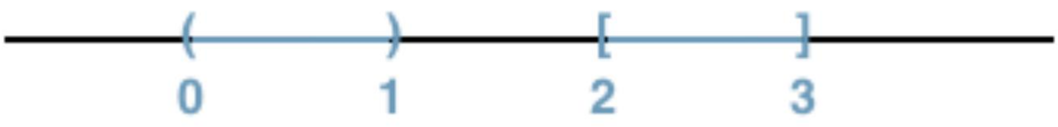
$\square$

[1] En anglès, aquests conjunts es diuen "clopen", *close and open*.

9.2.3 Subespais connexos

Definició 9.2.7 (Subespai connex)**.** Sigui X un espai topològic i $A \subseteq X$ un subespai (amb la topologia subespai). Es diu que A és un *subespai connex* si és un espai topològic connex respecte la topologia subespai. De igual manera, es dirà que és inconnex o no connex si ho és com a espai topològic amb la topologia subespai.

Exemple 9.2.8. Considerem l'espai topològic $\mathbb{R}$ amb la topologia euclidiana. Sigui $A = (0,1) \cup [2,3]$. Aleshores, A amb la topologia subespai és un espai topològic inconnex.



En efecte, sigui $B = (0,1)$ i $C = [2,3]$. Clarament $B, C \subset A$, $B \cap C = \emptyset$ i $B \cup C = A$, $B, C \neq \emptyset$. Només queda veure que B i C són oberts en A. Recordem que la topologia subespai té per oberts les interseccions d'A amb els oberts de $\mathbb{R}$. Veiem, doncs,

$$(0,1) \cap A = (0,1) = B, \qquad (3/2, 4) \cap A = [2,3] = C$$

i per tant B i C són oberts en A amb la topologia subespai. Això prova que $\{B, C\}$ és una separació d'A, ergo A no és connex.

Proposició 9.2.9. *Sigui X un espai topològic i $A \subseteq X$. Si A és connex, aleshores $\overline{A}$ també ho és.*

Demostració. Sigui A un subespai topològic connex i suposem $\overline{A}$ inconnex. Aleshores existeixen oberts $B, C \subset \overline{A}$ tals que $B, C \neq \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$ i $B \cup C = \overline{A}$. Com $\overline{A} = B \cup C$, prenem la clausura a ambdues bandes:

$$\overline{A} = \overline{\overline{A}} = \overline{B \cup C} = \overline{B} \cup \overline{C}.$$

Això ens fa veure que $B = \overline{B}$ i $C = \overline{C}$. Així doncs, B i C són oberts i tancats de A. Ara, com $A \subseteq \overline{A}$, $A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$. Aleshores $B \cap A$ i $C \cap A$ són oberts. Com A és connex, algun dels dos ha de ser $\emptyset$. Suposem $A \cap B = \emptyset$. Aleshores $A = A \cap C \Rightarrow A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq \overline{C}$. Prenent clausura a ambdues bandes $\overline{A} \subseteq \overline{C}$ però aleshores $\overline{A} = \overline{C}$ (ja que $\overline{C} \subseteq \overline{A}$) i això és una contradicció. De la mateixa manera, si suposem que $A \cap C = \emptyset$ arribem a la mateixa contradicció. Finalment, doncs, $\overline{A}$ no pot ser inconnex. □

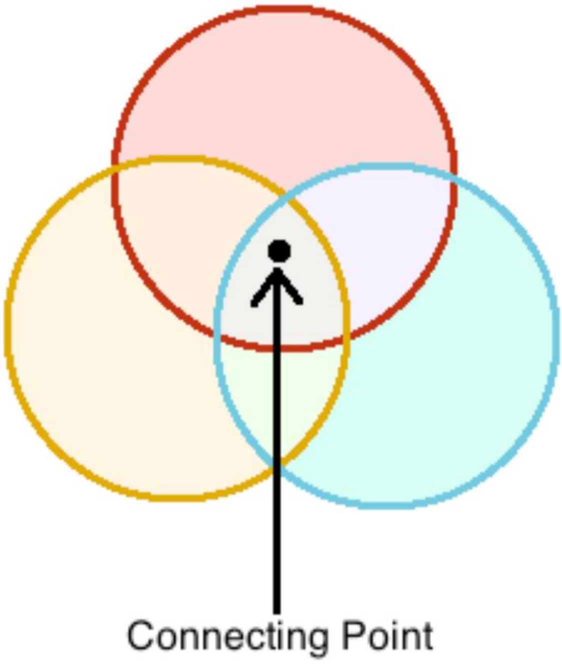
9.2.4 Criteris de connexió de subespais

Sigui X un espai topològic i siguin $\{A_i\}_{i \in I}$ una família arbitrària de subespais connexos, aleshores $\bigcup_{i \in I} A_i$ no té per què ser connex. Ara estudiarem quan és connex. Per exemple, considerem l'espai topològic $\mathbb{R}$ i sigui $A_n = (2n-1, 2n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Considerem la família

$$\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \{(1,2), (3,4), (5,6), \ldots\}$$

Tots els A_n són connexos clarament, però la reunió $\bigcup_{n=1}^{\infty}(2n-1, 2n)$ és clarament inconnexa. Per demostrar-ho, podem prendre $A = (1,2)$ i $B = \bigcup_{n=2}^{\infty}(2n-1, 2n)$ i clarament $\{A, B\}$ és una separació de $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Proposició 9.2.10. *Sigui X un espai topològic i sigui $\{A_i\}_{i\in I}$ una família arbitrària de subespais connexos. Si $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, aleshores $\bigcup_{i\in I} A_i$ és connex.*



Demostració. Suposem que $\bigcup_{i\in I} A_i$ és inconnex. Aleshores existeix un conjunt $B \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ que és obert i tancat a l'hora tal que $B \neq \emptyset$ i $B \neq \bigcup_{i\in I} A_i$. Sigui $j \in I$. Suposem $B \cap A_j \neq \emptyset$. Veurem que $A_j \subseteq B$. Suposem que $A_j \nsubseteq B$. Com B és un obert en $\bigcup_{i\in I} A_i$ això implica que $B \cap A_j$ és un obert no buit de A_j. Però com B és també tancat, B^c és un obert no buit de A_j. Però llavors

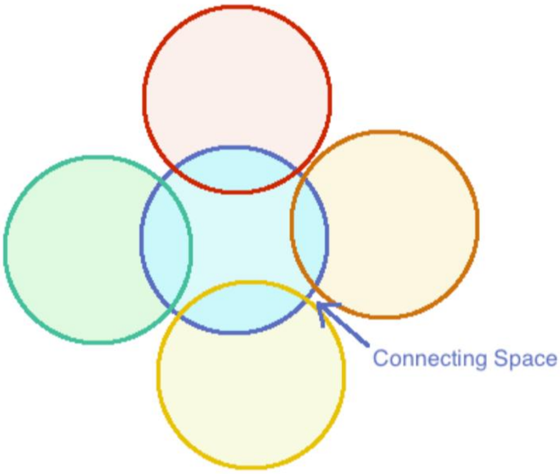
$$(B \cap A_j) \cap (B^c \cap A_j) = \emptyset \quad \text{i} \quad A_j = (B \cap A_j) \cup (B^c \cap A_j)$$

i hem dit que A_j era connex, per tant això no pot ser i per tant $A_j \subseteq B$.

Per tant, $\exists J \subseteq I$ tal que $B = \bigcup_{i\in J} A_i$. Ara, com $B \neq \bigcup_{i\in I} A_i$, $\exists k \in I \setminus J$ tal que $A_k \nsubseteq B$. Tenim que $\cap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ i $B \cap A_k = \emptyset$. Aleshores, per la mateixa raó d'abans, $\{B \cap A_k, B^c \cap A_k\}$ és una separació d'A_k però A_k és connex, per tant no pot ser. Així doncs, $\bigcup_{i\in I}$ és connex. □

En aquesta proposició hem vist que si tenim una família arbitrària de subconjunts connexos, la unió d'aquests és un subconjunt connex si aquests tenen un punt en comú. Ara bé, aquesta no és l'única manera en què la unió sigui connexa. A continuació veurem que si tots els subespais intersequen amb un de comú, aleshores la unió serà connexa.

Proposició 9.2.11. *Sigui X un espai topològic i sigui $\{A_i\}_{i\in I}$ una família arbitrària de subespais topològics connexos. Si A_0 és un altre subespai connex i $A_0 \cap A_i \neq \emptyset$ $\forall i \in I$, aleshores $A_0 \cup \bigcup_{i\in I} A_i$ és connex.*



Demostració. Suposem que, donades les hipòtesis, $A = A_0 \cup \bigcup_{i\in I} A_i$ és inconnex. Aleshores, existeix $B \subseteq A$ obert i tancat tal que $B \neq \emptyset, A$. Sigui $j \in I \cup \{0\}$ i suposem que $B \cap A_j \neq \emptyset$ (i/o $B \cap A_0 \neq \emptyset$). A la demostració de la proposició anterior ja hem establert que $A_j \subseteq B$ (i/o $A_0 \subseteq B$) ja que sinó podríem generar una separació de A_j (i/o A_0) i contradiu que és connex. Veiem doncs, que $\exists J \subseteq I$ pel qual

$$B = \bigcup_{i\in J} A_i$$

Considerem dos casos:

1) Si $A_0 \subseteq B$. Aleshores $B \cap A_i \neq \emptyset$ $\forall i \in I$. Per tant, $B = A_0 \cup \bigcup_{i\in I} A_i$. Això contradiu el fet que $B \neq A$.

2) Si $A_0 \not\subseteq B$. Això implica que $A_0 \cap B = \emptyset$. Però $A_0 \cap A_i \neq \emptyset$ $\forall i \in I$, i com B és unió dels A_i's això és una contradicció.

En els dos casos arribem a una contradicció. Per tant, A no pot ser inconnex. $\square$

Lema 9.2.12. *Sigui X un espai topològic i sigui $\{X_i\}_{i\in I}$ un recobriment tal que X_i és connex, $\forall i \in I$, i existeix una $i_0 \in I$ tal que $X_i \cap X_{i_0} \neq \emptyset$ $\forall i \in I$. Aleshores, X és connex.*

Demostració. Si X_i és un recobriment de X, aleshores $X = \bigcup_{i\in I} X_i$, ara per la proposició (**??**), si $\exists i_0 \in I$ tal que $X_i \cap X_{i_0} \neq \emptyset$ per tota $i \in I$, aleshores $\bigcup_{i\in I} X_i$ és connex i per tant ho és X. $\square$

9.2.5 Espais connexos i homeomorfismes

Proposició 9.2.13. *Siguin X i Y espais topològics i sigui $f : X \to Y$ una aplicació contínua i exhaustiva. Si X és connex, Y també ho és.*

Demostració. Ho provem pel contrarrecíproc. Suposem que Y no és connex, és a dir, $Y = U \cup V$, amb U i V oberts no buits tals que $U \cap V = \emptyset$. Aleshores, com f és contínua

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$$

i $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ són dos oberts no buits disjunts per tant X no és connex. $\square$

Corol·lari 9.2.14. *Si X i Y són dos espais topològics homeomorfs i X és connex, aleshores Y també és connex.*

Demostració. Si $f : X \to Y$ és un homeomorfisme entre X i Y per definició és una funció contínua i exhaustiva. Per la proposició anterior obtenim el resultat. $\square$

Molts cops pot passar que si tenim un espai topològic X connex, considerant el subespai $A = X \setminus \{x\}$ veiem que encara és connex (veure més endavant (**??**)). Per exemple, si $X = S^1$, al treure-li un punt a la bola, segueix essent connex (es veu gràficament). En canvi, si $X = \mathbb{R}$, si li traiem un punt, per exemple $a \in \mathbb{R}$, aleshores $\mathbb{R} \setminus \{a\} = (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ i ja no és connex. Això ho utilitzarem per provar que dos espais topològics no són homeomorfs. En aquest cas $S^1 \setminus \{p\} \ncong \mathbb{R} \setminus \{a\}$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Proposició 9.2.15. *Siguin X i Y dos espais topològics. Si $\forall x \in X$ tenim que $X \setminus \{x\}$ és connex (amb la topologia subespai, veure (**??**)), i si existeix $y \in Y$ tal que $Y \setminus \{y\}$ no és connex (amb la topologia subespai) aleshores X no és homeomorf a Y.*

Demostració. Suposem que X és homeomorf a Y. Aleshores, existeix un homeomorfisme $f : X \to Y$. Sigui $y \in Y$ tal que $Y \setminus \{y\}$ és inconnex. Sigui $\{A, B\}$ una separació de $Y \setminus \{y\}$. Aleshores, $A, B \subseteq Y \setminus \{y\}$, $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ i $A \cup B = Y \setminus \{y\}$. Com f és contínua, tenim que $f^{-1}(A)$ i $f^{-1}(B)$ són oberts en $X \setminus \{f^{-1}(y)\}$. Veiem que

$$\left\{f^{-1}(A), f^{-1}(B)\right\}$$

és una separació de $X \setminus \{f^{-1}(y)\}$. Ja hem dit que $f^{-1}(A)$ i $f^{-1}(B)$ eren oberts en X. A més, clarament són no buits. També és cert que

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$$

ja que $A \cap B = \emptyset$ i f és contínua. Finalment, notem que si $A \cup B = Y \setminus \{y\}$, aleshores

$$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(Y) \setminus \{f^{-1}(y)\}$$
$$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X \setminus \{f^{-1}(y)\}$$

Aleshores $\{f^{-1}(A), f^{-1}(B)\}$ és una separació de $X \setminus \{f^{-1}(y)\}$, però com f és una bijecció, $f^{-1}(y) = x \in X$, per algun x. Aleshores $X \setminus \{x\}$ és separat, però hem dit que $\forall x \in X$, $X \setminus \{x\}$ era connex, per tant $X \ncong Y$. $\square$

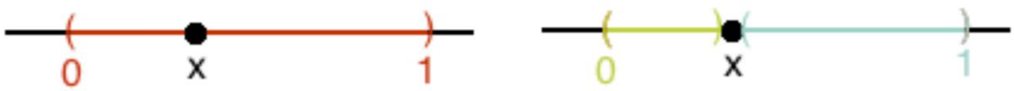
Aquest resultat és bastant útil a l'hora de demostrar que dos espais no són homeomorfs.

Exemple 9.2.16. Considerem l'espai $X = (0, 1)$ amb la topologia euclidiana (que coincideix amb la topologia subespai respecte $\mathbb{R}$ amb la topologia euclidiana). Considerem

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$$

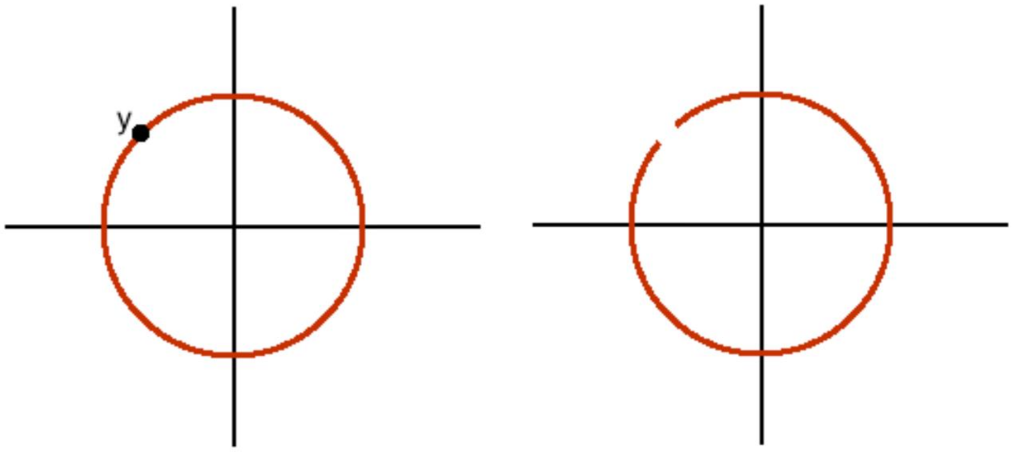
amb la topologia euclidiana. Veurem que X i Y no són homeomorfs.

Si traiem $x \in (0, 1)$ de X, obtenim $X \setminus \{x\} = (0, x) \cup (x, 1)$ i per tant no és connex.



The removal of any point x leaves X \{x} disconnected.

Però si traiem qualsevol punt $y \in Y$, $Y \setminus \{y\}$ segueix sent connex:



The removal of any point y leaves Y \ {y} connected.

Llavors, per la proposició (**??**), $X \ncong Y$.

9.2.6 Producte d'espais connexos

Recordem que si X, Y són espais topològics, definim una topologia sobre el producte cartesià $X \times Y$ a partir de la base $\beta = \{U \times V \ : \ U$ obert de X, V obert de $Y\}$. Veurem que si X i Y són espais connexos, l'espai producte $X \times Y$ també ho és.

Proposició 9.2.17. *Siguin X i Y espais topològics tals que X és connex. Sigui $b \in Y$ i dotem al singletó $\{b\}$ de la topologia subespai de Y. Aleshores el producte $X \times \{b\}$ és connex.*

Demostració. Suposem que és fals. Suposem que $X \times \{b\}$ és inconnex. Aleshores existeixen oberts $U_1 \times V_1$, $U_2 \times V_2$ de $X \times \{b\}$ tals que $(U_i \times V_i) \neq \emptyset$ i $(U_1 \times V_1) \cup (U_2 \times V_2) = X \times \{b\}$. Notem que $V_1, V_2 \neq \emptyset$ ja que $U_i \times V_i \neq \emptyset$. Bé, doncs l'únic obert de $\{b\}$ (amb la topologia subespai) és $\{b\}$, per tant $V_1 = V_2 = \{b\}$ i per tant $\forall i = 1, 2$, $U_i \times V_i = U_i \times \{b\}$, i com $(U_1 \times \{b\}) \cap (U_2 \times \{b\}) = \emptyset$ hem de tenir que $U_1, Y_2 \subset X$, $U_1, U_2 \neq \emptyset$ i $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Notem que

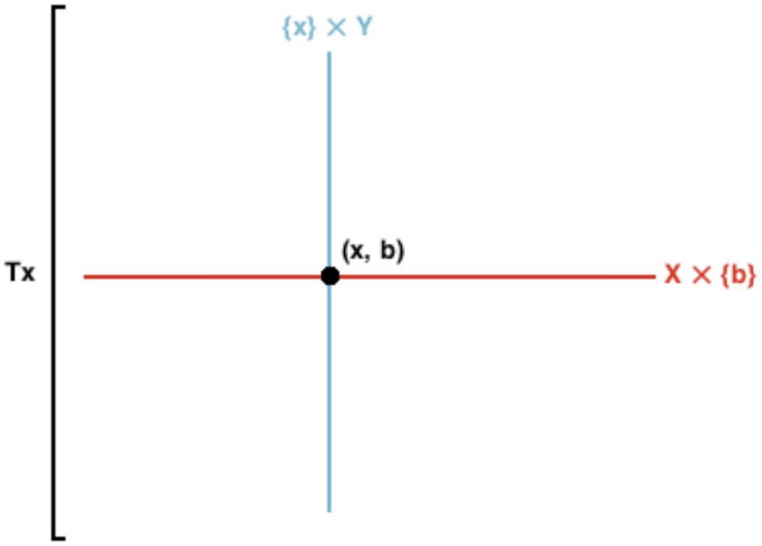
$$X \times \{b\} = (U_1 \times \{b\}) \cup (U_2 \times \{b\}) = (U_1 \cup U_2) \times \{b\}.$$

Això implica que $X = U_1 \cup U_2$ i per tant $\{U_1, U_2\}$ és una separació de X cosa que implica que X és inconnex i això és una contradicció. Així doncs, hem provat cert el resultat. $\square$

Proposició 9.2.18. *Sigui $\{X_1, \ldots, X_n\}$ una col·lecció finita d'espais topològics connexos. Aleshores, el producte $X_1 \times \cdots \times X_n$ és connex.*

Demostració. Provarem el cas per $n = 2$ i diré $X = X_1$ i $Y = X_2$ per anar més ràpid. Considerem, doncs, X i Y dos espais topològics connexos qualssevol i sigui $(a, b) \in X \times Y$. Com X és connex, $X \times \{b\}$ també és connex per la proposició anterior. De manera similar, per tot $x \in X$, $\{x\} \times Y$ és connex. Definim

$$T_x = (X \times \{b\}) \cup (\{x\} \times Y)$$



Notem que T_x és connex pel terme del punt comú. Això és perquè cada $x \in X$, $(x, b) \in X \times \{b\}$ i $(x, b) \in \{x\} \times Y$. Aleshores

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} T_x = \bigcup_{x \in X} (X \times \{b\}) \bigcup (\{x\} \times Y)$$

Cada T_x conté el punt (a, b) ja que $(a, b) \in (X \times \{b\}) \subset (X \times \{b\}) \cup (\{x\} \times Y) = T_x$ i per la proposició mencionada, $X \times Y$ és connex. $\square$

9.2.7 Relació entre connexió i arc-connexió

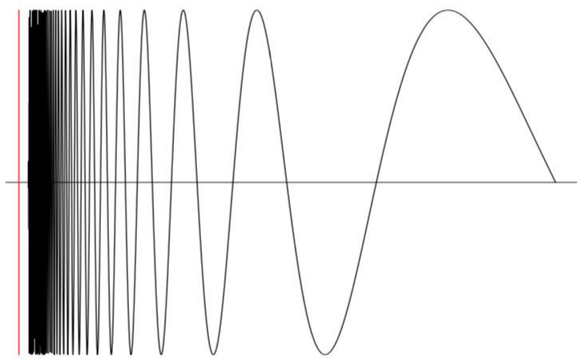
Teorema 9.2.19. *Si X és arc-connex, aleshores X és connex.*

Demostració. Sigui X un espai topològic connex i suposem que X no és connex. Aleshores existeixen oberts $A, B \subset X$, on $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ i $X = A \cup B$. Siguin $a \in A$ i $b \in B$. Com X és arc-connex, existeix un camí amb punt inicial a i punt final b, és a dir, existeix una aplicació contínua $\alpha : [0, 1] \to X$ tal que $\alpha(0) = a$ i $\alpha(1) = b$. Com α és contínua, $\alpha^{-1}(A)$ i $\alpha^{-1}(B)$ són els dos oberts en $I = [0, 1]$, satisfent $\alpha^{-1}(A), \alpha^{-1}(B) \neq \emptyset$ i com $A \cap B = \emptyset$, $\alpha^{-1}(A) \cap \alpha^{-1}(B) = \emptyset$. Finalment, com $X = A \cup B$,

$$[0, 1] = \alpha^{-1}(X) = \alpha^{-1}(A \cup B) = \alpha^{-1}(A) \cup \alpha^{-1}(B)$$

i això demostra que $\{\alpha^{-1}(A), \alpha^{-1}(B)\}$ és una separació de I, però I és un subespai connex (amb la topologia subespai en $\mathbb{R}$) i per tant és una contradicció. X ha de ser connex. $\square$

Observació 9.2.20. *Hem vist que arc-connex implica connex. Ara, però, la implicació contrària no és* *sempre certa. Considerem, per exemple,* $X = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \le y \le 1\} \cup \{(x, \sin(\pi/x)) \ : \ x \in (0, 1]\}$.



Aquest espai topològic no és arc-connex ja que no existeix cap camí amb origen a $(1, 0)$ *i final en* $(0, 0)$. *En canvi és connex. En efecte,* X *és l'adherència de la imatge de la funció contínua* $f : [0, 1) \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, \sin(\pi/x))$ *que és connexa. La connexió de* X *és conseqüència del lema (??).*

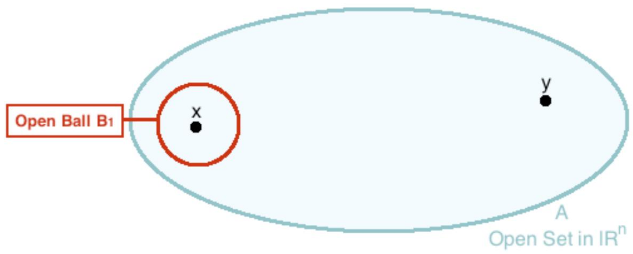
Veiem un cas particular on connex implica arc-connex.

Proposició 9.2.21. *Si* A *és un obert connex de* $\mathbb{R}^n$ *(amb la topologia euclidiana) aleshores* A *és arc-connex.*

Demostració. Sigui $\mathbb{R}^n$ amb la topologia usual euclidiana i sigui $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespai connex. Siguin $x, y \in A$ i sigui $\mathcal{R}$ la família de boles obertes contingudes en A.

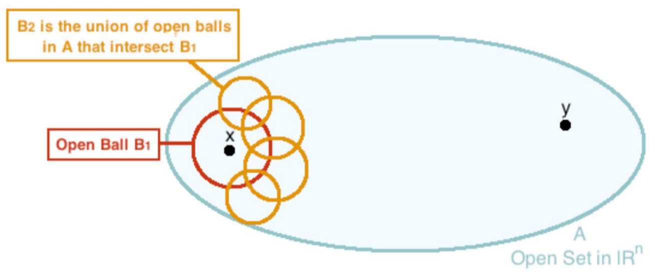
$$\mathcal{R} = \{B = B(x, r) \ : \ x \in A, \ r > 0, \ B(x, r) \subset A\}$$

Com A és obert i $x \in A$ existeix una bola oberta continguda en $\mathcal{R}$ que conté x, sigui $B_1 = (x, r_x)$.



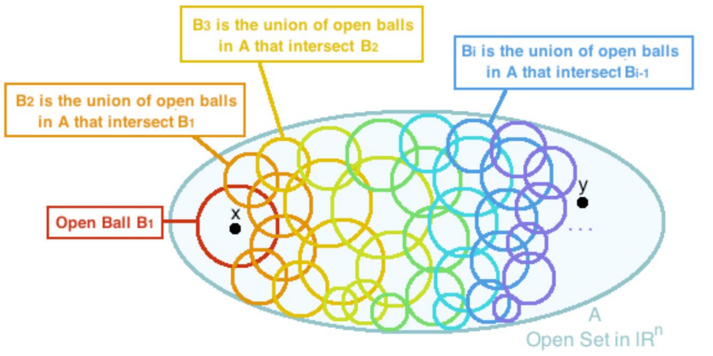
Sigui B_2 la unió de totes les boles obertes de $\mathcal{R}$ tals que $B \cap B_1 \neq \emptyset$,

$$B_2 = \{ \bigcup_{B \in \mathcal{R}} B \ : \ B \cap B_1 \}$$



En general, $\forall i \in \mathbb{N}$, $i > 1$, sigui B_i la unió de totes les boles tals que

$$B_i = \{ \bigcup_{B \in \mathcal{R}} B \ : \ B \cap B_{i-1} \neq \emptyset \}$$



Ara afirmem que cada bola $B \in \mathcal{R}$ està continguda en alguna B_i. Suposem que no, sigui $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ i sigui $W = \bigcup_{B \in \mathcal{R}^*} B$ on

$$\mathcal{R}^* = \{B \in \mathcal{R} \ : \ B \not\subseteq B_i, \ \forall i \in I\}$$

Aleshores V i W són els dos oberts ja que són la unió de boles obertes. A més $V, W \neq \emptyset$, $V \cap W = \emptyset$ i $A = V \cup W$. Per tant, $\{W, V\}$ és una separació d'A però això és una contradicció. Per tant, $\forall B \in \mathcal{R}$, $\exists i \in \{1, 2, \ldots\}$ tal que $B \subseteq B_i$. Llavors, $\exists n \in \{1, 2, \ldots\}$ tal que $y \in B_n$. A més, $A = V = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ és tal que $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$, $\forall i$. Aleshores, per la proposició (**??**) $V = A$ és arc-connex. $\square$

Proposició 9.2.22. *Sigui X un espai topològic connex i localment arc-connex. Aleshores és arc-connex.*

Demostració. Fixem un punt $x \in X$. N'hi haurà prou en veure que tot punt $y \in X$ es pot arc-connectar amb x. És a dir, que

$$A = \{y \in X \ : \ y \text{ es pot arc-connectar amb } x\}$$

és igual a X. Notem que $x \in A$ i, per tant, $A \neq \emptyset$ Sigui $y \in A$, i sigui V un entorn arc-connex del punt y. Tots els punts de V es poden arc-connectar amb y que, al mateix temps es pot arc-connectar amb x. Com que l'arc-connexió és una relació d'equivalència, obtenim que $V \subset A$ i, en conseqüència, que y és interior a A. Això prova que A és obert. Veiem que A és també tancat: si $z \in (X \setminus A)$ i W és un entorn arc-connex de z, aleshores $W \cap A = \emptyset$. En cas contrari, existirien punts arc-connectats amb x i amb z, la qual cosa contradiu que $z \notin A$. Així, $W \subset X \setminus A$ i z és interior a $X \setminus A$. Això implica que $(X \setminus A)^o = X \setminus A$ i per tant és obert. És a dir, A és tancat. Com que A és obert i tancat i $A \neq \emptyset$ en un espai connex, per la proposició (**??**) deduïm que $A = X$. $\square$

9.2.8 Components connexes

Definició 9.2.23 (Connectats)**.** Sigui X un espai topològic. Diem que dos punts de X estan *connectats* si existeix un subconjunt connex de X que conté els dos punts.

Proposició 9.2.24. *Sigui X un espai topològic. La relació x "està connectat amb" y és d'equivalència.*

Demostració. Clarament x està connectat amb sí mateix i si x està connectat amb y, òbviament y està connectat amb x. Si x està connectat amb y i y amb z, aleshores existeixen connexos tals que $x, y \in A$ i $y, z \in B$. Aleshores $A \cup B$ és connex ja que $y \in A \cap B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$. Per tant $A \cup B$ és un connex contenint x i z. $\square$

Definició 9.2.25 (Component connexa)**.** Sigui X un espai topològic i sigui x un punt de X. La *component connexa* de x és

$$c(x) := \{y \in X \ : \ y \text{ està connectat amb } x\}$$

Observem que X és reunió disjunta de components connexos.

Proposició 9.2.26. *Sigui X un espai topològic. La component connexa d'un punt $x \in X$ és el subespai connex de X més gran que conté x. En particular, $ca(x) \subset c(x)$ i $c(x)$ és un tancat.*

Demostració. Per a tot $y \in c(x)$, existeix un connex A_y que conté x i y. Aleshores, $c(x) = \bigcup_{y \in c(x)} A_y$ és connex. Si $K \subset X$ és connex i $x \in K$, aleshores tots els punts de K estan connectats amb x i, per tant $K \subset c(x)$. Com que $ca(x)$ és arc-connex, per (**??**) és connex, i com que conté x tenim que $ca(x) \subset c(x)$. D'altra banda, $\overline{c(x)}$ és també un connex que conté x. Així $c(x) = \overline{c(x)}$ (ja que per definició de clausura tenim $c(x) \subset \overline{c(x)}$ i com que $c(x)$ és el connex més petit que conté a x, se satisfà la inclusió contrària). $\square$

En general les components connexes no són obertes. Per exemple

$$c(x) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x = 0 \text{ ó } x = 1/n, \ n \geq 0\}$$

Proposició 9.2.27. *Les components connexes d'un espai topològic localment arc-connex són oberts.*

Demostració. Sigui $x \in X$ i sigui $y \in c(x)$. Sigui V un entorn arc-connex (i, per tant, connex) del punt y. Aleshores $c(x) \cup V$ és reunió de dos conjunts connexos no disjunts (ja que $y \in c(x) \cap V$). Per la maximalitat de $c(x)$, tenim que $c(x) \cup V \subset c(x)$. Així $y \in V \subset c(x)$. Per tant y és interior a $c(x)$. $\square$

Capítol 10

Appèndix: Projecció estereogràfica

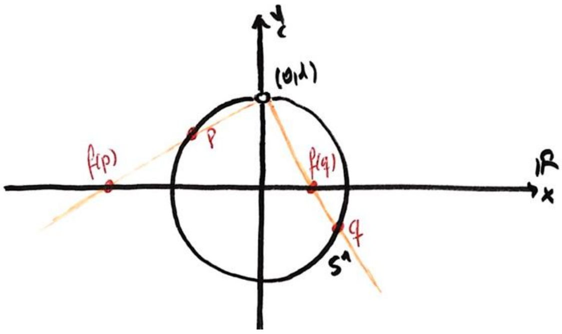
10.1 En dimensió 1

Aquesta és una aplicació que serveix com a exemple d'homeomorfisme entre l'espai topològic $S^1 \setminus \{(0,1)\}$ i l'espai topològic $\mathbb{R}$, amb la topologia euclidiana. Dir que $S^1 \setminus \{(0,1)\} \cong \mathbb{R}$ seria com dir que si agafem la recta real $\mathbb{R}$ dels "extrems" i els ajuntem en un punt (inexistent, ja que aquests extrems són inexistents) obtenim un espai amb les mateixes característiques.

Més tard, veiem que si omplim aquest punt inexistent, que és el $(0,1)$ (encara que serveix qualsevol altre punt que no sigui $(\pm 1, 0)$) aleshores obtenim la compactificació d'Alexandroff de l'espai $\mathbb{R}$.

10.1.1 Interpretació gràfica

La projecció estereogràfica és una funció que agafa un punt p de la circumferència S^1, tret del $(0,1)$ i l'envia a un altre punt de la recta $\mathbb{R}$, que correspon al punt intersecció de la recta $\overline{(0,1)p}$ amb l'eix de les abscisses.



10.1.2 Construcció de la funció explícita

$p = (\alpha, \beta) \in S^1 \setminus \{(0,1)\}$, és a dir, que satisfà $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, i $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 1$. Aleshores construeixo la recta de (α, β) a $(0,1)$. El vector director serà $(\alpha, \beta - 1)$. Així doncs, $r : (1-\beta)x + \alpha y + C = 0$ i imposant que passa pel punt $(0,1)$ obtenim $\alpha = C \Rightarrow C = -\alpha$. Aleshores tenim la recta

$$r : (1-\beta)x + \alpha y - \alpha = 0$$

La intersequem amb l'eix de les x que té com a equació $y = 0$ i obtenim

$$(1-\beta)x - \alpha = 0 \Longrightarrow x = \frac{\alpha}{1-\beta}$$

Per tant, la projecció estereogràfica és la funció

$$\begin{aligned} f : S^1 \setminus \{(0,1)\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \frac{x}{1-y} \end{aligned}$$

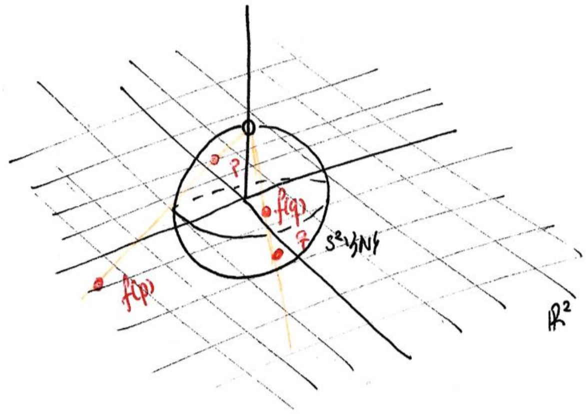
10.1.3 Demostrem que és un homeomorfisme

Veiem que aquesta f és un homeomorfisme.

(i) Clarament és una funció contínua, ja que $y \neq 0$ perquè estem prenent els punts de $S^1 \setminus \{(0,1)\}$.

(ii) Veiem que sigui bijectiva.

10.2 En dimensió 2



Per veure-ho en dimensió 2 accedir a [**bestiariotopologico**]

Part II

Grup fonamental

Introducció

Al present document trobareu uns apunts de l'assignatura curricular obligatòria "Topologia i Geometria Global de Superfícies", cursada per mi al semestre de tardor de 2020, a la Universitat de Barcelona, Facultat de Matemàtiques i Informàtica. Aquesta assignatura ha estat impartida pel Dr. Vicente Navarro, que va començar de manera semipresencial (1h setmanal presencial de resoldre problemes i 3h no presencials), i va acabar de manera completament online i, per tant, autodidacta perquè el professor no m'agradava gens.

La meva bibliografia principal seran els documents que ha anat penjat el professor a mesura que avançava el curs al campus virtual. Aquests documents són els substituts, per dir-ho d'alguna manera, de les classes presencials de teoria en les quals el professor apunta a la pissarra i jo prenc apunts. Així doncs, la majoria de casos, copiaré les definicions, proposicions, etc. dels mateixos apunts.

Una altra font principal serà la pàgina web de `mathonline.wikidot.org` [**mathonline**] que ja vaig utilitzar per l'assignatura de topologia. Aquesta pàgina, però, conté detallada informació i moltíssims exemples de la part de topologia únicament. És una pàgina que em va servir molt en el seu moment per veure il·lustracions del que s'està fent, així com nombrosos exemples.

Aquesta és una assignatura que és recomanable cursar després d'haver cursat Topologia. La primera part, com ja he esmentat, és una continuació d'un curs en Topologia i per tant partiré dels meus apunts de l'assignatura de Topologia.

Capítol 11

Homotopia

11.1 Homotopies entre aplicacions

Denotem per I l'interval tancat $[0,1]$ amb la topologia induïda per la recta real $\mathbb{R}$.

Definició 11.1.1 (Homotopia)**.** Siguin X, Y dos espais topològics, i $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ dues aplicacions contínues entre espais topològics. Una *homotopia* de f a g és una aplicació contínua

$$H : X \times I \longrightarrow Y$$

tal que $H(x,0) = f(x)$ i $H(x,1) = g(x)$, per a tot $x \in X$. Escriurem $f \simeq g$ si existeix alguna homotopia de f a g.

Definició 11.1.2 (Homotopia relativa a un subconjunt)**.** Una homotopia entre dues aplicacions $f, g : X \to Y$ es diu *relativa a* $A \subseteq X$ si $f(a) = g(a)$, $\forall a \in A$.

La idea essencial d'aquesta definició és que si jo tinc dues funcions $f : X \to Y$ i $g : X \to Y$, direm que $f \simeq g$ si es pot deformar f de forma contínua fins a obtenir g. És a dir, es tracta de moure f fent un "desfaçament" continu, fins a obtenir g. Després, si és una homotopia relativa a A, vol dir que es queden quiets els punts d'A al efectuar aquest "desfaçament".

A continuació escriuré un seguit de proposicions i corol·laris que es corresponen a diferents exercicis proposats que, com són molt teòrics i poden servir per fer exercicis posteriorment, els he inclòs en forma de teoria. Ara, però, aquesta teoria no ha sigut donada pel professor.

Proposició 11.1.3 (Exercici 1.1)**.** *Per a qualsevol parell d'espais topològics X, Y la relació d'homotopia $f \simeq g$ és una relació d'equivalència en el conjunt de les aplicacions contínues $\{f : X \to Y \ : \ f \text{ és contínua}\}$ per cada parell d'espais topològics X, Y. Denotarem per $[X, Y]$ el conjunt de classes d'equivalència.*

Demostració. Hem de provar que la relació $\simeq$ compleix que és reflexiva, simètrica i transitiva.

- Reflexiva ($f \simeq f$)? Sí, ja que és suficient considerar l'homotopia

  $$\begin{aligned} H : X \times I &\longrightarrow Y \\ (x,t) &\longmapsto H(x,t) = f(x) \end{aligned}$$

  que és clarament contínua ja que ho és f i que es verifica

  $$H(x,0) = f(x), \qquad H(x,1) = f(x).$$

- Simètrica ($f \simeq g \Rightarrow g \simeq f$)? Sí, doncs si $H : X \times I \to Y$ és la homotopia de f a g, és a dir, $f \simeq_H g$, podem prendre
$$\overline{H}(x,t) = H(x, 1-t),$$
que verifica
$$\overline{H}(x,0) = H(x,1) = g(x), \qquad \overline{H}(x,1) = H(x,0) = f(x),$$
i per tant $g \simeq f$.

- Transitiva ($f \simeq_{H_1} g,\ g \simeq_{H_2} h \Rightarrow f \simeq h$)? Sí, doncs podem definir, a partir de H_1 i H_2,
$$H(x,t) := \begin{cases} H_1(x, 2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ H_2(x, 2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$
i aleshores H verifica que es contínua i que
$$H(x,0) = H_1(x,0) = f(x), \qquad H(x,1) = H_2(x,1) = h(x),$$
i podem concloure $f \simeq_H g$.

□

Proposició 11.1.4 (Exercici 1.2.a). *Si $f_0, f_1 : X \to Y$ i $g_0, g_1 : Y \to Z$ són aplicacions contínues tals que $f_0 \simeq f_1$ i $g_0 \simeq g_1$ llavors $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.*

Demostració. Tenim

- $f_0 \simeq f_1 \Longrightarrow \exists F : X \times I \to Y$ tq $F(x,0) = f_0(x)$ i $F(x,1) = f_1(x)$
- $g_0 \simeq g_1 \Longrightarrow \exists G : Y \times I \to Z$ tq $G(y,0) = g_1(y)$, i $G(y,1) = g_1(y)$.

Volem troba $H : X \times I \to Z$ tal que $H(z,0) = (g_0 \circ f_0)(z)$ i $H(z,1) = (g_1 \circ f_1)(z)$. Definim el producte de funcions següent:
$$F \times id : X \times I \to Y \times I,$$
de manera que tenim el següent diagrama:

```tikzcd
X \times H \arrow[r, "H"] \arrow[d, "F \times id"'] & Z \\
Y \times I \arrow[ur, "G"'] &
```

on H és clarament contínua ja que $F \times id$ és contínua per ser producte de contínues, G és contínua per hipòtesis i $H(x,t) = G(F(x,t),t)$ és, per tant, contínua per ser composició de contínues. Finalment,
$$H(x,0) = G(F(x,0),0) = G(f_0(x),0) = g_0(f_0(x)) = (g_0 \circ f_0)(x),$$
$$H(x,1) = G(F(x,1),1) = G(f_1(x),1) = g_1(f_1(x)) = (g_1 \circ f_1)(x)$$
com es volia veure. □

Proposició 11.1.5 (Exercici 3a). *Si $f_0, f_1 : X \to Y$ i $g_0, g_1 : A \to B$ són aplicacions contínues i tals que $f_0 \simeq f_1$ i $g_0 \simeq g_1$, llavors $f_0 \times g_0 \simeq f_1 \times g_1$, on $f_i \times g_i$ denota l'aplicació $f_i \times g_i : X \times A \to Y \times B$, $(f_i \times g_i)(x,a) = (f_i(x), g_i(a))$.*

Demostració. $f_0 \simeq f_1$ vol dir que $\exists F : X \times I \to Y$ tal que $F(x,0) = f_0(x)$, $\forall x \in X$ i $F(x,1) = f_1(x)$, $\forall x \in X$. $g_0 \simeq g_1$ vol dir que $\exists G : A \times I \to B$, tal que $G(a,0) = g_0(a)$, $\forall a \in A$, i $G(a,1) = g_1(a)$, $\forall a \in A$.

Definim

$$\begin{aligned} H : (X \times A) \times I &\longrightarrow Y \times B \\ (x,a,t) &\longmapsto (F(x,t), G(a,t)) \end{aligned}$$

Aleshores, amb això

$$H(x,a,0) = (F(x,0), G(a,0)) = (f_0(x), g_0(a)) = (f_0 \times g_0)(x,a), \qquad \forall x \in X,\ \forall a \in A.$$

De la mateixa manera

$$H(x,a,1) = (F(x,1), G(a,1)) = (f_1(x), g_1(a)) = (f_1 \times g_1)(x,a), \qquad \forall x \in X,\ \forall a \in A.$$

i això tot junt implica que $f_0 \times g_0 \simeq f_1 \times g_1$. □

Corol·lari 11.1.6 (Exercici 3b)**.** *Si $X \simeq Y$ i $A \simeq B$, aleshores $X \times A \simeq Y \times B$.*

Demostració. Si $X \simeq Y$ aleshores existeixen aplicacions contínues $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$ tals que $f \circ g \simeq id_Y$ i $g \circ f \simeq id_X$. De la mateixa manera, si $A \simeq B$ aleshores existeixen aplicacions contínues $f' : A \to B$ i $g' : B \to A$ tals que $f' \circ g' \simeq id_B$ i $g' \circ f' \simeq id_A$. Així doncs, definim

$$\begin{aligned} h_1 : X \times A &\longrightarrow Y \times B \\ (x,a) &\longmapsto (f(x), f'(a)) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} h_2 : Y \times B &\longrightarrow X \times A \\ (y,b) &\longmapsto (g(x), g'(a)) \end{aligned}$$

que clarament són contínues perquè son composicions i productes de contínues i a més satisfan

$$(h_1 \circ h_2)(x,a) = h_1(g(x), g'(x)) = (f(g(x)), f'(g'(x))) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_1 \circ h_2 = (f \circ g) \times (f' \circ g') \simeq id_Y \times id_B \simeq id_{Y \times B}$$

i, anàlogament,

$$h_2 \circ h_1 \simeq id_{X \times A}$$

que implica que aleshores $X \times A \simeq Y \times B$ com volíem veure. □

Corol·lari 11.1.7 (Exercici 6)**.** *Un espai X és arc-connex si i només si totes les aplicacions $* \to X$ són homòtopes, on $*$ denota l'espai format per un únic punt. En altres paraules, X és arc-connex si i només si card$[*, X] = 1$.*

Demostració. Si X és arc-connex, considerem les aplicacions

$$f, g : * \longrightarrow X$$

Aleshores, $f(*) = x$ i $g(*) = y$. Com X és arc-connex, existeix un camí $\alpha : I \to X$ (aplicació contínua tal que $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$). Com $* \times I = I$, tenim l'homotopia

$$\begin{aligned} H : * \times I &\longrightarrow X \\ (*,t) &\longmapsto H(*,t) = \alpha(t) \end{aligned}$$

que és contínua i que satisfà

$$H(*,0) = \alpha(0) = x = f(*), \qquad H(*,1) = \alpha(1) = y = g(*).$$

i per tant $f \simeq g$, com volíem veure.

Recíprocament, considerem dos punts $x, y \in X$, i suposem que les aplicacions $f, g : * \to X$, $f(*) = x$, $g(*) = y$ són homòtopes. Això vol dir que existeix una homotopia $H : * \times I \to X$ tal que $H(*,0) = x$, $H(*,1) = y$. Per tant, l'aplicació $\alpha : I \to X$ definida com $\alpha(t) = H(*,t)$ és una aplicació contínua que a més satisfà que $\alpha(0) = H(*,0) = x$ i $\alpha(1) = H(*,1) = y$ i per tant és un camí. Així doncs X és arc-connex. □

11.2 Equivalències homotòpiques

Definició 11.2.1 (Equivalència homotòpica)**.** Una aplicació contínua $f : X \to Y$ entre dos espais topològics és una *equivalència homotòpica* si existeix una aplicació contínua $g : Y \to X$ tal que $g \circ f \simeq id_X$ i $f \circ g \simeq id_Y$.

$$g \circ f : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X; \qquad f \circ g : Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f}$$

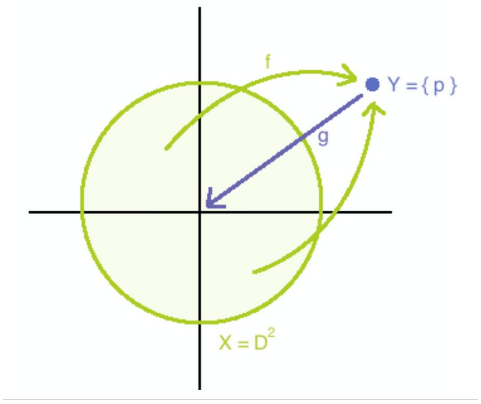
Definició 11.2.2 (Homotòpicament equivalents)**.** Direm que un espai X és *homotòpicament equivalent* a un espai Y si existeix alguna equivalència homotòpica $X \to Y$ i ho denotarem per $X \simeq Y$[1].

Exemple 11.2.3. Sigui D^2 el disc tancat unitat de $\mathbb{R}^2$, és a dir, $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Sigui $p \in \mathbb{R}^2$ un punt qualsevol. Definim aleshores $X = D^2$ (amb la topologia induïda de $\mathbb{R}^2$) i $Y = \{p\}$. Veiem que $X \simeq Y$.

Definim $f : X \to Y$ com $f(x, y) \in p$, $\forall (x, y) \in D^2$, i definim $g : Y \to X$ com $g(p) = (0, 0)$. Aleshores f és contínua ja que és una funció constant i g també. A més,

$$(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = g(p) = (0, 0), \qquad (f \circ g)(x, y) = f(g(x, y)) = f(0, 0) = p$$

cosa que implica que $g \circ f \equiv (0, 0)$ i $f \circ g = id_Y$.



Aleshores, clarament $id_Y \simeq id_Y$ per la propietat reflexiva de la relació d'homotopia, per tant $f \circ g \simeq id_Y$. Queda veure que $g \circ f \simeq id_X$. Sigui $H : X \times I \to Y$ l'aplicació definida per $H(x, t) = (1 - t)(x, t)$. Clarament H és contínua i $H(x, 0) = (x, y) = id_X(x, y)$, i $H(x, 1) = (0, 0) = (g \circ f)(x, y)$ i així $g \circ f \simeq id_X$ cosa que prova que $D^2 \simeq \{p\}$.

Proposició 11.2.4 (Exercici 1.2.b)**.** *Aquesta relació és una relació d'equivalència entre espais topològics.*

Demostració. Com sempre, hem de provar les tres propietats.

La propietat reflexiva és clara ja que si prenem $g = f = id$, es compleix $X \simeq X$.

La propietat simètrica és òbvia ja que la propia definició te la dona: $X \simeq Y \iff \exists f : X \to Y, \exists g : Y \to X$ tq $f \circ g \simeq id$ i $g \circ f \simeq id$.

La propietat transitiva també es compleix. Suposem $X \simeq Y$ i $Y \simeq Z$. Aleshores existeixen aplicacions contínues

$$a : X \to Y, \quad b : Y \to X, \qquad c : Y \to Z, \quad d : Z \to Y$$

tals que

$$a \circ b \simeq id_X, \quad b \circ a \simeq id_Y, \qquad c \circ d \simeq id_Y, \quad d \circ c \simeq id_Z.$$

[1]A vegades també direm que X és *del mateix tipus d'homotopia* que Y

Aleshores, definint $f := c \circ a : X \to Z$ i $g := d \circ b : Z \to X$ obtenim dues funcions clarament contínues (composició de contínues és contínua) i que compleixen que

$$g \circ f = (d \circ b) \circ (c \circ a) = d \circ (b \circ c) \circ a \simeq d \circ c \circ a \circ b \simeq id$$

on, en la primera relació $\simeq$ hem aplicat l'apartat (a, **??**) de l'exercici juntament amb la ja provada propietat de simetria d'aquesta relació. El mateix es fa per $f \circ g$. □

Per fer-nos una idea mental del que estem fent ho podem entendre de la següent manera: Un espai X topològic és homotòpicament equivalent a un altre Y si nosaltres podem anar deformant X fins a obtenir Y d'una forma contínua, és a dir, sense trencar l'espai ni enganxar coses. Per exemple, podríem dir el clàssic exemple que una tassa de cafè és homotòpicament equivalent a un tor, ja que nosaltres podem deformar el tor fins a obtenir la tassa de cafè (o a l'inrevés, ja que és d'equivalència) sense haver de trencar en cap moment el tor. Així com una esfera pot ser deformada en un sol punt sense trencar-la, però un tor no.

O sigui el que hem de fer és imaginar-nos que el nostre espai és de plastilina i que el podem anar mollejant, sempre i quan no li afegim forats, ni eliminem els que ja té ni trenquem la plastilina. No podem separar cap plastilina en cap moment, només donar-li forma.

Proposició 11.2.5. *(1) Tot homeomorfisme és una equivalència homotòpica. Per tant, si dos espais X i Y són homeomorfs, llaors X i Y són homotòpicament equivalents.*

(2) Les equivalències homotòpiques no són ni injectives ni exhaustives, en general.

Proposició 11.2.6 (Exercici 11)**.** *Si una aplicació contínua $f : X \to S^n$ no és exhaustiva, llavors és homòtopa a una aplicació constant.*

Demostració. Si $f : X \to S^n$ no és exhaustiva, existeix un punt $x_0 \in S^n$ tal que $x_0 \notin f(X)$. Per tant, f factoritza així:

$$f : X \underset{g}{\longrightarrow} S^n \setminus \{x_0\} \underset{i}{\hookrightarrow} S^n.$$

Ara bé, $S^n \setminus \{x_0\} \cong \mathbb{R}^n$ (per la projecció estereogràfica), i per tant, com $\mathbb{R}^n$ és estrellat, aleshores és contràctil, $\mathbb{R}^n \simeq *$ i per tant,

$$f : X \underset{g}{\to} S^n \setminus \{x_0\} \simeq * \underset{i}{\hookrightarrow} S^n.$$

O sigui que $f = i \circ g \simeq i \circ \varepsilon_a = \varepsilon_a$. En definitiva, f és homòtopa a una aplicació constant. □

11.3 Espais contràctils

Definició 11.3.1 (Contràctil)**.** Denotem per $*$ l'espai que només conté un element. Un espai X tal que $X \simeq *$ es diu *contràctil.*

Seguint la nostra manera intuïtiva de veure això, un espai contràctil és doncs un espai que pot ser deformat en un sol punt. Per exemple, una esfera pot ser contràctil ja que pot ser aixafada i comprimida en un sol punt. Però un tor no ho és, ja que per ser aixafat en un sol punt, ens hauríem de menjar el seu forat i aleshores la deformació no és contínua.

Proposició 11.3.2 (Exercici 8)**.** *Un espai X és contràctil si i només si l'aplicació identitat $id_X : X \to X$ és homòtopa a una aplicació constant*[2]*.*

[2] Una aplicació $c : X \to Y$ es diu *constant* si existeix algun element $q \in Y$ tal que $c(x) = q$ per a tot $x \in X$.

Demostració. Suposem que X és contràctil. Per definició, es té doncs, $X \simeq *$. O sigui que existeixen aplicacions

$$f : X \to *, \quad g : * \to X, \quad \text{tq.} \begin{cases} g \circ f \simeq id_X, \\ f \circ g \simeq id_* \end{cases}$$

Notem que $x_0 = g(*)$. Aleshores, la primera homotopia $g \circ f \simeq id_X$ ens diu que la identitat de X és homòtopa a $g \circ f(x) = g(*) = x_0$. O sigui que la identitat de X és homòtopa a l'aplicació constant $\varepsilon_{x_0}(x) = x_0$ (aquesta és una notació per expressar l'aplicació constant que sempre dona x_0).

Recíprocament, si $id_X \simeq \varepsilon_{x_0}$, podem considerar les aplicacions

$$f : X \to *,\ f(x) = *, \qquad g : * \to X,\ g(*) = x_0$$

i és immediat que $f \circ g = id_*$ mentre que $g \circ f(x) = \varepsilon_{x_0}(x)$. Com que per hipòtesi, $\varepsilon_{x_0} \simeq id_X$, tindrem

$$g \circ f = \varepsilon_{x_0} \simeq id_X, \qquad f \circ g \simeq id_*$$

o sigui $X \simeq *$. □

Proposició 11.3.3 (Exercici 5)**.** *La connexió i l'arc-connexió són propietats homotòpiques*[3]*. Però la compacitat i les propietats de separació no són propietats homotòpiques.*

Demostració. Suposem que X és connex, que $X \simeq Y$, però Y no és connex. Recordem que això vol dir que aleshores $\exists U, V \subseteq Y$ tals que $Y = U \cup V$ amb $U, V \neq \emptyset$ i $U \cap V \neq \emptyset$. Ara, per definició, $X \simeq Y$ si existeixen aplicacions $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$ tals que $g \circ f \simeq id_X$ i $f \circ g \simeq id_Y$, on $f \circ g \simeq id_Y$ volia dir que $\exists H : Y \times I \to Y$ amb $H(y, 0) = f(g(y))$ i $H(y, 1) = id_Y(y) = y$, $\forall y \in Y$. Ara, de Topologia, sabem que si $f : X \to Y$ és una aplicació contínua i X és connex, aleshores $f(X)$ és connex. Aleshores,

$$f(X) = (f(X) \cap U) \cup (f(X) \cap V)$$

on $f(X) \cap U$ i $f(X) \cap V$ són dos oberts de $f(X)$, que és connex. Però $U \cap V = \emptyset$ i $f(X)$ és obert. Per tant algun dels dos ha de ser $\emptyset$. Posem $f(X) \cap V = \emptyset$. Aleshores $f(X) \subseteq U$ i llavors tenim

$$H(y, 0) = f(g(y)) \in U, \qquad H(y, 1) = y \in V$$

Però $\{y\} \times I$ és un subespai connex de $Y \times I$ i pel mateix raonament d'abans, o bé $H(\{y\} \times I) \subseteq U \times I$, o bé $H(\{y\} \times I) \subseteq V \times I$. En qualsevol dels dos casos arribem a una contradicció. Per tant, Y és connex com volíem veure.

Com que connex implica arc-connex, automàticament obtenim que Y és arc-connex i per tant l'arc-connexió és una propietat homotòpica.

Finalment, veiem que si X és de Hausdorff i $X \simeq Y$, aleshores Y no té per què ser de Hausdorff. Veiem un contraexemple: prenem $X = \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ amb la topologia grollera[4]. Aleshores X és de Hausdorff. Prenem $Y = \{p, q\} \subseteq \mathbb{R}$ amb la topologia grollera. Llavors Y no és de Hausdorff. Definim les aplicacions

$$f : X \to Y, \qquad g : Y \to X$$

[3] Una *propietat homotòpica* és una propietat d'un espai topològic X que satisfà que si $X \simeq Y$, aleshores Y també té aquesta propietat.

[4] Recordem que la topologia grollera era la que tenia com a únics oberts els conjunts $\emptyset$ i X.

com $f(0) = p$ i $g(p) = g(q) = 0$. Aquestes són aplicacions contínues que a més satisfan que $g \circ f \simeq id$ i $f \circ g \simeq id$. Veiem això últim. Definim l'aplicació

$$H : Y \times I \to Y, \qquad H(y,t) := \begin{cases} y & \text{si} \quad t \leq 1/2 \\ p & \text{si} \quad t \geq 1/2 \end{cases}$$

que és contínua clarament ja que Y té la topologia grollera i se satisfà $H(y,0) = x = f(g(y)) = id(y)$, $\forall y \in Y$ i $H(y,1) = p = g(f(x))$, $\forall x \in X$, cosa que implica que $X \simeq Y$. Per tant, hem trobat un contraexemple que il·lustra que la propietat de Hausdorff no és homotòpica. El mateix es pot fer per la resta de propietats de separació. □

Definició 11.3.4 (Estrellat)**.** Un subconjunt X de $\mathbb{R}^n$ s'anomena estrellat si existeix un punt $x_0 \in X$ tal que el segment que uneix x_0 amb qualsevol altre punt de X és contingut a X.

En altres paraules, X s'anomena estrellat si $\exists x_0 \in X$ centre tal que $\forall x \in X$, es compleix

$$\{(1-t)x_0 + tx\}_{0 \leq t \leq 1} \subseteq X$$

Proposició 11.3.5 (Exercici 7)**.** *(a) Tot subconjunt convex de $\mathbb{R}^n$ és estrellat.*

(b) Tot subconjunt estrellat de $\mathbb{R}^n$ és contràctil.

Demostració. (a) Ni idea

(b) Volem provar que X és contràctil, és a dir, que tota parella d'aplicacions $f : X \to *$ i $g : * \to X$ satisfà $f \circ g \simeq id_*$ i $g \circ f \simeq id_X$. La primera és clara, ja que la composició dona la identitat. Anem a veure que $f \circ g \simeq id_X$. Definim

$$\begin{aligned} H : X \times I &\longrightarrow X \\ (x,t) &\longmapsto H(x,t) := (1-t)x_0 + tx \end{aligned}$$

Clarament és una funció contínua ja que és polinòmica. A més, satisfà que

$$\left.\begin{aligned} H(x,0) = x_0 = \varepsilon_{x_0}(x) \\ H(x,1) = x = id_X(x) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow id_X \simeq \varepsilon_{x_0}$$

on ε_{x_0} simbolitza la funció constant igual a x_0. Aleshores,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(*) = x_0 \Longrightarrow g \circ f = \varepsilon_{x_0}$$

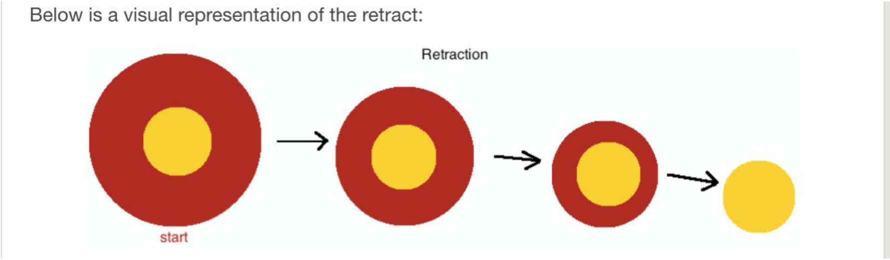
i així obtenim $g \circ f \simeq id_X$. Per tant H és una homotopia i ens dona que $X \simeq *$, com volíem veure. □

Exemple 11.3.6 (Exercici 9)**.** Si $X \neq \emptyset$, l'espai $CX = (X \times [0,1])/(X \times \{1\})$ és contràctil.

11.3.1 Retractes

Definició 11.3.7 (Retracció)**.** Sigui X un espai topològic i sigui $A \subseteq X$ un subespai. Denotem per $i : A \to X$ la inclusió. Una aplicació contínua $r : X \to A$ tal que $r \circ i = id_A$ s'anomena una *retracció* de X en A. Llavors també diem que A és un *retracte* de X.

Intuïtivament, un subespai A és un retracte de X si X pot ser contínuament deformat per convertir-se en A, fixant tots els punts d'A. Un gràfic orientatiu seria el següent:

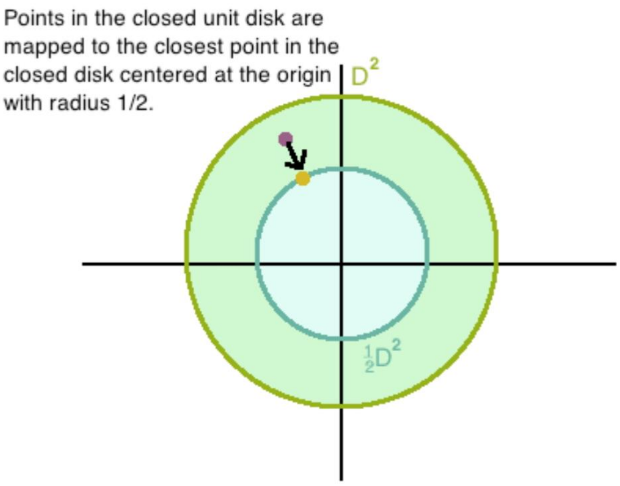


Exemple 11.3.8. Sigui D^2 el disc unitat tancat en $\mathbb{R}^2$. Sigui $\frac{1}{2}D^2$ el disc tancat amb radi 1/2 i centre a l'origen. Veurem que $\frac{1}{2}D^2$ és un retracte de D.

Definim una retracció $r : X \to A$ per $r(x, y) = (a, b)$, on (a, b) satisfà que

$$d((x, y), (a, b)) = \inf_{(c,d)\in\frac{1}{2}D^2} d((x, y), (c, d)).$$

En altres paraules, cada punt $(x, y) \in D^2$ té la seva imatge igual a un punt $(a, b) \in \frac{1}{2}D^2$ la distància del qual des de (x, y) és minimitzada. Clarament r és una aplicació contínua. A més, $r \circ i = id_A$. Aleshores, de fet, $\frac{1}{2}D^2$ és un retracte de D^2.



Proposició 11.3.9. *Qualsevol punt d'un espai X és un retracte de X.*

Demostració. Considerem la funció $r : X \to \{a\}$, definida per tota $x \in X$ per $r(x) = b$. Aleshores, r és, trivialment una funció contínua. A més a més, prenent l'aplicació inclusió $i : \{a\} \to X$, tenim $r \circ i(a) = a$, per tant $r \circ i = id_{\{a\}}$, per tant $\{a\}$ és un retracte de X. □

Proposició 11.3.10 (Exercici 10)**.** *Tot retracte d'un espai contràctil és contràctil.*

Demostració. Suposem que X és contràctil i que $A \subseteq X$ és un retracte de X. Així, existeix una aplicació contínua

$$r : X \to A, \quad r(x) = x, \; \forall x \in A$$

que li diem retracció. Utilitzarem la caracterització dels espais contràctils de l'exercici 8 (**??**), que deia que A és contràctil sii $1_A \simeq \varepsilon_{a_0}$ (on $\varepsilon_{a_0}(y) = a_0, \forall y \in A$).

Com X és contràctil, $1_X \simeq \varepsilon_{x_0}$. Si denotem $i : A \hookrightarrow X$ la inclusió, la igualtat $r(x) = x$, $\forall x \in A$, s'expressa $r \circ i = 1_A$. Aleshores,

$$1_A = r \circ i = r \circ 1_X \circ i \simeq r \circ \varepsilon_{x_0} \circ i = \varepsilon_{r(x_0)}.$$

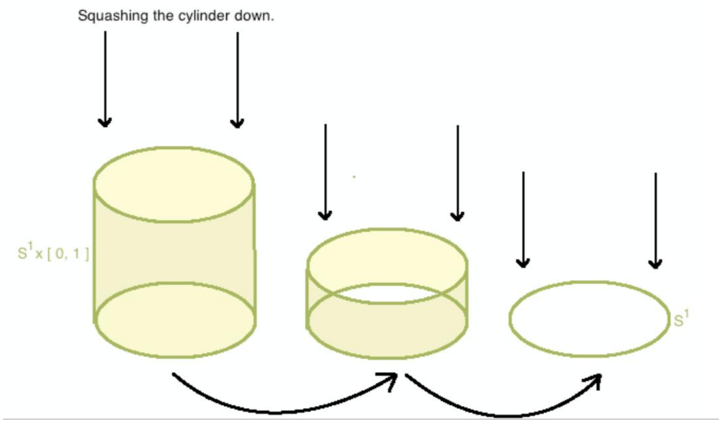
Per tant A és contràctil. □

11.3.2 Deformacions

Definició 11.3.11 (Deformació)**.** Una retracció $r : X \to A$ s'anomena *deformació* de X en A si $i \circ r \simeq id_X$. Un subespai A és un *retracte de deformació* de X si existeix una deformació de X en A.

Veiem un exemple per veure quina és la idea d'aquesta definició.

Exemple 11.3.12. Considerem l'espai $A = S^1$ que és el cercle unitat i $X = S^1 \times I$ que és el cilindre unitat. A és un retracte de deformació de X:



Proposició 11.3.13. *Si A és un retracte de deformació de X, llavors $A \simeq X$.*

Proposició 11.3.14. *Un espai X és contràctil si i només si qualsevol dels seus punts és un retracte de deformació de X.*

Proposició 11.3.15. *Tot retracte d'un espai de Hausdorff és un subespai tancat.*

Exercici 1 (Exercici 14)**.** *Demostreu que cadascun dels espais següents és homotòpicament equivalent a una unió puntual d'una o més esferes i determineu la dimensió d'aquestes esferes en cada cas:*

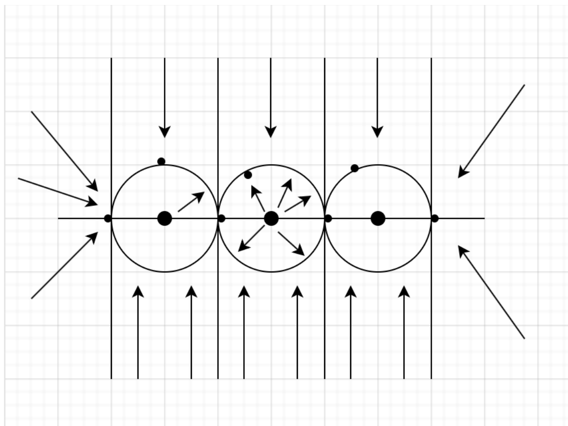
(a) $\mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$, *on* $p_i \neq p_j$, *per* $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, k$.

(b) $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m$, *on* $m \leq n - 2$.

(c) $\mathbb{R}^3$ *menys* n *rectes concurrents.*

Solució. (a) Per simplificar aquest problema, utilitzarem un resultat que afirma que donats uns punts de $\mathbb{R}^n$, $p_1, \dots, p_k$, existeix un homeomorfisme $\mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{q_1, \dots, q_k\}$, essent $q_i = (2i - 1, 0, \dots, 0)$. De forma que podem fer el problema buscant els q_i, que és més fàcil.

Aleshores, l'homotopia que busquem és la que s'expressa com la retracció de $\mathbb{R}^n \setminus \{q_1, \dots, q_k\}$ sobre les esferes de radi 1 i centre aquests punts. Gràficament és



Això és,

- dins de cada esfera és la projecció radial des del centre de l'esfera sobre l'esfera.
- entre $q_1 - 1$ i $q_k + 1$ és la projecció vertical sobre l'esfera,
- fins $q_1 - 1$ és la projecció radial a $(q_1 - 1, 0, \dots, 0)$,
- a partir de $q_k + 1$ és la projecció radial a $(q_k + 1, 0, \dots, 0)$.

En definitiva,

$$\mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\} \simeq S^{n-1}_{q_1} \vee S^{n-1}_{q_2} \vee \dots \vee S^{n-1}_{q_k}.$$

(b) $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^{n-m} \setminus \{0\})$. Com $\mathbb{R}^n - m \setminus \{0\} \simeq S^{n-m-1}$ (per la projecció radial, l'esfera és un retracte de deformació fort de $\mathbb{R}^{n-m} \setminus \{0\}$) tindrem

$$\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^m \times S^{n-m-1}$$

i com $\mathbb{R}^m$ és contràctil (ja que és convex), tenim $\mathbb{R}^m \simeq *$. En definitiva:

$$\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m \simeq * \times S^{n-m-1} = S^{n-m-1}.$$

(c) Considerem que el punt de concurrència de les n rectes és l'origen O. Aleshores, per projecció radial des de l'origen

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{\ell_1, \dots, \ell_n\} \simeq S^2 \setminus \{p_{\pm 1}, \dots, p_{\pm n}\}$$

on $\ell_1, \dots, \ell_n$ són les rectes concurrents en l'origen, i $p_{\pm i} = S^2 \cap \ell_i$.

Ara, com $S^2 \setminus \{\text{punt}\} \cong \mathbb{R}^2$, es té que

$$S^2 \setminus \{2n \text{ punts}\} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{2n - 1 \text{ punts}\}$$

i, aplicant l'apartat (a), es té que finalment

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{\ell_1, \dots, \ell_n \ : \ \bigcap_{i=1}^{n} \ell_i = O\} \simeq S^2_{q_1} \vee S^2_{q_2} \vee \dots \vee S^2_{q_{2n-1}}.$$

11.4 Homotopia de camins

Definició 11.4.1 (Homotopia relativa)**.** Sigui A un subespai d'un espai topològic X. Siguin $f_0 : X \to Y$ i $f_1 : X \to Y$ dues aplicacions contínues tals que $f_0(a) = f_1(a)$ per a tot punt $a \in A$. Una *homotopia de* f_0 *a* f_1 *relativa a* A és una aplicació contínua $H : X \times I \to Y$ tal que $H(x, 0) = f_0(x)$ i $H(x, 1) = f_1(x)$ per a tot $x \in X$ i, a més, $H(a, t) = f_0(a)$ per a tot $a \in A$. Direm que H és *estacionària* en els punts de A.

Recordem ara el que era un camí. Això és de Topologia. Un *camí* en un espai topològic Y és una aplicació contínua $\alpha : I \to Y$. Si $x, y \in Y$, diem que α és un camí de x fins a y si se satisfà que $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$. Direm que el camí és *tancat* si $\alpha(0) = \alpha(1)$.

Així doncs, podem veure que tota homotopia $H : X \times I \longrightarrow Y$ defineix una família de camins $\{H_x\}_{x \in X}$, on $H_x(t) = H(x, t)$. Amb això observem també que l'homotopia H és relativa a A si H_a és un camí constant per a tot $a \in A$.

Denotarem el fet que existeixi una homotopia de f_0 a f_1 relativa a un subespai A per $f_0 \simeq_A f_1$ o bé $f_0 \simeq f_1$ rel A.

Definició 11.4.2 (Espai amb punt base)**.** Un *espai amb punt base* és un parell (X, p) on X és un espai topològic i p és un punt de X. Si (X, p) i (Y, q) són espais amb punt base, direm que una aplicació contínua $f : X \to Y$ *conserva el punt base* si $f(p) = q$. Denotarem per $[(X, p), (Y, q)]$ el conjunt de classes d'equivalència d'aplicacions contínues $f : X \to Y$ amb $f(p) = q$ respecte a la relació d'homotopia relativa al subespai $\{p\} \subseteq X$.

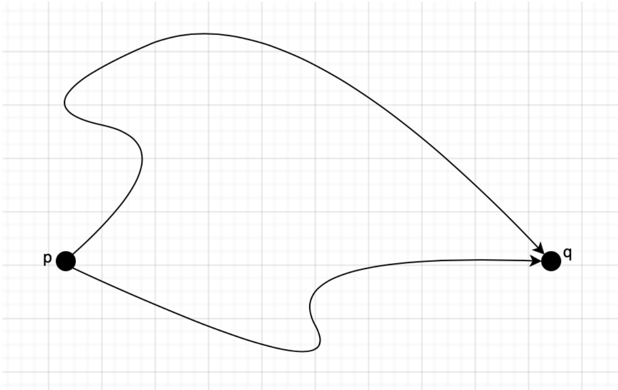
Definició 11.4.3 (Camins homòtops)**.** Dos camins $\sigma : I \to X$ i $\sigma' : I \to X$ amb $\sigma(0) = \sigma'(0)$ i $\sigma(1) = \sigma'(1)$ es diuen *homòtops relativament als extrems* si $\sigma \simeq \sigma'$ rel $\{0, 1\}$. Així doncs, són homòtops relativament als extrems si existix una aplicació contínua $H : I \times I \to Y$ tal que $H(s, 0) = \sigma(s)$ i $H(s, 1) = \sigma'(s)$, per a tot $s \in I$ i, a més, $H(0, t) = p$ i $H(1, t) = q$ per a tot $t \in I$, on p és l'origen comú de σ i σ' i q el final comú.

Per tal de simplificar la notació, habitualment es diu només que σ i σ' són *homòtops* o *equivalents* i s'escriu $\sigma \simeq \sigma'$ sense especificar que l'homotopia és relativa als extrems. De fet, si no imposéssim que les homotopies fossin relatives als extrems, llavors tots els camins serien homòtops a camins constants, ja que I és contràctil.

Intuïtivament, podem entendre que dos camins són homòtops si podem deformar contínuament l'un en l'altre. Aquesta deformació contínua representa que és la funció homotopia H, que deforma un camí, a través del temps t, de forma contínua fins a obtenir l'altre. Amb forma contínua em refereixo a que no pot trencar el camí en cap moment, ni ajuntar els extrems ni fer res d'això.

Ara bé, la definició diu que són homòtops relativament a $\{0, 1\}$. Això què vol dir? Doncs vol dir que els punts $\{0, 1\}$ no es mouran al fer aquesta deformació. I aquests punts corresponen, per la definició de camí, al començament i al final dels camins. És a dir, si jo tinc dos camins $\sigma : I \to X$ i $\tau : I \to X$ tals que $\sigma(0) = \tau(0) = p$, i $\sigma(1) = \tau(1) = q$, aleshores, si $\sigma \simeq \tau$ es diuen que són homòtops relativament als extrems.

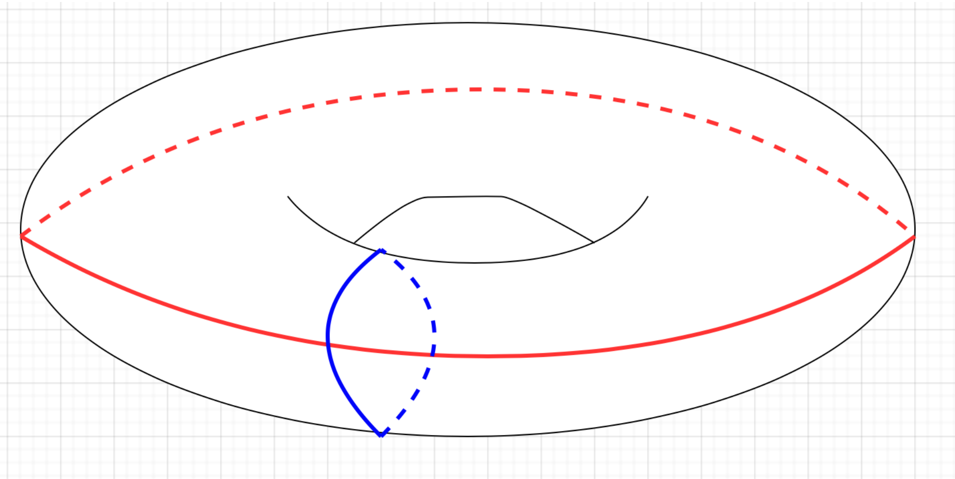
Gràficament,



aquests són dos camins homòtops relativament als extrems ja que comparteixen els extrems i a més podem deformar un per obtenir l'altre de forma contínua, és a dir, sense trencar-lo ni afegir-hi res.

Vegem un exemple. Imaginem-nos que tenim una esfera S^2 i tenim un llaç (veure **??**), que és només un camí tancat. Aleshores podem imaginar-nos aquest llaç com una goma de cabell. Aleshores tots els llaços que podem fer amb la goma a sobre de l'esfera seran camins homòtops. Així doncs, qualsevol llaç sobre S^2 serà homòtop a qualsevol altre, sempre i quan doni el mateix nombre de voltes.

Ara bé, què passa si en lloc d'una esfera tenim un tor. Aleshores podem prendre un llaç σ que sigui la volt exterior del tor, i un altre llaç τ que envolti el tor passant pel forat. És a dir, gràficament:



Aquí els camins vermell i blau no són homòtops, ja que per transformar l'un en l'altre caldria trencar-lo i després tornar-lo a enganxar.

Observació 11.4.4. *Cal destacar que, generalment, si tenim dos camins α_1 i α_2 tals que $\alpha_1 \simeq \alpha_2$, la notació $\alpha_1 \simeq \alpha_2$ vol dir en realitat que existeix una homotopia entre els camins α_1 i α_2 relativa als extrems de l'interval $I = [0,1]$ encara que no es digui. És a dir, que existeix una aplicació contínua $H : I \times I \to X$ tal que $H(s,0) = \alpha_1(s)$, $H(s,1) = \alpha_2(s)$ i, a més, $H(0,t) = \alpha_1(0) = \alpha_2(0)$, $\forall t \in I$, i $H(1,t) = \alpha_1(1) = \alpha_2(1)$ per a tot $t \in I$. Canviant la notació estem dient que $H_0 = \alpha_1$, $H_1 = \alpha_2$ i, a més, es compleix que $H_t(0) = \alpha_1(0) = \alpha_2(0)$ i $H_t(1) = \alpha_1(1) = \alpha_2(1)$, per tot $t \in I$.*

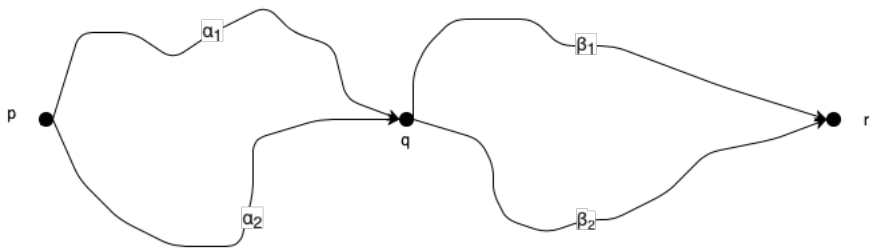
Definició 11.4.5 (Composició de camins)**.** Si $\sigma : I \to X$ i $\omega : I \to X$ són dos camins a X tals que $\sigma(1) = \omega(0)$, definim la *composició* o el *producte de camins* com el camí a X donat per

$$(\sigma * \omega)(t) = \begin{cases} \sigma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \omega(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Aquesta operació amb camins és compatible amb la relació d'homotopia; és a dir, si $\sigma \simeq \sigma'$ rel $\{0,1\}$ i $\omega \simeq \omega'$ rel $\{0,1\}$, llavors $\sigma * \omega \simeq \sigma' * \omega'$ rel $\{0,1\}$. Per tant, si denotem per $[\sigma]$ la classe d'homotopia del camí σ i per $[\omega]$ la classe d'homotopia del camí ω (relativament als extrems), llavors l'operació $[\sigma]\cdot[\omega] = [\sigma * \omega]$ està ben definida: no depèn dels representants escollits en cada classe.

Proposició 11.4.6 (Exercici 2, llista 2). *Si $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ són camins en un espai X amb $\alpha_1 * \beta_1 \simeq \alpha_2 * \beta_2$ i a més $\alpha_1 \simeq \alpha_2$, aleshores $\beta_1 \simeq \beta_2$.*

Demostració. Denotem $p = \alpha_1(0) = \alpha_2(0)$ i $q = \alpha_1(1) = \alpha_2(1)$. Com que la concatenació $\alpha_1 * \beta_1$ està definida, deduïm que $\beta_1(0) = q$ i com que $\alpha_2 * \beta_2$ també està definida, resulta que $\beta_2(0) = q$. Finalment, el fet que $\alpha_1 * \beta_1 \simeq \alpha_2 * \beta_2$ implica que $\beta_1(1) = \beta_2(1)$. Sigui r aquest punt. Tenim:



Anem a demostrar en primer lloc que la hipòtesi $\alpha_1 \simeq \alpha_2$ és equivalent a $\overline{\alpha_2} * \alpha_1 \simeq \varepsilon_q$, on ε_q denota el camí constant en el punt q i $\overline{\alpha}_2$ és el camí invers a α_2, és a dir $\overline{\alpha}_2(t) = \alpha_2(1-t)$. Això es veu clar per la proposició (**??**), apartat (i), on es demostra que el producte està ben definit, ja que a partir d'això s'obté que si $\alpha_1 \simeq \alpha_2$ aleshores $\overline{\alpha}_2 * \alpha_1 \simeq \overline{\alpha}_2 * \alpha_2$ i això és trivialment homòtop al camí constant ε_q. Recíprocament, anem a demostrar que si $\overline{\alpha}_2 * \alpha_1 \simeq \varepsilon_q$ aleshores $\alpha_1 \simeq \alpha_2$. Si $\overline{\alpha}_2 * \alpha_1 \simeq \varepsilon_q$, aleshores $\alpha_2 * \overline{\alpha}_2 * \alpha_1 \simeq \alpha_2 * \varepsilon_q \simeq \alpha_2$. D'altra banda, $\alpha_2 * \overline{\alpha}_2 * \alpha_1 \simeq \varepsilon_q * \alpha_1 \simeq \alpha_1$. Per tant obtenim $\alpha_1 \simeq \alpha_2$ per la transitivitat de la relació d'homotopia de camins.

Ara, partim de la hipòtesi que $\alpha_1 * \beta_1 \simeq \alpha_2 * \beta_2$ i fem $\overline{\alpha}_2 * \alpha_1 * \beta_1 \simeq \overline{\alpha}_2 * \alpha_2 * \beta_2$, d'on $\varepsilon_q * \beta_1 \simeq \varepsilon_q * \beta_2$ i, en definitiva $\beta_1 \simeq \beta_2$. ☐

Capítol 12

El grup fonamental

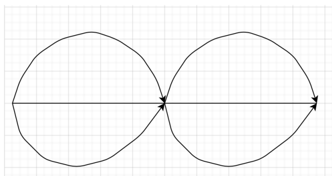
12.1 El grup fonamental

Definició 12.1.1 (Camí tancat o llaç)**.** Un camí que comença i acaba en un mateix punt s'anomena *camí tancat* o *llaç*.

Definició 12.1.2 (Grup fonamental)**.** El grup fonamental d'un espai topològic X amb punt base p és el conjunt $\pi(X, p)$ de classes d'homotopia (relativa als extrems) de llaços $\sigma : I \to X$, amb $\sigma(0) = \sigma(1) = p$.

Proposició 12.1.3 (Exercici 1)**.** *El grup fonamental*[1] $\pi(X, p)$ *és, en efecte, un grup.*

Demostració. (i) Producte ben definit. Demostrem que si σ, σ', ω i ω' són camins en un espai X tals que $\sigma(0) = \sigma'(0)$, $\sigma(1) = \sigma'(1) = \omega(0) = \omega'(0)$, $\omega(1) = \omega'(1)$ amb $\sigma \simeq \sigma'$ i $\omega \simeq \omega'$, llavors es compleix que $\sigma * \omega \simeq \sigma' * \omega'$. D'aquesta manera, el producte de classes definit anteriorment està ben definit perquè no dependrà del representant de classe.



Anomenem $F : \sigma \simeq \sigma'$ i $G : \omega \simeq \omega'$ i donem l'homotopia $H : [0, 1] \times [0, 1] \to X$, $H_t = F_t * G_t$, és a dir,

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & \text{si} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s-1,t) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Per $t = 0$, tenim:

$$H(s,0) = \begin{cases} H(s,0) = F(2s,0) = \sigma(2s) & \text{si} \quad 0 \leq s \leq 1/2 \\ H(s,1) = G(2s-1,0) = \omega(2s-1) & \text{si} \quad 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Per tant, $H(s, 0) = (\sigma * \omega)(s)$. Anàlogament $H(s, 1) = (\sigma' * \omega')(s)$. A més,

$$\begin{aligned} F(1,t) &= q \quad \forall t \\ G(0,t) &= q \quad \forall t \end{aligned}$$

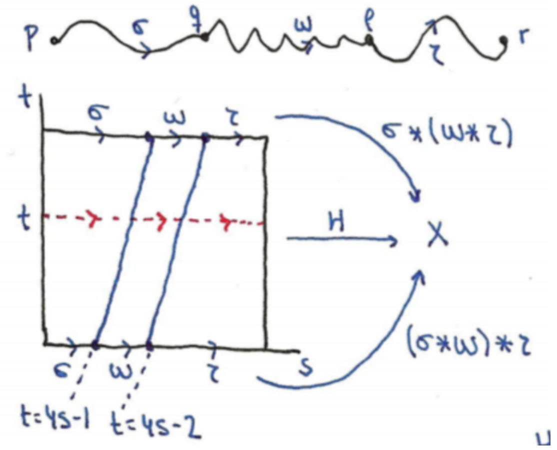
[1] També se li diu *grup de Poincaré* o *primer grup d'homotopia*.

Finalment, cal veure que els extrems són fixos, és a dir, que és una homotopia relativa als extrems.

$$H(0,t) = F(0,t) = F_t(0) = p \quad \forall t$$
$$H(1,t) = G(1,t) = G_t(1) = r \quad \forall t$$

Per tant, tenim l'homotopia entre $\sigma * \omega$ i $\sigma' * \omega'$.

(ii) Producte associatiu. Demostrem que si σ, ω, τ són camins en X tal que $\sigma(1) = \omega(0)$ i $\omega(1) = \tau(0)$, llavors $(\sigma * \omega) * \tau \simeq \sigma * (\omega * \tau)$.



Prenem $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ definida com

$$H(s,t) = \begin{cases} \sigma\left(\dfrac{4s}{1+t}\right) & 0 \leq s \leq \frac{1}{4}(1+t) \\ \omega(4s-1-t) & \frac{1}{4}(1+t) \leq s \leq \frac{1}{4}(2+t) \\ \tau\left(\dfrac{4s-2-t}{2-t}\right) & \frac{1}{4}(2+t) \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Ràpidament es verifica que H és contínua, que $H(0,t) = \sigma(0) = p$, $H(1,t) = \tau(1) = r$ i que

$$H\left(\frac{t+1}{4}, t\right) = \sigma\left(\frac{t+1}{t+1}\right) = \sigma(1) = q = \omega(0) = H\left(\frac{t+2}{4}, t\right).$$

Finalment, ens queda veure que

$$H(s,0) = \left\{\begin{array}{cc} \sigma(4s), & 0 \leq s \leq 1/4 \\ \omega(4s-1), & 1/4 \leq s \leq 1/2 \\ \tau(2s-1), & 1/2 \leq s \leq 1 \end{array}\right\} = ((\sigma * \omega) * \tau)(s)$$

i de manera similar $H(s,1) = (\sigma * (\omega * \tau))(s)$ com volíem. Així doncs, hem demostrat que $\sigma * (\omega * \tau) \simeq (\sigma * \omega) * \tau$ que això vol dir que amb les classes $[\sigma]([\omega][\tau]) = ([\sigma][\omega])[\tau]$, és a dir, que el producte és associatiu. Ara bé, la demostració l'hem fet més general, ja que hem agafat qualssevol camins i no necessàriament llaços. Però serveix igual.

(iii) Element neutre. Denotem per c_p el camí a X constant en el punt p, és a dir, que $\forall t \in [0,1]$, $c_p(t) = p$. Aquest serà el nostre element neutre. Anem a veure-ho. En efecte, si σ és un camí qualsevol, aleshores $c_{\sigma(0)} * \sigma \simeq \sigma$ i $\sigma * c_{\sigma(1)} \simeq \sigma$. Aleshores, passant a la classe, el camí constant no dependrà del punt. Veiem aquestes homotopies si es compleixen. Definim

$$H(s,t) = \begin{cases} p & \text{si} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2}(1-t) \\ \sigma\left(\dfrac{2s-1-t}{1+t}\right) & \text{si} \quad \frac{1}{2}(1-t) \leq s \leq 1 \end{cases}$$

i amb això aconseguim la primera homotopia de camins. Anàlogament,

$$H(s,t)=\begin{cases}\sigma\left(\dfrac{2s}{1+t}\right) & \text{si} \quad 0\le s\le \frac{1}{2}(1+t)\\ q & \text{si} \quad \frac{1}{2}(1+t)\le s\le 1\end{cases}$$

ens dona la segona.

(iv) Element invers. Donat un element $[\sigma]$ el seu invers és la classe del camí definit per $\overline{\sigma}(t)=\sigma(1-t)$. En efecte, si definim

$$H(s,t)=\begin{cases}\sigma(2s) & \text{si} \quad 0\le s\le \frac{1-t}{2}\\ \sigma(1-s) & \text{si} \quad \frac{1-t}{2}\le s\le \frac{1+t}{2}\\ \sigma(2-2s) & \text{si} \quad \frac{1+t}{2}\le s\le 1\end{cases}$$

obtenim que $\sigma*\overline{\sigma}\simeq c_{\sigma(0)}$, que implica que $[\sigma][\overline{\sigma}]=[c_p]$. D'altra banda, com que $\overline{\overline{\sigma}}=\sigma$, obtenim que $\overline{\sigma}*\sigma\simeq c_{\sigma(1)}$ i així provem que $[\overline{\sigma}]$ és l'element invers de $[\sigma]$ a $\pi(X,p)$.

Amb això provem que $\pi(X,p)$ és un grup. □

Així doncs, hem format un grup amb tots els llaços que són essencialment diferents, és a dir, que no es poden transformar els uns en els altres, mitjançant unes transformacions contínues (veure **??**). En definitiva:

$$\pi(X,p)=\{[\sigma]\ :\ \sigma:I\to X,\ \sigma(0)=\sigma(1)=p\}.$$

Exemple 12.1.4. Sigui $X=\mathbb{R}^2$ i $p=(0,0)$, anem a veure què és $\pi(X,p)$. Sigui $\alpha:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(0)=\alpha(1)=p$. Considerem $F:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}^2$ tal que $F(t,s)=\alpha(t)s+(1-s)p$. Aleshores aquesta aplicació és contínua i està ben definida. També podem observar com $F(t,0)=p=\varepsilon_p$ i $F(t,1)=\alpha(t)$ per a tot $5\in[0,1]$ i que $F(0,s)=\alpha(0)s+(1-s)p=ps+p-ps=p$ i $F(1,s)=\alpha(1)s+(1-s)p=p$. Per tant, F defineix una homotopia entre α i ε_p relativa a $\{0,1\}$ per tant $[\alpha]=[\varepsilon_p]$. Aleshores podem concloure que $\pi(\mathbb{R}^2,(0,0))=[\varepsilon_p]\cong\{0\}$, el grup trivial.

12.2 Canvi de punt base

Per la seva pròpia definició, el grup fonamental depèn, en principi, de l'elecció del punt base de l'espai topològic que ens ocupi. Però ara veurem que, de fet, tan sols és sensible a la component arc-connexa de X en què es troba el punt. És a dir, el grup fonamental d'un espai topològic X amb punt base p, no dependrà de p, sinó que dependrà de la component arc-connexa de p.

Teorema 12.2.1 (Canvi de punt base)**.** *Si p i p' són dos punts d'un mateix espai topològic X que pertanyen a la mateixa component arc-connexa. Aleshores $\pi(X,p)\cong\pi(X,p')$.*

Demostració. Suposem que aquests dos punts p i p' pertanyen a la mateixa component arc-connexa. Aleshores podem establir un camí $\gamma:I\to X$ de forma que vagi de p a p', és a dir, que $\gamma(0)=p$ i $\gamma(1)=p'$. Denotem per $\overline{\gamma}$ el camí invers, és a dir, $\overline{\gamma}(t)=\gamma(1-t)$.

Ara definim l'aplicació

$$u_\gamma:\pi(X,p)\to\pi(X,p'),\quad u_\gamma([\alpha])=[\overline{\gamma}*\alpha*\gamma].$$

Observem que, com que $(\overline{\gamma}*\alpha)*\gamma\simeq\overline{\gamma}*(\alpha*\gamma)$, no cal que especifiquem parèntesis en l'expressió $[\overline{\gamma}*\alpha*\gamma]$.

Doncs bé, si provem que aquesta aplicació és un isomorfisme de grups, obtindrem el que volem. Per veure això, cal veure que u_γ està ben definida, que és un morfisme de grups i per últim que és isomorfisme.

- Està ben definida. Suposem que $[\sigma] = [\sigma']$, és a dir, $\sigma \simeq \sigma'$. Llavors, com que ja sabem que la composició de camins és compatible amb la relació d'homotopia, deduïm que $\overline{\gamma} * \sigma \simeq \overline{\gamma} * \sigma'$ i a continuació $(\overline{\gamma} * \sigma) * \gamma \simeq (\overline{\gamma} * \sigma') * \gamma$. Per tant, $[\overline{\gamma} * \sigma * \gamma] = [\overline{\gamma} * \sigma' * \gamma]$ i per tant està ben definida.

- És morfisme de grups. Cal demostrar que $u_\gamma([\sigma][\omega]) = u_\gamma([\sigma])u_\gamma([\omega])$, on σ, ω són dos llaços en el punt p. Observem que d'una banda tenim

$$u_\gamma([\sigma][\omega]) = u_\gamma([\sigma * \omega]) = [\overline{\gamma} * \sigma * \omega * \gamma],$$

  mentre que d'altra banda tenim

$$u_\gamma([\sigma])u_\gamma([\omega]) = [\overline{\gamma} * \sigma * \gamma][\overline{\gamma} * \omega * \gamma] = [\overline{\gamma} * \sigma * \gamma * \overline{\gamma} * \omega * \gamma]$$

  com que $\gamma * \overline{\gamma} \simeq \varepsilon_p$ (on ε_p denota el camí constant en p), deduïm que

$$[\overline{\gamma} * \sigma\gamma * \overline{\gamma} * \omega * \gamma] = [\overline{\gamma} * \sigma * \omega * \gamma]$$

  i aleshores tenim la igualtat que volíem.

- És isomorfisme. Per demostrar que u_γ és un isomorfisme només ens cal ara provar que és una aplicació bijectiva.

  Considerem l'aplicació

$$u_{\overline{\gamma}} : \pi(X, p') \to \pi(X, p)$$

  definida com $u_{\overline{\gamma}}([\sigma]) = [\gamma * \sigma * \overline{\gamma}]$. Aquesta aplicació és també un morfisme de grups ben definit (la demostració és anàloga a la que hem fet per a u_γ utilitzant que $\overline{\overline{\gamma}} = \gamma$. Llavors

$$u_{\overline{\gamma}}(u_\gamma([\sigma])) = u_{\overline{\gamma}}([\overline{\gamma} * \sigma * \gamma]) = [\gamma * \overline{\gamma} * \sigma\gamma * \overline{\gamma}] = [\varepsilon_p * \sigma * \varepsilon_p] = [\sigma]$$

  per a tot llaç σ en p. Per tant, la composició $u_{\overline{\gamma}} \circ u_\gamma$ és la identitat. Anàlogament, la composició $u_\gamma \circ u_{\overline{\gamma}}$ també és la identitat. D'aquests dos fets deduïm que u_γ i $u_{\overline{\gamma}}$ són aplicacions bijectives, inverses l'una de l'altra. Això demostra el que volíem.

I per tant tenim que $\pi(X, p) \cong \pi(X, p')$ mitjançant l'isomorfisme u_γ. □

Corol·lari 12.2.2. *Si X és un espai arc-connex aleshores per a tota parella de punts $x, y \in X$ es té que $\pi(X, x) \cong \pi(X, y)$*

Demostració. És una conseqüència directa del teorema (**??**) del canvi de punt base: si X és arc-connex, només té una component arc-connexa a la qual hi pertanyen tots els punts. □

12.3 Relació entre grups fonamentals de diferents espais

12.3.1 El grup fonamental és un invariant topològic

També podem relacionar els grups fonamentals de diferents espais topològics amb punts base. En realitat, es tracta d'una "extensió" de l'apartat anterior, en el qual es demostrava que el grup fonamental no depenia del punt base sinó de la component arc-connexa. En aquest cas el que demostrarem és que si tenim dos espais topològics amb punts base i una aplicació entre ells que envia un punt base a l'altre, aleshores els seus grups fonamentals seran isomorfs, sempre i quan els espais topològics siguin homeomorfs.

Proposició 12.3.1. *Si tenim X i Y espais topològics amb punts fixos $p_x \in X$ i $p_y \in Y$ i tenim l'aplicació contínua $\varphi : X \to Y$ que satisfà $p_y = \varphi(p_x)$, aleshores*

(1) Si α és un camí en X, llavors $\varphi \circ \alpha$ és un camí en Y.

(2) Si F és una homotopia entre dos camins α i β de X, llavors $\varphi \circ F$ és una homotopia entre els camins $\varphi \circ \alpha$ i $\varphi \circ \beta$ en Y.

(3) L'aplicació $\varphi_* : \pi(X, p_x) \to \pi(Y, p_y)$ definida per $\varphi_*([\sigma]) := [\varphi \circ \sigma]$ és un morfisme de grups. Se li'n diu morfisme induït

Demostració. Els dos primers punts són trivials. Cal mirar les definicions anteriors d'homotopia de camins. El punt (3) es prova mitjançant els dos primers punts, que ens donen que és una aplicació ben definida. D'altra banda, per veure que és un morfisme prenem dues classes $[\alpha], [\beta] \in \pi(X, p_x)$ qualsevulles i aleshores

$$\varphi_*([\alpha][\beta]) = \varphi_*([\alpha * \beta]) = [\varphi \circ (\alpha * \beta)] = [(\varphi \circ \alpha) \circ (\varphi \circ \beta] =$$

$$= [\varphi \circ \alpha][\varphi \circ \beta] = \varphi_*([\alpha])\varphi_*([\beta])$$

i per tant és un morfisme de grups. □

Notem, però, que φ_* sota aquestes hipòtesis no defineix necessàriament un isomorfisme de grups. Sigui com sigui, la propietat següent dels morfismes induïts serà una pista per veure quines hipòtesis s'hauran d'afegir per a que $\varphi : X \to Y$ sigui un isomorfisme.

Proposició 12.3.2. *Donades $\varphi : X \to Y$ i $\psi : Y \to Z$ aplicacions contínues entre espais topològics, es compleix que $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$*

Demostració. Clarament l'aplicació $\psi \circ \varphi : X \to Z$ és contínua, per ser composició d'aplicacions contínues entre espais topològics. De manera que el morfisme induït és $(\psi \circ \varphi)_*([\alpha]) = [(\psi \circ \varphi) \circ \alpha]$, per a qualsevol $\alpha \in \pi(X, p_x)$, on p_x és el punt base de X. Aleshores:

$$(\psi \circ \varphi)_*([\alpha]) = [\psi \circ \varphi\alpha] = \psi_*([\varphi \circ \alpha]) = \psi_*(\varphi_*([\alpha]))$$

per la propietat de l'associativitat de la composició de funcions. Això prova, doncs, que $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ com volíem. □

Ara sí, ja podem demostrar l'isomorfia que busquem.

Teorema 12.3.3 (Invariant topològic)**.** *Si X, Y són arc-connexos i $X \simeq Y$ (és a dir, són homeomorfs), llavors $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$, els grups fonamentals de (X, x) i (Y, y) són isomorfs, és a dir, $\pi(X, x) \cong \pi(Y, y)$.*

Demostració. Fixant els punts base $x \in X$ i $y \in Y$, suposant, sense pèrdua de generalitat que $\varphi : X \to Y$ és un homeomorfisme que satisfà que $\varphi(x) = y$, existeix una aplicació contínua $\phi : Y \to X$ tal que $\varphi \circ \phi = \mathrm{id}_Y$ i $\phi \circ \varphi = \mathrm{id}_X$. Per aquesta última igualtat, aplicant els morfismes induïts a ambdues bandes i aplicant la proposició anterior (**??**), obtenim

$$(\phi \circ \varphi)_* = \phi_* \circ \varphi_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi(X,x)}.$$

De manera anàloga veiem que $\varphi_* \circ \phi_* = \mathrm{id}_{\pi(Y,y)}$ i per tant φ_* i ϕ_* són les dues isomorfismes, l'una inversa de l'altra, que ens donen $\pi(X, x) \cong \pi(Y, y)$. □

Finalment, el que hem fet en aquesta secció és provar que el grup fonamental és un *invariant topològic*, és a dir, que per a dos espais homeomorfs, els seus grups fonamentals seran isomorfs, sempre i quan es compleixi que el punt base del segon espai topològic sigui la imatge per l'homeomorfisme del punt base del primer espai topològic.

Observació 12.3.4. *Hem provat que si X i Y són homeomorfs, aleshores $\pi(X,p) \cong \pi(Y, f(p))$. Ara bé, la implicació cap a l'esquerra no és certa. És a dir, si $\pi(X,p) \cong \pi(Y,q)$, no té per què implicar que X i Y siguin homeomorfs.*

12.3.2 El grup fonamental és un invariant homotòpic

A l'apartat anterior hem provat que si tenim dos espais topològics X i Y homeomorfs i tal que el punt base $p \in X$ de X satisfà que $\varphi(p)$ és el punt base de Y, on φ és l'aplicació que dona l'homeomorfisme, aleshores φ indueix un isomorfisme entre els grups fonamentals $\pi(X,p)$ i $\pi(Y,\varphi(p))$.

Ara, però, aquesta és una propietat una mica feble, en tant que s'han de tenir moltes hipòtesis com ara bé l'homeomorfisme entre els espais topològics. Això és una cosa que poques vegades passarà.

En aquesta secció veurem, doncs, que si tenim dos espais topològics X i Y que siguin homotòpicament equivalents, encara que no siguin homeomorfs, tindran grups fonamentals isomorfs.

Teorema 12.3.5 (Invariància homotòpica del grup fonamental)**.** *Si X i Y són homotòpicament equivalents, llavors per a tot punt $p \in X$, existeix algun $q \in Y$ tal que $\pi(X,p) \cong \pi(Y,q)$.*

Demostració. Com que X i Y són homotòpicament equivalents, existeixen aplicacions contínues $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$ tal que $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ i $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$.

Sigui p un punt qualsevol de X. Podem considerar els morfismes induïts

$$f_* : \pi(X,p) \to \pi(Y, f(p)), \qquad g_* : \pi(Y, f(p)) \to \pi(X, g(f(p))),$$

on, en general, $g(f(p)) \neq p$. Aquest inconvenient és el que dificulta la demostració.

Escollim una homotopia $H : X \times I \to X$ tal que $H_0 = g \circ f$ i $H_1 = \mathrm{id}_X$ i considerem el camí $\gamma(t) = H(p,t)$ a Y, que satisfà $\gamma(0) = H_0(p) = g(f(p))$ i $\gamma(1) = H_1(p) = p$. Considerem l'isomorfisme de canvi de punt base donat per aquest camí,

$$u_\gamma : \pi(X, g(f(p))) \to \pi(X,p),$$

on $u_\gamma([\omega]) = [\overline{\gamma} * \omega * \gamma]$ per a tot llaç ω en $g(f(p))$. Llavors es compleix

$$u_\gamma \circ g_* \circ f_* = \mathrm{id}. \tag{12.1}$$

Per comprovar-ho, hem de veure que $u_\gamma(g_*(f_*([\sigma]))) = [\sigma]$ per a tot llaç σ en el punt p; és a dir, que $\overline{\gamma} * (g \circ f \circ \sigma) * \gamma$ és homòtop a σ relativament als extrems per a qualsevol σ. Això ens ho demostra, per exemple, l'homotopia següent:

$$F(s,t) = \begin{cases} \gamma(1 - 4s(1-t)) & \text{si } 0 \le s \le \frac{1}{4}, \\ H(\sigma(4s-1), t) & \text{si } \frac{1}{4} \le s \le \frac{1}{2}, \\ \gamma(2s(1-t) - 1 + 2t) & \text{si } \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

Com que u_γ és un morfisme bijectiu, deduïm de (**??**) que f_* és injectiu i g_* és exhaustiu. Per simetria, si considerem

$$g_* : \pi(Y, f(p)) \to \pi(X, g(f(p))), \qquad f_* : \pi(X, g(f(p))) \to \pi(Y, f(g(f(p))))$$

i repetim el mateix raonament partint d'una homotopia entre $f \circ g$ i id_Y, arribarem a la conclusió que g_* és injectiu. Així quedarà demostrat que g_* és un isomorfisme. Llavors f_* també ho és (tant per al punt p com per al punt $g(f(p))$) i per tant $\pi(X,p) \cong \pi(Y, f(p))$, tal com volíem demostrar. $\square$

Corol·lari 12.3.6. *Si X és un espai contràctil i $x_0 \in X$, aleshores $\pi(X, x_0) = \{\mathrm{id}\}$ és el grup trivial.*

Demostració. Aplicant el teorema anterior (**??**) s'obté que el grup fonamental de X és isomorf al grup fonamental d'un punt, que és el grup trivial. $\square$

12.3.3 El grup fonamental del producte

Proposició 12.3.7 (Exercici 5ab)**.** *Siguin X, Y espais amb punts base respectius x_0, y_0. Aleshores $\pi(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$.*

Demostració. Les aplicacions projeccions $p_X : X \times Y \to X$ i $p_Y : X \times Y \to Y$ són aplicacions contínues i, a més, $p_X = (x_0, y_0) = x_0$ i $p_Y(x_0, y_0) = y_0$, per tant indueixen uns morfismes de grups

$$(p_X)_* : \pi(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi(X, x_0)$$

$$(p_Y)_* : \pi(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi(Y, y_0)$$

i aquests dos morfismes indueixen un altre morfisme

$$p : \pi(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$$

Hem de provar que p és un isomorfisme.

- Exhaustiva. Prenem $([\alpha], [\beta]) \in \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$. Aleshores

  $$\begin{aligned} \alpha : I \to X, &\quad \alpha(0) = \alpha(1) = x_0 \\ \beta : I \to Y, &\quad \beta(0) = \beta(1) = y_0 \end{aligned}$$

  són llaços en X, Y respectivament i podem prendre el llaç $\alpha \times \beta$ definit com $(\alpha \times \beta)(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ que verifica que $(\alpha \times \beta)(0) = (\alpha \times \beta)(1) = (x_0, y_0)$ i que també verifica $p_X(\alpha \times \beta) = \alpha$ i $p_Y(\alpha \times \beta) = \beta$, és a dir,

  $$p([\alpha \times \beta]) = ([\alpha], [\beta])$$

  i per tant p és exhaustiva.

- Injectiva. Siguin $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \pi(X \times Y)$ tals que $p([\gamma_1]) = p([\gamma_2])$. Volem veure que aleshores $[\gamma_1] = [\gamma_2]$, és a dir, que $\gamma_1 \simeq \gamma_2$.

  Aleshores, si $p_X(\gamma_1) = \alpha_1$ i $p_Y(\gamma_1) = \beta_1$, es té $\gamma_1 = \alpha_1 \times \beta_1$. Anàlogament, $\gamma_2 = \alpha_2 \times \beta_2$. Amb això tenim, com $p([\gamma_1]) = p([\gamma_2])$ que $[\alpha_1] = [\alpha_2]$, és a dir, existeix una homotopia A que fa que $\alpha_1 \simeq \alpha_2$ i, de la mateixa manera, existeix una homotopia B que fa que $\beta_1 \simeq \beta_2$. Ara podem definir l'homotopia següent:

  $$\begin{aligned} H : I \times I &\longrightarrow X \times Y \\ (s,t) &\longmapsto H(s,t) := (A(s,t), B(s,t)) \end{aligned}$$

  Demostrem que sigui homotopia. En efecte, és contínua perquè les seves components ho són (perquè són homotopies) i a més verifica que

  $$\begin{aligned} H(s,0) &= (A(s,0), B(s,0)) = (\alpha_1(s), \beta_1(s)) \\ H(s,1) &= (A(s,1), B(s,1)) = (\alpha_2(s), \beta_2(s)) \\ H(0,t) &= H(1,t) = (x_0, y_0), \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

i aleshores hem provat que és una homotopia entre $\alpha_1 \times \beta_1$ i $\alpha_2 \times \beta_2$, és a dir, que $[\alpha_1 \times \beta_1] = [\alpha_2 \times \beta_2]$. Per tant p és injectiva.

- Morfisme. Això ja ha quedat clar perquè hem definit p a partir de dos morfismes: els morfismes $(p_X)_*$ i $(p_Y)_*$ induïts (veure **??**) a partir de les projeccions. Per tant és morfisme.

Finalment, doncs, hem provat que p és un isomorfisme, com volíem veure. □

Un exemple molt clar d'aplicació del que acabem de veure és el càlcul del grup fonamental del tor:

Exemple 12.3.8 (Exercici 5c)**.** El tor en dimensió n es defineix com el producte de n circumferències S^1, és a dir, $T_n = S^1 \times \overset{n)}{\cdots} \times S^1$. Així doncs, el seu grup fonamental serà $\pi(S^1 \times \cdots \times S^1) \cong \pi(S^1) \times \cdots \times \pi(S^1) = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^n$.

12.4 El grup fonamental de S^1

Aquest apartat ha estat pràcticament plagiat del que va fer l'estudiant Marí Jané Ballarín, als seus apunts de *Topologia i geometria global de superfícies*, la primavera del 2020, i que va penjar al Google Drive cooperatiu de manera que tothom hi pot accedir. La demostració que ens va proporcionar el professor de teoria, Vicente Navarro, es tractava de mitja cara i no entenia res, així que vaig optar per prendre aquesta que s'entén molt millor.

Un cop vist el concepte de grup fonamental d'un espai topològic, veurem que calcular-lo no sol ser tasca fàcil. De fet, dedicarem tot aquest apartat a trobar $\pi(S^1, 1)$, on 1 denota el punt $(1, 0)$ del pla $\mathbb{R}^2$, que hem escollit com a punt base. Per fer-ho, considerarem la circumferència com a part dels complexos, i.e. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \|z\| = 1\}$, així com l'aplicació exponencial $e : \mathbb{R} \to S^1$, definida com $e(t) := e^{2\pi i t} = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t)$.

Observem que l'aplicació e compleix $e(t) = e(t + 2k)$, $\forall t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}$. En aquest apartat provarem $\pi(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. L'isomorfisme que usarem és el que envia cada classe $[\gamma] \in \pi(S^1, 1)$ al nombre de voltes complertes que fa γ a S^1 en sentit antihorari, menys el nombre de voltes que fa en sentit horari. Així, cal fixar abans aquesta noció de "voltes a S^1"; els resultats següents motiven les definicions posteriors i garanteixen que tenen sentit.

Lema 12.4.1 (Nombre de Lebesgue)**.** *Siguin (X, d) un espai mètric compacte. Fixat prèviament $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recobriment per oberts de X, existeix $\delta > 0$ tal que si $C \subset X$ verifica* $\operatorname{diam}(C) = \sup_{x,y \in C}\{d(x, y)\} < \delta$, *llavors $\exists i \in I$ tal que $C \subset U_i$.*

Demostració. Essent X compacte, podem prendre un subrecobriment finit de X per $\mathcal{U}$, és a dir, podem prendre $i_1, \ldots, i_n \in I$ tals que $U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_n}$. Ara, si $X = U_{i_j}$ per algun $j \in \{1, \ldots, n\}$, aleshores el lema se satisfà de manera trivial.

Suposem que no passa això. Per a cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ definim el conjunt $A_j = X \setminus U_{i_j}$. És clar que $A_1, \ldots, A_n$ són tancats (perquè són complementaris d'oberts) i que la seva intersecció

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j = \bigcap_{j=1}^{n} (X \setminus U_{i_j}) = X \setminus \left(\bigcap_{j=1}^{n} U_{i_j} \right) = X \setminus X = \emptyset$$

és buida. Considerem la funció $f : X \to \mathbb{R}$, definida per $f(x) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} d(x, A_j)$, per a cada $x \in X$. Aquesta funció és contínua ja que la funció distància ho és i la suma de funcions contínues és contínua. Ara, per la compacitat de X, f assoleix un cert valor mínim $\delta \geq 0$. De fet, cal que $\delta > 0$ estrictament, ja que

$$f(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} d(x, A_j) = 0 \Rightarrow d(x, A_j) = 0,\ \forall j \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow x \in \overline{A_j} = A_j,\ \forall j$$

i això no és possible donada la construcció dels conjunts A_j.

Amb tot, sigui C un subconjunt de X satisfent les hipòtesis del lema, és a dir, que $\operatorname{diam}(C) < \delta = \min_{x\in X}\{f(x)\}$, de manera que C compleix $C \subset B_\delta(x_0)$ $\forall x_0 \in C$. I, per acabar, com que, en particular, $f(x_0) \geq \delta$, $\forall x_0 \in C$, per cadascun d'aquests punts hi ha un cert $j \in \{1, \dots, n\}$ pel qual $d(x_0, A_j) \geq \delta$, d'on $B_\delta(x_0) \subset X \setminus A_j = U_{i_j}$, i, per tant, $C \subset U_{i_j}$. □

Lema 12.4.2 (Elevació de camins). *Per tot camí continu $\gamma : I \to S^1$ tal que $\gamma(0) = 1$ existeix una única aplicació $\overline{\gamma} : I \to \mathbb{R}$ tal que $\overline{\gamma}(0) = 0$ i $e \circ \overline{\gamma} = \gamma$.*

Demostració. Per començar, notem la següent propietat de l'exponencial complexa:

$$e^{-1}(\{1\}) = \mathbb{Z} \Longrightarrow \mathbb{R} \setminus e^{-1}(\{1\}) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n, n+1),$$

d'on

$$\begin{aligned} e_{|(n,n+1)} : (n, n+1) &\longrightarrow S^1 \setminus \{1\} \\ t &\longmapsto \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t)\ \forall n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

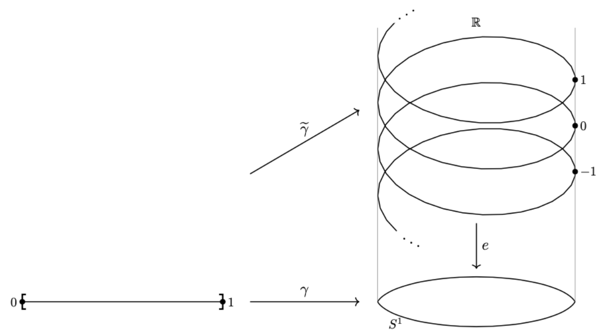
és un homeomorfisme la inversa del qual és una determinació apropiada del logaritme complex. De fet, donat qualsevol $z \in S^1$, prenent $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $e(\alpha) = z$, tenim que $\mathbb{R} \setminus e^{-1}(\{z\}) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(\alpha + n, \alpha + n + 1)$ i $e_{|\alpha+n,\alpha+n+1}$ és un homeomorfisme $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Considerem ara, per cada $z \in S^1$ l'obert $U_z = S^1 \setminus \{z\}$, de manera que $\{U_z\}_{z\in S^1}$ és un recobriment per oberts de S^1. Per la continuïtat de γ, tenim que $\{\gamma^{-1}(U_z)\}_{z\in S^1}$ és un recobriment per oberts de l'interval I. Ara, com que aquest interval és un espai mètric compacte, pel lema del nombre de Lebesgue (**??**) $\exists \delta > 0$ tal que si $C \subset I$ satisfà $\operatorname{diam}(C) < \delta$ aleshores $\exists z \in S^1$ tal que $C \subset \gamma^{-1}(U_z)$. Així podem prendre k suficientment gran de manera que $\frac{1}{k} < \delta$ i, llavors, $\forall i \in \{1, \dots, k-1\}$ tindrem $\gamma\left(\left[\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}\right]\right) \subset U_z$ per a un cert $z \in S^1$.

En particular, podem trobar $z_0 \in S^1$ tal que $\gamma(I_0) = \gamma([0, 1/k]) \subset U_{z_0}$. Tal com dèiem abans, $e^{-1}(U_{z_0}$ és unió disjunta d'intervals oberts en $\mathbb{R}$, tots ells homeomorfs a U_{z_0} via e. Observem a més que podem assegurar que algun d'aquests intervals conté $0 \in \mathbb{R}$, atès que $z_0 \neq 1$ ja que cal $\gamma(0) = 1 \in U_{z_0} = S^1 \setminus \{z_0\}$. Sigui J_0 tal interval. A I_0 podem definir $\overline{\gamma}$ com $(e_{|J_0})^{-1} \circ \gamma_{|I_0}$, de manera que serà contínua en aquest interval i verificarà $e \circ \overline{\gamma} = \gamma$. Amés, és evident que es complirà $\overline{\gamma}(0) = (e_{|J_0})^{-1}(\gamma(0)) = (e_{|J_0})^{-1}(1) = 0$.

A partir d'aquí és qüestió d'estendre la definició de $\overline{\gamma}$ a I. Ho farem de manera inductiva. Suposant $\overline{\gamma}$ definida de manera contínua a $I_0 \cup \dots \cup I_{j-1}$ i que satisfaci $e \circ \overline{\gamma} = \gamma$ per un cert $j \in \{0, \dots, n-1\}$, per un cert $I_j = [j/k, (j+1)/k]$ siguin $z_j \in S^1$ tal que $\gamma(I_j) \subset U_{z_j}$ i J_j l'interval de $e^{-1}(U_{z_j})$ que conté $\overline{\gamma}(j/k)$. Observem que, de manera similar al cas inicial, l'existència d'aquest interval està garantida pel fet que, com que $j/k \in I_{j-1} \cap I_j$, llavors $(e \circ \overline{\gamma})(j/k) = \gamma(j/k) \in U_{z_j} \Rightarrow \overline{\gamma}(j/k) \in e^{-1}(U_{z_j})$ i per tant $\overline{\gamma}(j/k) \in e^{-1}(U_{z_j})$.

Dit això, definim $\overline{\gamma}$ a I_j com $(e_{|J_j})^{-1} \circ \gamma_{|I_j}$, de manera que hi serà continua.



Queda provat així que podem construir una aplicació contínua $\overline{\gamma} : I_1 \cup \cdots \cup I_n = I \to \mathbb{R}$ que satisfà $\overline{\gamma}(0) = 0$ i $e \circ \overline{\gamma} = \gamma$ partint d'un camí $\gamma : I \to S^1$ tal que $\gamma(0) = 1$.

Veurem per acabar que aquesta aplicació $\overline{\gamma}$ és l'única amb les característiques aquí esmentades. Considerem una altra aplicació $\overline{\gamma}' : I \to \mathbb{R}$ amb les mateixes propietats que $\overline{\gamma}$. Així, tindrem, en particular, $e \circ \overline{\gamma}' = \gamma = e \circ \overline{\gamma}$, d'on, per la periodicitat de e, cal que la imatge de I per $\overline{\gamma}' - \overline{\gamma}$ sigui un subconjunt de $\mathbb{Z}$. A més, aquest subconjunt ha de ser connex, ja que és la imatge d'un espai connex I per una aplicació contínua $\overline{\gamma}' - \overline{\gamma}$. Ara bé, els únics subconjunts connexos (no buits) de $\mathbb{Z}$ són els conjunts que contenen un sol punt, de manera que $\overline{\gamma}' - \overline{\gamma}$ cal que sigui una aplicació constat. D'aquí sabent que $\overline{\gamma}'(0) - \overline{\gamma}(0) = 0 - 0 = 0$ es desprèn $\overline{\gamma}' = \overline{\gamma}$. $\square$

La imatge d'aquesta demostració és la que va proporcionar l'estudiant Marí Jané Ballarín (veure nota del principi de la secció).

Definició 12.4.3 (Elevació de camins)**.** Donat un camí continu $\gamma : I \to S^1$ amb punt base $1 \in S^1$, i.e., tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$, anomenem *elevació de* γ a una aplicació $\overline{\gamma} : I \to \mathbb{R}$ que satisfà $e \circ \overline{\gamma} = \gamma$.

Observem que, en particular, si $\overline{\gamma}$ és l'elevació de γ tindrem

$$(e \circ \overline{\gamma})(1) = \gamma(1) = 1 \Longrightarrow e^{2\pi i \overline{\gamma}(1)} = 1 \Longrightarrow \overline{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}.$$

Definició 12.4.4 (Grau d'un camí)**.** Definim el grau del camí $\gamma : I \to S^1$ com $\mathrm{gr}(\gamma) := \overline{\gamma}(1)$.

Exemple 12.4.5. L'aplicació $\overline{\gamma}(t) = t$, per tot $t \in I$, és una elevació del camí $\gamma(t) = (e \circ \overline{\gamma})(t) = e^{2\pi i t}$, $\forall t \in I$, de manera que $\mathrm{gr}(\gamma) = \overline{\gamma}(1) = 1$. De fet, és prou evident que, en general, $\overline{\gamma}_n(t) = nt$ és una elevació de $\gamma_n(t) = e^{2\pi i n t}$ $\forall n \geq 1$ i, per tant, $\mathrm{gr}(\gamma_n) = \overline{\gamma}_n(1) = n$, $\forall n \geq 1$.

Aquesta definició es pot estendre a tot camí γ tancat de S^1: podem definir una elevació $\overline{\gamma}$ (no única) d'un tal camí com una aplicació $\overline{\gamma} : I \to \mathbb{R}$ que verifica $\overline{\gamma}(0) \in e^{-1}(\{\gamma(0)\})$ i $e \circ \overline{\gamma} = \gamma$, i el grau de γ com $\mathrm{gr}(\gamma) = \overline{\gamma}(1) - \overline{\gamma}(0) \in \mathbb{Z}$.

És trivial que el lema d'elevació (**??**) prova que tals aplicacions $\overline{\gamma}$ existeixen. Per construir-ne una tan sols cal seguir els mateixos passos que en aquest resultat, sense la limitació en la tria de l'interval J_0 que contingui un element de l'antiimatge de $\gamma(0)$ per e; aquesta llibertat és el que fa perdre la unicitat d'elevació. Malgrat això, fixades dues elevacions de γ, usant els mateixos raonaments que tanquen el lema d'elevació, la seva diferència ha de ser constant i entera. En particular, el grau de γ està ben definit, i.e. no depèn de l'elevació que n'haguem escollit, ja que fixades dues elevacions $\overline{\gamma}_1$ i $\overline{\gamma}_2$ de γ, podent trobar $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\overline{\gamma}_1(t) = \overline{\gamma}_2(t) + k$, $\forall t \in I$, tenim que

$$\overline{\gamma}_1(1) - \overline{\gamma}_1(0) = (\overline{\gamma}_2(1) + k) - (\overline{\gamma}_2(0) + k) = \overline{\gamma}_2(1) - \overline{\gamma}_2(0)$$

El grau d'un camí, com suggereixen els exemples donats, es correspon amb la idea de quantes voltes complertes fa aquest a S^1. Així, seguint de com encetàvem aquest apartat, aquesta aplicació definirà l'isomorfisme entre $\pi(S^1, 1)$ i $\mathbb{Z}$ que busquem. Abans, però, haurem de garantir que el grau de dos camins homòtops és el mateix. I per això caldrà generalitzar el concepte d'elevació a les homotopies d'aplicacions.

Lema 12.4.6 (Elevació d'homotopies)**.** *Per tota aplicació contínua $H : I \times I \to S^1$ tal que $H(0, s) = 1$ $\forall s \in I$ existeix una única nova aplicació contínua $\tilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{H}(0, s) = 0$ $\forall s \in I$ i $e \circ \tilde{H} = H$.*

Demostració. Considerem, per cada $s \in I$, el camí $H_s(t) = H(t, s)$ que, per hipòtesi, té un punt base 1. Pel lema d'elevació de camins, cada H_s admet una única aplicació $\tilde{H}_s : I \to \mathbb{R}$ tal que $e \circ \tilde{H}_s = H_s$ i $\tilde{H}_s(0) = 0$. Llavors, és clar que l'aplicació

$$\begin{aligned} \tilde{H} : I \times I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, s) &\longmapsto \tilde{H}_s(t) \end{aligned}$$

és l'única que satisfà $e(\tilde{H}(t, s)) = e(\tilde{H}_s(t)) = H_s(t) = H(t, s)$ $\forall (t, s) \in I \times I$ alhora que $\tilde{H}(0, s) = \tilde{H}_s(0) = 0$, $\forall s \in I$.

Vist això, tan sols queda provar que $\tilde{H}$ és contínua. Per fer-ho, veurem que $\tilde{H}$ és contínua en un punt arbitrari $(a, b) \in I \times I$. Notem, per començar, que essent H contínua en un compacte com $I \times I$, llavors és uniformement contínua (això és d'Anàlisi Matemàtica). Així podem prendre un cert $\delta > 0$ pel qual donats $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in I \times I$ tals que $\|(x_2, y_2) - (x_1, y_1)\| < \delta$, tenim $d_{S^1}(H(x_2, y_2), H(x_1, y_1)) < 1$, on d_{S^1} denota la mètrica de S^1 definida com la longitud del menor dels arcs que uneixen dos punts dins la circumferència. A més, podem suposar que el valor δ pres és prou petit com per aplicar el lema del nombre de Lebesgue (**??**) a $I \times I$. Llavors, de manera anàloga que a la prova del lema d'elevació de camins (**??**) per cada subconjunt C de $I \times I$ de diàmetre menor que δ, tindrem $H(C) \subset U_z$ per un cert $z \in S^1$.

En particular, si $\{t_i\}_{0 \le i \le n}$ és una successió creixent de nombres tals que $t_0 = 0$, $t_n = 1$ i $|t_i - t_{i-1}| < \delta/2$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, els rectangles $R_i = [t_{i-1}, t_i] \times [b - \delta/4, b + \delta/4] \subset I \times I$ satisfan la propietat anterior $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. En efecte,

$$\operatorname{diam}(R_i) = \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (\delta/2)^2} < \sqrt{(\delta/2)^2 + (\delta/2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta < \delta.$$

Naturalment, $(a, b) \in R_i$ per un cert $i \in \{1, \ldots, n\}$. Per provar la continuïtat de $\tilde{H}$ en aquest punt, construirem una funció contínua $\hat{H}$ a $R_1 \cup \cdots \cup R_n$ que coincidirà amb la definició de $\tilde{H}$. En primer lloc, treballant un cop més de manera anàloga a com vam fer a la demostració del lema d'elevació de camins, siguin $z_1 \in S^1$ tal que $H(R_1) \subset U_{z_1}$ i J_1 l'interval de $e^{-1}(U_{z_1})$ que conté $0 \in \mathbb{R}$. Podem assegurar que aquest últim interval existeix ja que cal $H(0, b) = 1 \in U_{z_1} = S^1 \setminus \{z_1\}$ i.e. $z_1 \neq 1$. D'aquí, com que e restringida a J_1 és un homeomorfisme, podem definir $\hat{H}$ a R_1 com $\hat{H}_{|R_1} = (e_{|J_1})^{-1} \circ H_{|R_1}$, de manera que és clarament contínua. A més a més, trivialment, $\hat{H}_{|R_1}$ satisfà $e \circ \hat{H}_{|R_1} = H_{|R_1}$ i $\hat{H}_{|R_1} = \tilde{H}_{|R_1}$.

A partir d'aquí és qüestió d'estendre la definició de $\hat{H}$ a $R_1 \cup \cdots \cup R_n$ de manera que coincideixi amb la de $\tilde{H}$ i sigui contínua. Novament, això ho farem per inducció. Concretament, suposant que $\hat{H}$ és definida contínua a $P_i = R_1 \cup \cdots \cup R_i$ i satisfà $e \circ \hat{H}_{|P_i} = H_{|P_i}$ per un cert $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, siguin $z_{i+1} \in S^1$ tal que $H(R_{i+1}) \subset U_{z_{i+1}}$ i J_{i+1} l'interval de $e^{-1}(U_{z_{i+1}})$ que conté $\hat{H}(t_i, s)$ $\forall s \in [b - \delta/4, b + \delta/4]$. Notem que tal interval existeix ja que, com que $(t_i, s) \in R_i \cap R_{i+1}$ $\forall s \in [b - \delta/4, b + \delta/4]$, llavors $(e \circ \hat{H})(t_i, s) = H(t_i, s) \in U_{z_{i+1}}$ d'on, per la continuïtat de $\hat{H}$ en R_i cal que tot $\hat{H}(t_i, s)$ amb $s \in [b - \delta/4, b + \delta/4]$ pertanyi una mateixa component connexa de $e^{-1}(U_{z_{i+1}})$. Així, podem estendre $\hat{H}$ a P_{i+1} definit $\hat{H}_{|R_{i+1}} = (e_{|J_{i+1}})^{-1} \circ H_{|R_{i+1}}$, de manera que hi serà contínua i es complirà trivialment $e \circ \hat{H}_{|P_{i+1}} = H_{|P_{i+1}}$.

Queda provat així que podem construir una aplicació contínua $\hat{H} : P_n = R_1 \cup \cdots \cup R_n \to \mathbb{R}$ que satisfà $e \circ \hat{H} = H_{|P_n}$ i $\hat{H}(0,s) = s \ \forall s \in [b-\delta/4, b+\delta/4]$. Havent vist que l'única aplicació amb aquestes propietats és $\tilde{H}$, cal $\hat{H} = \tilde{H}_{|P_n}$, d'on $\tilde{H}$ és contínua a P_n. En particular, ho és a (a,b). □

Teorema 12.4.7 (Grup fonamental de la circumferència)**.**

Demostració. L'aplicació

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr} : \pi(S^1, 1) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [\gamma] &\longmapsto \mathrm{gr}(\gamma) \end{aligned}$$

és un isomorfisme de grups i, per tant, $\pi(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. □

Demostració. Com hem insinuat en presentar el lema anterior, el primer que cal veure és, naturalment, que l'aplicació Gr està ben definida. A continuació, caldrà provar que és un morfisme de grups i, per últim, que aquest morfisme és bijectiu.

- Ben definida. Per començar hem de provar que donats dos camins γ_0, γ_1 de S^1 amb punt base 1 i homòtops entre ells compleixen $\mathrm{gr}(\gamma_0) = \mathrm{gr}(\gamma_1)$. Considerem per això una homotopia H entre aquests dos camins. Pel lema d'elevació d'homotopies (**??**), podem prendre $\tilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ contínua i tal que $e \circ \tilde{H} = H$ i $\tilde{H}(0,t) = 0$, $\forall t \in I$. A partir d'aquesta podem definir també els camins $\tilde{\gamma}_0(t) = \tilde{H}(t,0)$ i $\tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{H}(t,1) \ \forall t \in I$. És prou fàcil veure que aquests camins són elevacions de γ_0 i γ_1, respectivament; per una banda, per construcció de $\tilde{H}$, és clar que $\tilde{\gamma}_0(0) = 0 = \tilde{\gamma}_1(0)$ i, per l'altra banda

  $$(e \circ \tilde{\gamma}_i)(t) = (e \circ \tilde{H})(t,i) = H(t,i) = \gamma_i(t) \ \forall t \in I, \ i \in \{0,1\}$$

  Ara, essent H una homotopia d'extrems fixos (veure definició d'homotopia de camins (**??**)), se satisfà $(e \circ \tilde{H})(1,s) = H(1,s) = \gamma_0(1) = 1 \ \forall s \in I$. Dit d'una altra manera, es compleix $e^{2\pi i \tilde{H}(1,s)} = 1$, d'on $\tilde{H}(1,s) \in \mathbb{Z} \ \forall s \in I$. Així, com que $\tilde{H}(1,\cdot\,)$ és una aplicació contínua amb espai de sortida connex I, la seva imatge ha de ser un subconjunt connex de $\mathbb{Z}$, cosa que ens porta a concloure que $\tilde{H}(1,\cdot\,)$ és constant. Per tant,

  $$\mathrm{gr}(\gamma_0) = \tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{H}(1,0) = \tilde{H}(1,1) = \tilde{\gamma}_1(1) = \mathrm{gr}(\gamma_1)$$

- Morfisme de grups. Partint dels camins arbitraris γ_0 i γ_1 com abans, veurem que $\mathrm{Gr}([\gamma_0][\gamma_1]) = \mathrm{Gr}([\gamma_0]) + \mathrm{Gr}([\gamma_1])$. Recuperant les elevacions $\tilde{\gamma}_0$ i $\tilde{\gamma}_1$ d'aquests camins, tindrem que

  $$(\gamma_0 * \gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma_0(2t) & \text{si } t \in [0,1/2] \\ \gamma_1(2t-1) & \text{si } t \in [1/2,1] \end{cases} = \begin{cases} e^{2\pi i \tilde{\gamma}_0(2t)} & \text{si } t \in [0,1/2] \\ e^{2\pi i \tilde{\gamma}_1(2t-1)} & \text{si } t \in [1/2,1] \end{cases}$$

  Així, si $\gamma = \gamma_0 * \gamma_1$, llavors

  $$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \tilde{\gamma}_0(2t) & \text{si } t \in [0,1/2] \\ \tilde{\gamma}_1(2t-1) & \text{si } t \in [1/2,1] \end{cases}$$

  és una elevació de γ. Cal demostrar que això és cert.

  En primer lloc, com que, atès que $\tilde{\gamma}_0(0) = 0 = \tilde{\gamma}_1(0)$ per ser $\tilde{\gamma}_0$ i $\tilde{\gamma}_1$ elevacions de γ_0 i γ_1 respectivament, tenim que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}_0(2\cdot 0) = \tilde{\gamma}_0(0) = 0$. De manera simètrica, veiem que $\tilde{\gamma}$ és una aplicació contínua: ho és en tot $t \in I \setminus \{1/2\}$ de manera trivial ja que és definida en termes de les aplicacions contínues $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1$, i també ho és en $t = 1/2$, ja que

  $$\left.\begin{array}{l} \tilde{\gamma}_0(2\cdot \frac{1}{2}) = \tilde{\gamma}_0(1) \\ \tilde{\gamma}_1(2\cdot \frac{1}{2} - 1) + \tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(0) - \tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_0(1) \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{\gamma}(1/2) := \tilde{\gamma}_0(1)$$

Per acabar, tenim en compte que $\tilde{\gamma}_0(1) = \mathrm{gr}(\gamma_1) \in \mathbb{Z}$ i, per tant, $e^{2\pi i \tilde{\gamma}_0(1)} = 1$, l'aplicació $\tilde{\gamma}$ compleix

$$(e \circ \tilde{\gamma})(t) = \begin{cases} e^{2\pi i \tilde{\gamma}_0(2t)} & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ e^{2\pi i (\tilde{\gamma}_1(2t-1) + \tilde{\gamma}_0(1)} & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases} = \begin{cases} e^{2\pi i \tilde{\gamma}_0(2t)} & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ e^{2\pi i \tilde{\gamma}_1(2t-1)} e^{2\pi i (\tilde{\gamma}_0(1)} & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

En altres paraules, $e \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Amb tot obtenim

$$\mathrm{Gr}([\gamma_0][\gamma_1]) = \mathrm{Gr}([\gamma_0 * \gamma_1]) = \mathrm{Gr}([\gamma]) = \mathrm{gr}(\gamma) = \tilde{\gamma}(1) =$$

$$= \tilde{\gamma}_1(1) + \tilde{\gamma}_0(1) = \mathrm{gr}(\gamma_1) + \mathrm{gr}(\gamma_0) = \mathrm{Gr}([\gamma_1]) + \mathrm{Gr}([\gamma_0])$$

- Morfisme bijectiu. Tan sols falta veure que el morfisme Gr és bijectiu. Per a la seva exhaustivitat recordem els exemples vistos d'elevacions de camins (**??**), on vèiem que el camí $\gamma_n(t) = e^{2\pi i n t}$ té grau $n \in \mathbb{Z}$ per tot n; pel que fa a la injectivitat de Gr serà suficient veure que $\mathrm{Gr}([\gamma]) = \mathrm{gr}(\gamma) = 0$ si i només si $[\gamma] = [\delta_1]$, i.e. $\gamma \sim \delta_1$, on δ_1 és el camí constant igual a $1 \in S^1$. Notem que en tal cas, l'elevació $\tilde{\gamma}$ de γ complirà $\tilde{\gamma}(0) = 0 = \mathrm{gr}(\gamma) = \tilde{\gamma}$; en definitiva, tindrem que $\tilde{\gamma}$ és un camí tancat en $\mathbb{R}$ amb punt base 0. Recordem, de (**??**) que $\pi(\mathbb{R}, 0) = \{[\varepsilon_0]\} = \{\mathrm{id}\}$, on ε és el camí constant igual a 0, de manera que $\tilde{\gamma}$ i ε_0 són homòtops. D'aquí, prenent una homotopia G entre $\tilde{\gamma}$ i ε_0, essent $e : \mathbb{R} \to S^1$ una aplicació contínua per les propietats que relacionen tals aplicacions amb les homotopies vistes anteriorment, l'aplicació $e \circ G$ defineix una homotopia entre els camins $e \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ i $e \circ \varepsilon_0 = \delta_1$, que és el que volíem.

$\square$

A continuació, calcularem el grup fonamental d'altres coneguts espais topològics, així com el tor o el pla projectiu. Aquests exemples són extrets de [**topologiaparausuarios**] i de [**mathonline**].

Exemple 12.4.8 (Grup fonamental del tor)**.** Podem utilitzar el resultat de (**??**) per concloure que el tor té grup fonamental:

$$\pi(\mathbb{T}, (x, y)) \cong \pi(S^1 \times S^1, (x, y)) \cong \pi(S^1, x) \times \pi(S^1, y) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Exemple 12.4.9 (Grup fonamental del cilindre)**.** Pensant el cilindre com el producte $S^1 \times I$, on $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Per tant, el grup fonamental és $\pi(S^1) \times \pi(I)$, però $\pi(S^1) \cong \mathbb{Z}$ i $\pi(I) \cong \{\mathrm{id}\}$. Per tant, el grup fonamental del cilindre és isomorf a $\mathbb{Z} \times \{\mathrm{id}\} \cong \mathbb{Z}$.

12.5 Aplicacions del grup fonamental a la topologia del pla

Els conceptes i resultats vistos fins ara permeten provar propietats de les funcions del pla que tenen algunes aplicacions remarcables.

12.5.1 Teorema del punt fix de Brouwer

Definició 12.5.1 (Propietat del punt fix)**.** Un espai X té la *propietat del punt fix* si per a tota aplicació contínua $f : X \to X$, existeix algun punt fix $p \in X$ tal que $f(p) = p$.

Teorema 12.5.2 (Teorema del punt fix de Brouwer)**.** *Tota aplicació contínua $f : D^2 \to D^2$, on D^2 és el disc unitat, $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$, té un punt fix, i.e. $\exists p \in D^2$ tal que $f(p) = p$.*

Demostració. Suposem que, per contra, $f(p) \neq p$, $\forall p \in D^2$ i busquem arribar a una contradicció.

Considerem per començar l'aplicació $r : D^2 \to S^1$ que envia cada punt $p \in D^2$ a la intersecció amb la semirecta que surt de $f(p) \in D^2$ i passa per p.

És evident que r està ben definida ja que no tenint f punts fixos, sempre existeix la semirecta que ens ocupa. Es pot veure, a més, que aquesta aplicació és contínua.

Com són els punts de les imatges? Veiem que són de la forma $f(p) + t(p - f(p))$, amb $t \geq 0$. D'aquesta manera, d'entre aquests valors, $r(p)$ pren l'únic $\lambda(p) \geq 0$ que satisfà $\|f(p) + \lambda(p)(p - f(p))\|^2 = 1$ (perquè ha de caure a S^1 i per tant el mòdul ha de ser 1).

Considerem el polinomi $P(t) = \|f(p) + t(p - f(p))\|^2 - 1$. Naturalment $\lambda(p)$ serà una arrel d'aquest plinomi. Veurem que aquest polinomi només admet una arrel positiva, cosa que ens assegurarà que λ està ben definida i és contínua, ja que ve donada com a transformacions contínues dels coeficients de $P(t)$, que són en sí funcions contínues de p.

Utilitzant el criteri de signes de Descartes podem observar que el coeficient dominant de $P(t)$ és estrictament positiu (perquè és una norma i per hipòtesi $f(p) \neq p \; \forall p \in D^2$). Llavors, hi haurà només un canvi de signe en els coeficients de P ordenats decreixentment per grau, cosa que demostra que P té una única arrel positiva, definida per λ i, de retruc, la continuïtat de r.

Per altra banda, és fàcil veure que, per construcció, $r_{|S^1} = \mathrm{id}_{|S^1}$, d'on r és una retracció de S^1 en D^2. Veurem, però, que S^1 no és un retracte de D^2. En efecte, si $i : S^1 \hookrightarrow D^2$ és la inclusió, essent i i r contínues, tenim que

$$r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = (\mathrm{id}_{S^1})_* = \mathrm{id}_{\pi(S^1,1)}$$

cosa que no pot ser ja que $\pi(D^2, 1) \cong \{\mathrm{id}\}$ mentre hem vist abans que $\pi(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$, impossibilitant que r_* retorni $\mathrm{id} \in \pi(D^2, 1)$ a cada element de $\pi(S^1, 1)$. Aquesta contradicció amb què hem topat prové de suposar que f no té punts fixos, de manera que concloem que existeix algun punt fix. $\square$

Corol·lari 12.5.3. *Si X és homeomorf a D^2, llavors tota aplicació contínua $g : X \to X$ té un punt fix.*

Demostració. Sigui h un homeomorfisme entre X i D^2, de manera que, donada una aplicació contínua $g : X \to X$, la composició $f = h \circ g \circ h^{-1}$ és una aplicació contínua de D^2 en sí mateix. Així doncs, pel teorema del punt fix de Brouwer, $\exists q \in D^2$ tal que $f(q) = (h \circ g \circ h^{-1})(q) = q$, d'on $(g \circ h^{-1})(q) = h^{-1}(q)$ i.e. $h^{-1}(q) \in X$ és un punt fix per g. $\square$

Exemple 12.5.4 (Exercici 17)**.** Es vol demostrar que el sistema

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x) = \cos(1 + \sin(x^2 + y^7)) \\ y = \varphi_2(x) = \sin(1 + \cos(x^7 + y^2)) \end{cases}$$

té alguna solució a $\mathbb{R}^2$. Garantir això és equivalent a mostrar que l'aplicació $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida com $\varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$ té un punt fix. Observem que podem trobar un cert quadrat $Q \subset \mathbb{R}^2$ que contingui la imatge de φ, ja que les seves components són funcions trigonomètriques acotades. Llavors, com que tot quadrat Q és homeomorf al disc unitat, el teorema del punt fix de Brouwer (i el corol·lari anterior) ens assegura que φ té algun punt fix dins de Q.

Proposició 12.5.5 (Exercici 11a)**.** *Si un espai X té la propietat del punt fix i A és un retracte de X, llavors A també té la propietat del punt fix.*

Demostració. Sigui $f : A \to A$ una aplicació contínua. Volem demostrar que $\exists p \in A$ tal que $f(p) = p$. Com A és un retracte de X, existeix una retracció $r : X \to A$, de forma que si $i : A \to X$ és la inclusió, es té que $r \circ i = \mathrm{id}_A$.

Considerem l'aplicació $g : X \to X$ definida com

$$g = i \circ f \circ r : X \to A \to A \to X.$$

Com X té la propietat del punt fix, existeix un $x_0 \in X$ tal que $g(x_0) = x_0$, és a dir, $(i \circ f \circ r)(x_0) = x_0$. Com que $\mathrm{Im}(i \circ f) \subseteq A$ es té que $x_0 \in A$ i com que $\forall a \in A$, $r(a) = a$, tenim que $r(x_0) = x_0$ Finalment doncs tenim que

$$x_0 = g(x_0) = (i \circ f \circ r)(x_0) = i(f(r(x_0))) = i(f(x_0))$$

i això és cert si, i només si, $f(x_0) = x_0$, ja que $x_0 \in A$. Per tant A té també la propietat del punt fix. $\square$

Corol·lari 12.5.6 (Exercici 11a)**.** *Si X i Y són dos espais topològics tals que $X \times Y$ té la propietat del punt fix, aleshores X i Y també la tenen.*

Demostració. Si el producte $X \times Y$ té la propietat del punt fix, aleshores com que $X \times \{y_0\} \to X \times Y$ (per $y_0 \in Y$) és un retracte de $X \times Y$, tenim que $X \times \{y_0\}$ té la propietat del punt fix. Això és, X té la propietat del punt fix. $\square$

Proposició 12.5.7 (Exercici 11b)**.** *La propietat del punt fix es conserva per homeomorfismes.*

Demostració. Si $h : X \to Y$ és un homeomorfisme i X té la propietat del punt fix, anem a veure que Y també la té. En efecte, sigui $f : Y \to Y$ una aplicació contínua. Podem considerar

$$g = h^{-1} \circ f \circ h : X \to Y \to X$$

Aquesta aplicació $g : X \to X$ té un punt fix (ja que si X té la PPF, aleshores tota aplicació contínua té un punt fix) és a dir, existeix un $x_0 \in X$ tal que $g(x_0) = x_0$. Aplicant la definició de g obtenim que

$$h^{-1} \circ f \circ h(x_0) = x_0 \Rightarrow (f \circ h)(x_0) = h(x_0) \Rightarrow f(h(x_0)) = h(x_0)$$

i com que $h(x_0) \in Y$, podem anomenar $y_0 := h(x_0)$ i aleshores és un punt fix de f. Per tant Y satisfà la propietat del punt fix. $\square$

Observació 12.5.8 (Exercici 11b)**.** *La propietat del punt fix no té per què conservar-se per equivalències homotòpiques.*

Demostració. En efecte, si prenem $\mathbb{R} \simeq *$ (que és una equivalència homotòpica ja provada) observem que $*$ té la propietat del punt fix, ja que $f(*) = *$ per a qualsevol aplicació contínua $f : * \to *$ (ja que $* \in *$ és l'únic element de $*$). Ara bé, $\mathbb{R}$ no té la PPF perquè, per exemple, $\exists$ aplicació contínua $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t(x) = x + 1$ que no té cap punt fix. $\square$

Exemple 12.5.9 (Exercici 11c)**.** Veiem exemples d'espais topològics que tenen o no tenen la propietat del punt fix, basant-nos en les proposicions anteriors.

(i) S^n no té la propietat del punt fix, ja que, per exemple, l'aplicació antipodal $a : S^n \to S^n$, $a(x) = -x$, $\forall x \in S^n$, és contínua i no té cap punt fix.

(ii) La bola oberta $(B^\circ)^n \subseteq \mathbb{R}^n$ no té la propietat del punt fix ja que és homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ i aleshores, per (**??**), tindrà la PPF si $\mathbb{R}^n$ la té, però $\mathbb{R}^n$ no la té perquè podem considerar l'aplicació $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $t(x) = x + v$, amb $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ fixat, és una aplicació contínua sense cap punt fix.

(iii) El tor $T_n = S^1 \times \cdots \times S^1$ no té la PPF ja que S^1 és un retracte del tor T_n i aplicant el contrarrecíproc de (**??**) obtenim doncs que, com S^1 no té la propietat del punt fix, aleshores T_n tampoc.

(iv) El disc tancat D^2 sí té la propietat del punt fix: és el Teorema del Punt Fix de Brouwer (**??**).

(v) $S^1 \vee S^1$ (la unió puntual de dues circumferències) no té la propietat del punt fix, ja que S^1 és un retracte de $S^1 \vee S^1$ i, de nou, aplicant (**??**) veiem que no ho compleix. Demostrem, però, que és un retracte: En efecte, considerem $S^1 \vee S^1$ (agafem alguna aplicació translació que ens ho mogui de forma que el punt on s'uneixen sigui l'origen de coordenades) i definim l'aplicació

$$r(x) = \begin{cases} x & \text{si } x = (x,y),\ x > 0 \\ (0,0) & \text{si } x = (x,y),\ x \leq 0 \end{cases}$$

És immediat que r és contínua i que r és una retracció $S^1 \vee S^1 \to S^1$.

(vi) $D^2 \vee D^2$ (la unió puntual de dos discs tancats) sí que té la propietat del punt fix, ja que és un retracte de D^2 i D^2 hem dit que pel Teorema del Punt Fix de Brouwer tenia la PPF.

12.5.2 Índex d'un camí tancat al pla respecte un punt

El que volem fer ara és demostrar el teorema de Bolzano en $\mathbb{R}^2$ però per poder fer-ho ens falten encara algunes nocions prèvies en la topologia del pla.

El següent resultat que provarem és l'anàleg del Teorema de Bolzano per a funcions de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Recordem com era el teorema de Bolzano:

Teorema 12.5.10 (Teorema de Bolzano)**.** *Donada una funció contínua $f : D^1 = [-1,1] \to \mathbb{R}$, per cada $q \in [f(-1), f(1)]$ podem trobar $p \in [-1,1]$ tal que $f(p) = q$.*

En essència, tenint en compte que $S^0 = \partial D^1 = \{-1,1\}$, estem dient que si $q \in \mathbb{R}$ està "envoltat" per la imatge de S^0 per f, llavors $q \in f(D^1)$. A continuació provarem el mateix per a dimensió 2. Abans, però, cal definir la noció intuïtiva d'estar "envoltat".

Observació 12.5.11. *Sempre que convingui identificarem el pla $\mathbb{R}^2$ amb el cos dels complexos $\mathbb{C}$. Aleshores tot camí tancat $\sigma : I \to \mathbb{R}^2$ es pot interpretar com una aplicació $\hat{\sigma} : S^1 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\sigma(t) = \hat{\sigma}(e^{2\pi i t}$.*

Definició 12.5.12 (Camí tancat associat)**.** Partint d'una funció contínua $f : S^1 \to S^1$, podem associar-li el camí tancat

$$\begin{aligned} \gamma_f : I &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto f(e^{2\pi i t}) \end{aligned}$$

que satisfà $\gamma_f = f \circ e$.

Aquest camí, encara que sigui tancat, no té necessàriament punt base $1 \in S^1$. Sempre podem prendre, però, el camí $\hat{\gamma}_f : I \to S^1$ definit com

$$\hat{\gamma}_f(t) = \frac{\gamma(f)}{f(1)} = \frac{f(e^{2\pi i t})}{f(1)} \quad \forall t \in I,$$

que sí que té 1 com a punt base.

Proposició 12.5.13. *Donades dues funcions contínues $f, g : S^1 \to S^1$, es compleix $f \simeq g$ si, i només si, com a camins, $\hat{\gamma}_f \simeq \hat{\gamma}_g$.*

Demostració. Veiem cada implicació:

($\Rightarrow$) Fixem una homotopia $G : S^1 \times I \to S^1$ entre f i g. És prou fàcil comprovar que l'aplicació

$$\begin{aligned} \tilde{G} : I \times I &\longrightarrow S^1 \\ (t,s) &\longmapsto \tilde{G}(t,s) := \frac{G(e^{2\pi i t}, s)}{G(1,s)}, \end{aligned}$$

que està ben definida ja que, per hipòtesi, $G(z,s) \in S^1$, $\forall (z,s) \in S^1 \times I$, és una homotopia entre els camins $\hat{\gamma}_f$ i $\hat{\gamma}_g$. En efecte, per les propietats de la homotopia d'aplicacions G (veure **??**), tenim que $\tilde{G}$ és contínua i

$$\tilde{G}(t,0) = \frac{G(e^{2\pi i t}, 0)}{G(1,0)} = \frac{f(e^{2\pi i t})}{f(1)} = \hat{\gamma}_f(t) \quad \forall t \in I$$

i, de manera anàloga,

$$\tilde{G}(t,1) = \frac{G(e^{2\pi i t}, 1)}{G(1,1)} = \frac{f(e^{2\pi i t})}{g(1)} = \hat{\gamma}_g(t) \quad \forall t \in I.$$

A més, $\tilde{G}$ manté els extrems fixos:

$$\tilde{G}(0,s) = \frac{G(e^{2\pi i \cdot 0}, s)}{G(1,s)} = \frac{G(1,s)}{G(1,s)} = 1 = \hat{\gamma}_f(0) = \hat{\gamma}_g(0) \quad \forall s \in I$$

$$\tilde{G}(1,s) = \frac{G(e^{2\pi i \cdot 1}, s)}{G(1,s)} = \frac{G(1,s)}{G(1,s)} = 1 = \hat{\gamma}_f(1) = \hat{\gamma}_g(1) \quad \forall s \in I$$

($\Leftarrow$) Donada una homotopia H entre $\hat{\gamma}_f$ i $\hat{\gamma}_g$, considerem l'aplicació $\tilde{H}(z,s) = H(\frac{\arg z}{2\pi}, s)$, on $\arg z$ és la branca de l'argument que pren imatges a l'interval $(0, 2\pi)$ i satisfà $\arg(-1) = \pi$. Així definida, aquesta aplicació no pot ser una homotopia ja que no és contínua:; cap branca de l'argument pot ser-ho en S^1, com es veu a l'assignatura d'Anàlisi Complexa.

Ara bé, tenint en compte que H és una homotopia de camins (veure **??**), en particular, tenint en compte que $\hat{\gamma}_f$ i $\hat{\gamma}_g$ són camins amb punt base $1 \in S^1$, satisfà $H(0,s) = 1 = H(1,s) = H(\frac{2\pi}{2\pi}, s)$, $\forall s \in I$. Així, si estenem la definició de $\tilde{H}$ a

$$\begin{aligned} \tilde{H} : S^1 \times I &\longrightarrow S^1 \\ (z,s) &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } z = 1 \\ H\left(\frac{\arg z}{2\pi}, s\right) & \text{altrament} \end{cases} \end{aligned}$$

ara sí que és una aplicació contínua (prenent la mateixa determinació de l'argument d'abans). Observem, a més, que $\tilde{H}$ és una homotopia entre les funcions $\hat{f}, \hat{g} : S^1 \to S^1$ definides com $\hat{f}(z) = \frac{f(z)}{f(1)}$ i $\hat{g}(z) = \frac{g(z)}{g(1)}$, $\forall z \in S^1$, ja que

$$\tilde{H}(z,0) = H\left(\frac{\arg z}{2\pi}, 0\right) = \hat{\gamma}_f\left(\frac{\arg z}{2\pi}\right) = \frac{f(e^{2\pi \cdot \frac{\arg z}{2\pi}})}{f(1)} = \frac{f(e^{i \arg z})}{f(1)} = \hat{f}(z)$$

per tot $z \in S^1 \setminus \{1\}$. I si $z = 1$ també es troba que $\tilde{H}(1,0) = 1 = \frac{f(1)}{f(1)} = \tilde{f}(1)$. Es veu de manera anàloga que $\tilde{H}(z,1) = \hat{g}(z)$, $\forall z \in S^1$.

Ara, però, amb això hem demostrat que si $\hat{\gamma}_f \simeq \hat{\gamma}_g$ aleshores $\hat{f} \simeq \hat{g}$. Faltarà provar que $\hat{f} \simeq f$ i $\hat{g} \simeq g$ de manera que per la transitivitat de la relació d'homotopia (**??**), tindrem $f \simeq g$.

Fixat $\zeta \in [0, 2\pi)$ tal que $f(1) = e^{i\theta} \in S^1$, valor que existeix i està ben definit ja que e és bijectiva en $[0, 2\pi)$, serà suficient observar que l'aplicació $\hat{H} : S^1 \times I \to S^1$ definida com $\hat{H}(z, s) = \frac{f(z)}{e^{i\theta s}}$ $\forall (z, s) \in S^1 \times I$, és una homotopia entre f i $\hat{f}$. En efecte, $\hat{H}$ és contínua ja que és quocient de funcions contínues i el seu denominador és no nul (és un element de S^1) i satisfà

$$\hat{H}(z, 0) = \frac{f(z)}{e^{i\theta \cdot 0}} = \frac{f(z)}{1} = f(z), \quad \forall z \in S^1$$

$$\hat{H}(z, 1) = \frac{f(z)}{e^{i\theta \cdot 1} = \frac{f(z)}{f(1)}} = \hat{f}(z), \quad \forall z \in S^1$$

i per tant se satisfà el que volíem.

□

Després d'aquesta llarga demostració, hem provat que dues aplicacions són homotòpicament equivalents si i només si, els seus camins tancats associats són homotòpicament equivalents com a camins. Vist això, té sentit definir la noció de grau d'una aplicació de S^1 en S^1.

Definició 12.5.14 (Grau d'una aplicació de S^1 en S^1)**.** Anomenem grau d'una aplicació contínua $f : S^1 \to S^1$ al grau del seu camí (veure **??**) associat $\hat{\gamma}_f$. Naturalment, aquest coincidirà amb el grau del camí $\gamma = f \circ e$.

Definició 12.5.15 (Classes d'homotopia d'aplicacions de S^1 en S^1)**.** Tenint en compte la relació d'homotopia entre aplicacions, podem definir el conjunt de classes d'homotopia d'aplicacions de S^1 en S^1, que denotarem com $[S^1, S^1]$. L'operació d'aquest conjunt vindrà definida per $[f] \cdot [g] := [fg]$, on $fg : S^1 \to S^1$ és $(fg)(z) = f(z)g(z)$, $\forall z \in S^1$.

Proposició 12.5.16. *El producte de classes definit com*

$$\begin{aligned} \cdot : [S^1, S^1] \times [S^1, S^1] &\longrightarrow [S^1, S^1] \\ ([f], [g]) &\longmapsto [fg] \end{aligned}$$

està ben definit, és a dir, no depèn del representant pres de cada classe.

Demostració. Aquesta proposició és equivalent a dir que si tenim aplicacions contínues $f_0, f_1, g_0, g_1 : S^1 \to S^1$ tals que $f_0 \simeq f_1$ i $g_0 \simeq g_1$, es compleix $f_0 g_0 \simeq f_1 g_1$. Demostrem això, doncs.

Siguin $F, G : S^1 \times I \to S^1$ homotopies entre f_0 i f_1 i entre g_0 i g_1 respectivament. Tan sols cal veure que l'aplicació

$$\begin{aligned} H : S^1 \times [0, 1] &\to S^1 \\ (z, s) &\longmapsto F(z, s)G(z, s) \end{aligned}$$

és una homotopia entre $f_0 g_0$ i $f_1 g_1$. Notem que H està ben definida ja que el producte de dos elements de S^1, com són $F(z, s), G(z, s)$ per a cada parella $(z, s) \in S^1 \times I$, és un nou element de S^1, i és contínua per ser el producte de dues aplicacions contínues. Per altra banda, tenim que

$$H(z, 0) = F(z, 0)G(z, 0) = f_0(z)g_0(z) = (f_0 g_0)(z) \quad \forall z \in S^1$$

$$H(z, 1) = F(z, 1)G(z, 1) = f_1(z)g_1(z) = (f_1 g_1)(z) \quad \forall z \in S^1$$

tal com volíem. □

Proposició 12.5.17. *El conjunt $[S^1, S^1]$ de les classes d'homotopia de funcions de S^1 en S^1 és un grup amb l'operació $\cdot$ d'abans.*

Demostració. Amb la demostració d'abans (**??**) és clar que el producte és associatiu perquè l'hereta dels nombres complexos. La classe de la funció $n(z) = 1 \; \forall z \in S^1$ és l'element neutre i la classe de $f^{-1}(z) = \frac{1}{f(z)}$, $\forall z \in S^1$ és l'invers de $[f] \in [S^1, S^1]$ per $\cdot$. □

Té sentit, doncs, plantejar-se si hi ha alguna relació entre aquest grup i el grup fonamental. Veiem que, amb el que hem vist anteriorment, queda justificada l'existència d'una bijecció entre el conjunt de classes d'homotopia de camins en S^1 amb punt base 1 (és a dir, el grup fonamental $\pi(S^1, 1)$, i el conjunt de classes d'homotopia d'aplicacions de S^1 en S^1, és a dir, $[S^1, S^1]$. Aquesta bijecció ve justificada per la proposició (**??**). A continuació veurem que aquesta bijecció és un morfisme de grups, ja que hem provat que $[S^1, S^1]$ és un grup.

Proposició 12.5.18. *L'aplicació*

$$\begin{array}{rl} \Psi : [S^1, S^1] & \pi(S^1, 1) \\ [f] & \longmapsto [\hat{\gamma}_f] \end{array}$$

és un morfisme de grups.

Demostració. El nostre objectiu és veure que, donades $[f], [g] \in [S^{\cdot}S^1]$, se satisfà

$$\Psi([fg]) = \Psi([f]) * \Psi([g])$$

o, equivalentment

$$[\hat{\gamma}_{fg}] = [\hat{\gamma}_f * \hat{\gamma}_g]$$

En definitiva, volem trobar una homotopia entre els camins $\hat{\gamma}_{fg}$ i la concatenació $\hat{\gamma}_f * \hat{\gamma}_g$. Observem, primer, que $\hat{\gamma}_{fg}(t) = \frac{(fg)(e^{2\pi i t})}{(fg)(1)} = \frac{f(e^{2\pi i t}) g(e^{2\pi i t})}{f(1) g(1)} = \hat{\gamma}_f(t) \hat{\gamma}_g(t)$, $\forall t \in I$, mentre

$$(\hat{\gamma}_f * \hat{\gamma}_g)(t) = \begin{cases} \hat{\gamma}_f(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \hat{\gamma}_g(2t-1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

L'homotopia que busquem és l'aplicació $H : I \times I \to S^1$ definida

$$H(t,s) := \begin{cases} \hat{\gamma}_f(\frac{2t}{1+0}) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \hat{\gamma}_f(\frac{2t}{1+0}) \hat{\gamma}_g(\frac{2t+0-1}{1+0}) & \text{si } t \in \left[\frac{1-0}{2}, \frac{1+0}{2}\right] \\ \hat{\gamma}_g(\frac{2t+0-1}{1+0}) & \text{si } t \in \left[\frac{1+0}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Notem que H està ben definida ja que

$$\hat{\gamma}_f \left(\frac{2 \frac{1+s}{2}}{1+s} \right) = \hat{\gamma}_f = 1$$

i

$$\hat{\gamma}_g \left(\frac{2 \frac{1-s}{2} + s - 1}{1+s} \right) = \hat{\gamma}_g \left(\frac{1 - s + s - 1}{1+s} \right) = \hat{\gamma}_g(0) = 1$$

$\forall s \in I$. De retruc, essent $\hat{\gamma}_f$ i $\hat{\gamma}_g$ camins continus, això prova la continuïtat de H. Pel que fa a la resta de propietats que defineixen una homotopia de camins, tenim que

$$H(t,0) = \begin{cases} \hat{\gamma}_f(\frac{2t}{1+0}) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1-0}{2}\right] \\ \hat{\gamma}_f(\frac{2t}{1+0}) \hat{\gamma}_g) \frac{2t+0-1}{1+0}) & \text{si } t \in \left[\frac{1-0}{2}, \frac{1+0}{2}\right] \\ \hat{\gamma}_g(\frac{2t+0-1}{1+0}) & \text{si } t \in \left[\frac{1+0}{2}, 1\right] \end{cases} = \begin{cases} \hat{\gamma}_f(2t) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \hat{\gamma}_g(2t-1) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

és a dir, $H(t,0) = (\hat{\gamma}_f * \hat{\gamma}_g)(t)$, $\forall t \in I$, mentre

$$H(t,1) = \begin{cases} \hat{\gamma}_f(\frac{2t}{1+t}) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1-1}{2}\right] \\ \hat{\gamma}_f(\frac{2t}{1+1})\hat{\gamma}_g(\frac{2t+1-1}{1+0}) & \text{si } t \in \left[\frac{1-1}{2}, \frac{1+1}{2}\right] \\ \hat{\gamma}_g(\frac{2t+1-1}{1+1}) & \text{si } t \in \left[\frac{1+1}{2}, 1\right] \end{cases} = \hat{\gamma}_f(t)\hat{\gamma}_g(t) = \hat{\gamma}_{fg}(t) \ \forall t \in I$$

i $H(0,s) = \hat{\gamma}_f(\frac{2 \cdot 0}{1+s}) = \hat{\gamma}_f(0) = 1$ i $H(1,s) = \hat{\gamma}_g(\frac{2 \cdot 1+s-1}{1+s}) = \hat{\gamma}_g(\frac{1+s}{1+s}) = \hat{\gamma}_g(1) = 1$, $\forall s \in I$. □

Corol·lari 12.5.19. *Donades dues funcions contínues qualsevulles $f, g : S^1 \to S^1$, es compleix* $\mathrm{gr}(fg) = \mathrm{gr}f + \mathrm{gr}g$

Demostració. Per l'homotopia donada a la proposició anterior i les propietats de l'aplicació grau vistes en provar que $\pi(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$, concretament, usant que el grau es conserva per homotopies i que dos camins qualssevol σ, τ tals que $[\sigma], [\tau] \in \pi(S^1, 1)$ satisfan $\mathrm{gr}(\sigma * \tau) = \mathrm{gr}\sigma + \mathrm{gr}\tau$ (veure **??**), obtenim que

$$\mathrm{gr}(fg) = \mathrm{gr}\hat{\gamma}_{fg} = \mathrm{gr}(\hat{\gamma}_f * \hat{\gamma}_g) = \mathrm{gr}\hat{\gamma}_f + \mathrm{gr}\hat{\gamma}_g = \mathrm{gr}f + \mathrm{gr}g.$$

□

Havent definit el grau d'una aplicació de la circumferència en ella mateixa, que es correspondrà amb el nombre de voltes completes que la seva imatge hi dona, introduirem ara el concepte d'índex d'una aplicació contínua $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ respecte un punt, que comptarà quantes voltes dóna $f(S^1)$ al seu voltant.

Definició 12.5.20 (Corba)**.** Una *corba tancada plana* és una aplicació contínua $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$.

Definició 12.5.21 (Índex d'una corba respecte un punt)**.** Donada una corba tancada plana, i.e. una aplicació contínua $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$, fixat $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $p \notin f(S^1)$, definim l'índex de f respecte p, denotat per $\mu(f,p)$, com

$$\mu(f,p) = \mathrm{gr}(N_p \circ f) = \mathrm{gr}(N_p \circ f \circ e)$$

on $N_p : \mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \to S^1$ és la projecció radial de cada $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ sobre la circumferència unitat, és a dir $N_p(z) = \frac{z-p}{\|z-p\|}$, $\forall z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$.

Proposició 12.5.22 (Propietats de l'índex)**.** *Sigui γ un camí tancat. L'índex de γ al voltant de p satisfà les tres propietats següents:*

(1) $\mu(\gamma, p) = \mu(\gamma - p, 0)$.

(2) Si $\alpha, \beta : I \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *són camins tancats,* $\mu(\alpha\beta, 0) = \mu(\alpha, 0) + \mu(\beta, 00)$.

(3) Se satisfà

$$\mu(Re^{2\pi i t}, p) = \begin{cases} 1 & \text{si } |p| < R \\ 0 & \text{si } |p| > R \end{cases}$$

Demostració. Surten directament de la definició.

(a) De la definició d'índex tenim

$$\mu(\gamma, p) = \mathrm{gr}\frac{\gamma - p}{\|\gamma - p\|} = \mu(\gamma - p, 0)$$

(b) La funció exponencial $e : \mathbb{R} \to S^2$, $e(t) = e^2\pi it$ és multiplicativa (és a dir, que $e(t_1 + t_2) = e(t_1)e(t_2)$. Això implica que si $\tilde{\alpha}$ és una elevació de $\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$ i β una elevació de $\frac{\beta}{\|\beta\|}$, aleshores $\alpha + \beta$ és una elevació de $\frac{\alpha\beta}{\|\alpha\beta\|}$, és a dir,

$$e^{2\pi i(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})(t)} = e^{2\pi i\tilde{\alpha}(t)}e^{2\pi i\tilde{\beta}(t)}$$

i, per tant,

$$\mu(\alpha\beta, 0) = \mathrm{gr}\left(\frac{\alpha\beta}{\|\alpha\beta\|}\right) = (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})(1) = \tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(1) = \tag{12.2}$$

$$= \mathrm{gr}\frac{\alpha}{\|\alpha\|} + \mathrm{gr}\frac{\beta}{\|\beta\|} = \mu(\alpha, 0) + \mu(\beta, 0).$$

(c) Si $|p| < R$, aleshores $\|Re^{2\pi it} - sp\| > 0$, $\forall s \in I$, i per tant, l'homotopia

$$\begin{aligned} H : I \times I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ (s,t) &\longmapsto H(s,t) := \frac{Re^{2\pi it} - sp}{\|Re^{2\pi it} - sp\|} \end{aligned}$$

prova que

$$\mu(Re^{2\pi it}, p) = \mu\left(\frac{Re^{2\pi it}}{\|Re^{2\pi it}\|}, 0\right) = \mu(e^{2\pi it}, 0) = 1$$

Si, en canvi $|p| > R$, aleshores $\|sRe^{2\pi it} - p\| > 0$, $\forall s \in I$ i així l'homotopia

$$\begin{aligned} H : I \times I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ (s,t) &\longmapsto H(s,t) := \frac{sRe^{2\pi it} - p}{\|sRe^{2\pi it} - p\|} \end{aligned}$$

demostra, de manera anàloga a l'anterior cas, que $\mu(Re^{2\pi it}, p) = \mu(\varepsilon_{t_0}, p) = 0$, on ε_{t_0} representa el camí (o corba) constant igual a t_0.

□

Exemple 12.5.23. Veiem algun exemple sobre índexs d'una corba tancada plana respecte diversos punts. Sigui $f : S^1 \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ la corba definida per $f(z) = z^n$, $\forall z \in S^1$, amb $n \geq 1$. Si prenem $p = 0 \in \mathbb{C}$, és prou clar que

$$\begin{aligned} N_0 \circ f \circ e : [0,1] &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto e^{2\pi int} \end{aligned}$$

Per tant, amb tot el que hem vist, $\mu(f, 0) = \mathrm{gr}(e^{2\pi int}) = n$. En canvi, si $p = 2 \in \mathbb{C}$, llavors $(N_2 \circ f)(t) = \frac{e^{2\pi int}-2}{\|e^{2\pi int}-2\|}$. Per calcular el grau d'aquesta funció, considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} H : S^1 \times I &\longrightarrow S^1 \\ (z,t) &\longmapsto \tfrac{tz^n-2}{\|tz^n-2\|} \end{aligned}$$

Aquesta aplicació està ben definida ja que, essent $z \in S^1$ i $t \in I = [0,1]$, tenim que $\|tz^n\| = t\|z^n\| = t \neq 2$. Així, H és contínua i, a més, compleix

$$H(z, 0) = \frac{0\cdot z^n - 2}{\|0\cdot z^n - 2\|} = \frac{-2}{\|-2\|} = -1,\ \forall z \in S^1$$

$$H(z, 1) = \frac{1\cdot z^n - 2}{\|1\cdot z^n - 2\|} = (N_2 \circ f)(z)\ \forall z \in S^1$$

En definitiva, H és una homotopia entre $N_2 \circ f$ i l'aplicació constant igual a -1. Llavors,

$$\mu(f,2) = \mathrm{gr}(N_2 \circ f) = \mathrm{gr}(z \mapsto -1) = 0$$

ja que l'aplicació $z \mapsto -1$ és trivialment homòtopa a l'aplicació $z \mapsto 1 = z^0$, $\forall z \in S^1$. Notem que, en general, tota aplicació homòtopa a una aplicació constant té grau 0, d'on, de retruc, tota corba tancada plana constant té índex 0 respecte qualsevol punt.

12.5.3 Teorema de Bolzano al pla

Descrita la noció d'índex a l'apartat anterior, ja podem enunciar i demostrar la versió del Teorema de Bolzano a $\mathbb{R}^2$ que volíem.

Proposició 12.5.24. *Siguin f i g corbes tancades planes i $p \notin f(S^1) \cup g(S^1)$. Els índexs de f i g respecte p coincideixen si, i només si, f i g són homòtopes com a aplicacions de S^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$.*

Demostració. La implicació cap a l'esquerra és prou evident. Essent N_p una aplicació contínua amb espai de sortida $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$, si f i g són homòtopes com a aplicacions en $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$, també ho seran $N_p \circ f$ i $N_p \circ g$ (com a conseqüència trivial del lema (**??**), d'on, per definició d'índex, $\mu(f,p) = \mathrm{gr}(N_p \circ f) = \mathrm{gr}(N_p \circ g) = \mu(g,p)$. Notem que, de fet, moltes de les implicacions aquí usades són en realitat equivalències. Concretament, tenim $\mu(f,p) = \mu(g,p) \Longleftrightarrow N_p \circ f \simeq N_p \circ g$.

Considerem llavors una homotopia $G : S^1 \times I \to S^1$ entre $N_p \circ f$ i $N_p \circ g$, i sigui $\tau_p : S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ la translació per p, i.e. l'aplicació tal que $\tau_p(z) = z + p$ per tot $z \in S^1$. D'aquesta manera, composant G amb τ_p obtenim una homotopia entre $\tau_p \circ N_p \circ f$ i $\tau_p \circ N_p \circ g$. Vist això, si provem que $\tau_p \circ N_p : \mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ és homòtopa a la identitat en $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$, ja haurem acabat, perquè en tal cas

$$f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}} \circ f \simeq \tau_p \circ N_p \circ g \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}} \circ g = g$$

que és el que volem. Veiem, doncs, això.

Veurem que és suficient unir amb un segment les imatges de les dues aplicacions que ens ocupen per cada z; en altres paraules, n'hi haurà prou amb veure que

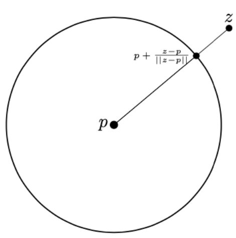
$$\begin{aligned} H : (\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}) \times I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \\ (z,t) &\longmapsto tz + (1-t)(\tau_p \circ N_p)(z) \end{aligned}$$

està ben definida, ja que satisfà trivialment $H(z,0) = (\tau_p \circ N_p)(z)$, $\forall z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ i $H(z,1) = z$, $\forall z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$.

Com que, per construcció,

$$(\tau_p \circ N_p)(z) = p + \frac{z-p}{\|z-p\|}, \quad \forall z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$$

el que ens ocupa és també evident: p no pot ser en cap cas el segment que uneix z amb $p + \frac{z-p}{\|z-p\|}$, tal com il·lustra el dibuix següent:



□

Teorema 12.5.25 (Teorema de Bolzano en dimensió 2). *Sigui $F : D^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicació contínua, $f = F_{|S^1}$ i $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{f(S^1)\}$. Si $\mu(f,p) \neq 0$, aleshores $p \in F(D^2)$.*

Demostració. Fixat $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{f(S^1)\}$ tal que $\mu(f,p) \neq 0$, considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} H : S^1 \times I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (z,t) &\longmapsto F(zt) \end{aligned}$$

Tot suposant que $p \notin F(D^2)$, buscarem arribar a una contradicció. Sota aquest supòsit, podem prendre $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ com a espai d'arribada de H. Però, com que $H(z,1) = F(z) = f(z)$ i $H(z,0) = F(0)$, $\forall z \in S^1$, llavors tindrem que f és homòtopa a l'aplicació constant $z \mapsto F(0)$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$, d'on, per la proposició anterior, $\mu(f,p) = \mu(z \mapsto F(0), p) = 0$, que contradiu la hipòtesis del teorema. Concloem així que cal que el punt $p \in \mathbb{R}^2$ sigui la imatge d'algun punt de D^2 per F. $\square$

12.5.4 Conjunt de teoremes clàssics de topologia del pla

Vist el teorema de Bolzano al pla, veurem ara algunes de les conseqüències d'aquest teorema, que reben el nom de conjunt de teoremes clàssics de topologia del pla.

Teorema 12.5.26 (Teorema de Poincaré-Bohl). *Siguin f i g dues corbes tancades planes i $p \in \mathbb{R}^2$ un punt que no pertany a la imatge de cap d'elles. Si $\forall z \in S^1$ el segment que uneix $f(z)$ amb $g(z)$, que denotarem per $\overline{f(z)g(z)}$, no passa per p, llavors $\mu(f,p) = \mu(g,p)$.*

Demostració. Per la proposició prèvia al teorema de Bolzano (**??**), serà suficient provar que sota les hipòtesis del resultat f i g són homòtopes a $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$. I això és trivial, ja que, per hipòtesis

$$\begin{aligned} H : S^1 \times I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \\ (z,t) &\longmapsto tf(z) + (1-z)g(z) \end{aligned}$$

que no fa més que descriure el segment que uneix $f(z)$ amb $g(z)$ per cada $z \in S^1$, està ben definida i és evident que defineix una homotopia entre f i g a $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$. $\square$

Teorema 12.5.27 (Teorema de Rouché, exercici 13). *Donades dues corbes tancades planes f i g, si $\forall z \in S^1$ es compleix*

$$d(f(z), g(z)) \leq \max\{d(p, f(z)), d(p, g(z))\}$$

llavors $\mu(f,p) = \mu(g,p)$.

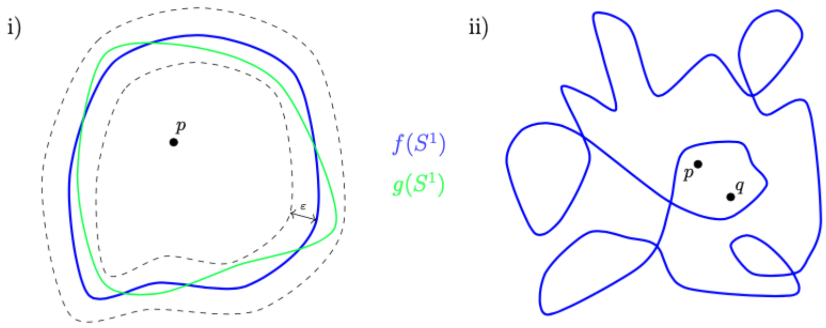
Demostració. Usant el teorema anterior, serà suficient veure que, sota els supòsits donats, p no pertany al segment $\overline{f(z)g(z)}$ per cap $z \in S^1$. I això es veu ràpidament per reducció a l'absurd: si $\exists z_* \in S^1$ tal que $p \in \overline{f(z_*)g(z_*)}$, llavors la distància de p a $f(z_*)$ i $g(z_*)$ ha de ser menor que la distància de $f(z_*)$ a $g(z_*)$, que no és sinó la longitud del segment $\overline{f(z_*)g(z_*)}$. D'aquí es desprèn que $d(f(z_*), g(z_*)) > \max\{d(p, f(z_*)), d(p, g(z_*))\}$, que contradiu les nostres hipòtesis. $\square$

Exemple 12.5.28. Veiem un exemple d'aquest teorema: Si p és la posició del Sol (que suposem fix), $\alpha(t)$ la trajectòria de la Lluna i $\beta(t)$ la trajectòria de la Terra, com que la distància de la Terra i la Lluna és sempre menor que la de la Terra al Sol, el Teorema de Rouché anterior ens diu que el nombre de voltes al voltant del Sol que dona la Terra en un determinat període de temps, és el mateix que el de la Lluna. De fet, el pla de l'òrbita de la Lluna al voltant de la Terra està lleugerament inclinat respecte al pla d'òrbita de la Terra al voltant del Sol, l'anomenat pla d'eclíptica, i per tant aquest exemple no és del tot correcte. Per corregir aquesta incorrecció és usual prendre $\beta(t)$ com la projecció ortogonal sobre el pla de l'eclíptica de la trajectòria de la Lluna.

Teorema 12.5.29 (Teorema d'estabilitat)**.** *Donada una corba tancada plana f i un punt $p \in \mathbb{R}^2$ que no pertany a la seva imatge (és a dir, $p \notin f(S^1)$), tenim:*

(i) Per un cert $\varepsilon > 0$, per tota corba tancada plana g tal que $\sup_{z\in S^1}\{d(f(z), g(z))\} < \varepsilon$ se satisfà $p \notin g(S^1)$ i $\mu(f, p) = \mu(g, p)$.

(ii) Si $q \in \mathbb{R}^2$ pertany a la component arc-connexa de $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$ que conté p, llavors $\mu(f, p) = \mu(f, q)$.



Demostració. (i) Veurem que $\varepsilon = d(f(S^1), p)$ compleix les propietats que busquem. Notem primer que, essent f una aplicació contínua i S^1 un conjunt compacte, $f(S^1)$ és també un conjunt compacte i, per ser-ho en $\mathbb{R}^2$, serà també tancat. Així doncs, com que, per hipòtesi, $p \notin f(S^1)$, tindrem $\varepsilon > 0$.

Ara, donada una corba g tal que $\sup_{z\in S^1}\{d(f(z), g(z))\} < \varepsilon$, si $g(z_*) = p$ per un cert $z_* \in S^1$, llavors passaria

$$d(f(z_*), p) = d(f(z_*), g(z_*)) \leq \sup_{z\in S^1}\{d(f(z), g(z))\} < \varepsilon =$$
$$= d(p, f(S^1)) = \inf_{z\in S^1}\{d(p, f(z))\} \leq d(p, f(z_*))$$

Concloem amb aquesta contradicció que $p \notin g(S^1)$. Generalitzant aquesta cadena de desigualtats, $\forall z \in S^1$, tenim

$$d(f(z), g(z)) < d(f(z), p) \leq \max\{d(f(z), p), d(g(z), p\}$$

En altres paraules, f i g satisfan les hipòtesis del teorema de Rouché i, per tant, $\mu(f, p) = \mu(g, p)$.

(ii) Essent p i q d'una mateixa component arc-connexa, podem prendre un camí continu $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \setminus S^1$ tal que $\gamma(0) = p$ i $\gamma(1) = q$. Com que, per construcció, aquest camí no talla la imatge de f, llavors l'aplicació

$$\begin{aligned} H : S^1 \times I &\longrightarrow S^1 \\ (z, t) &\longmapsto \tfrac{f(z)-\gamma(t)}{\|f(z)-\gamma(t)\|} \end{aligned}$$

està ben definida i és contínua. De fet, H és una homotopia entre $N_p \circ f$ i $N_q \circ g$, ja que satisfà

$$H(z, 0) = \frac{f(z) - \gamma(0)}{\|f(z) - \gamma(0)\|} = \frac{f(z) - p}{\|f(z) - p\|} = (N_p \circ f)(z)\ \forall z \in S^1$$

$$H(z, 1) = \frac{f(z) - \gamma(1)}{\|f(z) - \gamma(1)\|} = \frac{f(z) - q}{\|f(z) - q\|} = (N_q \circ f)(z)\ \forall z \in S^1$$

Amb tot, per la definició de l'índex i la invariància del grau per homotopies,

$$\mu(f,p) = \mathrm{gr}(N_p \circ f) = \mathrm{gr}(N_q \circ f) = \mu(f,q).$$

□

Exemple 12.5.30. Siguin $f : S^1 \to \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ la corba tancada plana definida com $f(z) = z^n$, $\forall z \in S^1$ per un cert $n \geq 1$ i considerem el punt $p \in \mathbb{C} \setminus f(S^1) = \mathbb{C} \setminus S^1$.

Si $\|p\| < 1$, llavors p pertany a la mateixa component arc-connexa que $0 \in \mathbb{C}$, d'on valent-nos del segon apartat del teorema d'estabilitat (**??**), $\mu(f,p) = \mu(f,0) = \mathrm{gr} f = n$.

Per contra, si $\|p\| > 1$, notem que si $g : S^1 \to \mathbb{R}^2$ és l'aplicació constant igual a 0, llavors $p \notin \overline{f(z)g(z)}$ $\forall z \in S^1$. Per tant, podem usar el teorema de Poincaré-Bohl (**??**) per afirmar que $\mu(f,p) = \mu(g,p) = 0$.

Teorema 12.5.31 (Teorema fonamental de l'àlgebra)**.** *Per tot polinomi $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ existeix $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $p(\alpha) = 0$.*

Demostració. Escrivim el polinomi $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ on $n \geq 1$ i $a_i \in \mathbb{C}, \forall i = 1, \ldots, n-1\}$. Considerem $\lambda = 1 + \|a_{n-1}\| + \cdots + \|a_1\| + \|a_0\| > 1$. Si $\lambda = 1$, aleshores $p(z) = z^n$ i per tant, $\alpha = 0$ és una arrel de p. Suposem que $\lambda > 1$ i prenem les aplicacions

$$\begin{aligned} F : D^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto p(\lambda z) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \sigma : S^1 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto (\lambda z)^n \end{aligned}$$

i $f = F_{|S^1}$. Observem que σ retorna per cada $z \in S^1$ el coeficient líder de f. Serà suficient provar que $\mu(f,0) \neq 0$, ja que en tal cas, pel teorema de Bolzano, $\exists z_0 \in D^2$ tal que $F(z_0) = 0$, i.e. λz_0 és una arrel de p., Per veure que se satisfà aquesta propietat, usarem el teorema de Rouché per comparar l'índex de f respecte 0 amb el de σ. Concretament, tenim que si $z \in S^1$, llavors

$$d(f(z), \sigma(z)) = \|f(z) - \sigma(z)\| = \|a_{n-1}(\lambda z)^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda z + a_0\| \leq$$

$$\leq \|a_{n-1}\lambda^{n-1}z^{n-1}\| + \cdots + \|a_1 \lambda z\| + \|a_0\| = \|a_{n-1}\lambda^{n-1}\| + \cdots + \|a_1 \lambda\| + \|a_0\| \leq$$

$$\leq \lambda^{n-1}(\|a_{n-1}\| + \cdots + \|a_1\| + \|a_0\|) \leq \lambda^n = \|\sigma(z) - 0\|$$

En definitiva, $d(f(z), \sigma(z)) \leq d(\sigma(z), 0) \leq \max\{d(\sigma(z), 0), d(f(z), 0)\}$, d'on, per Rouché, $\mu(f,0) = \mu(\sigma,0) = \mathrm{gr}(z \mapsto z^n) = n \leq 1 > 0$. □

Teorema 12.5.32 (Teorema de Borsuk-Ulam)**.** *Tota aplicació contínua $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ amb la propietat $f(z) = -f(-z)$ $\forall z \in S^2$ s'anul·la en un cert $p_0 \in S^2$, és a dir, $\exists p_0 \in S^2$ tal que $f(p_0) = (0,0)$.*

Demostració. Sigui $F = \pi^{-1} \circ f$, on π denota la projecció de S^2 sobre el disc unitat del pla, de manera que F és l'aplicació

$$\begin{aligned} F : D^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto \left(x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}\right) \end{aligned}$$

Serà suficient veure que $(0,0) \in F(D^2)$. Concretament, veurem que si $(0,0) \notin F(S^1)$, llavors F s'anul·la per algun punt de l'interior del disc D^2. Notem per això que F és contínua i, si $(x,y) \in S^1$, és a dir, $x^2 + y^2 = 1$, satisfà

$$F(x,y) = f(x,y,0) = -f(-x,-y,0) = -F(-x,-y)$$

Havent suposat que l'origen no és la imatge de S^1 per F, podem calcular l'índex d'aquesta funció restringida a la circumferència respecte $(0,0) \in D^2$. Per fer-ho, prenem $g = N_0 \circ F_{|S^1}$ i una elevació $\tilde{g}$ del camí $g \circ e$. Així, com que, amb el que hem vist abans, $g(-z) = -g(z)$ $\forall z \in S^1$ i, per la definició d'elevació (**??**), $g(z) = e^{2\pi i \tilde{g}(t)}$ $\forall z = e^{2\pi i t} \in S^1$, en particular si $t \in [0, 1/2]$,

$$e^{2\pi i \tilde{g}(t)} = g(z) = -g(-z) = e^{\pi i} g(e^{\pi i} e^{2\pi i t} = e^{\pi i} g(e^{2\pi i (t+1/2)}) = e^{\pi i} e^{2\pi i \tilde{g}(t+1/2)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow k(t) = \tilde{g}(t) - \frac{1}{2} - \tilde{g}(t + \frac{1}{2}) \in \mathbb{Z}.$$

Com $\tilde{g}$ és contínua, k també ho serà i, de fet, com que I és connex, k és constant, sigui $k_0 \in \mathbb{Z}$ el valor que pren $k(t)$ per $t \in [0, 1/2]$. Llavors,

$$\left.\begin{array}{l} k_0 = k(0) = \tilde{g}(0) - \frac{1}{2} - \tilde{g}(\frac{1}{2}) \\ k_0 = k(\frac{1}{2}) = \tilde{g}(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} - \tilde{g}(1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2k_0 = \tilde{g}(0) - \tilde{g}(1) - 1$$

d'on $\mu(F_{|S^1}, (0,0)) = \mathrm{gr} g = \mathrm{gr}(g \circ e) = \tilde{g}(1) - \tilde{g}(0) = -2k_0 - 1 \neq 0$ atès que k_0 és un enter. I d'aquí, pel Teorema de Bolzano (**??**), $(0,0) \in F(D^2)$. □

Corol·lari 12.5.33 (Variant del teorema de Borsuk-Ulam)**.** *Aquest teorema és equivalent al fet que tota aplicació contínua de l'esfera al pla admet un punt $p_1 \in S^2$ la imatge del qual coincideix amb la del seu punt antipodal, i.e. $\forall g : S^2 \to \mathbb{R}^2$ contínua $\exists p_1 \in S^2$ tal que $g(p_1) = g(-p_1)$*

Demostració. Comencem per observar que donada una certa $g : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ contínua, l'aplicació $f(z) = g(z) - g(-z)$ és també contínua i satisfà

$$-f(-z) = -(g(-z) - g(-(-z))) = g(z) - g(-z) = f(z) \quad \forall z \in S^2$$

Així, si el teorema (**??**) és cert, podem trobar $p_0 \in S^2$ pel qual $f(p_0) = g(p_0) - g(-p_0) = 0$, de manera que el punt complexi $g(p_0) = g(-p_0)$. □

Teorema 12.5.34 (Teorema de Lusternik-Schirelmann)**.** *Donats tres conjunts tancats qualssevol $A, B, C \subset S^2$ tals que $A \cup B \cup C = S^2$, almenys un d'ells conté una parella de punts antípodes.*

Demostració. Sigui $g : S^2 \to \mathbb{R}^2$ definida com $g(p) = (d(p, A), d(p, g))$, $\forall p \in S^2$. Aquesta funció és clarament contínua i, per tant, per la variant del teorema de Borsuk-Ulam vista abans, $\exists p_1 \in S^2$ tal que $g(p_1) = g(-p_1)$. Sigui $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ la imatge de p_1 per g. Si $\alpha = 0$ llavors $d(p_1, A) = d(-p_1, A) = 0$; equivalentment, essent A tancat, cal $p_1, -p_1 \in \overline{A} = A$. Anàlogament, si $\beta = 0$, aleshores $p_1, -p_1 \in B$. Finalment, si $\alpha, \beta \neq 0$, tindrem $p_1, -p_1 \notin A \cup B$,, d'on, com que $p_1, -p_1 \in S^2 = A \cup B \cup C$, necessàriament $p_1, -p_1 \in C$. □

12.5.5 El tipus d'homotopia d'un graf

Definició 12.5.35 (Graf)**.** Un *graf finit (geomètric)* és un espai topològic G amb una família finita de punts de G, $\{v_i\}_{i \in V}$, anomenats els *vèrtexs* de G, i una família finita de compactes de G, $\{a_j\}_{j \in E}$, anomenats les *arestes* de G, tals que

- G és la reunió de totes les seves arestes
- Cada aresta onté un o dos vèrtexs, anomenats els *vèrtexs de l'aresta*
- El complementari en cada aresta dels seus vèrtexs és homeomorf a l'interval $(0, 1)$

- Dues arestes no disjuntes s'intersequen només en vèrtexs.

Teorema 12.5.36. *Sigui G un graf connex amb v vèrtexs i a arestes. Aleshores G és homotòpicament equivalent a la unió puntual de ℓ circumferències, essent $\ell = 1 - v + a$ i, per tant, $\pi(G) \cong \mathbb{F}_\ell$. A ℓ se li diu nombre de llaços (o primer nombre de Betti) de G.*

Demostració. Per inducció sobre el nombre v de vèrtexs.

Si $v = 1$, aleshores G ja és la unió puntual d'a circumferències i per tant $\pi(G) \cong \mathbb{F}_a$ que prova el teorema en aquest cas.

Suposem el resultat cert per a $v - 1$ vèrtex i suposem que ara G té v vèrtexs. Aleshores existirà una aresta amb vèrtexs diferents, ja que G és connex. Contraient aquesta aresta a un punt, s'obté un nou graf G' amb v' vèrtexs i a' arestes, tal que $v' = v - 1$ i $a' = a - 1$. Per hipòtesis d'inducció, G' serà homotòpicament equivalent a la unió puntual de ℓ' circumferències, on $\ell' = 1 - v' + a'$. Però com que $\ell' = 1 - v' + a' = 1 - (v - 1) + (a - 1) = 1 - v + a = \ell$ i G' és del mateix tipus d'homotopia que G, resulta que G és homotòpicament equivalent a la unió puntual de ℓ circumferències i per tant $\pi(G) \cong \mathbb{F}_\ell$. □

Definició 12.5.37 (València o grau d'un vèrtex)**.** Si v és un vèrtex del graf G, s'anomena *valència* o bé *grau de v*, a $d(v) = \#\{a \ : \ a \text{ aresta de } G \text{ amb dos vèrtexs diferents}\} + 2\#\{a \ : \ a \text{ aresta de } G \text{ amb } v \text{ com a únic vèrtex}\}$. Un graf que té tots els seus vèrtexs amb grau $d = 3$ s'anomena *trivalent*.

12.5.6 Exercicis proposats

Exercici 2 (Exercici 4)**.** *Considerem el grup ortogonal especial $SO(3)$, format per les matrius de les rotacions a $\mathbb{R}^3$, amb la topologia euclidiana i punt base la matriu identitat.*

(a) Demostreu que $SO(3)$ és homeomorf a $\mathbb{R}P^3$.

(b) Demostreu que si ρ denota el llaç a $SO(3)$ definit per les rotacions al voltant de l'eix $x = y = 0$, llavors $\rho * \rho$ és homòtop al llaç constant en el punt base.

Solució. Recordem que el grup aquest és

$$X = SO(3, \mathbb{R}) = \Big\{ A \in M(3,3,\mathbb{R}) \ : \ AA^t = \mathrm{Id}, \ \det A = 1 \Big\} \subseteq \mathbb{R}^9$$

(a) No lo sé

(b) $[\rho] \in \pi(X, \mathrm{Id})$, on ρ és un llaç de rotacions[2] al voltant de l'eix $x = y = 0$.

Representem amb matrius:

$$\rho(s) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi s & -\sin 2\pi s & 0 \\ \sin 2\pi s & \cos 2\pi s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 0 \le s \le 1$$

$$\overline{\rho}(s) = \rho(1-s) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi s & \sin 2\pi s & 0 \\ -\sin 2\pi s & \cos 2\pi s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[2] Ho podem pensar com si fóssim cambrers que portem una safata plena de copes de vidre subjectada amb una mà. Aleshores la fem girar sense que es caigui res i que no se'ns retorci el braç. Aleshores el que fem és un camí tancat. En física s'anomena "spin". Les partícules *spin* són les que responen a la ρ.

Aleshores, el problema és demostrar que $\rho^2 \simeq \varepsilon_{\mathrm{Id}}$ (camí constant en Id). Això és equivalent a demostrar que $\rho \simeq \overline{\rho}$. Definim doncs

$$H(s,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \pi t & \sin \pi t \\ 0 & -\sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix} \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \pi t & -\sin \pi t \\ 0 & \sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix}$$

Aquesta és una homotopia ja que és una matriu ortogonal de determinant 1 (per tant és de $SO(3,\mathbb{R})$ contínua i es pot comprovar que satisfà totes les condicions d'homotopia.

Exercici 3 (Exercici 7)**.** *Demostreu que, si D^2 denota el disc unitat tancat de $\mathbb{R}^2$ i $f : D^2 \to D^2$ és un homeomorfisme, llavors $f(S^1) = S^1$.*

Solució. Veiem en primer lloc la inclusió $f(S^1) \subseteq S^1$. Si no fos així, existiria algun $x \in S^1$ tal que $y = f(x) \in (D^2)^\circ = D^2 \setminus S^1$. Però com f és un homeomorfisme, també ho és $f_{|D^2\setminus\{x\}}$ i per tant $D^2 \setminus \{x\} \simeq D^2 \setminus \{y\}$ que implica que $\pi(D^2 \setminus \{x\}) \cong \pi(D^2 \setminus \{y\})$ (per **??**). Ara bé, $D^2 \setminus \{x\}$ és convex, i per tant $D^2 \setminus \{x\} \simeq *$, i així $\pi(D^2 \setminus \{x\}) = 0$ (on 0 denota el grup trivial). Mentre que $D^2 \setminus \{y\} \simeq S^1$ (per l'exercici ?? de la llista 1) i per tant $\pi(D^2 \setminus \{y\}) \cong \mathbb{Z}$ pel que ja hem vist. Per tant contradiu l'isomorfisme $\pi(D^2 \setminus \{x\}) \cong \pi(D^2 \setminus \{y\})$ i arribem a una contradicció. Per tant ha de ser $f(S^1) \subseteq S^1$.

Per fer la inclusió contraria, només cal aplicar el mateix raonament a $g = f^{-1}$ i aleshores es pot concloure que $f^{-1}(S^1) \subseteq S^1$ cos que implica que $S^1 \subseteq f(S^1)$ i juntament amb la inclusió anterior obtenim la igualtat.

Exercici 4 (Exercici 8)**.** *Demostreu que tota aplicació contínua $S^2 \to S^2$ no exhaustiva té algun punt fix.*

Solució. Sigui $f : S^2 \to S^2$ una aplicació contínua no exhaustiva. Com f no és exhaustiva, existeix un punt $p \in S^2 \setminus \mathrm{Im} f$. Equivalentment $\mathrm{Im} f \subseteq S^2 \setminus \{p\}$. Ara bé, $S^2 \setminus \{p\} \simeq \mathbb{R}^2$ (per la projecció estereogràfica) i com $\mathrm{Im} f$ és compacte, existeix un compacte $K \simeq D^2$ tal que $\mathrm{Im} f \subseteq K \subseteq S^2 \setminus \{p\}$.

Considero la restricció de f al compacte K, és a dir, $f_{|K} = g : K \to K$. Com $K \simeq D^2$ i D^2 satisfà la PPF pel Teorema de Brouwer (**??**), per (**??**) K satisfà la PPF i per tant g té un punt fix (és a dir, $\exists z_0 \in K$ tq $g(z_0) = z_0$). En definitiva, com $g = f_{|K}$, es té que f té un punt fix.

Exercici 5 (Exercici 9)**.** *Sigui $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Demostreu que tota aplicació contínua $X \to X$ homòtopa a una aplicació constant té algun punt fix.*

Solució. Considerem la corona X donada a l'enunciat. Sigui $H : X \times I \to X$ l'homotopia tal que $H(x,1) = f(x)$, $H(x,0) = \varepsilon_{x_0}(x) = x_0 \in X$, $\forall x \in X$, és a dir, la homotopia que dona la equivalència $f \simeq \varepsilon_{x_0}$, on ε_{x_0} és l'aplicació constant que sempre dona x_0.

Sigui $D^2_2(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 4\}$ el disc tancat de radi 2 i centre 0, i definim l'aplicació

$$g : D^2_2(0) \longrightarrow X \subseteq D^2_2(0)$$

per $g(x,y) = f(x,y)$, si $(x,y) \in X$; $g(x,y) = H\left(\frac{(x,y)}{\|(x,y)\|}, \|(x,y)\|\right)$, si $0 < x^2 + y^2 \leq 1$ i $g(0,0) = x_0$. Aquesta aplicació està ben definida ja que, si $x^2 + y^2 = 1$, $H((x,y),1) = f(x,y)$ i és contínua ja que ho és H.

Ara, pel Teorema del Punt Fix de Brouwer (**??**) g té un punt fix, és a dir, existeix x_0 tal que $g(x_0) = x_0$. Com $\mathrm{Im} g \subseteq X$, $x_0 \in X$. Finalment, donat que sobre X, $g = f$, concloem que $f(x_0) = g(x_0) = x_0$ i per tant f té un punt fix.

Exercici 6 (Exercici 10)**.** *Demostreu que tota matriu 3×3 amb coeficients positius té algun valor propi positiu.*

Solució. Notem K l'octant positiu de S^2 (és a dir, $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0\} \cap S^2$). Aquest octant és homotòpicament equivalent al disc tancat D^2. Notem A una matriu amb tots els elements positius. Podem considerar l'aplicació

$$\begin{aligned} f : K &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto \tfrac{A(x)}{\|A(x)\|} \end{aligned}$$

Aquesta aplicació no estarà ben definida si existeix algun x_0 tal que $A(x_0) = 0$, però si passa això, A té el valor propi $\lambda = 0$. Aleshores, podem suposar que $A(x) \neq 0$ per qualsevol x i així f està ben definida amb aquesta hipòtesi.

Com f és contínua, pel Teorema del Punt Fix de Brouwer (**??**) i per (**??**), existeix un x_0 tal que $f(x_0) = x_0$, és a dir, $\frac{A(x_0)}{\|A(x_0)\|} = x_0$, $x_0 \in S^2$. O sigui, $A(x_0) = \|A(x_0)\|x_0$, $x_0 \in S^2$. Per tant, A té el VAP $\|A(x_0)\| > 0$.

Exercici 7 (Exercici 14)**.** *Calculeu l'índex del camí tancat*

$$\gamma(t) = e^{4\pi it} + e^{2\pi it} + 1, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

al pla complex respecte als punts $p_1 = 0.5$*,* $p_2 = 4$*,* $p_3 = 1 + i$*.*

Solució. Primer cal destacar que grau d'un camí (**??**) és el mateix que índex d'un camí. Així doncs, el que volem calcular és el grau del camí $\gamma(t) = e^{4\pi it} + e^{2\pi it} + 1$. Podem expressar aquest camí com la composició

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow S^1 &&\xrightarrow{\alpha} \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{2\pi it} &&\longmapsto e^{4\pi it} + e^{2\pi it} + 1 \end{aligned}$$

essent $\alpha(z) = z^2 + z + 1$.

Podríem considerar, més en general, que $\alpha(z)$ fos un polinomi en z qualsevol, ja que el mètode de la solució d'aquest exercici seria anàleg, i es basa en les propietats de l'índex de (**??**). Tenint en compte aquestes propietats, doncs, resoldrem l'exercici calculant l'índex de α, ja que $\gamma = \alpha \circ e$, on e és la funció exponencial. Així doncs, calculem-lo en cada cas:

- $\underline{p_1 = \frac{1}{2}}$ $\mu(z^2 + z + 1, 1/2) = \mu(z^2 + z + 1 - 1/2, 0) = \mu(z^2 + z + 1/2, 0)$. Ara trobem les arrels de $z^2 + z + \frac{1}{2} = 0$, que són $z = \frac{-1 \pm i}{2}$, i per tant,

$$\mu(z^2 + z + 1/2, 0) = \mu\left(z - \frac{-1 + i}{2}, 0\right) + \mu\left(z - \frac{-1 - i}{2}, 0\right) =$$

$$= \mathrm{gr}\frac{\alpha}{\|\alpha\|} + \mathrm{gr}\frac{\beta}{\|\beta\|} = \mu(\alpha, 0) + \mu(\beta, 0).$$

  Ara veiem que les dos arrels tenen mòdul $\left\|\frac{-1 \pm i}{2}\right\| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ i aleshores resulta que $(*) = 1 + 1 = 2$.

- $\underline{p_2 = 4}$. Procedim d'una manera similar:

$$\mu(z^2 + z + 1, 4) = \mu(z^2 + z + 1 - 3, 0) = \mu\left(z, \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}\right) + \mu\left(z, \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}\right) = 0$$

  ja que $\left\|\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}\right\| > 1$.

- $\underline{p_3 = 1 + i}$. En aquest cas tenim

$$\mu(z^2 + z + 1, 1 + i) = \mu(z^2 + z - i, 0) = (*)$$

  les arrels de $z^2 + z - i = 0$ són $z_{\pm}\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1 + 4i})$ que tenen mòdul $\|z_+\| > 1$ i $\|z_-\| < 1$ i per tant $(*) = 0 + 1 = 1$.

Exercici 8 (Exercici 16). *(a) Demostreu que, si una aplicació contínua $g : S^1 \to S^1$ es pot estendre a una aplicació contínua $D^2 \to S^1$, on D^2 denota el disc tancat, llavors g té grau 0.*

(b) Siguin f i g dues aplicacions contínues $D^2 \to D^2$. Demostreu que $g(S^1) \subset S^1$ i el grau de la restricció $g : S^1 \to S^1$ és diferent de zero, llavors hi ha algun punt $x_0 \in D^2$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$.

(c) Calculeu el grau de l'aplicació $g : S^1 \to S^1$ donada per $g(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

(d) Demostreu que el sistema d'equacions següent té alguna solució a $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \cos(x + y + y^2) - x^2 + y^2 = 0 \\ \sin(x + y + y^2) - 2xy = 0. \end{cases}$$

Solució. (a) Si $g : S^1 \to S^1$ s'estén a una aplicació $G : D^2 \to S^1$, vol dir que, notant $i : S^1 \to D^2$ la inclusió, es té

$$g = G \circ i : S^1 \xrightarrow{i} D^2 \xrightarrow{G} S^1$$

Per tant, al passar a grups fonamentals tenim

$$g_* = G_* \circ i_* : \pi(S^1) \to \pi(D^2) \to \pi(S^1)$$

on hem demostrat ja que $\pi(S^1) \cong \mathbb{Z}$ i $\pi(D^2) \cong \{0\}$ (grup trivial). Per tant, resulta que

$$\mathrm{gr} g = g_*(1) = G_*(i_*(1)) = G_*(0) = 0.$$

(b) Com a la demostració del TPFB (**??**), si $f(x) \neq g(x)$, $\forall x \in D^2$, podem prendre la recta que passa per aquests dos punts $f(x)$ i $g(x)$ i després prendre el punt d'intersecció d'aquesta recta amb S^1, prenent el que estigui més a prop de $g(x)$. Així definim una aplicació contínua $r : D^2 \to S^1$ que estén $g_{|S^1}$ ja que si $x \in S^1$, $g(x)$ ja pertany a S^1 i per tant $g(x) = r(x)$, $\forall x \in S^1$.

Obtenim així que $g_{|S^1}$ s'estén a D^2 i per l'apartat (a), deurà ser $\mathrm{gr} g_{|S^1} = 0$. Però la hipòtesis és que $\mathrm{gr} g_{|S^1} \neq 0$, contradicció.

(c) L'aplicació $g(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ escrita utilitzant els complexos $z = x + iy \in \mathbb{C}$, és $g(z) = z^2$, i per tant $\mathrm{gr}(g) = 2$. En general, $\mathrm{gr}(z^n) = n$.

(d) El sistema d'equacions donat es pot interpretar com l'equació $f(z) = g(z)$, on $f(x, y) = (\cos(x + y + y^2), \sin(x + y + y^2))$ i $g(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$, suposant $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Com que $\|f(z)\|, \|g(z)\| \leq 1$, $\forall z \in D^2$, i per l'apartat (c) $\mathrm{gr}(g_{|S^1}) = 2 \neq 0$ se satisfan les hipòtesis de l'apartat (b) i podem concloure que efectivament existeix un punt $(x_0, y_0) \in D^2$ tal que se satisfan les equacions.

Exercici 9 (Exercici 18). *(a) Demostreu que el camí tancat*

$$\gamma(t) = (5\cos 4\pi t + \sin^4 2\pi t - 1, 5\sin 4\pi t + \cos^7 2\pi t - 2)$$

no passa per $(0, 0)$ i calcula l'índex de γ respecte a $(0, 0)$.

(b) Demostreu que el sistema d'equacions següent té alguna solució a $\mathbb{R}^2$ de mòdul menor que 0.70464:

$$\begin{cases} 5x^2 - 5y^2 + y^4 = 1 \\ x^7 + 10xy = 2 \end{cases} \tag{12.3}$$

(c) Comproveu que $x = 0.56548$, $y = 0.35040$ és una solució.

Solució. (a) Considerem el camí

$$\begin{aligned} \alpha : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (5\cos 4\pi t, 5\sin 4\pi t) = 5e^{4\pi i t} \end{aligned}$$

que no passa per $(0,0)$ i té $\mu(\alpha, 0) = 2$. Com que per tot t,

$$\|\gamma(t) = \alpha(t)\| = \sqrt{(\sin^4 2\pi t - 1)^2 + (\cos^7 2\pi t - 2)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{1+9} = \sqrt{10} < 5 = \|\alpha(t) - (0,0)\|$$

pel Teorema de Rouché (**??**) tenim que γ no passa per 0 i $\mu(\gamma, 0) = \mu(\alpha, 0) = 2$.

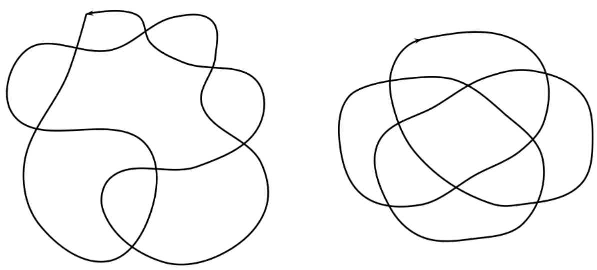
(b) Notem D_r del disc de centre 0 i radi r de $\mathbb{R}^2$, i S_r la seva vora, és a dir, la circumferència de radi r. Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} F : D_r &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (5x^2 - 5y^2 + y^4 - 1, x^7 + 10xy - 2) \end{aligned}$$

Si veiem que, per un cert $r > 0$, $0 \notin F(S_r)$ i $\mu(F_{|S_r}, 0) \neq 0$, tindrem, pel Teorema de Bolzano en dimensió 2 (**??**) que $0 \in F(D_r^\circ)$, és a dir, que el sistema té una solució de mòdul menor que r.

Pel primer apartat, tenim que prenent $r = 1$, els sistema té una solució de mòdul menor que 1. Ara, provar que si $r = 0.7\ldots$ es compleix també que $\mu(F_{|S_r}, 0) = 2$ és refer l'apartat (a) amb aquesta r concreta, cosa que no tornaré a fer.

Exercici 10 (Exercici 19)**.** *Per a cada regió delimitada per cadascun dels camins següents, determineu el nombre de voltes del camí respecte a un punt arbitrari situat a l'interior de la regió.*



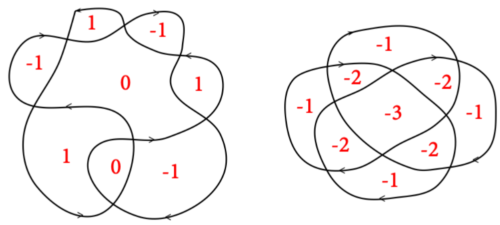
Solució. L'índex d'una corba amb respecte un punt de3pèn de la component connexa de $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha(I)$ en la que està el punt. És a dir, si p i q estan en la mateixa component de $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha(I)$ es té que $\mu(\alpha, p) = \mu(\alpha, q)$.

En efecte, podem prendre un camí $\gamma(s)$ tal que $\gamma(0) = p$ i $\gamma(1) = q$, i $\gamma(I) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \alpha(I)$. Aquest camí γ ens permet definir l'homotopia

$$\begin{aligned} H : I \times I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ (s,t) &\longmapsto H(s,t) = \frac{\alpha(t) - \gamma(s)}{\|\alpha(t) - \gamma(s)\|} \end{aligned}$$

tal que $H(0,t) = \frac{\alpha(t)-p}{\|\alpha(t)-p\|}$, i $H(1,t) = \frac{\alpha(t)-q}{\|\alpha(t)-q\|}$, i per tant $\mu(\alpha, p) = \mathrm{gr}\frac{\alpha(t)-p}{\|\alpha(t)-p\|} = \mathrm{gr}\frac{\alpha(t)-q}{\|\alpha(t)-q\|} = \mu(\alpha, q)$.

Aleshores, utilitzant això, podem determinar:



Bàsicament es tracta de comptar quantes voltes dona la corba dibuixada al voltant del punt que s'estudia. Si la volta és antihorari se li suma 1, si és horària se li resta 1.

12.6 El teorema de Seifert-Van Kampen

12.6.1 Grups lliures i presentacions de grups

Definició 12.6.1 (Grup lliure)**.** Donat un conjunt $A = \{a_i\}_{i \in J}$ qualsevol, el *grup lliure* generat per A és el grup format per les *paraules* (de llargària finita) $a_{i_1}^{m_1} a_{i_2}^{m_2} \cdots a_{i_r}^{m_r}$, on cada a_{i_k} pertany a A i cada exponent m_k és un nombre enter. L'operació és la juxtaposició de paraules, amb les regles $a^m a^n = a^{m+n}$ i $a^0 = 1$ per a tot $a \in A$, on 1 és un símbol addicional que actua com a element neutre. Aquest grup es denota per $F(A)$.

Observació 12.6.2. *De vegades es troba la notació F_n referint-se al grup lliure generat per n elements.*

Observació 12.6.3. *Si G és un grup, per definir un morfisme de grups $F(A) \to G$ és suficient triar $\#A$ elements de G, diguem $\{g_a\}_{a \in A}$. Aleshores existeix un únic morfisme de grups que aplica a sobre g_a per a tot $a \in A$. Per tant, si G és un grup qualsevol amb un conjunt de generadors $\{g_i\}_{i \in I}$ i $A = \{a_i\}_{i \in I}$ un conjunt qualsevol de $\#I$ elements, tenim el morfisme $\varphi : F(A) \to G$ definit per $\varphi(a_i) = g_i$, i a més aquest morfisme és exhaustiu, donat que els $\{g_i\}_{i \in I}$ són generadors de G. Aplicant el Primer Teorema d'Isomorfia per grups trobem que*

$$G \cong F(A)/\ker\varphi$$

Observació 12.6.4. *Els elements del grup lliure $F(a_1, \ldots, a_n)$ estan en bijecció amb els vèrtexs d'un arbre que té en cada vèrtex n arestes que entren i n arestes que surten.*

Definició 12.6.5 (Presentació d'un grup)**.** Donat un grup G qualsevol, podem escollir algun grup lliure $F = F(A)$ i un morfisme $\nu : F \to G$ exhaustiu (per exemple, podem escollir com a A el conjunt de tots els elements de G i fer servir la propietat universal dels grups lliures per definir ν). Llavors $G \cong F/N$, on $N = \ker\nu$ és el nucli de ν. Si R és un conjunt qualsevol d'elements de F que generin N com a subgrup normal, s'escriu $G \cong \langle A \mid R\rangle$ i es diu que $\langle A \mid R\rangle$ és una *presentació* del grup G amb conjunt de *generadors* A i conjunt de *relacions* R.

Exemple 12.6.6. Exemples de presentacions:

- Un grup cíclic finit d'ordre m, admet la presentació $\langle a \mid a^m\rangle$, on a^m és, en realitat, $a^m = 1$, on 1 representa l'element neutre. És a dir, $C_m \cong \langle a \mid a^m = 1\rangle$.
- Un grup abelià lliure de rang 2 ve donat per $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1}\rangle$, on $aba^{-1}b^{-1}$ simbolitza la relació $ab = ba$. Així queda més clar que les relacions es poden anar manipulant per obtenir-ne de noves, redundants amb les anteriors, com si fossin un sistema d'equacions amb variables no commutatives.

- $\langle \sigma, \tau \mid \sigma^2 = 1,\ \tau^3 = 1,\ (\sigma\tau)^2 = 1 \rangle$ és una presentació del grup de permutacions S_3, on σ correspon a una transposició i τ un cicle d'ordre 3.

- Si $A = \{a\}$ aleshores $F(A) = \{a^n\}$ i $F(\{a\}) = \langle a\ :\ \rangle \cong \mathbb{Z}$.

Definició 12.6.7 (Finitament presentat)**.** Un grup G és *finitament generat* si admet alguna presentació amb un nombre finit de generadors, i es diu *finitament presentat* si admet alguna presentació amb un nombre finit de generadors i un nombre finit de relacions.

Exemple 12.6.8. Els grups descrits a l'exemple anterior serien tots finitament presentats.

12.6.2 Producte lliure amalgamat

Definició 12.6.9 (Producte lliure)**.** Donats dos grups $G_1 = \langle A_1 \mid R_1 \rangle$ i $G_2 = \langle A_2 \mid R_2 \rangle$, el seu *producte lliure* és el grup

$$G_1 * G_2 := \langle A_1 \cup A_2\ :\ R_1 \cup R_2 \rangle = \langle A_1, A_2 \mid R_1, R_2 \rangle$$

Aquest grup no depèn de les presentacions escollides per a G_1 i G_2. De fet, està caracteritzat, llevat d'isomorfisme, per la propietat universal següent: per a cada parell de morfismes $\alpha_1 : G_1 \to H$ i $\alpha_2 : G_2 \to H$, on H és un subgrup qualsevol, existeix un únic morfisme $\alpha : G_1 * G_2 \to H$ tal que $\alpha \circ \eta_1 = \alpha_1$ i $\alpha \circ \eta_2 = \alpha_2$, on $\eta_1 : G_1 \to G_1 * G_2$ i $\eta_2 : G_2 \to G_1 * G_2$ són les inclusions canòniques.

Aquesta és la propietat característica del *coproducte* (o de la *cosuma*) en qualsevol categoria. Per tant, el producte lliure de grups és el coproducte en la categoria de grups i té propietats exactament duals de les del producte $G_1 \times G_2$ amb les projeccions canòniques $\pi_1 : G_1 \times G_2 \to G_1$ i $\pi_2 : G_2 \to G_1 \times G_2$.

Un grup lliure amb n generadors és el producte lliure de n grups cíclics infinits.

Exemple 12.6.10. Siguin els grups $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ amb presentacions $\langle \{a\}\ :\ \{a^2\} \rangle$ i $\langle \{a\}\ :\ \{a^3\} \rangle$. Aleshores tindríem

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong \langle \{a, b\}\ :\ \{a^2, b^3\} \rangle$$

Observació 12.6.11. *Habitualment, i per no carregar massa el text, en comptes d'escriure aquesta presentació* $\langle \{a, b\}\ :\ \{a^2, b^3\} \rangle$ *l'escriurem sense els claudàtors, és a dir,* $\langle a, b\ :\ a^2, b^3 \rangle$*. A vegades s'escriu també* $\langle a, b\ :\ a^2 = b^3 = 1 \rangle$*.*

Definició 12.6.12 (Producte lliure amalgamat)**.** Suposem que tenim tres grups $G_1 = \langle A_1\ :\ R_1 \rangle$, $G_2 = \langle A_2\ :\ R_2 \rangle$ i $H = \langle C\ :\ R_h \rangle$, i dos morfismes de grups $\alpha : H \to G_1$ i $\beta : H \to G_2$. Aleshores, el *producte lliure de* G_1 *per* G_2 *amalgamat per* H és el grup

$$G_1 \underset{H}{*} G_2 = \langle A_1, A_2\ :\ R_1, R_2, R \rangle$$

on R és *la relació d'amalgament* que es defineix per $R = \{c \in C\ :\ \alpha(c) = \beta(c)\}$. Sovint s'escriurà $R = \alpha(c)\beta(c)^{-1}$ per abús del llenguatge i per embolicar-nos.

Normalment els morfismes α i β no seran qualssevol morfismes, sinó que seran els morfismes induïts per les inclusions. Quan veiem el Teorema de Seifert-Van Kampen més endavant (**??**), utilitzarem aquest producte amb els morfismes induïts per les inclusions "naturals" $\iota_1 : U \cap V \hookrightarrow U$ i $\iota_2 : U \cap V \hookrightarrow V$.

Per entendre'm millor, ho representaré mitjançant un diagrama de morfismes de grups, de manera que H sigui en el centre i aleshores es podrà veure més visualment el que estem fent. El diagrama funcionarà de la següent manera:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & G_1 \\ G_2 & \end{tikzcd}$$

Haurem de tenir en compte que α i β són morfismes de grups i que, com a tal, han de satisfer les seves propietats; entre elles que envien el neutre al neutre.

Exemple 12.6.13. (a) Sigui $G_1 = \langle a|\rangle \cong \mathbb{Z}$ i sigui $G_2 = \langle|\rangle \cong 0$ el grup trivial. Siguin

$$\begin{array}{rl} \alpha : \mathbb{Z} & \longrightarrow \mathbb{Z} \\ 1 & \longmapsto 1 \end{array}, \quad \begin{array}{rl} \beta : \mathbb{Z} & \longrightarrow 0 = 1 \\ 1 & \longmapsto 0 \end{array}$$

i amb això se sobreentén que $H = \mathbb{Z} = \langle c\rangle$. Amb això, el nostre diagrama és

$$\begin{tikzcd} H = \langle c\rangle \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & G_1 = \langle a\rangle \\ G_2 = \{1\} & \end{tikzcd}$$

i, per tant, $\beta(c) = 1$ per tota $c \in H$. Així doncs, les relacions d'amalgament serien $\alpha(c) = \beta(c) = 1$, és a dir, $\alpha(c) = 1$. Però $\alpha(c) = a$ i per tant, les relacions són $a = 1$. Així doncs, $G_1 \underset{H}{*} G_2 = \langle a \ : \ a = 1\rangle = \{1\}$ el grup trivial[3].

(b) Si $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $1 \mapsto 2$, aleshores $\mathbb{Z} \underset{\mathbb{Z}}{*} 1 \cong \langle a \mid a^2 = 1\rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(c) Si $G_1 = \mathbb{Z}$ i $G_2 = \mathbb{Z}$ amb $\alpha(z) = z^2$, $\beta(z) = z^3$, aleshores

$$G_1 \underset{G_3}{*} G_2 = \langle a, b \mid a^2b^{-3}\rangle$$

Exemple 12.6.14. Per exemple, considerem els grups

$$G_1 = \langle x \ : \ x^2 = 1\rangle, \quad G_2 = \langle a, b \ : \ ab = ba\rangle, \quad H = \langle y \ : \ \rangle;$$

i considerem $f_1 : H \to G_1$, $f_1(y) = x$ i $f_2 : H \to G_2$, $f_2(y) = ab$. Llavors, el producte lliure de G_1 per G_2 amalgamat per H amb f_1 i f_2 és

$$\begin{aligned} G_1 *_H G_2 &= \langle x, a, b \ : \ x^2 = 1,\ ab = ba,\ \{f_1(h) = f_2(h) \ : \ h \in H\}\rangle = \\ &= \langle x, a, b \ : \ x^2 = 1,\ ab = ba,\ \{x = ab,\ x^2 = (ab)^2, \ldots\}\rangle = \\ &= \langle x, a, b \ : \ x^2 = 1,\ ab = ba,\ x = ab\rangle \end{aligned}$$

12.6.3 Enunciat i demostració del teorema

Teorema 12.6.15 (Seifert-Van Kampen)**.** *Sigui X un espai topològic i siguin U, V dos oberts arc-connexos de X tals que $X = U \cup V$ amb $U \cap V$ arc-connex i no buit. Sigui x_0 un punt qualsevol de $U \cap V$ i suposem que $\pi(U, x_0) \cong \langle a_1, \cdots, a_n \mid r_1, \ldots, r_k\rangle$ i que $\pi(V, x_0) \cong \langle b_1, \ldots, b_m \mid s_1, \ldots, s_\ell\rangle$. Siguin $c_1, \ldots, c_p$ un conjunt de generadors de $\pi(U \cap V, x_0)$. Llavors*

$$\pi(X, x_0) \cong \langle a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \mid r_1, \ldots, r_k, s_1, \ldots, s_\ell, \alpha(c_1)\beta(c_1)^{-1}, \ldots, \alpha(c_p)\beta(c_p)^{-1}\rangle,$$

on $\alpha : \pi(U \cap V, x_0) \to \pi(U, x_0)$ i $\beta : \pi(U \cap V, x_0) \to \pi(V, x_0)$.

[3] Notem que el grup trivial el denotem indistintament 0 o 1 però en realitat depèn de si l'operació del grup és additiva o és multiplicativa.

Demostració. Copiaré exactament la demostració dels apunts del Dr. Casacuberta, ja que està prou detallada.

Siguin U i V dos oberts arc-connexos d'un espai X tals que $U \cup V = X$ i tals que $U \cap V$ és arc-connexa i no buida. Escollim un punt base $x_0 \in U \cap V$. Denotarem per $\varphi : \pi(U, x_0) \to \pi(X, x_0)$, $\psi : \pi(V, x_0) \to \pi(X, x_0)$, $\alpha : \pi(U \cap V, x_0) \to \pi(U, x_0)$ i $\beta : \pi(U \cap V, x_0) \to \pi(V, x_0)$ els morfismes induïts per les inclusions. Observem que $\varphi \circ \alpha = \psi \circ \beta$, ja que tots dos són induïts per la inclusió de $U \cap V$ en X.

Sigui $\sigma : I \to X$ un camí tancat amb $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$. De manera anàloga a com es va fer en la demostració del teorema d'elevació de camins de S^1 a $\mathbb{R}$, podem escollir un conjunt finit de punts $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$ a I de manera que $\sigma([t_{i-1}, t_i]) \subset U$ o bé $\sigma([t_{i-1}, t_i]) \subset V$ per a tot $i \in \{1, \ldots, n\}$. Més concretament, per aconseguir això, prenem per a cada $t \in I$ un interval obert B_t centrat a t i tal que $\sigma(B_t)$ estigui continguda a U o a V; per la compacitat de I, podem triar un nombre finit d'aquests intervals de manera que recobreixin I; llavors prenem n tal que $1/n$ sigui menor que el diàmetre de totes les interseccions no buides dels intervals escollits entre ells, i fem $t_i = i/n$.

Diem $x_i = \sigma(t_i)$ per a cada i. Podem suposar que $x_i \in U \cap V$ per a tot i, ja que, en cas contrari, podríem unir $[t_{i-1}, t_i]$ amb $[t_i, t_{i+1}]$ i suprimir el punt t_i del conjunt que hem escollit al principi.

Com que $U \cap V$ és arc-connexa, per a cada punt x_i podem escollir un camí γ_i a $U \cap V$ de x_0 a x_i, on $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Diem σ_i a la restricció de σ a l'interval $[t_{i-1}, t_i]$ per a cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, reparametritzada per tal que tingui l'interval I com a domini; és a dir, $\sigma_i(s) = \sigma((1-s)t_{i-1} + st_i)$ amb $0 \le s \le 1$. Llavors

$$[\sigma] = [\sigma_1 * \overline{\gamma}_1] \cdot [\gamma_1 * \sigma_2 * \overline{\gamma}_2] \cdot [\gamma_2 * \sigma_3 * \overline{\gamma}_3] \cdots [\gamma_{n-1} * \sigma_n]$$

i cadascun d'aquests factors és un element de $\varphi(\pi(U, x_0))$ o bé de $\psi(\pi(V, x_0))$. Això demostra que $\pi(X, x_0)$ està generat per les imatges de φ i ψ. Per tant, si $\{a_1, \ldots, a_n\}$ és un conjunt de generadors de $\pi(U, x_0)$ i $\{b_1, \ldots, b_m\}$ ho és de $\pi(V, x_0)$, llavors $\{\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n), \psi(b_1), \ldots, \psi(b_m)\}$ és un conjunt de generadors de $\pi(X, x_0)$, que escrivim com a $\{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}$ per abús de notació. A més, totes les relacions de $\pi(U, x_0)$ i $\pi(V, x_0)$ són relacions a $\pi(X, x_0)$, ja que φ i ψ són morfismes de grups.

D'altra banda, com que $\varphi \circ \alpha = \psi \circ \beta$, tenim que, si $c_1, \ldots, c_n$ són generadors de $\pi(U \cap V, x_0)$, es compleix que $\varphi(\alpha(c_j)) = \psi(\beta(c_j))$ per a tot $j \in \{1, \ldots, p\}$. Per tant, $\alpha(c_j)\beta(c_j)^{-1}$ són relacions a $\pi(X, x_0)$. Per acabar la demostració, només falta veure que tota relació a $\pi(X, x_0)$ és un producte de les relacions que ja hem considerat.

Suposem que $A_1^{\varepsilon_1} A_2^{\varepsilon_2} \cdots A_r^{\varepsilon_r}$ és una relació a $\pi(X, x_0)$, on $A_k = a_{i_k}$ o bé $A_k = b_{i_k}$ per a cada $k \in \{1, \ldots, r\}$, i on cada exponent ε_k és 1 o bé -1 (podem aconseguir això posant, per exemple, AAA en comptes de A^3). Llavors, per a cada k, escollim un camí tancat ω_k amb origen i final x_0 tal que $[\omega_k] = A_k$ i que estigui contingut a U si $A_k = a_{i_k}$ o bé a V si $A_k = b_{i_k}$. Diem ω a la composició $\omega_1^{\varepsilon_1} * \cdots \omega_r^{\varepsilon_r}$, on ω_k^{-1} vol dir el camí invers $\overline{\omega}_k$. Aquest camí ω és contràctil a X, ja que $[\omega] = A_1^{\varepsilon_1} A_2^{\varepsilon_2} \cdots A_r^{\varepsilon_r}$ i estem suposant precisament que $A_1^{\varepsilon_1} A_2^{\varepsilon_2} \cdots A_r^{\varepsilon_r} = 1$ a $\pi(X, x_0)$.

Escollim una homotopia (relativa als extrems) $H : I \times I \to X$ de ω al camí constant en punt x_0. Podem dividir el quadrat $I \times I$ en quadradets prou petits per tal que la imatge per H de cadascun d'ells quedi a dins de U o bé a dins de V (de manera anàloga a com ho hem fet amb I en la primera part). Per a cada vèrtex v de cadascun d'aquests quadradets, escollim un camí γ_v de x_0 a $H(v)$ contingut a U si $H(v) \in U$, contingut a V si $H(v) \in V$, i contingut a $U \cap V$ si $H(v) \in U \cap V$ (aquí fem servir la hipòtesi que $U, V, U \cap V$ són arc-connexos). Escollim sempre γ_v constant a x_0 en cas que $H(v) = x_0$. D'aquesta manera podem descompondre $[\omega]$ com un producte $[\tau_1] \cdots [\tau_N]$ on cada llaç τ_j és la imatge d'un segment $[t_{j-1}, t_j]$ de la base del quadrat $I \times I$, entenent que anem i tornem per $\gamma_{t_{j-1}}$ i $\overline{\gamma}_{t_j}$ respectivament.

Per a cada quadradet de la subdivisió de $I \times I$, si anomenem ϕ_1, ϕ_2 als camins definits pels costats inferior i superior respectivament, i ψ_1, ψ_2 als camins definits pels costats esquerre i dret respectivament, tenim que

$\phi_1 * \psi_1 \simeq \psi_2 * \phi_2$ a U o bé a V. Per tant, $[\phi_1] = [\psi_1][\phi_2][\psi_2]^{-1}$ a $\pi(U, x_0)$ o bé a $\pi(V, x_0)$, i aquesta igualtat ens dóna una relació $[\psi_1][\phi_2][\psi_2]^{-1}[\phi_1]^{-1}$ a $\pi(U, x_0)$ o bé a $\pi(V, x_0)$.

En cas que dos quadradets amb un costat comú s'apliquin l'un a U i l'altre a V, el camí η definit pel costat comú estarà contingut a $U \cap V$ i per tant els elements $\alpha([\eta])$ de $\pi(U, x_0)$ i $\beta([\eta])$ de $\pi(V, x_0)$ s'aplicaran a un mateix element de $\pi(X, x_0)$. Això donarà una relació de la forma $\alpha(c)\beta(c)^{-1}$ amb $c \in \pi(U \cap V, x_0)$.

En definitiva, si $\eta_1, \ldots, \eta_q$ és el conjunt de tots els camins definits per costats comuns de parells de quadradets veïns a $I \times I$ que s'apliquen l'un a U i l'altre a V, llavors $[\tau_1], \ldots, [\tau_N]$ es podrà expressar com el producte de les relacions

$$\alpha([\eta_1])\beta([\eta_1])^{-1}, \ldots, \alpha([\eta_q])\beta([\eta_q])^{-1}$$

juntament amb les relacions a $\pi(U, x_0)$ i a $\pi(V, x_0)$ intercalades. Encara més: les relacions $\alpha(c)\beta(c)^{-1}$ amb $c \in \pi(U \cap V, x_0)$ es deriven totes de les relacions corresponents a un conjunt $\{c_1, \ldots, c_p\}$ de generadors de $\pi(U \cap V, x_0)$ mitjançant productes i conjugacions, ja que

$$\begin{aligned} \alpha(c_i c_j)\beta(c_i c_j)^{-1} &= \alpha(c_i)\alpha(c_j)\beta(c_j)^{-1}\beta(c_i)^{-1} \\ &= (\alpha(c_i)\beta(c_i)^{-1})(\alpha(c_j)\beta(c_j)^{-1})\beta(c_i)^{-1}. \end{aligned}$$

□

12.6.4 Conseqüències i exemples

A continuació escriuré alguns exemples extrets dels apunts de l'alumne Guillem Sedó i Torres, que va realitzar-los quan va cursar l'assignatura, la primavera de 2019, amb el professor Ricardo García, juntament amb alguns exemples trets de [**youtubejonathanevans**] i [**youtubematneth**].

Exemple 12.6.16. Comencem amb un exemple fàcil: calculem el grup fonamental de l'esfera S^2. Prenem com a U el conjunt que cobreix l'hemisferi nord i una mica del sud, com a V la part que cobreix tot l'hemisferi sud i una mica del nord, i aleshores $U \cap V$ correspondrà a una banda horitzontal al voltant de l'Equador. Com a punt base podem prendre qualsevol punt de l'Equador. Calculem ara els grups fonamentals. Clarament, U i V es contrauen a un punt i aleshores $\pi(U, x_0) \cong \pi(V, x_0) \cong \{1\}$. Ara observem que la corona que representa $U \cap V$ es pot contraure a només l'Equador, és a dir, S^1. Per tant, $\pi(U \cap V, x_0) \cong \pi(S^1) \cong \mathbb{Z} = \langle c \rangle$. Vegem quines són les relacions i els generadors.

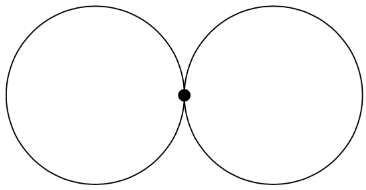
Tant el grup fonamental de U com el de V no tenen ni generadors ni relacions, per tant $\pi(X, x_0)$ no tindrà generadors. Les úniques relacions possibles són les relacions d'amalgament. Però observem que el diagrama dels morfismes induïts per les inclusions és el següent:

$$\begin{tikzcd} \pi(U \cap V, x_0) \cong \langle c \rangle \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "\iota_2"] & \pi(U, x_0) \cong \{1\} \\ \pi(V, x_0) \cong \{1\} & \end{tikzcd}$$

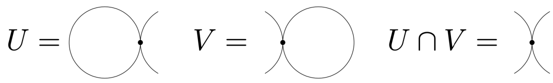
i que per tant, ha de ser $\forall c \in \pi(U \cap V, x_0)$, $\iota_1(c) = \iota_2(c) = 1$ perquè són morfismes i envien el neutre al neutre. Per tant, no tenim relacions. Així doncs, el grup que obtenim és el trivial, és a dir,

$$\pi(S^2, x_0) \cong \{1\}$$

Exemple 12.6.17. Una aplicació força immediata del teorema de Seifert-Van Kampen (**??**) és calcular el grup fonamental de la unió puntual de dues circumferències:



Ara hem d'agafar els oberts U i V i el punt x_0 serà el punt d'intersecció de les dues circumferències.



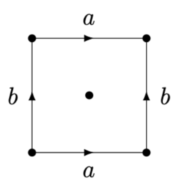
Veiem que, efectivament, U i V són arc-connexos i que $X = U \cap V$. Ara hem de calcular tots els grups fonamentals. Observem que tant U com V són homotòpicament equivalents a S^1 i per tant, $\pi(U, x_0) \cong \mathbb{Z} = \langle a \rangle$ i $\pi(V, x_0) \cong \mathbb{Z} = \langle b \rangle$. Finalment, $U \cap V$ és homeomorf a un punt, és a dir, és contràctil. Per tant, $\pi(U \cap V, x_0) \cong \{1\}$. Tenim, doncs, el següent diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\pi(U \cap V, x_0) \cong \{1\} \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "\iota_2"] & \pi(U, x_0) \cong \langle a \rangle \\
\pi(V, x_0) \cong \langle b \rangle &
\end{tikzcd}$$

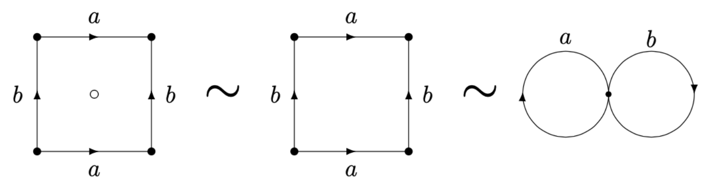
i aleshores, $\pi(X, x_0)$ tindrà com a generadors els generadors de $\pi(U, x_0)$ i de $\pi(V, x_0)$, és a dir, a i b; i com a relacions les relacions de $\pi(U, x_0)$, $\pi(V, x_0)$ i les relacions d'amalgament, que són $\iota_1(c) = \iota_2(c)$. Com que $\pi(U, x_0)$ i $\pi(V, x_0)$ no tenen relacions, només ens quedarem amb les relacions d'amalgament. Com que $\pi(U \cap V, x_0) \cong \{1\}$, ι_1 i ι_2 només poden tenir imatges de 1 i com que són morfismes, ha de ser $\iota_1(1) = \iota_2(1) = 1$, ergo, no hi ha relacions d'amalgament tampoc. Aleshores, només ens quedem amb els generadors i el que obtenim és un grup amb dos generadors i cap relació, és a dir, un grup lliure d'ordre 2:

$$\pi(X, x_0) \cong \langle a, b \rangle \cong F_2$$

Exemple 12.6.18. Un altre grup fonamental que podem calcular a través del teorema de Seifert-Van Kampen és el del tor. Comencem representant el tor a partir d'un quadrat amb els seus costats. El punt centre l'anomenarem x_0.



Si agafem els oberts següents: U un disc obert que conté el punt x_0 i $V = \mathbb{T}^2 \setminus \{x_0\}$, aleshores $\mathbb{T}^2 = U \cup V$ i $U \cap V = U \setminus \{x_0\}$, que és un disc obert sense un punt (i per tant és un obert). Ara calculem els seus grups fonamentals. Sigui $p \neq x_0$ un punt de l'interior del disc obert; aleshores $\pi(U, p) = \{1\}$ perquè U és contràctil, per ser homeomorf a $\mathbb{D}^2$. Sigui q el vèrtex de la representació del tor, observem que V es pot retraure al contorn de la representació[4], és a dir que



Per tant, recuperant l'exemple anterior, obtenim que $\pi(V, x_0) \cong \langle a, b\rangle$. Finalment, $U \cap V$ és clarament homeomorf a S^1 i per tant, $\pi(U \cap V, x_0) \cong \pi(S^1) \cong \mathbb{Z} = \langle c\rangle$. El diagrama d'inclusions queda així:

$$\begin{tikzcd}
\pi(U \cap V, x_0) \cong \langle c\rangle \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "\iota_2"] & \pi(U, x_0) \cong \{1\} \\
\pi(V, x_0) \cong \langle a, b\rangle &
\end{tikzcd}$$

aleshores $\iota_1(c) = 1$, $\forall c \in \mathbb{Z}$ ja que ha d'enviar el neutre al neutre i la seva única imatge és el neutre. D'altra banda, ι_2 ens dóna una mica més de problemes. Observem quina és la imatge de $\iota_2(c)$, per a $c \in \mathbb{Z}$. Aquesta inclusió és el camí que recorre, des del vèrtex inferior esquerre, tota la vora del quadrat en sentit antihorari. Això és $\iota_2(c) = aba^{-1}b^{-1}$. Per tant, com que les relacions d'amalgament són $\iota_1(c) = \iota_2(c)$, $\forall c \in \pi(U \cap V, x_0)$, obtenim les relacions $aba^{-1}b^{-1} = 1$, és a dir, $ab = ba$. Tenim doncs,

$$\pi(X, x_0) = \pi(\mathbb{T}^2, x_0) \cong \langle a, b \ : \ ab = ba\rangle = \langle a, b \ : \ aba^{-1}b^{-1}\rangle$$

és el grup lliure abelià generat per 2 elements, que és isomorf a $\mathbb{Z}^2$. Nota. La primera manera d'escriure el grup és la que jo utilitzaria. No obstant, se sol utilitzar la segona manera, ja que així s'indica la paraula que genera el grup. S'omet posar $aba^{-1}b^{-1} = 1$ i es posa directament la paraula només.

[4]És una mica difícil de veure-ho, però la idea és que ara tenim el quadrat "buit" i aleshores identifiquem igualment els costats segons les fletxes, de manera que es generen com dos filferros. Primer identifiquem a, aleshores tenim que les dues b formen dues circumferències de filferro unides pel filferro recte resultant d'ajuntar els dos costats a. Seguidament, identifiquem les dues circumferències de filferro b que aleshores s'ajunten fent coincidir el punt amb el qual estaven unides a a. D'aquesta manera queden dues circumferències de filferro unides, que podem moure per posar-les "al mateix plà" i obtenir així $S^1 \vee S^1$.

Capítol 13

Superfícies topològiques

Aquest capítol estarà basat essencialment en els apunts que penja el professor cada setmana al Campus Virtual. Tot i així, com són bastant poc detallats, per dir-ho d'alguna manera, prendré també una font que m'ha sigut molt útils. Aquests són uns apunts del Jaume Aguadé [**aguade**] que vaig trobar a partir de la pàgina web de l'Irene Llerena, anomenada "Topología para usuarios" [**topologiaparausuarios**] (en castellà).

13.1 Varietats topològiques

Si comparem espais com puguin ser l'esfera, el tor o l'espai projectiu amb espais com el conjunt de Cantor, un espai groller o l'espai $\mathbb{Q}$, veiem que els primers tenen en comú que, a *petita escala*, són indistingibles a l'espai euclidià $\mathbb{R}^n$. Els espais que tenen la propietat d'assemblar-se "localment" a l'espai euclidià tenen una enorme importància. Reben el nom de *varietats*[1] o, si volem evitar la confusió amb altres tipus de varietats, *varietats topològiques*.

13.1.1 El concepte de varietat topològica

Definició 13.1.1 (Varietat topològica)**.** Una *varietat topològica* de dimensió n és un espai topològic X que satisfà:

(i) X és de Hausdorff o T_2;

(ii) X admet una base numerable d'oberts;

(iii) Cada punt de X té algun entorn homeomorf a $\mathbb{R}^n$.

La darrera condició és equivalent a imposar que cada punt $p \in X$ tingui un entorn homeomorf a un subespai obert de $\mathbb{R}^n$, ja que si $p \in W$ i hi ha un homeomorfisme $f : W \to V$, amb $V \subseteq \mathbb{R}^n$ obert, llavors podem prendre un obert U de X amb $p \in U \subseteq W$ i una bola oberta B de $\mathbb{R}^n$ tal que $f(p) \in B \subseteq f(U)$; aleshores $f^{-1}(B)$ és un entorn obert de p homeomorf a $\mathbb{R}^n$.

Vegem-ne un exemple per aclarir el concepte. La Terra no és plana (s'assimila a l'esfera S^2 que no és homeomorfa al pla $\mathbb{R}^2$) però a cada punt de la terra podem dibuixar un "mapa" (que anomenarem *carta local*[2]) que ens doni un homeomorfisme entre un entorn d'aquest punt de la Terra i un obert de $\mathbb{R}^2$. Després podem construir un *atles*, que serà un conjunt de cartes locals que cobreixin tota a Terra[3]. Aquests conceptes

[1] En anglès, aquests objectes que estudiarem ara s'anomenen *manifolds*. En aquest punt tenim un petit dèficit de lèxic respecte de l'anglès perquè les dues paraules angleses *variety* i *manifold* corresponen a una única paraula en català.

[2] En francès, la paraula mapa es tradueix com *carte*, i en italià *carta*.

[3] Un atles és un conjunt de mapes, com un llibre que conté tots els mapes.

tenen sentit en una varietat qualsevol. Ara vegem-ne les definicions rigoroses.

Definició 13.1.2 (Carta local). Si M és una varietat topològica de dimensió n, una *carta local* a M és un parell (U, φ) on U és un obert de M i φ és un homeomorfisme de U en un obert de $\mathbb{R}^n$. Llavors φ es denota per $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$, on cada x_i és una aplicació

$$x_i : U \to \mathbb{R}$$

Aquestes aplicacions s'anomenen *coordenades locals*.

Definició 13.1.3 (Canvi de coordenades). Si (U_1, φ_1) i (U_2, φ_2) són dues cartes locals i $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, llavors l'homeomorfisme $\phi : (U_1, \varphi_1) \to (U_2, \varphi_2)$ definit com $\phi(x) = \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x))$ s'anomena *aplicació canvi de coordenades.*

Definició 13.1.4 (Atles). Una col·lecció de cartes locals $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ tals que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = M$ s'anomena *atles.*

Definició 13.1.5 (Varietat topològica amb vora). Una *varietat topològica de dimensió n amb vora* és un espai de Hausdorff M que admet una base d'oberts numerable i tal que cada punt de M té algun entorn homeomorf a un subespai obert de $\mathbb{R}^n_+ = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ a_n \geq 0\}$. Anomenem *interior* de M al subespai format pels punts $p \in M$ que tenen algun entorn homeomorf a $\mathbb{R}^n$ i *vora* de M al subespai complementari. Llavors, l'interior de M és una varietat de dimensió n i la vora de M, que es denota per ∂M, és una varietat de dimensió $n - 1$.

Definició 13.1.6 (Varietat tancada). Una varietat (topològica) es diu *tancada* si és compacta i sense vora. Adoptarem el conveni que "varietat", sense especificar, vol dir "varietat sense vora".

Exemple 13.1.7 (Exemples de varietats topològiques). Vegem-ne alguns exemples.

(1) Tot espai discret és una varietat de dimensió zero.

(2) $\mathbb{R}^n$ és una varietat de dimensió n. Ara bé, no som encara capaços de demostrar que $\mathbb{R}^n$ no sigui una varietat de dimensió m, per algun $m \neq n$.

(3) Un obert de $\mathbb{R}^n$ és una varietat de dimensió n. Més en general, un obert d'una varietat de dimensió n és una varietat de dimensió n també.

(4) L'esfera S^n és una varietat compacta de dimensió n i té un atles amb dues cartes locals. La projecció estereogràfica ens demostra que el complement d'un punt a S^n és homeomorf a $\mathbb{R}^n$. Per tant, tot punt de S^n té un entorn homeomorf a $\mathbb{R}^n$.

(5) Si N és una varietat de dimensió n i M n'és una altra de dimensió m, llavors $N \times M$ és una varietat de dimensió $n + m$. En particular, el tor $S^1 \times S^1$ és una varietat compacta de dimensió 2.

(6) L'espai projectiu $\mathbb{R}P^n$ és una varietat de dimensió n. La demostració és senzilla. Recordem que

$$\mathbb{R}P^n = S^n \setminus \{-v \sim v\}.$$

Donat $[x] \in \mathbb{R}P^n$, sigui $U := B(x, \varepsilon)$ una bola de S^n de radi prou petit perquè no hi hagi dos punts de U que siguin diametralment oposats (o sigui antipodals). Recordem que la projecció $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ és oberta i tancada. Aleshores, la imatge de U a $\mathbb{R}P^n$ és un obert homeomorf a U i, per tant, a $\mathbb{R}^n$.

13.1.2 Varietats amb vora

Fem un petit incís en les varietats amb vora.

Observació 13.1.8. *Considerem* $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_n \geq 0\}$*. Aquest espai no és homeomorf a* $\mathbb{R}^n$*, encara que ho pugui semblar.*

Demostració. Anem a suposar que existeix un homeomorfisme $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n$ i arribem a una contradicció. Escollim el punt $O = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n_+$. Llavors f es restringeix a un homeomorfisme $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{p\} \simeq \mathbb{R}^n_+ \setminus \{f(p)\}$. Però $\mathbb{R}^n \setminus \{f(p)\} \simeq S^{n-1}$ i en canvi $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{p\}$ és contràctil.

Anem a demostrar que $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{p\}$ és contràctil. Observem que és homotòpicament equivalent a $\mathbb{R}^n_+ \setminus B$ per retracció radial, on B és una bola oberta de centre p. Aleshores, l'espai $\mathbb{R}^n_+ \setminus B$ és homeomorf a $\mathbb{R}^n_+$ que és contràctil. □

Proposició 13.1.9. *Considerem el subespai* $A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_n = 0\}$*. Aleshores* $A = \partial \mathbb{R}^n_+$*.*

Demostració. Comprovem primer que $\partial \mathbb{R}^n_+ \subseteq A$. Sigui $p \in \partial \mathbb{R}^n_+$ i posem $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Si $p_n > 0$, llavors existeix una petita bola oberta centrada al punt p i continguda a l'interior de $\mathbb{R}^n_+$. Això ens diu que p té un entorn homeomorf a $\mathbb{R}^n$, contràriament a la hipòtesi que $p \in \partial \mathbb{R}^n_+$. Per tant, $p_n = 0$ i això implica que $p \in A$.

Anem a demostrar la inclusió contrària. Si $q \in A$ té algun entorn obert U homeomorf a $\mathbb{R}^n$, llavors repetim el mateix raonament de l'anterior observació (**??**). Considerem un homeomorfisme $f : U \to \mathbb{R}^n$, que es restringeix a un homeomorfisme $U \setminus \{q\} \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{f(q)\}$, i observem que $U \setminus \{q\} \simeq U \setminus B \simeq U$ (equivalència homotòpica), on B és una petita bola centrada a q i continguda a U. Amb aquesta contradicció hem demostrat que $A \subseteq \partial \mathbb{R}^n_+$, tal com volíem. □

Sigui M una varietat amb vora tal que $\dim M = n$. Suposem que $n \geq 1$. Llavors l'interior de M està format pels punts de M que tenen algun entorn homeomorf a $\mathbb{R}^n$ i, per tant, l'interior de M és una varietat topològica de dimensió n per definició.

Ara bé, què és la vora de M, ∂M? Anem a veure que és una varietat de dimensió $n - 1$.

Proposició 13.1.10. *Sigui M una varietat de dimensió $n \geq 1$. Aleshores ∂M és una varietat de dimensió $n - 1$.*

Demostració. Prenem un punt $p \in \partial M$. Escollim un entorn obert U de p a M amb un homeomorfisme $f : U \to V$ on V és un obert de $\mathbb{R}^n_+$. Llavors $f(p) \in \partial \mathbb{R}^n_+$, ja que en cas contrari hi hauria una bola oberta B a $\mathbb{R}^n$ tal que $f(p) \in B \subseteq V$ i llavors les relacions $p \in f^{-1}(B) \subseteq U$ contradirien el fet que $p \in \partial M$. Aleshores, $f(p) \in V \cap \partial \mathbb{R}^n_+$. Observem que $V \cap \partial \mathbb{R}^n_+$ es correspon amb un obert de $\mathbb{R}^{n-1}$ a través de l'homeomorfisme natural $\partial \mathbb{R}^n_+ \simeq \mathbb{R}^{n-1}$. Llavors, $f^{-1}(V \cap \partial \mathbb{R}^n_+)$ és un entorn obert de p a ∂M que és homeomorf a un obert de $\mathbb{R}^{n-1}$. □

Finalment, recordem que si $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^m$, on $\simeq$ indica aquí un homeomorfisme, aleshores teníem que $n = m$. Veurem ara que dues varietats topològiques amb vora que siguin homeomorfes (és a dir, tals que existeixi un homeomorfisme d'una a l'altra) tindran la mateixa dimensió.

Proposició 13.1.11. *Sigui $f : M \to N$ un homeomorfisme entre varietats amb vora M i N. Llavors* $\dim M = \dim N$*.*

Demostració. Considerem l'homeomorfisme $f : M \to N$ que, en particular, és un homeomorfisme local. Sigui $p \in \partial M$. Si $f(p)$ tingués un entorn obert W homeomorf a $\mathbb{R}^n$, llavors $f^{-1}(W)$ seria un entorn obert de p homeomorf a $\mathbb{R}^n$. Per tant, $f(p) \in \partial N$. Per simetria, tot punt de ∂N és a la imatge d'algun punt de ∂M. Per tant, f es restringeix a un homeomorfisme $\partial M \simeq \partial N$ i aleshores els seus complementaris també són homeomorfs, és a dir, l'interior de M és homeomorf a l'interior de N. □

13.1.3 Varietats connexes

Evidentment, una varietat pot ser connexa o no ser-ho. Si M i N són varietats, és clar que la unió no-connexa $M \sqcup N$ és també una varietat i no és connexa. El teorema següent ens diu que si coneixem les varietats connexes, ja coneixem totes les varietats[4].

Teorema 13.1.12. *Sigui M una varietat de dimensió n i siguin M_i, $i \in I$, els seus components connexos.*

(1) Els M_i són oberts de M.

(2) I és numerable. Si M és compacta, I és finit.

(3) Cada M_i és una varietat de dimensió n.

(4) M és la unió no-connexa dels seus components connexos: $M = \bigsqcup_{i \in I} M_i$.

Demostració. Cada punt de M té un entorn homeomorf a $\mathbb{R}^n$. Per tant, cada punt de M té un entorn connex. Això implica immediatament que cada M_i és obert. Com que un obert d'una varietat és una varietat, tenim que cada M_i és una varietat. La quarta condició és certa per a tot espai en què els components connexos siguin oberts. Si I no fos numerable, M no podria tenir una base numerable d'oberts. Si I és infinit, és evident que M no pot ser compacta. □

En conclusió, tota varietat és unió no-connexa numerable de varietats connexes. A partir d'ara, doncs, només ens preocuparem per les varietats connexes.

13.1.4 Varietats de dimensió 1

Essencialment, només hi ha dues varietats connexes de dimensió 1: la recta i la circumferència. Aquestes són diferents ja que una és compacta i l'altra no. Veurem, doncs, que qualsevol varietat de dimensió 1 serà homeomorfa a una d'aquestes dues.

Teorema 13.1.13. *Si M és una varietat connexa de dimensió 1, aleshores $M \simeq \mathbb{R}$ o bé $M \simeq S^1$, on $\simeq$ indica homeomorfisme.*

Demostració. La farem en diverses etapes.

- Evidentment, si M es pot recobrir amb una única carta local, aleshores, $M \simeq \mathbb{R}$ i hem acabat.

[4] Per entendre millor el teorema que ve a continuació, recordem que tot espai és la unió disjunta dels seus components connexos, però no tot espai és unió no-connexa dels seus components connexos. Per exemple, els components connexos de $\mathbb{Q}$ són els punts, però una unió no-connexa de punts és un espai discret i $\mathbb{Q}$ no ho és. Aquest fenomen també es pot donar en espais compactes: els components connexos del conjunt de cantor $\mathcal{C}$ (que és compacte) són els punts, però $\mathcal{C}$ no és discret. El que diu el teorema és que aquesta situació no es pot donar a les varietats topològiques.

- El pas clau de la demostració és entendre què passa si M es pot recobrir amb dues cartes locals.

  Suposem que $M = U \cup V$, on $U, V \subsetneq M$ són oberts de M, cadascun d'ells homeomorf a $\mathbb{R}$ a través dels homeomorfismes següents:
  $$\phi : U \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}, \qquad \psi : V \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}.$$

  Com que M és connexa, aquests dos oberts no poden ser disjunts. Considerem
  $$A := \phi(U \cap V) \subset \mathbb{R}$$
  que és un obert de $\mathbb{R}$ i, per tant, una varietat de dimensió 1. Pel teorema (**??**), els seus components connexos són oberts connexos de $\mathbb{R}$, és a dir, intervals oberts. El pas següent consisteix en veure que aquests intervals no poden ser acotats.

  Suposem que, per exemple, A tingués un component connex de la forma (a, b), amb $a, b \in \mathbb{R}$. Considerem
  $$\phi^{-1}(a, b) \subset U \cap V \subset V$$
  i $\phi^{-1}([a, b])$ és tancat de M perquè és compacte. Com que $\phi^{-1}(a, b)$ és un obert i tancat de $V \simeq \mathbb{R}$, tenim que $\phi^{-1}(a, b) = V$ i això implica que $V \subset U$ i $U = M$, contradicció.

  Hem vist que els components connexos de A són intervals no acotats (diferents de tota la recta $\mathbb{R}$). Com que els components connexos han de ser disjunts, això només és possible en dos casos:

  i. A és connex de la forma $(-\infty, a)$ o bé $(a, +\infty)$, per algun $a \in \mathbb{R}$, o bé

  ii. A és de la forma $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, per uns certs $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $a < b$.

  Com que $B := \psi(U \cap V) \simeq \phi(U \cap V) = A$, el mateix podem dir de B.

  Ara, és relativament senzill en el primer cas construir un homeomorfisme $M \simeq \mathbb{R}$ i en el segon cas construir un homeomorfisme $M \simeq S^1$. Deixem aquests detalls com exercici.

- Suposem ara que M es pot recobrir amb un nombre finit de cartes locals $U_1, \ldots, U_n$. Demostrem el teorema per inducció sobre n. Si $n = 1$ és trivial. Si $n = 2$ és el que hem fet fins ara. Apliquem el teorema a $M' := U_1 \cup \cdots \cup U_{n-1}$. Si $M' \simeq \mathbb{R}$, tenim que M' és una carta local de M i M es pot recobrir per dues cartes locals. Si $M' \simeq S^1$, aleshores M' és compacte, per tant, és tancat a M com que també és obert, tindrem $M = M' \simeq S^1$ i hem acabat.

- Ens quedaria el cas general en què M no es pot recobrir amb un nombre finit de cartes locals. En primer lloc, és fàcil adonar-se que el segon axioma de numerabilitat implica que M es pot recobrir amb una quantitat numerable de cartes locals, és a dir,
  $$M = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup \cdots$$
  Pel raonament del punt anterior, $\forall n > 1$ tenim
  $$V_n := U_1 \cup \cdots \cup U_n \simeq \mathbb{R} \simeq (0, 1)$$
  i és senzill "enganxar" tots aquests homeomorfismes per obtenir un homeomorfisme $M \simeq \mathbb{R}$.

$\square$

13.2 Superfícies topològiques

Aquest capítol rep el títol de "Superfícies topològiques" però fins ara no n'hem parlat. En realitat, és perquè una superfície topològica no és més que una varietat topològica de dimensió 2. És per això, que he cregut convenient fer primer una secció que expliqués el concepte de varietat topològica en general, per després reduir a dimensió 2 i centrar-nos en les superfícies topològiques.

Definició 13.2.1 (Superfície topològica)**.** Una *superfície topològica* és una varietat topològica de dimensió 2. És a dir, és un espai topològic que verifica el segon axioma de numerabilitat, que és de Hausdorff i que localment és homeomorf a $\mathbb{R}^2$.

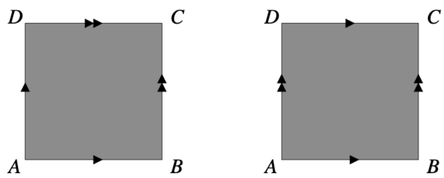
De vegades, per simplificació i per abús del llenguatge, direm només "superfície" per referir-nos a "superfície topològica", sempre i quan no doni pas a una confusió amb superfícies d'altra naturalesa.

Exemple 13.2.2. El pla $\mathbb{R}^2$ n'és l'exemple més elemental de superfície topològica. Vegem-ne d'altres.

(1) Les quàdriques no degenerades de $\mathbb{R}^3$ com els el·lipsoides, els cilindres, els hiperboloides, etc. en són altres exemples clàssics.

(2) Entre les superfícies compactes, l'esfera i el tor són les més elementals. Ambdues superfícies es poden obtenir a partir d'un polígon del pla (concretament $[0,1] \times [0,1]$ si fem algunes transformacions) per identificació d'arestes.

En efecte, si considerem un quadrat de vèrtexs $ABCD$, l'esfera s'obté identificant el costat AD amb el costat AB i els costat BC amb el costat DC. D'altra banda, el tor s'obté identificant el costat AD amb BC, i el costat AB amb DC. Un dibuix il·lustratiu és el següent[5]:



Ja vam veure en diversos exemples anteriors que es podien obtenir determinades superfícies fent el quocient d'un quadrat (per exemple $I^2 = [0,1] \times [0,1]$) per unes certes identificacions entre els punts dels costats. El tor, l'esfera, el pla projectiu i l'ampolla de Klein són exemples ben coneguts que es poden obtenir d'aquesta manera (com es va veure a l'assignatura Topologia). Podem fer coses similars amb un polígon ("ple"), és a dir, estendre aquesta idea d'un quadrat a un polígon més general. Podem prendre un polígon $P \subset \mathbb{R}^2$ i fer el quocient per algunes identificacions entre els seus costats. Normalment, aquestes identificacions es representen gràficament orientant els costats i anomenant amb una mateixa lletr els costats que identifiquem, com a la figura següent que representa un octògon amb els costats identificats.

En cada cas, l'espai quocient està perfectament ben definit, però pot ser que no sigui una superfície. En una superfície, cada punt ha de tenir un entorn homeomorf a un disc D^2 (que seria un obert de $\mathbb{R}^2$). Per als punts de l'interior del polígon P, això és clar, però per als punts dels costats (de la vora) de P, dependrà de com siguin les identificacions i, en cada cas, cal comprovar amb paciència si els punts interiors de les arestes tenen entorns homeomorfs a D^2 i si això també és cert per als vèrtexs. Per exemple, si volem que el

[5] És interessant veure-ho en 3 dimensions en un vídeo que ho il·lustri, al youtube.

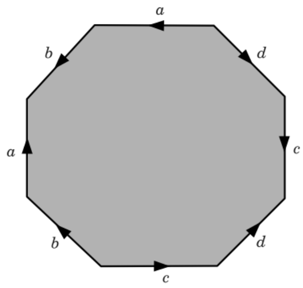


Figura 13.1: Un octògon amb els costats identificats. Captura de pantalla de [**aguade**]

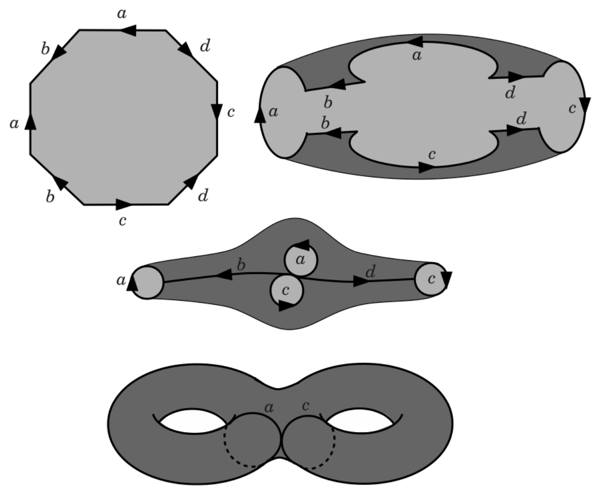


Figura 13.2: El doble tor a partir d'un octògon amb els costats identificats (Captura de pantalla de [**aguade**])

quocient sigui una superfície, és clar que una condició necessària és que els costats estiguin identificats dos a dos, és a dir, que cada costat del polígon P estigui identificat amb un únic costat de P. En particular, això és equivalent a que el nombre de costats de P sigui parell[6]. També és cert, encara que no és evident, que aquesta condició és suficient. Tot això ho veurem de forma més rigorosa.

Per exemple, en el cas de l'octògon P de la figura (**??**), es pot comprovar que el quocient és una superfície que es pot representar com un subespai de $\mathbb{R}^3$ (figura **??**) que s'anomena el "doble tor". Però hi pot haver exemples en que s'obtinguin superfícies que, com el pla projectiu o l'ampolla de Klein, no siguin subespais de $\mathbb{R}^3$.

Aquestes construccions es poden generalitzar a una dimensió més. Per exemple, si agafem un políedre ("ple") de $\mathbb{R}^3$ i identifiquem les cares d'alguna manera, l'espai quocient podria resultar que és una varietat de dimensió 3. Un exemple fàcil consisteix en prendre un cub $I^3 = [0,1]^3$ i identificar els seus costats de manera que l'espai quocient sigui un tor de dimensió 3 $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$. Un exemple més sofisticat i molt més interessant és el de l'esfera de Poincaré[7]. Això, però, quedarà per a una altra assignatura, ja que, per

[6] Sembla evident que si hi ha tres arestes, per exemple, identificades, el quocient no pot ser una superfície. Tot i així la demostració no és del tot trivial i utilitza el teorema de la corba de Jordan.

[7] Aquesta varietat de dimensió 3 la va descobrir Henri Poincaré el 1904 com a contraexemple a la primera versió de la famosa *conjectura de Poincaré*. A la vista d'aquest contraexemple, el mateix Poincaré va modificar la seva conjectura i la nova versió va ser un dels problemes fonamentals de les matemàtiques fins l'any 2002 en què Grigori Perelman va demostrar que la conjectura és correcta. Si llegim l'obra original de Poincaré, observem que no va mai presentar el seu problema com una conjectura, sinó com una pregunta.

«Est-il possible que le groupe fondamentale de V se réduise à la substitution identique, et que pourtant V ne soit ara, ens centrarem en les superfícies poligonals.

13.2.1 Superfícies poligonals

En aquest apartat farem el que hem descrit anteriorment: estudiarem la construcció de superfícies a partir de la identificació dels costats orientats d'un polígon arbitrari.

Considerem un polígon regular del pla, P, amb un nombre parell de costats $2n$. Numerarem els vèrtex de forma creixent, és a dir, $p_1, \ldots, p_{2n}$ segons el sentit antihorari, i agruparem les arestes orientades per parells, és a dir, $[p_i, p_{i+1}]$ representa l'aresta de vèrtexs p_i i p_{i+1}.

Definició 13.2.3 (Afinitat bijectiva d'arestes)**.** Utilitzant la notació descrita dels polígons i les seves arestes, denotarem

$$\tau_{ij} : [p_i, p_{i+1}] \longrightarrow [p_j, p_{j+1}]$$

una *afinitat bijectiva*, que voldrà dir que les arestes $[p_i, p_{i+1}]$ i $[p_j, p_{j+1}]$ estan *aparellades*. Observem que només hi ha dues afinitats possibles:

(I) Si $\tau_{ij}(p_i) = p_j$ i, necessàriament, $\tau_{ij}(p_{i+1}) = p_{j+1}$, direm que τ_{ij} *conserva l'orientació*

(II) Si $\tau_{ij}(p_i) = p_{j+1}$ i, necessàriament, $\tau_{ij}(p_{i+1}) = p_j$, direm que τ_{ij} *inverteix l'orientació.*

A continuació veurem el que ja hem comentat abans, que si tenim un nombre parell de costats a un polígon P i hi identifiquem aquests costats dos a dos, d'una manera determinada, podem aconseguir una superfície topològica. Amb les identificacions τ_{ij} descrites això pot ser possible i ho provarem al següent teorema.

Teorema 13.2.4. *Considerem l'espai topològic X que s'obté quan identifiquem les arestes dos a dos segons les afinitats (**??**), és a dir, que X és l'espai quocient de P per la relació d'equivalència R generada per la relació*

$$x \simeq \tau_{ij}(x), \quad \forall x \in \partial P$$

Llavors X és una superfície topològica, compacta i connexa.

Demostració. La compacitat i la connexió es dedueixen de les mateixes propietats de P, ja que $\pi : P \to X$ (la projecció) és una aplicació d'identificació. Així mateix X verifica el segon axioma de numerabilitat. El que cal provar és que X és localment homeomorf a $\mathbb{R}^2$ i és de Hausdorff.

Observem que podem distingir tres tipus de punts de X: els de $\pi(P)$, que només tenen una antiimatge per π; els de $\pi(\partial P \setminus \{p_1, \ldots, p_{2n}\})$, que tenen dues antiimatges a P; i els que corresponen als vèrtexs p_i, amb un nombre indeterminat d'antiimatges entre 1 i $2n$. En qualsevol cas, la antiimatge d'un punt de X per π és un nombre finit de punts.

Per veure que X és localment $\mathbb{R}^2$ hem de fer un estudi per a cadascun dels tipus de punts.

1. Si $x = \pi(p)$ és imatge d'un punt interior de P aleshores el resultat és immediat ja que en un entorn prou petit de p l'aplicació π és homeomorfisme.

2. Si $x \in X$ és imatge d'un punt d'una aresta que no és un vèrtex, x tindrà dues antiimatges, q_1 i q_2, ambdues sobre dos costats de P identificats per π. Si prenem ara discs D_1, D_2 del pla centrats en q_1, q_2 i de radi prou petit ε per tal que no continguin cap vèrtex de P, aleshores $D = \pi[(D_1 \cap P) \cup (D_2 \cap P)]$ és homeomorf a un disc de $\mathbb{R}^2$ (veure imatge **??**)

---

pas simplement connexe? [. . .] Mais cette question nous entrainerait trop loin.»

I tant! Han calgut 100 anys d'avenços de la topologia i la geometria per respondre aquesta pregunta. Font [**aguade**]

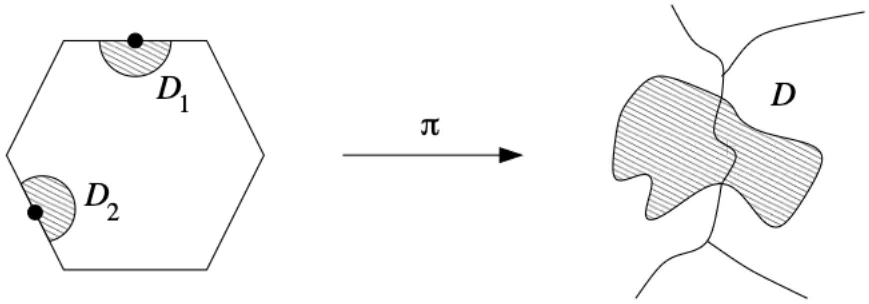


Figura 13.3: Disc al voltant d'un punt en la imatge de dues arestes.

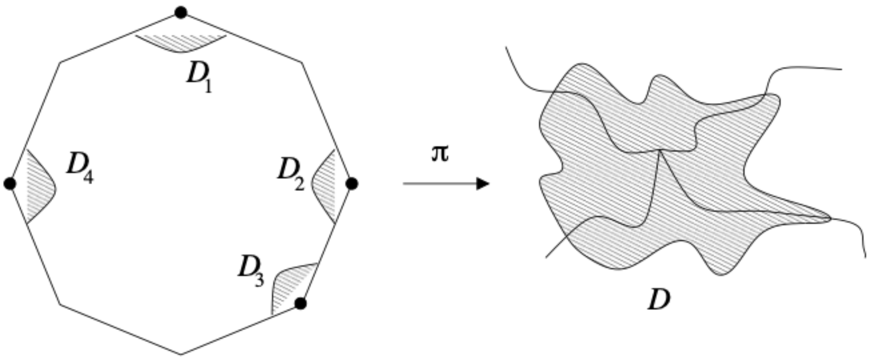


Figura 13.4: Disc al voltant d'un punt imatge de r-vèrtexs

3. Sigui ara x un punt de X que és la imatge de r vèrtexs de P, $p_{i_1}, \ldots, p_{i_r}$. Com e el cas anterior prenem discs D_{i_j} de $\mathbb{R}^2$ centrats en els punts p_{i_j}, $1 \leq j \leq r$, de radi fixat ε prou petit per tal que no continguin altres vèrtexs de P que $p_{i_1}, \ldots, p_{i_r}$, i notem de la mateixa manera les corresponents interseccions amb P, $1 \leq j \leq r$. Com els costats de P estan identificats a parells, podem suposar ordenats els punts p_{i_j} de forma que cada D_{i_j} tingui un costat en comú amb el disc anterior i l'altre amb el posterior. És un exercici comprovar aleshores que $D = \pi\left(\bigcup_{1\leq j\leq r} D_{i_j}\right)$ és un entorn de x homeomorf a un disc del pla (veure **??**)

   Observi's que aquest darrer raonament no és vàlid quan un vèrtex no s'identifica a cap altre. En aquest cas, si D és la intersecció de P amb un disc que no conté cap altre vèrtex, les arestes de D s'identifiquen per donar l'entorn de x corresponent.

Utilitzant oberts com els descrits en la prova anterior que X és localment homeomorf a $\mathbb{R}^2$, prou petits, es demostra que X és un espai de Hausdorff. □

Definició 13.2.5 (Superfície poligonal)**.** Sigui X una superfície compacta. Direm que X és una *superfície poligonal* si existeix un polígon regular P amb un nombre parell de costats, i un aparellament dels costats orientats, tal que X és homeomorfa a la superfície quocient $P/\sim$.

És clar que les superfícies poligonals que s'obtenen depenen de com s'hagin aparellat els costats del polígon P. Precisarem aquesta dependència de la forma següent: sigui P un polígon regular de $2n$ costats, i suposem que els costats estan agrupats per parells. A cada costat li assignarem una lletra $a, b, c, \ldots$, i al costat associat li assignarem la mateixa lletra si s'identifiquen per l'afinitat que conserva l'orientació, o la mateixa lletra amb l'exponent -1 si s'identifiquen per l'afinitat que inverteix l'orientació. Aleshores, l'aparellament de les arestes de P queda determinat per la *paraula* que correspon a la juxtaposició de les lletres de les arestes, començant per una aresta i seguint en ordre antihorari.

Definició 13.2.6 (Paraula)**.** En el context anterior, diem que A és una paraula de longitud n, $A(a_1, \ldots, a_n)$, si conté n lletres, $a_1, \ldots, a_n$, cadascuna de les quals apareix dues vegades en la forma

$$\ldots a_i \ldots a_i \ldots \quad \text{o} \quad \ldots a_i \ldots a_i^{-1} \ldots$$

Denotarem per X_A la superfície que li correspon segons la construcció anterior.

Exemple 13.2.7. Vegem-ne exemples de paraules i de les seves superfícies topològiques associades.

(1) El tor $\mathbb{T}^2$ correspon a la paraula $aba^{-1}b^{-1}$.

(2) L'ampolla de Klein correspon a la paraula $abab^{-1}$.

(3) L'esfera S^2 correspondrà a la paraula $abb^{-1}a^{-1}$.

(4) El pla projectiu real a la paraula $abab$.

Observació 13.2.8. *A vegades, per simplificar les paraules, s'agrupen lletres. Per exemple, l'esfera hem vist que era $abb^{-1}a^{-1}$. Llavors, podríem fer $c := ab$ i quedaria cc^{-1}. D'igual manera, el pla projectiu seria doncs cc. Sempre s'intentarà simplificar d'aquesta manera.*

Definició 13.2.9 (Superfície estàndard)**.** Anomenarem *superfícies estàndard* a les superfícies poligonals X_A que corresponen a les paraules

$$\begin{aligned} A_0 &:= aa^{-1} \\ A_g &:= a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \\ B_g &:= a_1 a_1 \cdots a_g a_g. \end{aligned}$$

Direm que g és el *gènere* de la superfície corresponent, i notarem $g\mathbb{T}^2 = X_{A_g}$, $g\mathbb{P}^2 = X_{B_g}$

Així, per exemple, X_{A_0} és l'esfera, X_{A_1} és el tor $\mathbb{T}^2$, i X_{B_1} és el pla projectiu real $\mathbb{R}P^2$.

13.2.2 Invariància topològica de la dimensió

13.3 El grup fonamental de les superfícies topològiques

Sigui S_A una superfície compacta, connexa i definida per una paraula A de n parelles de lletres $a_i, a_i^{\pm 1}$, on $i = 1, \ldots, n$. El nostre objectiu aquí és determinar directament de la paraula A el grup fonamental de S_A.

Recordem que la superfície S_A s'obté a partir d'un polígon P_A de $2n$ costats, etiquetats amb les lletres $a_1, a_1^{\pm 1}, \ldots, a_n, a_n^{\pm 1}$, identificant les parelles de costats que determina la paraula A.

Si considerem el graf $G_A = \partial P_A / \sim_A$, obtingut a partir de la vora del polígon P_A identificant els costats d'acord amb la paraula A, com el polígon P_A és homeomorf al disc D^2, veiem que la superfície S_A s'obté adjuntant una cèl·lula de dimensió 2 a G_A, per mitjà de l'aplicació $f : \partial P_A \simeq S^1 \to G_A$, que determina la paraula A.

Per tant, del Teorema de Seifert-Van Kampen (**??**) se segueix el següent teorema:

Teorema 13.3.1 (Grup fonamental d'una superfície)**.** *El grup fonamental $\pi(S_A)$ és el quocient de $\pi(G_A)$ pel subgrup normal generat per $f_*(\pi(S^1))$, el qual està determinat per la paraula A.*

En els següents apartats donarem una expressió explícita dels grups que apareixen en aquest teorema.

13.3.1 El cas d'un sol vèrtex

En primer lloc, considerem el cas en què tots els vèrtexs de P_A s'identifiquen en un sol punt. Aleshores, G_A és un graf amb un sol vèrtex i per tant és una unió puntual de n circumferències (és com una flor), que són els llaços imatges dels costats $a_1, \ldots, a_n$ de P_A. Així resulta que

$$\pi(G_A) \cong \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \cong F_n$$

on F_n és el grup lliure de n generadors[8].

Com $\pi(S^1) \cong \mathbb{Z}$ (**??**), el subgrup normal generat per $f_*(\pi(S^1))$ coincideix amb el generat per la imatge d'un generador de $\pi(S^1)$, i aquesta imatge és exactament la paraula A en els generadors $a_1, \ldots, a_n$ de F_n. En definitiva, hem obtingut

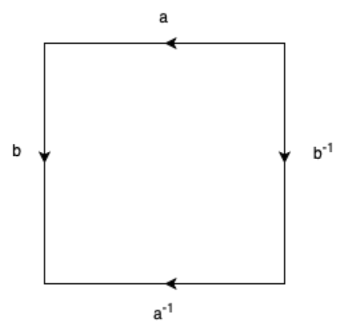
Teorema 13.3.2. *Si tots els vèrtexs de P_A s'identifiquen en un sol punt, $\pi(S_A) \cong \langle a_1, \ldots, a_n \; : \; A \rangle$.*

Ara ja tenim quin serà el grup fonamental d'una superfície topològica, els vèrtexs del polígon de la qual s'identifiquen en un sol vèrtex. Ara bé, com ho podem saber això? Hi ha dues tècniques, a cada qual més "casera" que serveixen i ara veurem:

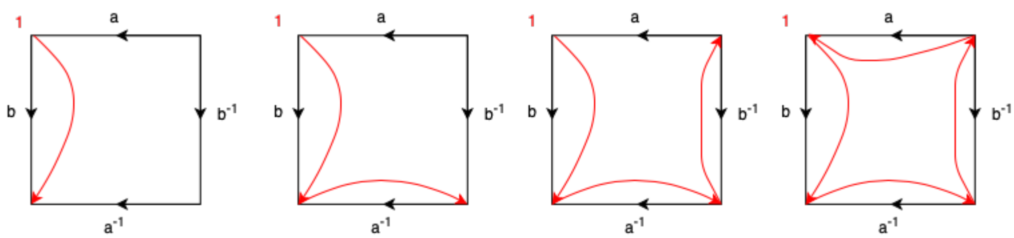
1. Podem dibuixar el polígon en qüestió. Sabem que ha de ser d'un nombre parell de costats, ja que del contrari, no podríem fer una superfície. Aleshores comptem quantes lletres diferents hi ha a la paraula A, sense tenir en compte els exponents -1. Per exemple, $A = aba^{-1}b^{-1}$ té 2 lletres diferents. Amb això ja tenim bastant per determinar el polígon i dibuixar-lo.

   A continuació el que farem serà escollir un punt qualsevol dels vèrtexs del polígon, li assignarem un 1, i l'anirem unint amb els punts amb els quals s'identifica. Quan acabem, és a dir, que retornem al vèrtex origen, escollirem un altre dels vèrtexs restants i li assignarem un 2 i farem el mateix. Així fins que no quedin vèrtexs.

   Vegem-ne un exemple gràfic. Suposem que tenim una paraula $A = aba^{-1}b^{-1}$. Llavors el polígon associat P_A serà un quadrat de la següent forma:



   Aleshores escullo el vèrtex de dalt a l'esquerra com a 1 i vaig fent fletxes vermelles amb els vèrtexs amb els quals s'identifica



[8] Veure apèndix (**??**). Bàsicament és el grup generat per totes les possibles combinacions dels elements $a_1, a_1^{-1}, \ldots, a_n, a_n^{-1}$.

i finalment el resultat seria que tots els vèrtexs s'identifiquen en un sol punt.

2. El mètode que és més còmode per calcular això consistirà a fer-ho de forma analítica. Si tenim una paraula A anirem posant subíndexs que indicaran el vèrtex que s'identifica. Per exemple, si tenim la paraula $abcb^{-1}c^{-1}a$, posarem un subíndex allà on vulguem i anirem fent les connexions:

$$a_1bcb^{-1}c^{-1}a \to a_1bcb_1^{-1}c^{-1}a_1 \to a_1bc_1b_1^{-1}c^{-1}a_1 \to$$

$$a_1b_1c_1b_1^{-1}c^{-1}a_1 \to a_1b_1c_1b_1^{-1}c_1^{-1}a_1 \to_1 a_1b_1c_1b_1^{-1}c_1^{-1}a_1$$

Exemple 13.3.3. Sigui S_A la superfície definida per la paraula

$$A = abcb^{-1}dacefef^{-1}d^{-1}$$

formada per sis parelles de lletres. Posem com a subíndexs de cada lletra de A els vèrtexs del graf G_A que resulten de realitzar les identificacions en el polígon P_A. Tenim així

$$_1a_1b_1c_1b_1^{-1}d_1a_1c_1e_1f_1e_1f_1^{-1}d_1^{-1},$$

i per tant el graf G_A té només un vèrtex, en el qual s'identifiquen tots els vèrtexs de P_A. Així, G_A és en realitat una d'aquelles floretes, que representen 6 circumferències unides en un punt. Així, $\pi(G_A) \cong F_6$, i

$$\pi(S_A) \cong \langle a, b, c, d, e, f \ : \ abcb^{-1}dacefef^{-1}d^{-1} \rangle$$

Observem que, en particular, les paraules estàndards (**??**) identifiquen també tots els vèrtexs de P_A en un sol punt i, per tant, es té el següent resultat.

Corol·lari 13.3.4. *Si S_A és una superfície compacta, connexa i definida per la paraula estàndard A, aleshores*

1. *Si $A = A_g$, llavors $\pi(S_A) \cong \langle a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \ : \ A_g \rangle$.*

2. *Si $A = B_g$, llavors $\pi(S_A) \cong \langle a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \ : \ B_g \rangle$*

13.3.2 El cas general

En el cas general els vèrtexs del polígon P_A no s'identifiquen en un sol punt, sinó que s'identifiquen donant $v' \geq 1$ punts diferents, que seran els vèrtexs del graf G_A. Així, el graf G_A ja no serà una floreta de circumferències, però això no és un problema ja que sabem quin és el grup fonamental d'un graf connex qualsevol (vist a **??**), doncs vam veure que un graf connex G amb v vèrtexs i a arestes era homotòpicament equivalent a la unió puntual de $\ell = 1 - v + a$ circumferències i, per tant, $\pi(G) \cong F_\ell$.

Recordem la demostració del teorema (**??**) ja que d'ella se seguirà el següent teorema. Per inducció sobre el nombre de vèrtexs v fèiem que si G tenia un sol vèrtex, i.e. $v = 1$, G era la unió puntual de a circumferències i per tant $\pi(G) \cong F_a$, cosa que prova el teorema en aquest cas. Si, en canvi, teníem més d'un vèrtex, existirà una aresta entre vèrtexs diferents, doncs G és connex. Si contraiem aquesta aresta a un punt, s'obté un nou graf G' amb $v' = v - 1$ vèrtexs i $a' = a - 1$ arestes. Per hipòtesi d'inducció $\pi(G') \cong F_{\ell'}$, essent $\ell' = 1 - v' + a'$. Però com $\ell' = 1 - v' + a' = 1 - v + 1 + a - 1 = 1 - v + a = \ell$, i G' és del mateix tipus d'homotopia que G, podem concloure que $\pi(G) \cong \pi(G') \cong F_\ell$, com volíem.

Teorema 13.3.5. *Amb les hipòtesis anteriors, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_a$ són les arestes de G i es contrauen $\alpha_{\ell+1}, \ldots, \alpha_a$ per obtenir G' un graf amb només un vèrtex, aleshores $\pi(G)$ és el grup lliure de generadors $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$, que són les imatges de les arestes en $\pi(G')$ que no s'han contret. És a dir,*

$$\pi(G) \cong \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \,\rangle.$$

A més, si α és un llaç en G determinat per una paraula en les arestes de G com a parella de lletres, la seva imatge en $\pi(G)$ és una paraula amb ℓ parelles de lletres.

Demostració. Com en l'anterior demostració, se segueix fàcilment per inducció sobre el número de vèrtexs v de G. □

Tornant al graf G_A de la superfície S_A, com G_A és un graf amb n arestes i v' vèrtexs resulta que

Teorema 13.3.6. *Si els vèrtexs del polígon P_A s'identifiquen donant v' punts diferents, aleshores*

$$\pi(S_A) \cong \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_r \;:\; A' \rangle$$

essent $r = 1 - v' + n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ les imatges de les arestes $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ de G_A que no s'han contret al contraure les arestes necessàries per convertir G_A en un graf amb un sol vèrtex, i A' la paraula amb r parelles de lletres que resulta de A.

Exemple 13.3.7. Sigui S_A la superfície definida per la paraula $abca^{-1}defbec^{-1}d^{-1}f$. Si posem com a subíndexs de cada lletra d'A els vèrtexs del graf G_A que resulten de realitzar les identificacions en el polígon P_A, es té

$$_1a_1b_2c_1a_1^{-1}d_2e_1f_1b_2e_1c_2^{-1}d_1^{-1}f_1$$

i per tant $v' = 2$. Així, $r = 1 - 2 + 6 = 5$ i per tant $\pi(G_A) \cong F_5$.

13.3.3 Orientabilitat

Podem donar una primera definició d'orientabilitat d'una superfície definida per una paraula a partir de la propia paraula com següeix.

Definició 13.3.8 (Heterotipus i homotipus)**.** Una parella de lletres $a, a^{\pm 1}$ d'una paraula A direm que és una parella *heterotipus* (o de primer tipus) si en A apareixen a i a^{-1}. En canvi direm que és una parella *homotipus* (o de segon tipus) si en A figuren a i a.

Definició 13.3.9 (Orientable)**.** Sigui S_A una superfície compacta, connexa i definida per una paraula A. Direm que S_A és una superfície *orientable* si totes les parelles de A són heterotipus. En cas contrari, és a dir, si existeix una parella homotipus a A, direm que S_A és *no orientable*.

Exemple 13.3.10. Les paraules estàndards A_g tenen totes les seves parelles de lletres de primer tipus i, per tant, defineixen superfícies orientables. D'altra banda, les paraules estàndards B_g tenen totes les seves parelles de lletres de segon tipus i, per tant, defineixen superfícies no orientables.

L'abelianització d'un grup G és el quocient del grup G per la relació $ab = ba$. Es denota per G_{ab}.

Teorema 13.3.11. *Sigui S_A una superfície compacta, connexa i definida per la paraula A. Aleshores:*

(a) S_A és orientable si, i només si, $\pi(S_A)_{ab} \cong \mathbb{Z}^{2g}$, i

(b) S_A és no orientable si, i només si, $\pi(S_A)_{ab} \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Demostració. Es deixa com a exercici donar una prova directa d'aquest resultat ja que, més endavant, obtindrem una prova immediat com a conseqüència del Teorema de Classificació (**??**) que veurem més endavant. □

Amb la definició d'orientabilitat que hem donat en (**??**) podria passar que dues superfícies homeomorfes fossin una orientable i l'altra no, depenent de la paraula que les defineix. El corol·lari que segueix establirà la invariància topològica de l'orientabilitat i demostra, doncs, que no és així.

Corol·lari 13.3.12. *L'orientabilitat és un invariant topològic*[9]*. És a dir, siguin S_A i S_B dues superfícies homeomorfes definides per les paraules A i B respectivament. Llavors S_A és orientable si, i només si, S_B és orientable.*

Demostració. Resulta del teorema anterior, ja que les superfícies orientables no tenen elements de torsió en el seu grup fonamental abelianitzat, mentre que les no orientables sí que tenen torsió[10] (2-torsió per ser més precisos) en el seu grup fonamental abelianitzat. □

13.4 Classificació de superfícies

En les properes subseccions es buscarà provar el teorema de classificació de superfícies (**??**) i per això es provaran una sèrie de resultats. Aquest teorema servirà per classificar les superfícies poligonals S_A a partir de la paraula A que la defineix.

Abans, però, cal fer un petit incís en la notació utilitzada. Quan posem gX, on X és una superfície qualsevol i g és un enter positiu qualsevol, ens referim a la paraula que genera g superfícies X. Per exemple, $2T^2$ seria $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$.

Teorema 13.4.1 (Classificació de superfícies)**.** *Sigui A una paraula de n parelles de lletres tal que, al identificar-se les parelles de costats de P_A que determina la paraula A, el graf $G_A = \partial P_A/\sim$ resultant té v' vèrtexs. Llavors*

- *Si totes les parelles de A són heterotipus, $S_A \cong g\mathbb{T}^2$, amb $g = \frac{1}{2}(1 - v' + n)$;*
- *Si en A hi ha una parella homotipus, $S_A \cong g\mathbb{R}P^2$, amb $g = 1 - v' + n$.*

A l'enter $g \geq 0$ se li diu gènere de la superfície S_A.

Exemple 13.4.2. Considerem la superfície S_A generada per la paraula

$$A = abca^{-1}defbec^{-1}d^{-1}$$

Com la parella bb és homotipus, la superfície S_A serà no orientable. Si posem com a subíndexs de cada lletra de A els vèrtexs del graf G_A que resulten al realitzar les identificacions en el polígon P_A, es té

$$_1a_1b_2c_1a_1^{-1}d_2e_1f_1b_2e_1c_2^{-1}d_1^{-1}f_1$$

i per tant $v' = 2$. Així, el gènere de S_A és

$$g = 1 - v' + n = 1 - 2 + 6 = 5$$

Per tant es conclou que $S_A \cong 5\mathbb{R}P^2$

[9] Recordem la definició de invariant topològic dels apunts de Topologia.

[10] Recordem (no sé d'on perquè jo això no ho havia sentit mai) que si p és un nombre natural positiu i g és un element d'un grup abelià G, llavors es diu que és de p-torsió si $pg = 0$.

13.4.1 Demostració del teorema de classificació de superfícies

Denotarem $\mathcal{A} = \{a_1, a_1^{-1}, b_1, b_1^{-1}, \ldots\}$ el conjunt de lletres amb les quals formem les paraules que defineixen superfícies compactes, connexes, i.e. paraules amb només parells de lletres. Designarem per lletres minúscules un element arbitrari de $\mathcal{A}$.

Teorema 13.4.3 (Riemann, Veblen, 1915)**.** *Tota superfície compacta, connexa i definida per una paraula és homeomorfa a una única superfície estàndard.*

Més precisament, sigui S_A la superfície definida per la paraula A amb parelles de lletres. Aleshores

(i) Si totes les parelles de A són heterotipus, $S_A \simeq S_{A_0}$, o bé $S_A \simeq S_{A_g}$;

(ii) Si en A existeix alguna parella homotipus, $S_A \simeq S_{B_g}$

Abans de poder començar amb la prova d'aquest teorema caldran unes consideracions prèvies que permetran "algebraitzar" el problema.

Designarem per $\mathcal{W}$ el conjunt de les paraules amb només parelles de lletres, i.e. aquelles que defineixen superfícies compactes i connexes, i per lletres majúscules $A, B, C, \ldots$, les paraules de $\mathcal{W}$. Designarem amb les lletres majúscules $X, Y, Z, \ldots$, subparaules de les anteriors, i.e. amb parelles de lletres i/o lletres d'una sola paraula buida.

En $\mathcal{W}$ considerem la relació d'equivalència $\sim$ generada per les relacions:

(i) $A \sim B$ si B s'obté a partir de A "reanomenant" les lletres que formen A, és a dir, a partir d'una bijecció $\mathcal{W} \to \mathcal{W}$ que conserva els inversos

(ii) $A = aX \sim B = Xa$, és a dir, les paraules que són cíclicament iguals són equivalents.

(iii) $A = XaYUa^{\pm 1}V \sim B = bU(X^{-1}bY^{-1})^{\pm 1}V$, que correspon al "canvi de variable" $XaY = b$.

(iv) $aa^{-1}B \sim B$.

(v) $AC \sim BC$ si $A \sim B$.

Lema 13.4.4 (De l'àlgebra a la topologia)**.** *Si dues paraules A i B de $\mathcal{W}$ són equivalents, les superfícies que defineixen són homeomorfes, és a dir, $A \sim B$ implica que $S_A \simeq S_B$.*

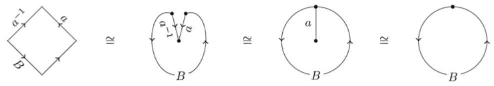
Demostració. En efecte, donat que la relació d'homeomorfisme és una relació d'equivalència, serà suficient que provem el lema per a cadascuna de les relacions que generen $\sim$.

(i) Si B s'obté a partir d'A reanomenant les lletres que defineixen A, les identificacions de costats que defineixen A i B són les mateixes.

(ii) Les paraules aX i Xa defineixen superfícies homeomorfes, ja que només es diferencien en el vèrtex del polígon a partir del qual es comença la paraula que indica les identificacions dels costats.

(iii) Si $A = XaYUa^{\pm 1}V$ i $B = bU(X^{-1}bY^{-1})^{\pm 1}V$, les superfícies S_A i S_B són homeomorfes, doncs si es talla la regió poligonal P_A pel segment b que uneix l'origen de X amb l'extrem de Y, s'obtenen dues regions poligonals marcades, cadascuna d'elles amb un costat a i un costat b. Si primer s'identifiquen els costats b i després els altres costats s'obté la superfície original S_A, però si primer s'identifiquen els costats a i després els altres costats s'obté S_B. Com la superfície final no depèn, tret d'homeomorfisme, de l'ordre en què s'hagin fet les identificacions, es conclou que $S_A \simeq S_B$.

(iv) Si $A = aa^{-1}B$, es té que $S_A \simeq S_B$, ja que al identificar a amb a^{-1} s'obté un polígon amb dos costats menys i amb la paraula B:



Observem que aquesta relació elimina l'esfera aa^{-1} i és l'expressió algebraica que l'esfera és l'element neutre de la suma connexa, i.e. $S^2 \# S_B \simeq S_B$.

(v) Finalment, per inducció sobre la longitud de les paraules, podem suposar que $A \sim B$ implica que $S_A \simeq S_B$ i com que $S_{AC} \simeq S_A \# S_C$ i $S_{BC} \simeq S_B \# S_C$, se segueix que $S_{AC} \simeq S_{BC}$.

□

Lema 13.4.5 (Creació de plans projectius). *Si $A = aXaY$, llavors $A \sim bbB$, amb $B = X^{-1}Y$*

Demostració. És suficient fer $aX = b$, ja que aleshores $a = bX^{-1}$ i així $A = aXaY \sim bbX^{-1}Y = bbB$. □

Lema 13.4.6. *$B_1A_1 = aabcb^{-1}c^{-1} \sim B_3 = ddeeff$.*

Demostració. En efecte, fent $d = abcb^{-1}$ s'obté que $a = dbc^{-1}b^{-1}$, i per tant $aabcb^{-1}c^{-1} \sim dbc^{-1}b^{-1}dc^{-1}$. Fent $f = b^{-1}dc^{-1}$ s'obté que $c^{-1} = d^{-1}bf$, i resulta que $aabcb^{-1}c^{-1} \sim dbd^{-1}bff$. Finalment, fem $e = d^{-1}b$, $b = de$ i resulta $abcb^{-1}c^{-1} \sim ddeeff$. □

Lema 13.4.7 (Creació de torus). *Si $A = aXbYa^{-1}Ub^{-1}V$, llavors $A \sim cdc^{-1}d^{-1}B$, amb $B = XVUY$.*

Demostració. En efecte, primer es fa $XbY = d$, i aleshores $b = X^{-1}dY^{-1}$, $b^{-1} = Yd^{-1}X$, i així

$$A = aXbYa^{-1}Ub^{-1}V \sim ada^{-1}UYd^{-1}XV$$

i després es fa $c^{-1} = a^{-1}UY$, doncs així $a = UYc$, i resulta finalment

$$A \sim UYcdc^{-1}d^{-1}XV \sim cdc^{-1}d^{-1}XVUY = cdc^{-1}d^{-1}B$$

□

Amb aquests preliminars podem ja abordar la prova del teorema (**??**).

del teorema **??**. Sigui S_A la superfície definida per la paraula A de n parelles de lletres. Pel lema (**??**), per provar que S_A és homeomorfa a una superfície estàndard, serà suficient provar que A és equivalent a una paraula estàndard. La prova la farem per inducció sobre n.

Si $n = 1$, aleshores $A = aa^{-1}$ o bé $A = aa$ i per tant el teorema està demostrat en aquest cas. Suposem que $n > 1$ i tractarem el cas orientable i el no orientable per separat.

(a) Si en A hi ha una parella homo, per (ii) serà $A \sim aXaY$ i pel lema (**??**) $A \sim bbB$, amb $B = X^{-1}Y$. Utilitzant ara la hipòtesi d'inducció i (v), podem concloure que $A \sim bbB \sim bbB_{g-1} \sim B_g$, o bé que $A \sim bbB \sim B_1A_{g-1}$ i, en aquest últim cas, aplicant reiteradament el lema (**??**) podem concloure que també $A \sim B_g$.

(b) Si totes les parelles de A són hetero, considerem la parella a, a^{-1}, que estigui mínimament separada, i.e. que hi hagi entre mig el menor número s de lletres, considerada A com una paraula cíclica, i.e. considerant A i totes les paraules cíclicament equivalents. Si $s = 0$, aplicant reiteradament la relació (ii), tindrem que $A \sim aa^{-1}B$ i, per (iv), $A \sim B$. Com B té també totes les seves parelles hetero i té $2n-2$ lletres, $B \sim A_g$ per la hipòtesi d'inducció, i en conseqüència, $A \sim A_g$. Si $s > 0$, direm que A té dues parelles hetero enllaçades i aplicant (ii) tindrem que $A \sim aXbYa^{-1}Ub^{-1}V$ i es té que pel lema (**??**) $A \sim UYcdc^{-1}d^{-1}XV \sim cdc^{-1}d^{-1}XVUY \sim cdc^{-1}d^{-1}B$.

Com $B = XVUY$, i totes les parelles de A eren hetero, també totes les parelles de B són hetero. Així, aplicant de nou la hipòtesi d'inducció, concloem que $B \sim A_{g-1}$ i, per (v), $cdc^{-1}d^{-1}B \sim cdc^{-1}d^{-1}A_{g-1}$. Per tant, es té que
$$A \sim cdc^{-1}d^{-1}B \sim cdc^{-1}d^{-1}A_{g-1} \sim A_g.$$

En definitiva, hem demostrat que la paraula A és equivalent a una paraula estàndard. Ara, la unicitat de la superfície estàndard homeomorfa a S_A es dedueix del càlcul dels subgrups fundamentals abelianitzats de les superfícies estàndards:
$$\pi(S^2)_{ab} \cong 0, \quad \pi(g\mathbb{T}^2)_{ab} \cong \mathbb{Z}^{2g}, \quad \pi(g\mathbb{R}P^2)_{ab} \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$
ja que aquests grups no són isomorfs dos a dos i, per tant, aquestes superfícies no són homeomorfes dues a dues.

□

Corol·lari 13.4.8. *Dues superfícies compactes, connexes i definides per paraules són homeomorfes si, i només si, els seus grups fonamentals són isomorfs.*

Corol·lari 13.4.9. *Sigui S_A una superfície compacta, connexa i definida per una paraula A. Aleshores,*

- *S_A és orientable si, i només si, $\pi(S_A)_{ab} \cong \mathbb{Z}^{2g}$;*
- *S_A és no orientable si, i només si $\pi(S_A)_{ab} \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

13.5 Triangulació

A partir d'ara totes les superfícies seran compactes, connexes i sense vora.

13.5.1 Superfícies triangulables

Definició 13.5.1 (Triangle estàndard)**.** Denotem $\Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x+y \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Si ens hi fixem, veiem que Δ és un triangle "ple", l'anomenarem *triangle estàndard.*

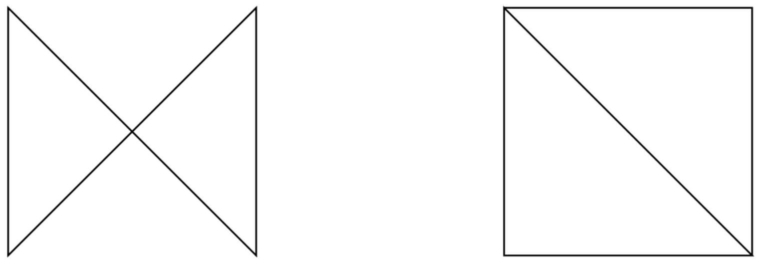
Definició 13.5.2 (Triangle en una superfície)**.** Sigui S una superfície, un *triangle en S* és un tancat $T \subseteq S$ tal que existeix un homeomorfisme $\varphi : \Delta \to T$. Les imatges per φ dels costats i dels vèrtex de Δ els anomenarem costats i vèrtex de T.

Definició 13.5.3 (Triangulació d'una superfície)**.** Una triangulació $\mathcal{T}$ de S és una família de triangles $\mathcal{T} = \{T_i\}_{i \in I}$ en S, tals que

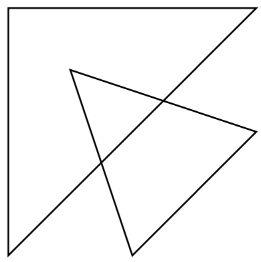
(i) $S = \bigcup_{i \in I} T_i$

(ii) Si $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ per $i \neq j$ aleshores $T_i \cap T_j$ és un vèrtex de T_i i de T_j o bé un costat de T_i i T_j.

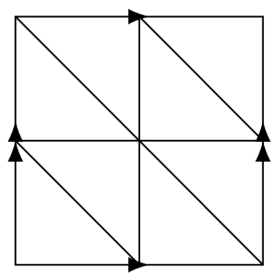
Exemple 13.5.4. Les següents interseccions de dos triangles sí que compleixen les condicions per ser una triangulació ja que al primer cas la intersecció és un vèrtex i al segon cas una aresta comuna:



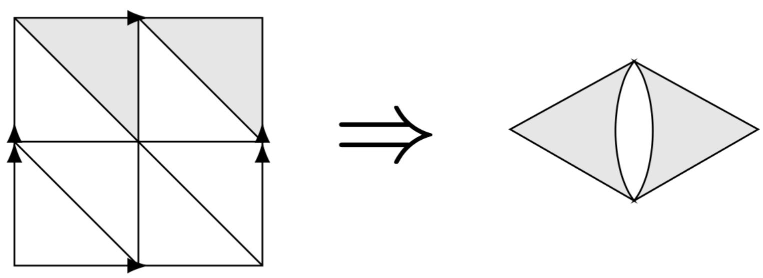
En canvi, la següent intersecció no compleix les condicions per ser una triangulació ja que la seva intersecció no és ni una aresta ni un vèrtex comú:



Exemple 13.5.5. Ens podem preguntar si el torus és una superfície triangulable. Per exemple, la següent figura podria ser una triangulació del tor?

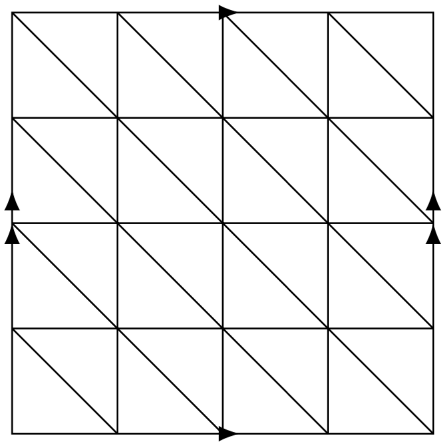


Aquesta descomposició no és una triangulació del tor, observem aquests dos triangles:

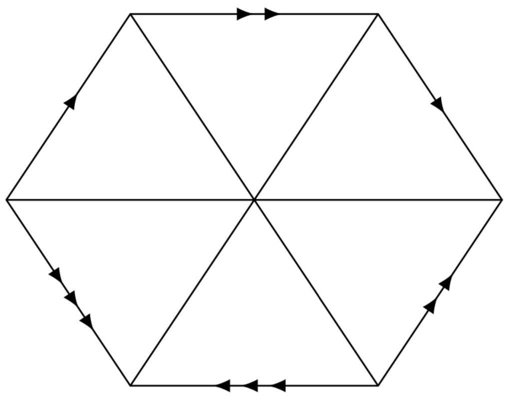


Com que els costats estan identificats, veiem que s'intersequen en dos punts, que són dos vèrtexs, però no tenen cap aresta en comú. Per tant, com que la seva intersecció no és ni un únic vèrtex ni tampoc cap aresta, veiem que aquests triangles no formen cap triangulació del tor.

En canvi, els següents triangles sí que formen una triangulació del tor:

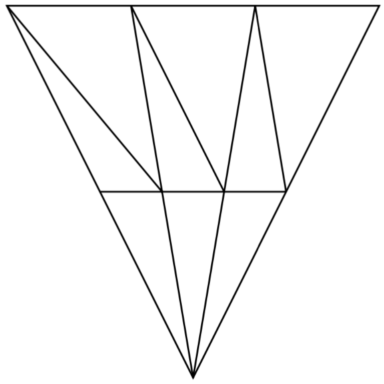


Observació 13.5.6. *També ens podem preguntar si, en general, les superfícies poligonals són triangulables. La resposta és afirmativa. Donada una superfície poligonal, primer de tot agafem el centre del polígon regular (el centre de la circumferència circumscrita) i des de cada vèrtex del polígon l'unim al centre amb un segment. Ens quedarà una divisió del polígon en triangles, però aquesta divisió no serà una triangulació.*



És molt fàcil veure que no és cap triangulació ja que si agafem dos triangles que tinguin els costats "exteriors" identificats, aleshores la seva intersecció és un vèrtex i una aresta, i el vèrtex no és un extrem de l'aresta.

El que hem de fer és subdividir cadascun d'aquests triangles, per exemple, de la següent manera:



Ara, però, cal formalitzar tot això.

Proposició 13.5.7 (Triangulació de superfícies)**.** *Tota superfície compacta connexa S_A definida per una paraula A amb n parelles de lletres és triangulable.*

Demostració. Com que $S_A \simeq P/\sim_A$, on P és el polígon de $2n$ costats regular, és suficient observar que la triangulació de P obtinguda al triangular cadascun dels seus $2n$ "triangles centrals" de P com s'ha fet a l'observació anterior (**??**) indueix una triangulació en S_A. □

Encara es pot provar més:

Teorema 13.5.8. *Tota superfície compacta M és triangulable.*

Demostració. Una manera de demostrar això és escollir, per a cada punt $p \in M$, una carta local (U_p, φ_p) amb $p \in U_p$ i escollir un disc tancat $D_p \subset \varphi_p(U_p)$ de centre $\varphi_p(p)$. Llavors els oberts $V_p = (\varphi_p)^{-1}(D_p^\circ)$ recobreixen M. Com que M és compacta, podem escollir un nombre finit de punts $p_1, \dots, p_n$ tals que $V_{p_1}, \dots, V_{p_n}$ recobreixin M. Les vores $\partial\overline{V}_{p_1}, \dots, \partial\overline{V}_{p_n}$ formen un graf a M que es pot refinar a una triangulació després de rectificar els arcs que calguin per tal que cada intersecció $\partial\overline{V}_{p_i} \cap \partial\overline{V}_{p_j}$ sigui un conjunt finit de punts. □

Per tal de detallar com es poden "rectificar els arcs que calguin", és necessari utilitzar el fet que tota corba tancada simple a $\mathbb{R}^2$ delimita dues regions, una de les quals és homeomorfa a un disc obert. Aquest fet, malgrat que sembli evident, no és gens senzill de demostrar. Es dedueix del *teorema de Jordan-Schönflies* que només enunciarem i comentarem a continuació.

Definició 13.5.9 (Corba de Jordan)**.** Una *corba tancada simple* o *corba de Jordan* és un subespai de $\mathbb{R}^2$ homeomorf a la circumferència S^1.

Teorema 13.5.10 (Teorema de Jordan)**.** *Si C és una corba de Jordan, llavors $\mathbb{R}^2 \setminus C$ té dues components connexes, una de les quals és acotada i l'altra no ho és. A més, C és la frontera de cadascuna d'aquestes dues components.*

Demostració. No demostrarem aquest resultat perquè utilitza eines que no hem estudiat encara[11]. □

[11] La primera demostració rigorosa coneguda d'aquest resultat es troba en un llibre de Camille Jordan, publicat el 1887. El 1905, Oswald Veblen va donar-ne una altra demostració més acurada, considerada per molts la primera demostració completa i correcta. Més tard, s'han anat publicant demostracions més elementals, com les de Filippov (1950) i Thomassen (1992)

La següent generalització del teorema de la corba de Jordan, anomenada teorema de Jordan-Brouwer , és vàlida en qualsevol dimensió: si X és un subespai de $\mathbb{R}^{n+1}$ homeomorf a l'esfera S^n, on $n \geq 1$, llavors $\mathbb{R}^{n+1} \setminus X$ té dues components connexes, una de les quals és acotada i l'altra no ho és. A més, X és la frontera de cadascuna d'aquestes dues components.

Arthur Schönflies va publicar entre 1890 i 1895 diversos resultats sobre corbes tancades i simple. El fet següent, important i útil, porta el seu nom:

Teorema 13.5.11 (Teorema de Jordan-Schönflies). *Tota aplicació injectiva i contínua $S^1 \to \mathbb{R}^2$ es pot estendre a un homeomorfisme $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.*

Aquest fet no només implica el teorema de la corba de Jordan, sinó que ens diu que, si C és una corba de Jordan, llavors la component acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus C$ és homeomorfa a un disc obert i la component no acotada és homeomorfa a l'exterior d'un disc tancat.

Tanmateix, el teorema de Jordan-Schönflies no és cert en dimensions superiors. Per exemple, a l'espai $\mathbb{R}^3$ hi ha subespais homeomorfs a l'esfera S^2 tals que la component no acotada no és simplement connexa, com l'anomenada "esfera amb banyes" de James Alexander (1924).

Una demostració rigorosa del fet que les superfícies compactes són triangulables va ser descrita per Tibor Radó l'any 1925. En la dècada de 1950 Bing i Moise van demostrar que les varietats compactes de dimensió 3 també ho són. A més, en dimensions 2 i 3 cada triangulació és única, llevat d'equivalència. No obstant, en dimensió 4 hi ha varietats compactes que no són triangulables (Freedman, 1980) i d'altres que admeten infinites triangulacions no equivalents (Donaldson, 1987). L'any 2013, Ciprian Manolescu va demostrar que en tota dimensió superior a 4 hi ha varietats compactes no triangulables. Tanmateix, totes les varietats *diferenciables* admeten triangulacions.

13.5.2 Triangulació de superfícies

En aquesta secció, demostrarem el teorema que afirma que tota superfície compacta i connexa és triangulable si, i només si, és homeomorfa a una superfície definida per una paraula de n parelles de lletres. Abans, però, escriuré un parell de resultats ja que seran necessaris per a la demostració del esmentat teorema.

Proposició 13.5.12. *Sigui S una superfície compacta i connexa, i sigui $\mathcal{T} = \{T_i\}_{i \in I}$ una triangulació finita de S, amb N triangles. Aleshores, existeix:*

- *Un polígon pla P_N de $N+2$ costats, regular, amb una triangulació per diagonals internes (i.e. sense cap altres vèrtexs que els de P_N); $\mathcal{T}_N = \{W_{N,i}\}_{i=1,\ldots,N}$ amb N triangles.*
- *Una aplicació contínua $\varphi_N : P_N \to S$, que indueix un homeomorfisme $W_{N,i} \to T_i$ entre els triangles de $\mathcal{T}_N$ i $\mathcal{T}$.*
- *Una paraula A de parelles de lletres, tal que φ_N indueix un homeomorfisme $P_N/\sim_A \simeq S$.*

Demostració. Aquest resultat és conseqüència directa del següent lema (**??**). □

Lema 13.5.13. *Sigui T_1 un triangle de $\mathcal{T}$. Aleshores existeix una successió creixen de subespais tancats de S, $R_1 \subseteq R_2 \subset \cdots \subset R_N$ tal que*

- *$R_1 = T_1$ i $R_N = S$,*
- *Per cada n tal que $1 \leq n \leq N$, es té $R_n = R_{n-1} \cup T_n$, essent T_n un triangle de $\mathcal{T}$ no contingut en R_{n-1}, i tal que $R_{n-1} \cap T_n$ conté una aresta de T_n.*

- *Per a cada n tal que $1 \le n \le N$, la frontera de R_n és una reunió no buida d'arestes de triangles de $\mathcal{T}$.*
- *Per a cada n tal que $1 \le n \le N$, existeix un polígon pla P_n de $n+2$ costats, regular, amb una triangulació $\mathcal{T}_n = \{W_{n,i}\}_{i=1,\ldots,n}$ per diagonals internes (i.e. sense altres vèrtexs que els de P_n), i una aplicació contínua $\varphi_n : P_n \to R_n$, que indueix homeomorfismes $W_{n,i} \to T_i$ entre els triangles de $\mathcal{T}_n$ i els de R_n, i la restricció de la qual a l'interior de P_n és un homeomorfisme sobre la seva imatge.*
- *Existeix una paraula A de parelles de lletres tals que $S = R_N \simeq P_N/\sim_A$.*

Demostració. Construirem els R_n per inducció sobre n. Si $n = 1$, $R_1 = T_1$, òbviament. Per hipòtesi d'inducció, la frontera de R_{n-1} és una reunió no buida de costats de triangles, diguem-lis $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$. Sigui T_n el triangle de $\mathcal{T}$ el costat del qual és γ_1 i no està contingut en R_{n-1}, i sigui $R_n := R_{n-1} \cup T_n$.

Si $n < N$, la frontera de R_n serà no buida, ja que si fos buida, R_n seria obert i tancat i, com S és connexa, R_n seria igual a S. Però aleshores la triangulació $\mathcal{T}$ tindria n triangles, amb $n < N$ contradicció. A més, aquesta frontera estarà formada per una reunió d'arestes. En efecte, els punts interiors dels triangles que formen R_n són punts interiors de R_n, llavors no són de la frontera. I si un vèrtex v és de la frontera de R_n, necessàriament, v serà vèrtex d'algun triangle de R_n i també d'algun triangle de $\mathcal{T}$ que no és de R_n, així entre les arestes que tenen v com a vèrtex, hi haurà algunes que són d'un triangle de R_n i d'un altre triangle que no és de R_n i aquestes arestes són de la frontera de R_n.

Per hipòtesi d'inducció, existeix un polígon regular de $n+1$ costats P_{n-1} amb una triangulació $\mathcal{T}_{n-1}$ amb les propietats de l'enunciat. Si γ_1' és el costat de P_{n-1} anti-imatge de γ_1 per φ_{n-1}, considerem el polígon de $n+2$ costats P_n' que resulta d'enganxar-li a P_{n-1}, exteriorment i pel costat de γ_1', un triangle equilàter Δ. La triangulació $\mathcal{T}_{n-1}$ juntament amb Δ defineixen una triangulació $\mathcal{T}_n'$ de P_n', per diagonals internes, doncs els tres vèrtexs del triangle Δ que afegim són vèrtexs de P_n'. L'aplicació $\varphi_{n-1} : P_{n-1} \to R_{n-1}$ juntament amb un homeomorfisme $\Delta \to T_n$ que estén $\gamma_1' \to \gamma_1$, defineixen una aplicació $\varphi_n' : P_n' \to R_n$, que indueix un homeomorfisme entre els triangles de $\mathcal{T}_n'$ i els de R_n, i la restricció del qual a l'interior de P_n' és un homeomorfisme sobre la seva imatge.

Considerem ara un polígon regular P_n de $n+2$ costats i fixem un isomorfisme $\partial\psi_n$ entre els grafs $\partial P_n'$ i ∂P_n. Com la triangulació $\mathcal{T}_n'$ de P_n' és per diagonals internes, cadascun dels seus triangles està determinat per tres vèrtexs de $\partial P_n'$ i prenent les imatges d'aquests vèrtexs per $\partial\psi_n$ obtenim un triangle de P_n. S'obté així una triangulació $\mathcal{T}_n$ per diagonals internes de P_n isomorfa per $\partial\psi_n$ a $\mathcal{T}_n'$.

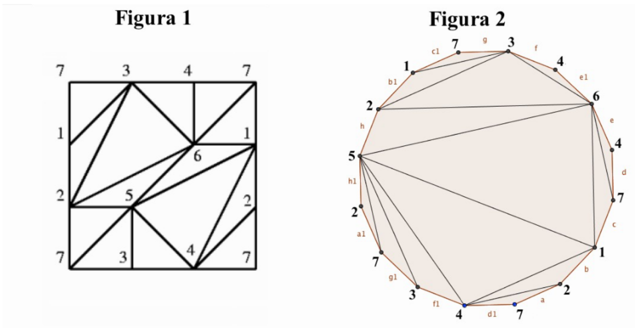
L'homeomorfisme $\psi_n : P_n' \to P_n$ entre P_n' i P_n que estén $\partial\psi_n$ afinament sobre els triangles isomorfs, ens permet obtenir una aplicació $\varphi_n = \varphi_n'\psi_n^{-1} : P_n \to R_n$, que és contínua, indueix homeomorfismes entre els triangles de $\mathcal{T}_n$ i els de R_n i la restricció de la qual a l'interior de P_n és un homeomorfisme sobre la seva imatge.

Finalment, cada parell d'arestes del polígon P_N s'identifiquen per l'aplicació $\varphi_N : P_N \to R_N = S$, donant una aresta de la triangulació $\mathcal{T}$ de S, per tant, etiquetant cada parell d'arestes que s'identifiquen amb la mateixa lletra, podem determinar una paraula A tal que $S \simeq P_N/\sim_A$. □

Exemple 13.5.14. Donada una superfície S_A definida per una paraula A, si triangulem la superfície i apliquem el lema anterior obtindrem una nova paraula B (en general, més llarga que A) tal que S_B és homeomorfa que S_A.

Per exemple, considerem el tor S_A donat per la paraula $A = aba^{-1}b^{-1}$ amb la triangulació donada per la figura 1, que té $N = 14$ triangles.

Seguint la construcció del lema anterior, podem obtenir la triangulació del polígon regular de 16 costats donada en la figura 2, amb la paraula $B = abcdee^{-1}fgc^{-1}b^{-1}hh^{-1}a^{-1}g^{-1}f^{-1}d^{-1}$.



Al fer les identificacions donades per la paraula B obtenim

$${}_1a_2b_3c_1d_4e_5e_4^{-1}f_6g_1c_3^{-1}b_2^{-1}h_7h_2^{-1}a_1^{-1}g_6^{-1}f_4^{-1}d_1^{-1}$$

és a dir, $v' = 7$ i, per tant, com que la superfície és orientable,

$$g = \frac{1}{2}(1 - v' + n) = \frac{1}{2}(1 - 7 + 8) = 1$$

En efecte, veiem que la superfície $S_B = R_{14}$ definida per B és un tor, i així $S_A \simeq S_B$.

13.5.3 Complexos simplicials i complexos cel·lulars

Definició 13.5.15 (Complex simplicial abstracte). Un *complex simplicial abstracte* és una col·lecció K de subconjunts finits d'un conjunt V tal que si $S \in K$ i $S' \subseteq S$ llavors $S' \in K$, i tal que $\{v\} \in K$ per a tot $v \in V$. Els elements de V s'anomenen *vèrtexs* i els elements de K s'anomenen *cares*. Si $S \in K$, llavors els subconjunts de S es diuen *cares de S*.

Amb aquesta definició hem "estés" el concepte de triangle. Per exemple, el triangle estàndard Δ és, en realitat el 3-símplex estàndard. Més en general, podem definir Δ^n com la clausura convexa dels punts $e_i := (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ on 1 ocupa el lloc i-èsim per a cada $i = 1, \dots, n+1$. Aquest s'anomena n-símplex estàndard .

Definició 13.5.16 (Realització geomètrica d'un complex simplicial). La *realització geomètrica* d'un complex simplicial abstracte K es denota per $|K|$ i es defineix com l'espai topològic que s'obté prenent una còpia de Δ^n per a cada cara maximal $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ de K i unint aquests símplexs per les seves cares comunes, després de fixar una bijecció entre cada cara maximal de K i els vèrtexs del símplex corresponent. L'espai resultant s'anomena *políedre* o *complex simplicial*.

Mirem ara quins són els complexos cel·lulars. Si X és un espai topològic i $f : S^{n-1} \to X$ és una aplicació contínua, on $n \geq 1$, denotem per $X \cup_f D^n$ l'espai obtingut prenent la unió disjunta de X i una bola tancada D^n i identificant cada punt $z \in \partial D^n$ amb $f(z)$. Direm que aquest espai s'ha obtingut adjuntant una *n-cel·la*. De manera anàloga podem adjuntar simultàniament una col·lecció (finita o infinita) de n-cel·les a X mitjançant un conjunt d'aplicacions contínues $f_\lambda : S^{n-1} \to X$, on $\lambda \in \Lambda$, per a qualsevol conjunt Λ.

Definició 13.5.17 (Complex cel·lular). Un *complex cel·lular* és un espai topològic X juntament amb una descomposició $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^{(n)}$ (com a espai topològic), on $S^{(0)}$ és un espai discret (un conjunt de punts amb la topologia discreta) i cada subespai $X^{(n)}$ amb $n \geq 1$ s'obté adjuntant una col·lecció de n-cel·les a $X^{(n-1)}$. L'espai $X^{(n)}$ s'anomena *esquelet de dimensió n* de X.

Si $X = X^{(n)}$ per a algun n, llavors direm que X és un complex cel·lular de dimensió n. Qualsevol complex simplicial $|K|$ és un complex cel·lular on les n-cel·les es corresponen amb les cares $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ de K.

13.5.4 Teorema de classificació de superfícies triangulables

En (**??**) hem vist que tota superfície compacta és triangulable. Això, en particular, ens dona una nova manera de classificar superfícies: ens dóna la possibilitat de classificar totes les superfícies.

Teorema 13.5.18 (Teorema de classificació de superfícies)**.** *Tota superfície compacta i connexa S és homeomorfa a S^2 o a $g\mathbb{T}^2$ si és orientable, i a $g\mathbb{R}P^2$ si no és orientable.*

Demostració. Sigui M una superfície topològica compacta i connexa. Escollim una triangulació finita de M. Aleshores els triangles de la triangulació es poden representar al pla de manera que quedi un polígon amb les arestes de la seva vora identificades per parells. Observem que si alguna aresta de la vora no s'identifiqués amb cap altra, llavors M seria una superfície amb vora i, si tres o més arestes s'identifiquessin entre elles, llavors els punts de l'aresta resultant no tindrien cap entorn homeomorf a $\mathbb{R}^2$.

Tallant i enganxant, aquest polígon es pot convertir en un altre polígon corresponent a la forma normal de $g\mathbb{T}^2$ o bé $g\mathbb{R}P^2$ o bé $\mathbb{S}^2$ mitjançant els passos[12] següents:

1. Eliminar els parells aa^{-1} consecutius, si n'hi ha. Si el polígon només té dues arestes, llavors és una esfera aa^{-1} o un pla projectiu aa i ja hem acabat.

2. Fer que el polígon acabi tenint tots els vèrtexs identificats en un de sol.

3. Fer consecutius tots els parells aa si n'hi ha.

4. Agrupar els parells aa^{-1} i bb^{-1}, si n'hi ha, passant-los a la forma $cdc^{-1}d^{-1}$.

5. Utilitzar al final, si és necessari, el fet que $k\mathbb{T}^2\#\ell\mathbb{R}P^2 \simeq (2k+\ell)\mathbb{R}P^2$.

□

13.5.5 Característica d'Euler

Sigui $\mathcal{T}$ una triangulació d'una superfície S (amb o sense vora). Si la triangulació $\mathcal{T}$ és finita, es denota

- v el cardinal dels vèrtexs de $\mathcal{T}$,
- a el cardinal de les arestes de $\mathcal{T}$,
- c el cardinal dels triangles (les cares) de $\mathcal{T}$.

Definició 13.5.19 (Característica d'Euler)**.** Es defineix la *característica d'Euler* de $\mathcal{T}$ per

$$\chi(\mathcal{T}) := v - a + c$$

Notem que si $\mathcal{T}$ és una triangulació d'una superfície S compacta (sense vora), com cada cara té tres costats i cada costat ho és de les dues cares, tenim $3c = 2a$. Per tant, c és parell i

$$\chi(\mathcal{T}) = v - \frac{3c}{2} + c = v - \frac{c}{2}.$$

[12] Aquests passos crec que es diuen transformacions de Tietze.

Exemple 13.5.20. Veiem algun exemple

1. Considerem el disc tancat $\mathbb{D}^2 = \{(x,y) \ : \ x^2+y^2 \leq 1\}$ i sigui $\mathcal{T}$ la triangulació de $\mathbb{D}^2$ formada pels quatre triangles de $\mathbb{D}^2$ que defineixen els quatre quadrants del pla. Com $\mathcal{T}$ té 5 vèrtexs, 8 arestes i 4 cares, tenim $\chi(\mathcal{T}) = 1$.

2. El tetraedre regular T dona una triangulació T de l'esfera $\mathbb{S}^2$ que té quatre vèrtexs, 6 arestes i 4 cares. Per tant, $\chi(T) = 2$.

   Podem obtenir altres triangulacions de l'esfera amb altres sòlids platònics, i.e. l'icosaedre I té 12 vèrtexs, 30 arestes i 20 cares i, per tant, també $\chi(I) = 2$.

Veurem que qualsevol triangulació de l'esfera té $\chi(\mathcal{T}) = 2$ i, més generalment, es té el següent resultat.

Proposició 13.5.21. *Sigui S una superfície compacta i connexa. Si $\mathcal{T}$ és una triangulació de S, aleshores*

$$\chi(\mathcal{T}) = 2 - \mathrm{rang}\pi(S)$$

Se segueix d'aquest teorema que la característica d'Euler d'una triangulació de S és un invariant de S. Per tant, totes les triangulacions de S tenen la mateixa característica d'Euler. Així doncs, podem ara definir la característica d'Euler d'una superfície com la característica d'Euler d'una de les seves triangulacions, i que la triangulació escollida influeix, és a dir, que la característica d'Euler de S és independent de quina triangulació de S es prengui. A més, es té que superfícies homeomorfes tindran la mateixa característica d'Euler.

Demostració. Recordem que si N és el nombre de triangles de $\mathcal{T}$, en el teorema (**??**) hem provat que existeix un polígon P_N regular de $N+2$ costats, amb una triangulació $\mathcal{T}_N$ per diagonals internes, i una aplicació $\varphi_N : P_N \to S$ que indueix un homeomorfisme $P_N/\sim_A \simeq S$ i tal que la triangulació $\mathcal{T}$ de S és la imatge de $\mathcal{T}_N$ per φ_N. Com la triangulació $\mathcal{T}_N$ té com a vèrtexs els $N+2$ vèrtex de la vora de P_N, al identificar els costats de la vora de P_N segons la paraula A per obtenir S, els vèrtexs de la triangulació $\mathcal{T}$ de S són els v' punts en els que s'identifiquen els vèrtexs del polígon P_N, és a dir, els vèrtexs del graf G_N. Per tant, la característica d'Euler de $\mathcal{T}$ és

$$\chi(\mathcal{T}) = v' - \frac{3N}{2} + N = v' - \frac{N}{2},$$

i com que en (**??**) hem provat que

$$\nabla\}\pi(S) = 1 - v' + \frac{N+2}{2} = 2 - v' + \frac{N}{2},$$

es conclou que

$$\chi(\mathcal{T}) = 2 - \mathrm{rg}\pi(S)$$

□

Corol·lari 13.5.22. *Sigui S una superfície compacta, connexa i de gènere g. Aleshores, si S és orientable,*

$$\chi(S) = 2 - 2g$$

i si S és no orientable, aleshores

$$\chi(S) = 2 - g$$

Demostració. En efecte, se segueix immediatament de la relació entre el rang del grup fonamental i el gènere que hem provat a (**??**),

- si S és orientable, $\chi(S) = 2 - \nabla\}\pi(S) = 2 - 2g$, i
- si S és no orientable, $\chi(S) = 2 - \mathrm{rg}\pi(S) = 2 - g$.

$\square$

Exemple 13.5.23. Com que l'esfera $\mathbb{S}^2$ és simplement connexa, $\mathrm{rg}\pi(\mathbb{S}^2) = 0$, i així tota triangulació de l'esfera té $\chi(\mathcal{T}) = 2$.

Veiem com d'aquí se segueix el resultat provat originalment per Euler.

Si P és un políedre convex, amb V vèrtexs, A arestes i C cares, afegint un vèrtex en l'interior de cada cara, podem obtenir una triangulació $\mathcal{T}$ de P prenent els triangles que defineixen aquests nous vèrtexs i les arestes de P. Aquesta triangulació $\mathcal{T}$ tindrà $v = V + C$, $a = 3A$ i $c = 2A$, i per tant,

$$\chi(\mathcal{T}) = v - a + c = (V + C) - 3A + 2A = V - A + C$$

Donat que P és homeomorf a l'esfera $\mathbb{S}^2$, $\chi(\mathcal{T}) = 2$ i resulta, en definitiva, $V + C = 2 + A$, que és la relació provada per Euler en 1758:

> «In omni solido hedris planis incluso numerus angulorum solidorum una cum numero hedrarum binario superat numerum acierum.»

(En tot sòlid limitat per cares planes el nombre d'angles sòlids juntament amb el nombre de cares supera en dos al nombre d'arestes.

Part III

Grups d'homologia

Introducció

Busquem una cosa semblant al grup fonamental $\pi_1(X)$, on X és un espai topològic, per poder estudiar les seves propietats algebraicament i treure'n conclusions topològiques. Això és l'homologia singular.

Llibres: A.Hatcher, Algebraic Topology; V. Navarro i P. Pascual, Introducció a la topologia algebraica (ed. UB); Greenberg-Harper, Algebraic Topology.

Donat un espai topològic X, definirem els grups $H_0(X)$, $H_1(X)$, etc. que sempre seran grups abelians (avantatge respecte el grup fonamental) i sovint finitament generats.

Podríem pensar que és una versió millorada del grup fonamental però no ho és per vàries raons:

- $H_1(X) = \frac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X),\pi_1(X)]}$, és a dir, és el quocient abelià més gran del grup fonamental. És a dir, que el grup fonamental té més informació que el primer grup d'homologia. Això és molt important per teoria de nusos.

- Podríem estendre els grups d'homotopia a dimensions més grans i aleshores obtindríem de forma general $\pi_k(X) = \{\mathbb{S}^k \to X\}/\sim$ (on $\sim$ és la relació d'homotopia de camins) i de fet, a partir de $k = 2$, són abelians. Realment són millors que els d'homologia però són molt més difícils de calcular per espais relativament senzills.

Capítol 14

Políedres

En aquest capítol es formalitza el concepte de políedre simplicial, que correspon a un subespai de $\mathbb{R}^N$ construït a partir de símplexs, enganxats de forma convenient. Aquests espais estan a la base de les tècniques d'homologia que desenvoluparem en els capítols següents.

Els políedres simplicials són, per la seva pròpia definició, subespais d'un espai afí $\mathbb{R}^N$ i per a ells cal especificar els diferents símplexs que el componen.

14.1 Símplexs i políedres simplicials

Els políedres que anem a introduir en aquest apartat són espais topològics construïts a partir de símplexs. Començarem la secció a través del que anomenarem complex simplicial, que és el conjunt de símplexs que el formen.

En tot el que segueix, $\mathbb{R}^N$ denotarà l'espai afí euclidià de dimensió N amb la topologia induïda per la distància euclidiana, és a dir, la definida per $d(x,y) = \|x-y\|$ per a tot parell de punts $x, y \in \mathbb{R}^N$.

Comencem fent un recordatori de la noció de conjunt convex:

Definició 14.1.1 (Convex)**.** Si $C \subset \mathbb{R}^N$, diem que C és *complex* si per a tota parella $p, q \in C$, $\forall t \in [0,1]$ es compleix que $tp + (1-t)q \in C$. És a dir, que per a tota parella de punts, el segment que els uneix està completament a dins de C.

Definim el nostre "producte essencial" de la secció, el n-símplex o símples n-dimensional.

Definició 14.1.2 (n-símplex)**.** Siguin $v_0, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^N$ tals que $v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0$ són linealment independents, anomenarem *n-símplex* determinat per $v_0, \ldots, v_n$ al més petit subconjunt convex de $\mathbb{R}^N$ que conté $v_0, \ldots, v_n$. El denotarem $\langle v_0, \ldots, v_n \rangle$. En aquest context, es diu que $v_0, \ldots, v_n$ són els *vèrtexs* de $\langle v_0, \ldots, v_n \rangle$.

Observació 14.1.3. *Té sentit parlar del "més petit convex" perquè és fàcil demostrar que la intersecció de convexos és convex.*

Definició 14.1.4. El *n-símplex estàndard* és

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ t_i \geq 0, \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\} = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$$

on $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ i l'1 està en la posició i-ésima. Com a exemples concrets, Δ^1 és un segment en el pla, Δ^2 és un triangle en $\mathbb{R}^3$.

Exemple 14.1.5. Fem exemples de Δ^n. Si $n = 0$, el Δ^0 és un punt, si $n = 1$ tenim Δ^1 igual a un segment, si $n = 2$ tenim Δ^2 igual a un triangle, si $n = 3$ un tetraedre, etc.

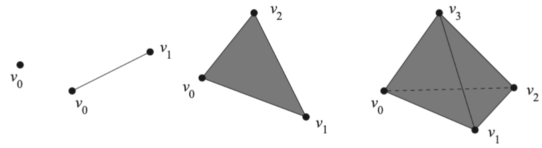


Figura 1.1: Símplexs de dimensions 0, 1, 2 i 3.

Tot símplex és un subconjunt de $\mathbb{R}^N$, i és per tant un espai topològic amb la topologia induïda per la de $\mathbb{R}^N$.

Lema 14.1.6. *(i) Tot n-símplex és homeomorf al n-símplex estàndard.*

(ii) Tot n-símplex és compacte, connex, localment arc-connex i contràctil.

Demostració. Es deixa com a exercici pel lector o lectora. □

Definició 14.1.7. Sigui $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ un n-símplex. Anomenem cares k-dimensionals de $\langle v_0, \ldots, v_n \rangle$ als símplexs $\langle v_{i_0}, \ldots, v_{i_k} \rangle$ amb $0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_k \leq n$. A les cares de dimensió 1 se les sol anomenar arestes.

Per exemple, en Δ^2, que és un triangle, les arestes són cares 1-dimensionals i els vèrtexs són cares 0-dimensionals. Tot el triangle seria una cara 2-dimensional.

Definició 14.1.8 (Complex simplicial)**.** Un *complex simplicial* és un conjunt finit de símplexs de $\mathbb{R}^N$, $K = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$ tals que

(i) Si σ_i és un símplex de K, aleshores totes les cares de σ_i són de K.

(ii) Si σ_i i σ_j són símplexs de K, aleshores $\sigma_i \cap \sigma_j \neq \emptyset$ o bé $\sigma_i \cap \sigma_j$ és una cara de σ_i i de σ_j.

Per simplificar l'exposició, considerarem únicament políedres formats per un nombre finit de símplexs, com en la definició anterior. És possible, però, definir políedres construïts a partir d'un nombre infinit de símplexs. En aquest cas, cal demanar alguna altra propietat a més de les dues de la definició, que eviti, per exemple, considerar $\mathbb{R}$ com un políedre de dimensió zero degut a l'agregació d'infinits 0-símplexs, un per cada punt de $\mathbb{R}$, el que entraria en contradicció amb la noció intuïtiva de dimensió, i que més endavant formalitzarem. Ara però, pel que ens ocupa, no és necessari detallar la definició de complex simplicial infinit.

Definició 14.1.9 (Políedre geomètric)**.** Donat un complex simplicial K, s'anomena *políedre geomètric associat a K*[1], al subespai de $\mathbb{R}^N$

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma,$$

és a dir, al subespai de $\mathbb{R}^N$ definit per la reunió de tots els símplexs de K. Si $P = |K|$, es diu que P és una triangulació de K.

Observem que, per un determinat símplex, el seu políedre geomètric és ell mateix, i.e. $|\sigma| = \sigma$, per σ símplex. Vegem ara uns altres exemples.

[1]Els políedres simplicials són espais topològics fàcilment visualitzables i suficientment generals com per tenir aplicacions significatives. La definició que hem donat es deu a Henri Poincaré, qui va adonar-se de les bones propietats d'aquests espais i els va introduir al voltant de l'any 1899.

Exemple 14.1.10. (a) El símplex Δ^n determina un políedre geomètric.

(b) La vora de Δ^{n+1}, que denotarem $\partial\Delta^{n+1}$ és el complex simplicial que està format per les cares de dimensió $\leq n$ de Δ^{n+1}.

Observació 14.1.11. *Es dona el següent homeomorfisme: $|\partial\Delta^{n+1}| \simeq \mathbb{S}^n$.*

Demostració. Exercici. □

Observació 14.1.12. *Fem alguns apunts interessants sobre els políedres geomètrics. Suposem K un complex simplicial.*

(1) $|K|$ és compacte, localment arc-connex i localment contràctil.

(2) Si X és un espai topològic, considerem $f : |K| \to X$ una aplicació. Aleshores, f és contínua si, i només si, $\forall\sigma \in K$, $f_{|\sigma}$ és contínua.

Corol·lari 14.1.13. *Sigui K un complex simplicial, X un espai topològic i $f : |K| \to X$ una aplicació. Aleshores f és contínua si, i només si, ho és cadascuna de les restriccions $f_{|\sigma}$ a cada símplex σ de K.*

Un dels avantatges que presenten els políedres respecte dels espais topològics en general és que pot introduir-se un concepte de dimensió de manera natural.

Sigui K un complex simplicial. Direm que K és un complex simplicial de dimensió n, o que el políedre $|K|$ és de dimensió n, si n és la més gran de les dimensions de les cares de K.

Definició 14.1.14 (Conjunt de les cares)**.** Notarem $C_p(K)$ el conjunt de les cares p-dimensionals de K i c_p el nombre de cares p-dimensionals de K, i.e. $c_p := \#C_p(K)$.

Exemples ben senzills mostren que c_p no són invariants topològics d'un políedre. Per exemple, tots els polígons regulars d'n costats, P_n, són homeomorfs, mentre que $c_0(P_n) = n$ i $c_1(P_n) = n$, varien en funció de n.

Definició 14.1.15 (Característica d'Euler)**.** Sigui K un complex simplicial. Es defineix la *característica d'Euler*[2] de K com la suma alternada

$$\chi(K) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i c_i = c_0 - c_1 + c_2 - \cdots$$

Com que els políedres que considerem són sempre finits, la suma que defineix la característica d'Euler és un enter finit, i.e. per tot K complex simplicial finit, $\chi(K) \in \mathbb{Z}$.

Exemple 14.1.16. (a) Sigui K el complex simplicial que correspon a una triangulació de la superfície d'un cub com la indicada a la figura **??**. Aleshores, $\chi(K) = 8 - 18 + 12 = 2$.

(b) La característica d'Euler d'un símplex n-dimensional estàndard, Δ^n, és $\chi(\Delta^n) = 1$. En efecte, Δ^n té $n+1$ vèrtexs i les cares p-dimensionals corresponen a totes les eleccions possibles de $p + 1$ vèrtexs diferents, per tant es té

$$c_p(\Delta^n) = \binom{n+1}{p+1}$$

i, en definitiva,

$$\chi(\Delta^n) = \binom{n+1}{1} - \binom{n+1}{2} + \cdots + (-1)^n\binom{n+1}{n+1} = 1$$

[2] També coneguda com a característica d'Euler-Poincaré

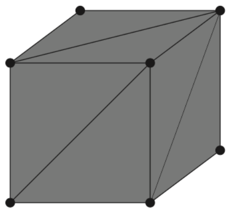


Figura 14.1: Triangulació de la superfície d'un cub

(c) La característica d'Euler de la vora de Δ^n, i.e. $\partial\Delta^n$, és

$$\chi(\partial\Delta^n) = 1 - (-1)^n = 1 + (-1)^{n-1}$$

En els exemples anteriors hem vist que, tant la característica d'Euler de la superfície d'un cub com la de $\partial\Delta^3$ són iguals a 2. Aquests dos espais són homeomorfs, cosa que ens porta a plantejar-nos la següent pregunta natural: són la dimensió i la característica d'Euler invariants topològics? És a dir, si K i L són complexos simplicials tals que els políedres associats, $|K|$ i $|L|$ respectivament, són espais homeomorfs, és cert que la dimensió i la característica d'Euler de K i L són iguals?

Més endavant provarem que la resposta és afirmativa i que, fins i tot, la característica d'Euler és un invariant d'homotopia. En particular, per exemple, en resultarà que $\partial\Delta^2$ i $\partial\Delta^3$ són homotòpicament equivalents.

14.2 Aplicacions simplicials

Per a què la noció d'espai topològic sigui d'utilitat és essencial disposar de la noció d'aplicació contínua entre espais topològics, de forma que es tingui una categoria, la categoria d'espais topològics **Top**. En el context simplicial, la noció corresponent és la d'aplicació simplicial.

Definició 14.2.1 (Aplicació simplicial)**.** Siguin K i L complexos simplicials, siguin V_k i V_L els (conjunts de) vèrtexs de K i L. Sigui $\varphi_0 : V_K \to V_L$ tal que si $\{p_0, \dots, p_r\} \subset V_K$ determinen un símplex de K, aleshores $\{\varphi_0(p_0), \dots, \varphi_0(p_r)\}$ determina un símplex en L. Podem definir

$$\begin{aligned} \varphi : K &\longrightarrow L \\ \sigma &\quad \varphi(\sigma) \end{aligned}$$

on $\varphi(\sigma)$ es diu *envolvent connexa de* $\{\varphi_0(p_0), \dots, \varphi_0(p_r)\}$. Es diu que φ és *simplicial.*

Definició 14.2.2. Siguin K, L complexos simplicials, sigui $\varphi : K \to L$ simplicial. Denotarem $|\varphi|$ l'aplicació

$$|\varphi| : |K| \longrightarrow |L|$$

tal que si $\sigma = \langle v_0, \dots, v_p\rangle \in |K|$, aleshores

$$|\varphi|\left(\sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i \varphi_0(v_i)$$

on les λ_i són les *coordenades baricèntriques* en σ.

Definició 14.2.3 (Lineal a trossos)**.** Si P i Q són políedres geomètrics i $f : P \to Q$ una aplicació, es diu que f és *lineal a trossos* (o a peces) si existeixen complexos simplicials K i L tals que $P = |K|$, $Q = |L|$, existeix $\varphi : K \to L$ simplicial tal que $f = |\varphi|$.

Observació 14.2.4. *Els complexos simplicials formen una categoria i*

$$|\bullet| : \mathrm{CompSim} \to \mathrm{Top}$$

és un functor.

Definició 14.2.5 (Triangulació)**.** Si X és un espai topològic, una *triangulació* de X és (K, φ) on K és un complex simplicial i $\varphi : X \to |K|$ és un homeomorfisme. Direm que X és *triangulable* si admet com a mínim una triangulació.

Exemple 14.2.6. (a) La bola $\mathbb{B}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\} \simeq |\Delta^n|$ és triangulable, ja que és homeomorfa a un n-símplex.

(b) L'esfera de dimensió n, $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \|x\| = 1\}$, és un espai triangulable ja que és homeomorfa al políedre $\partial\Delta^{n+1}$.

Capítol 15

Homologia simplicial

Aquest capítol és una introducció a l'homologia simplicial dels políedres. Hem vist en el capítol anterior com associar a un políedre qualsevol K un enter $\chi(K)$, la característica d'Euler, però com podem compara les característiques d'Euler de diferents políedres? Si $f : |K| \to |L|$ és una aplicació contínua o, fins i tot, simplicial, la definició de χ no permet establir una relació entre $\chi(K)$ i $\chi(L)$. Veurem en aquest capítol que la característica d'Euler es pot calcular a partir dels grups d'homologia simplicial, i que l'aplicació simplicial f indueix un morfisme dels grups d'homologia simplicial de K en els de L. Això farà possible, en alguns casos, establir una relació entre $\chi(K)$ i $\chi(L)$.

15.1 Cadenes d'un políedre. Homologia simplicial

Definició 15.1.1 (Símplex ordenat)**.** Si $\sigma = \langle v_0, \ldots, v_n \rangle$ és un símplex, diem que és un *símplex ordenat* si hem fixat un ordre total en el conjunt de vèrtexs $\{v_0, \ldots, v_n\}$. Denotarem $[v_0, \ldots, v_n]$ un símplex ordenat tal que $v_0 < v_1 < \cdots < v_n$. Si K és un complex simplicial, direm que és *ordenat* si hem fixat un ordre total en V_k, és a dir, si $\forall \sigma \in K$ està ordenat.

Intuïtivament, ordenar els vèrtexs d'un símplex és una forma d'orientar aquest símplex com mostra la figura **??**.

Al llarg d'aquest capítol, excepte si es diu el contrari, suposarem que els complexs simplicials que apareixen estan ordenats.

Definició 15.1.2 (Grup de cadenes p-dimensionals)**.** Sigui K un complex simplicial ordenat. Prenem l'anell

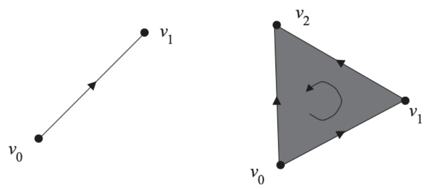


Figura 15.1: Símplexs ordenats

$R = \mathbb{Z}$. Donat $p \geq 0$, anomenarem *grup de cadenes p-dimensionals* de K a

$$C_p(K) = \bigoplus_{\substack{\sigma \in K \\ \dim \sigma = p \\ \text{ordenat}}} \mathbb{Z}[\sigma] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i \ : \ \lambda_i \in \mathbb{Z}, \ \sigma_i \text{ símplex ordenat } p\text{-dimensional} \right\}$$

és a dir, el grup abelià lliure generat pel conjunt de cares p-dimensionals ordenades

Notem que si $p > \dim K$, aleshores $C_p(K) = 0$.

Exemple 15.1.3. Si $K = [v_0, v_1, v_2]$, tenim

$$\begin{aligned} C_0(K) &= \mathbb{Z}[v_0] \oplus \mathbb{Z}[v_1] \oplus \mathbb{Z}[v_2] \cong \mathbb{Z}^3 \\ C_1(K) &= \mathbb{Z}[v_0, v_1] \oplus \mathbb{Z}[v_1, v_2] \oplus \mathbb{Z}[v_0, v_2] \cong \mathbb{Z}^3 \\ C_2(K) &= \mathbb{Z}[v_0, v_1, v_2] \cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

i, en general, per a un n-símplex, Δ^n, tenim

$$C_p(\Delta^n) \cong \mathbb{Z}^{\binom{n+1}{p+1}} \qquad p \leq n.$$

Les arestes $[v_0, v_1]$, $[v_0, v_2]$ i $[v_1, v_2]$ de l'exemple anterior formen la vora del 2-símplex Δ^2, si recorrem $[v_0, v_2]$ en sentit invers. L'operador vora que definirem a continuació és la versió algebraica d'aquest concepte geomètric. Observem, abans de donar aquesta definició, que com els grups de cadenes són grups abelians lliures, de base els símplexs de diferents dimensions, per definir un morfisme entre aquests grups és suficient definir-lo sobre les cares i estendre'l per linealitat.

Definició 15.1.4 (Operador vora)**.** Sigui K complex simplicial ordenat. Donat $p \geq 1$, anomenarem *operador vora* $\partial_p : C_p(K) \to C_{p-1}(K)$ al morfisme de grups que, sobre els generadors està definit per

$$\partial_p([v_{i_0}, \ldots, v_{i_p}]) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k [v_{i_0}, \cdots, \hat{v}_{i_k}, \ldots, v_{i_p}]$$

on $\hat{v}_{i_k}$ vol dir que excloem el v_{i_k}.

Exemple 15.1.5. Per exemple, per un 1-símplex $\Delta^1 = [v_0, v_1]$ trobem

$$\begin{aligned} \partial_1 : C_1(\Delta^1) &\longrightarrow C_0(\Delta^1) \\ [v_0, v_1] &\longmapsto [v_1] - [v_0] \end{aligned}$$

és a dir, la vora d'un 1-símplex ordenat indica quin dels vèrtexs és punt inicial i quin és el punt final. En el cas d'un 2-símplex $\Delta^2 = [v_0, v_1, v_2]$ tindrem

$$\partial_2(\Delta^2) = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$$

Per tal de simplificar la notació, escriurem sovint l'operador vora sense indicar el subíndex, és a dir, ∂ per indicar ∂_p.

A continuació veurem un resultat que afirma que la composició de dos operadors vora "seguits" és nul·la, és a dir, que $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$, o dit d'una manera més compacta, $\partial^2 = 0$. Vegem un exemple pràctic d'això: prenem Δ^2 el 2-símplex ordenat $[v_0, v_1, v_2]$. Aleshores,

$$\partial_1(\partial_2(\Delta^2)) = \partial_1([v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]) = \cancel{[v_2]} - \cancel{[v_1]} - \cancel{[v_2]} + \cancel{[v_0]} + \cancel{[v_1]} - \cancel{[v_0]} = 0$$

Proposició 15.1.6. *Sigui K un complex simplicial ordenat. Llavors, $\forall p \geq 0$, $\partial_{p+1} \circ \partial_p = 0$. És a dir, la composició*

$$C_{p+1}(K) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K)$$

és nul·la per a tot $p \geq 1$, i.e. $\partial^2 = 0$.

Demostració. Sigui $\sigma = [v_{i_0}, \ldots, v_{i_{p+1}}]$ un complex simplicial ordenat.

$$\partial(\partial([v_{i_0}, \ldots, v_{i_{p+1}}]) = \partial\left(\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k[v_{i_0}, \ldots, \hat{v}_{i_k}, \ldots, v_{i_{p+1}}]\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\left(\sum_{\ell<k}(-1)^\ell[v_{i_0}, \ldots, \hat{v}_{i_\ell}, \ldots, \hat{v}_{i_k}, \ldots, v_{i_{p+1}}] + \sum_{\ell>k}[v_{i_0}, \ldots, \hat{v}_{i_k}, \ldots, \hat{v}_{i_\ell}, \ldots, v_{i_{p+1}}]\right) =$$

$$= \sum_{0\leq\ell<k\leq p+1}\left((-1)^{\ell+k} + (-1)^{\ell+k-1}\right)[v_{i_0}, \ldots, \hat{v}_{i_\ell}, \ldots, \hat{v}_{i_k}, \ldots, v_{i_{p+1}}] = 0$$

□

Si K és un complex simplicial de dimensió n, els grups de cadenes simplicials p-dimensionals i els operadors vora corresponents, formen una successió de grups abelians lliures finitament generats

$$C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2}(K) \xrightarrow{\partial_{n-2}} \cdots \longrightarrow \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \tag{15.1}$$

Definició 15.1.7 (Complex de cadenes simplicials)**.** A aquesta successió de grups abelians i morfismes de grups (**??**) se l'anomena *complex de cadenes simplicials* del complex simplicial K, i es denota per $C_\bullet(K)$.

Per tot $p \geq 0$, ∂_p és un morfisme de grups i, per tant, el nucli i la imatge de ∂_p són subgrups de $C_p(K)$ i $C_{p-1}(K)$ respectivament. Es defineix el grup de *cicles p-dimensionals* de K com el nucli de ∂_p i es denota

$$Z_p(K) := \ker(\partial_p : C_p(K) \to C_{p-1}(K)),$$

i el grup de *vores p-dimensionals* de K com la imatge de ∂_{p+1}, i es denota

$$B_p(K) := \mathrm{Im}(\partial_{p+1} : C_{p+1}(K) \to C_p(K)).$$

Sovint obviaré la notació $Z_p(K)$ i posaré $\ker \partial_p$ quan es sobreentengui i el mateix per $B_p(K)$ amb $\mathrm{Im}(\partial_{p+1})$.

Lema 15.1.8. *Per a tot $p \geq 0$, es verifica $B_p(K) \subseteq Z_p(K)$.*

Demostració. Si $z \in B_p(K)$, llavors existeix $c \in C_{p+1}(K)$ tal que $z = \partial_{p+1}(c)$ i per tant

$$\partial_p(z) = \partial_p(\partial_{p+1}(c)) = 0$$

per la proposició anterior. □

Definició 15.1.9 (Grup d'homologia)**.** Sigui K un complex simplicial. Per a tot $p \geq 0$, es defineix el *grup d'homologia simplicial p-éssim* de K com el grup quocient

$$H_p(K) := Z_p(K)/B_p(K) = \ker \partial_p/\mathrm{Im}\partial_{p+1}$$

Notem que $H_p(K) = 0$ si $p > \dim K$.

Els elements dels grups d'homologia $H_p(K)$ són així classes d'equivalència de cicles $z \in Z_p(K)$. Denotarem aquestes classes per $[z]$, i direm que el cicle z és un representant de la classe $[z]$. Quan dos cicles z i z' defineixen la mateixa classe, és a dir, quan existeix una cadena $c \in C_{p+1}(K)$ tal que $z - z' = \partial(c)$, es diu que z i z' són *cicles homòlegs*. Els grups d0homologia simplicial d'un políedre varen ser introduïts per H. Poincaré l'any 1895.

Presentem a continuació alguns exemples elementals que començaran a apuntar l'interès d'aquesta definició. Els càlculs, encara senzills, il·lustren també com podem raonar quan treballem amb classes d'homologia.

Exemple 15.1.10. (1) Sigui K el complex simplicial de dimensió 1 donat per $K_{\max} = \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}\}$ ordenat per $v_0 < v_1 < v_2$. Aleshores tindrem

$$\begin{aligned} C_0(K) &= \mathbb{Z}\,[v_0] \oplus \mathbb{Z}\,[v_1] \oplus \mathbb{Z}\,[v_2]\,, \\ C_1(K) &= \mathbb{Z}\,[v_0, v_1] \oplus \mathbb{Z}\,[v_1, v_2] \end{aligned}$$

i el complex de cadenes de K es redueix a un morfisme $\partial : C_1(P) \to C_0(P)$, que opera en la forma

$$\partial[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0], \qquad \partial[v_1, v_2] = [v_2] - [v_1].$$

és a dir, es redueix a un morfisme entre un grup abelià lliure de rang 2 i un grup abelià lliure de rang 3, que té per matriu

$$M_\partial = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on represento les columnes com els vectors imatge del ∂ en la base $[v_1], [v_2], [v_3]$. Per tant,

$$H_0(K) = \frac{Z_0(K)}{B_0(K)} = \frac{C_0(K)}{B_0(K)} = \frac{\mathbb{Z}[v_0] \oplus \mathbb{Z}[v_1] \oplus \mathbb{Z}[v_2]}{\langle [v_1] - [v_0], [v_2] - [v_1] \rangle} \cong \frac{\mathbb{Z}^3}{\langle [v_1] - [v_0], [v_2] - [v_1] \rangle}$$

Aquí per calcular això és molt senzill: tenim a sota uns generadors que són $\langle \partial[v_0, v_1], \partial[v_1, v_2] \rangle$. Aquests són linealment independents i, a més, la matriu d'aquests generadors, que és M_∂ abans definida, té rang 2 (es pot verificar amb un simple càlcul). Aleshores, el que hem de fer ara és prendre com a base de $\mathbb{Z}^3$ un conjunt generat per aquests dos vectors i un tercer qualsevol, diguem-li w. Aleshores tenim

$$H_0(K) \cong \frac{\langle \partial[v_0, v_1], \partial[v_1, v_2], w \rangle}{\langle [v_1] - [v_0], [v_2] - [v_1] \rangle} \cong \frac{\langle \partial[v_0, v_1] \rangle \oplus \langle \partial[v_1, v_2] \rangle \oplus \langle w \rangle}{\langle \partial[v_0, v_1] \rangle \oplus \langle \partial[v_1, v_2] \rangle} \cong \frac{\mathbb{Z}^3}{\mathbb{Z}^2} \cong \mathbb{Z}.$$

(2) Considerem ara $K = \mathrm{sk}_1(\Delta^2)$, l'esquelet d'un 2-símplex de vèrtexs $\{v_0, v_1, v_2\}$. Tenim

$$C_0(K) = \mathbb{Z}[v_0] \oplus \mathbb{Z}[v_1] \oplus \mathbb{Z}[v_2],$$

$$C_1(K) = \mathbb{Z}[v_0, v_1] \oplus \mathbb{Z}[v_1, v_2] \oplus \mathbb{Z}[v_0, v_2]$$

i llavors tenim un únic morfisme $\partial : C_1(K) \to C_0(K)$ que ve donat per

$$\partial[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0], \quad \partial[v_1, v_2] = [v_2] - [v_1], \quad \partial[v_0, v_2] = [v_2] - [v_0]$$

i així la seva matriu quedarà

$$M_\partial = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'aquesta manera, calculem $H_0 = \ker \partial_0 / \mathrm{Im}\partial = C_0(K)/\mathrm{Im}\partial$. Com que $\mathrm{Im}\partial$ genera un espai de dimensió 2, doncs la matriu és de rang 2, tenim així que $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$. De la mateixa manera calculem $H_1(K) = \ker \partial \cong \mathbb{Z}$.

(3) Aquest exemple pertany a l'exercici 17 de la llista de símplexs. Volem determinar l'homologia de $K = \mathrm{sk}_2(\Delta^3) = \partial\Delta^3$. Això és el tetraedre buidat per dins. Aquí tenim les següents cares

$$C_2(K) = \mathbb{Z}[v_0, v_1, v_2] \oplus \mathbb{Z}[v_0, v_1, v_3] \oplus \mathbb{Z}[v_0, v_2, v_3] \oplus \mathbb{Z}[v_1, v_2, v_3],$$

$$C_1(K) = \mathbb{Z}[v_0, v_1] \oplus \mathbb{Z}[v_0, v_2] \oplus \mathbb{Z}[v_0, v_3] \oplus \mathbb{Z}[v_1, v_2] \oplus \mathbb{Z}[v_1, v_3] \oplus \mathbb{Z}[v_2, v_3],$$

$$C_0(K) = \mathbb{Z}[v_0] \oplus \mathbb{Z}[v_1] \oplus \mathbb{Z}[v_2]$$

i la cadena quedarà

$$0 \longrightarrow C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Ara hem de calcular les matrius de ∂_2 i de ∂_1, a poc a poc mirant les seves imatges. Quedaran

$$M_{\partial_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad M_{\partial_1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ara hem de calcular $\ker \partial_i$ i $\mathrm{Im}\partial_i$, $i = 1, 2$.

Nota. Si $M = \mathbb{Z}^n$ i $e_1, \ldots, e_k$ són vectors, amb $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de M, llavors, la matriu que té per columnes $e_1, \ldots, e_k$ expressats en la base $\{v_i\}_i$ no sempre poden completar-se $e_1, \ldots, e_k, e^*_{k+1}, \ldots, e^*_n$ fins a obtenir una base. Si existeix algun menor $k \times k$ de la matriu amb determinant igual a ± 1 aleshores sí que es pot. En efecte, suposem (s.p.g.) que el dona les primeres k files. Ara completem $e_1, \ldots, e_k$ amb $v_{k+1}, \ldots, v_n$. La idea és poder calcular la inversa i com estem a $\mathbb{Z}$ haurà de ser $\det \in \mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$. Llavors, un cop vist que es pot en cas que el determinant sigui ± 1. Ampliem la base $e_1, \ldots, e_k$ amb els vectors de la base inicial $v_{k+1}, \ldots, v_n$.

Calculem els grups d'homologia.

(i) $H_0(K) = \frac{C_0(K)}{\mathrm{Im}\partial_1}$. $\mathrm{Im}\partial_1$ està formada per les columnes de M_{∂_1}. La matriu M_{∂_1} té les tres primers columnes linealment independents i la resta és combinació lineal, i.e. és de rang 3, i si prenem un menor 3×3 ens dona determinant 1. Així doncs, en virtut de la nota prèvia, podem fer

$$H_0(K) = \frac{C_0(K)}{\mathrm{Im}\partial_1} \cong \frac{\mathbb{Z}^4}{\langle \partial_1[v_0, v_1], \partial_1[v_0, v_2], \partial_1[v_1, v_2] \rangle} \cong \mathbb{Z}$$

Ara explicaré l'últim isomorfisme. El cas és que $\mathrm{Im}\partial_1$ està generada per aquelles tres imatges que he escrit, pel tema que la matriu M_{∂_1} té les tres primeres files linealment independents (per això he escollit les tres primeres imatges). Aleshores, fem el que diu la nota i podem ampliar una base de $\mathbb{Z}^4$ amb els vectors de sota i un de més. Aleshores es "tatxen" els que són iguals i només queda $\mathbb{Z}[w]$, on w és qualsevol vector aleatori linealment independent amb els de sota i ja això és $\mathbb{Z}$.

(ii) $H_1(K) = \frac{\ker \partial_1}{\mathrm{Im}\partial_2}$. Ja sabem per una proposició anterior que $\mathrm{Im}\partial_2 \subseteq \ker \partial_2$ i en aquest cas concret, hi ha igualtat. En efecte, si calculem manualment $\ker \partial_1$ podem obtenir

$$\ker \partial_1 = \langle (1, 0, -1, 1, 0, 1), (0, 1, -1, 0, 0, -1), (0, 0, 0, 1, -1, 1) \rangle$$

i així calculem que té rang 3. Veiem que, de totes formes, no calia calcular per esbrinar el rang, ja que com que $C_1(K)/\ker\partial_1 \cong \mathrm{Im}\partial_1$ pel Primer Teorema d'Isomorfia de grups, podíem saber el rang sabent els altres dos.

Llavors, tenim que el rang de $\ker\partial_1$ és 3. Ara calculem $\mathrm{Im}\partial_2$ que fent el tema de les columnes linealment independents i tal veiem que també té rang 3. Com que tenim $\ker\partial_1 \subseteq \mathrm{Im}\partial_2$ i igualtat de rangs, tenim igualtat absoluta. Així doncs, $H_1(K) = 0$.

(iii) $H_2(K) = \ker\partial_2/0 = \ker\partial_2$. Com que, un altre cop pel Primer Teorema d'Isomorfia, tenim que $\frac{C_2(K)}{\ker\partial_2} \cong \mathrm{Im}\partial_2$ i ja sabem quines són les dimensions de $\mathrm{Im}\partial_2$ i $C_2(K)$, obtenim que $\ker\partial_2 \cong \mathbb{Z}$. Per tant, $H_2(K) \cong \mathbb{Z}$.

Proposició 15.1.11. *Sigui K un complex simplicial ordenat. Els grups d'homologia $H_p(K)$ són grups abelians finitament generats, per a tot $p \geq 0$, i admeten una descomposició de la forma*

$$H_p(K) \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_m\mathbb{Z}$$

on $d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{Z}$ compleixen $d_1 \mid \cdots \mid d_m$.

Demostració. En efecte, els grups de cicles $Z_p(K)$ són finitament generats ja que són subgrups dels grups de cadenes $C_p(K)$, que són finitament generats per construcció. Com que el grup d'homologia $H_p(K)$ és un quocient del grup de cicles $Z_p(K)$, també és finitament generat. La resta és, doncs, conseqüència del teorema d'estructura dels grups abelians finitament generats, que es pot consultar a l'apèndix. □

Definició 15.1.12 (Nombre de Betty)**.** Sigui K un complex simplicial i $p \geq 0$ un enter. S'anomena *nombre de Betty p-éssim* de K al rang del grup d'homologia $H_p(K)$. Denotarem aquest nombre per $b_p(K)$.

15.2 Complexos de R-mòduls

El càlcul de l'homologia d'un políedre a partir de la definició pot resultar molt feixuc, sinó impossible, pel que és convenient disposar de tècniques de càlcul més àgils. En aquesta i la següent secció introduirem els complexos de $\mathbb{R}$-mòduls i les operacions bàsiques entre ells, que constituiran l'eïna algebraica en la que es fonamenta l'homologia.

En tot el que segueix R serà un anell commutatiu i unitari. Per fixar les idees es pot pensar en l'anell dels enters $\mathbb{Z}$, o en un cos de característica zero com $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, encara que aquestes restriccions no són necessàries i, com veurem més endavant al parlar del Teorema de Borsuk-Ulam, és convenient no excloure els anells de característica arbitrària com $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Definició 15.2.1 (R-mòdul)**.** Sigui R un anell commutatiu amb unitat[1]. Sigui M un conjunt amb dues operacions que escriurem per $+$ i $\cdot$ de manera que

(1) $(M, +)$ és un grup abelià.

(2) $\cdot : R \times M \to M$ verifica

  (a) $(rs)x = r(sx)$, $\forall r, s \in R$, $\forall x \in M$;

  (b) $(r + s)x = rx + sx$, $\forall r, s \in R$, $\forall x \in M$;

  (c) $1_R \cdot x = x$, $\forall x \in M$.

[1]Com un cos, però sense la propietat que tot element tret el zero té inversa. Per exemple: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}$, etc.

Direm que $(M, +, \cdot\,)$ és un *R-mòdul*.

Exemple 15.2.2. (1) Si $R = k$ és un cos, aleshores R-mòdul és el mateix que R-espai vectorial.

(2) Si $R = \mathbb{Z}$, aleshores R-mòdul és el mateix que grup abelià.

(3) Si R és un anell commutatiu i unitari, $R \oplus \cdots \oplus R$ és un R-mòdul.

Definició 15.2.3 (Morfisme de R-mòduls)**.** Si M, N són R-mòduls, una aplicació $\varphi : M \to N$ és un *morfisme de R-mòduls* si

(i) $\varphi(n + m) = \varphi(n) + \varphi(m)$;

(ii) $\varphi(\lambda m) = \lambda\varphi(m)$

Si existeix $\psi : N \to M$ morfisme de R-mòduls tals que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_N$ i $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_M$, aleshores direm que φ és un *isomorfisme de $\mathbb{R}$-mòduls*.

Definició 15.2.4. Sigui $\varphi : M \to N$ un morfisme de R-mòduls. Definim el nucli i la imatge, respectivament, com

$$\ker\varphi = \{x \in M \;:\; \varphi(x) = 0\}$$

$$\mathrm{Im}\varphi = \varphi(M)$$

Teorema 15.2.5 (Teorema d'isomorfia)**.** *$M/\ker\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$ és isomorfisme de R-mòduls.*

Demostració. Es deixa com a exercici. □

Definició 15.2.6 (Lliure finitament generat)**.** Si M és un R-mòdul, es diu que és *lliure finitament generat* si $M \cong R \oplus \overset{n)}{\cdots} \oplus R$ per algun $n \geq 0$.

Definició 15.2.7 (Finitament generat)**.** Si M és un R-mòdul, es diu que M és finitament generat si existeix un morfisme exhaustiu de R-mòduls

$$R \oplus \overset{n)}{\cdots} \oplus R \twoheadrightarrow M$$

Exemple 15.2.8. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ és un $\mathbb{Z}$-mòdul no lliure, però sí finitament generat.

Definició 15.2.9 (Complex de cadenes)**.** Un complex de cadenes de R-mòduls és una successió $\{M_n\}_{n\geq 0}$ de R-mòduls i una fórmula de morfismes de R-mòduls $\{\partial_n : M_n \to M_{n-1}\}_{n\geq 1}$ que verifica que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ per a tot $n \geq 1$. Direm que és finit si $\exists n_0 \geq 0$ tal que $M_n = 0$ per tot $n \geq 0$.

Les aplicacions ∂_n s'anomenen diferencials. Denotarem $(M_\bullet, \partial_\bullet)$, o de vegades simplement $M_\bullet$ el complex determinat per $\{M_n\}_{n\geq 0}$ i $\{\partial_n : M_n \to M_{n-1}\}_{n\geq 1}$. També ho denotarem

$$\cdots \to M_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots M_2 \xrightarrow{\partial_2} M_1 \xrightarrow{\partial_1} M_0$$

Definició 15.2.10. Donat un complex de cadenes $(M_\bullet, \partial_\bullet)$

(i) Anomenarem *p-cicles* de $M_\bullet$

$$\mathcal{Z}_p(M_\bullet) = \ker\partial_p \subset M_p;$$

(ii) Anomenarem *p-vores* de $M_\bullet$

$$B_p(M_\bullet) = \mathrm{Im}\partial_{p+1} \subset M_p$$

(iii) Anomenem *homologia p-ésima* de $M_\bullet$ a

$$H_p(M_\bullet) := \frac{\mathcal{Z}_p(M_\bullet)}{B_p(M_\bullet)}.$$

Observació 15.2.11. $B_p(M_\bullet) \subset \mathcal{Z}_p(M_\bullet)$, $\forall p \geq 0$.

Definició 15.2.12 (Successió)**.** Si tenim $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ direm que és una successió si $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g$. En general, $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} M_{n+1}$ és una successió si $\mathrm{Im} f_n \subset \ker f_{n+1}$. Direm que la successió és *exacta* si $\mathrm{Im} f = \ker g$ (i, en general, $\mathrm{Im} f_n = \ker f_{n+1}$, $\forall n$)

Definició 15.2.13. Un complex de cadenes és *cíclic* si, com a successió, és exacte, és a dir, $\ker \partial_p = \mathrm{Im}\partial_{p+1}$, $\forall p \geq 0$.

Observació 15.2.14. *Un complex de cadenes* $(M_\bullet, \partial_\bullet)$ *és acíclic si* $H_p(M_\bullet) = 0$, $\forall p$.

Exemple 15.2.15. (1) Suposem que tenim $S : 0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2$ on f és un morfisme de grups abelians. Llavors, S és exacta si, i només si, $\ker f = \{0\}$, i.e. f és injectiva.

(2) $S' M_1 \xrightarrow{f} M_2 \to 0$. Aleshores, S' és exacta si, i només si, $\mathrm{Im} f = M_2$ i.e. si, i només si, f és exhaustiva.

Definició 15.2.16 (Homologia simplicial, Poincaré 1895)**.** Sigui K un complex simplicial ordenat. Tenim un complex de cadenes $(C_\bullet(K), \partial_\bullet)$. Donat $p \geq 0$,

$$Z_p(K) = Z_p(C_\bullet(K)) = \ker \partial_p \subseteq M_p;$$
$$B_p(K) = B_p(C_\bullet(K)) = \mathrm{im}\partial_{p+1} \subseteq M_p.$$

Es defineix l'homologia simplicial de K com

$$H_p(K) = H_p(C_\bullet(K), \partial_\bullet), \qquad p \geq 0$$

Observem que si el complex $M_\bullet$ és exacte en M_n, és a dir, $\mathrm{im}\partial_{n+1} = \ker \partial_n$, aleshores $H_n(M_\bullet) = 0$. En aquest sentit, els R-mòduls $H_p(M_\bullet)$ mesuren la manca d'exactitud del complex $M_\bullet$ en cada grau.

Sovint es diu que un complex de R-mòduls $M_\bullet$ és acíclic si és una successió exacta, és a dir, si $H_p(M_\bullet) = 0$ per a tot $p \geq 0$.

Exemple 15.2.17. 1) K té cares maximals $[v_0, v_1]$ i $[v_1, v_2]$. Tenim

$$C_0(K) = \mathbb{Z}v_0 \oplus \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2$$

$$C_1(K) = \mathbb{Z}[v_0, v_1] \oplus \mathbb{Z}[v_1, v_2]$$

$$0 \longrightarrow C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

$$H_0(K) = C_0(K)/\mathrm{Im}\partial_1 \qquad H_1(K) = \ker \partial_1$$

Exemple 15.2.18. $K_{\max}\{[v_0, v_1], [v_0, v_2], [v_1, v_2]\}$. Aleshores, $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(K) \cong \mathbb{Z}$ i $H_p(K) \cong 0$ si $p > 1$. Demostrar això queda com a exercici.

Sigui K un complex simplicial ordenat. el complex de cadenes simplicials $C_\bullet(K)$ de K és un exemple de complex de $\mathbb{Z}$-mòduls. En aquest cas tots els grups abelians són lliures i el complex és finit. En diverses aplicacions ens interessarà disposar d'un complex de cadenes simplicials associat a K amb coeficients en un anell R, diferent de $\mathbb{Z}$.

Definició 15.2.19. Sigui K un complex simplicial ordenat, R un anell commutatiu, i $p \geq 0$. Es defineix el p-éssim R-mòdul de cadenes simplicials de K amb coeficients en R, que denotarem per $C_p(K;R)$, com el R-mòdul lliure generat per les cares ordenades de K de dimensió p.

Tenim també $\partial_p : C_p(K,R) \to C_{p-1}(K)$, $\forall p$ que és un morfisme en R-mòduls tal que $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$, $\forall p$. D'aquesta manera es té definit un complex de R-mòduls $(C_\bullet(K;R), \partial_\bullet)$.

Definició 15.2.20. Sigui K un complex simplicial, i R un anell commutatiu. Per a tot $p \geq 0$, es defineix el p-éssim R-mòdul d'homologia de K amb coeficients en R per

$$H_p(K,R) := H_p(C_\bullet(K,R), \partial_\bullet)$$

Observem que si R és un domini d'ideals principals, tot submòdul d'un R-mòdul finitament generat és finitament generat i, així, els grups $H_p(K;R)$ són R-mòduls finitament generats. En particular, si R és un cos k, aleshores $\forall p \geq 0$, els grups $H_p(K;k)$ són k-espais vectorials de dimensió finita.

Definició 15.2.21 (Nombres de Betti)**.** Suposem que K és un complex simplicial ordenat i k un cos. Anomenarem *nombres de Betti* de K amb coeficients en k a

$$b_p(K,k) = \dim_k H_p(K,k)$$

Si $k = \mathbb{Q}$ ja no es posa el cos i es denota directament per $b_p(K) = b_p(K,\mathbb{Q})$. És la definició que hem donat en la secció anterior (**??**).

Exercici 11. $b_p(k) = \mathrm{rg} H_p(K,\mathbb{Z})$ *i* $H_p(K,\mathbb{Q}) = H_p(K,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Com $C_p(K;k) = 0$ si $p > \dim K$, els nombres de Betti d'un complex simplicial K són zero per damunt de la seva dimensió, i.e. $b_p(K;k) = 0$ si $p > n = \dim K$, qualsevol que sigui el cos k. Però, per sota de la dimensió de K, els nombres de Betti $b_p(K;k)$ depenen en general del cos k. Per exemple, més endavant veurem que $b_2(\mathbb{P}^2,\mathbb{Q}) = 0$ i que $b_2(\mathbb{P}^2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 1$. Veurem, a continuació, que la seva suma alternada sí que és independent del cos k.

Recordem que si K és un políedre, es definia la característica d'Euler de K és

$$\chi(K) = c_0 - c_1 + c_2 \cdots = \sum_{i \geq 0} (-1)^i c_i$$

on, si k és un cos,

$$c_i(K) = \dim_k C_i(K,k)$$

és el nombre de cares p-dimensionals de K. De la definició de $C_p(K;k)$ se segueix la igualtat

$$\chi(K) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p \dim_k C_p(K,k).$$

Teorema 15.2.22. *Sigui $M_\bullet$ un complex de cadenes finit, de k-espais vectorials de dimensió finita. Definim*

$$\chi(M_\bullet) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim M_i$$

$$\chi(H_\bullet(M_\bullet)) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim H_i(M_\bullet, \partial_\bullet).$$

Aleshores, $\chi(M_\bullet) = \chi(H_\bullet(M_\bullet))$.

Exemple 15.2.23. Suposem la cadena

$$0 \xrightarrow{\partial_3} M_2 \xrightarrow{\partial_2} M_1 \xrightarrow{\partial_1} M_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

i diem $m_i := \dim_k M_i$. Aleshores $\chi(M_\bullet) = m_0 - m_1 + m_2$ i

$$\chi(H_\bullet(M_\bullet)) = \dim\left(\frac{\ker \partial_0}{\mathrm{Im}\partial_1}\right) - \dim\left(\frac{\ker \partial_1}{\mathrm{Im}\partial_2}\right)\cdots$$

Demostració. Es tenen les successions exactes de k-espais vectorials

$$0 \longrightarrow Z_p \longrightarrow M_p \longrightarrow B_{p-1} \longrightarrow 0,$$

i

$$0 \longrightarrow B_p \longrightarrow Z_p \longrightarrow H_p(M) \longrightarrow 0,$$

i per tant les igualtats

$$\begin{aligned} \dim M_p &= \dim Z_p + \dim B_{p-1}, \\ \dim Z_p &= \dim B_p + \dim H_p(M). \end{aligned}$$

Si sumem respecte p, afectant d'un signe $(-1)^p$, trobem

$$\chi(M_\bullet) = \sum_{p\geq 0}(-1)^p \dim M_p = \sum_{p\geq 0}(-1)^p((\dim B_p + \dim H_p(M)) + \dim B_{p-1})$$

i com els termes en $B_\bullet$ es cancel·len dos a dos, en resulta el teorema. □

Corol·lari 15.2.24. *Sigui $M_\bullet$ un complex finit i exacte de k-espais vectorials de dimensió finita, aleshores $\chi(M_\bullet) = 0$.*

L'aplicació geomètrica del teorema correspon al corol·lari següent, que és una generalització de la fórmula d'Euler.

Corol·lari 15.2.25. *Sigui K un complex simplicial. Aleshores, per tot cos k,*

$$\chi(K) = \sum_{p=0}^{\dim K} (-1)^p b_p(K; k).$$

15.3 Morfismes de complexos

En aquesta secció s'introdueix la noció de morfismes de complexos de R-mòduls. D'aquesta forma es construeix la categoria de complexos de R-mòduls.

Definició 15.3.1 (Morfismes de complexos)**.** Sigui $(M_\bullet, \partial_\bullet)$ complexos de cadenes de R-mòduls. Un morfisme de complexos $f_\bullet : (M_\bullet, \partial_\bullet) \to (M'_\bullet, \partial'_\bullet)$ és una successió de morfismes de R-mòduls $f_p : M_p \to M'_p$ $\forall p \geq 0$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \cdots M_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d, "f_{p+1}"'] & M_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d, "f_p"'] & M_{p-1} \arrow[r, "\partial_{p-1}"] \arrow[d, "f_{p-1}"'] & M_{p-2} \cdots \arrow[d, "f_{p-2}"'] \\ \cdots M'_{p-1} \arrow[r, "\partial'_{p-1}"] & M'_p \arrow[r, "\partial'_p"] & M'_{p-1} \arrow[r, "\partial'_{p-1}"] & M'_{p-2} \cdots \end{tikzcd}$$

és commutatiu, és a dir, que es verifiquen les igualtats

$$f_{p-1}\partial_p = \partial'_p f_p,$$

per a tot $p \geq 1$.

Els morfismes de complexos de R-mòduls indueixen morfismes en els grups d'homologia:

Lema 15.3.2. *Sigui $f_\bullet : M_\bullet \to M'_\bullet$ un morfisme de complexos de cadenes. Aleshores, per a tot $p \geq 0$, $f_\bullet$ redueix morfismes de R-mòduls*

$$H_p(f) : H_p(M_\bullet) \longrightarrow H_p(M_\bullet)$$

tals que, si $z \in Z_p(M_\bullet)$ és un representant de $[z] \in H_p(M_\bullet)$ aleshores, $H_p(f)([z]) = [f_p(z)] \in H_p(M'_\bullet)$ (denotarem $H_\bullet(f)$ per $f_\bullet$).

Demostració. Sigui $z \in Z_p(M_\bullet)$, és a dir, $\partial_p(z) = 0$. Llavors, $f_p(z) \in Z_p(M'_\bullet)$, ja que

$$\partial'_p f_p(z) = f_{p-1}\partial_p(z) = 0.$$

Per tant, $f_\bullet(Z_\bullet(M_\bullet)) \subseteq Z_\bullet(M'_\bullet)$. D'altra banda, si $z \in B_p(M_\bullet)$, existeix $z' \in M_{p+1}$ tal que $z = \partial_p(z')$ i per tant

$$f_p(z) = f_p(\partial_p(z')) = \partial'_p(f_{p+1}(z')) \in B_p(M'_\bullet),$$

és a dir, $f_\bullet(B_\bullet(M_\bullet)) \subseteq B_\bullet(M'_\bullet)$. Així, $f_\bullet$ passa al quocient $H_\bullet(f_\bullet) : H_\bullet(M_\bullet) \to H_\bullet(M'_\bullet)$. □

És immediat comprovar que si $f_\bullet : (M_\bullet, \partial_\bullet) \to (M'_\bullet, \partial'_\bullet)$ i $g_\bullet : (M'_\bullet, \partial'_\bullet) \to (M''_\bullet, \partial''_\bullet)$, aleshores $(f \circ g)_\bullet = f_\bullet \circ g_\bullet$ i que $(\mathrm{id}_M)_\bullet = \mathrm{id}_{H_\bullet(M)}$.

Els complexos de R-mòduls i els morfismes de complexos permeten definir la categoria de complexos de R-mòduls, que denotarem $C(R-\ \ \mathrm{mod}\ )$, i una manera equivalent de formular aquest últim resultat és el següent corol·lari:

Corol·lari 15.3.3. *Sigui $p \geq 0$ un enter. L'homologia p-éssima de complexos defineix un functor*

$$H_p : C(R-\ \ \mathrm{mod}\ ) \longrightarrow R-\ \ \mathrm{mod}$$

En la categoria $C(R-\ \ \mathrm{mod}\ )$ es poden realitzar moltes de les operacions que es realitzen per als grups abelians o els R-mòduls.

Si tenim K, L complexos simplicials ordenats i $f : K \to L$ una aplicació simplicial (donada per $f_0 : V_k \to V_L$) volem definir $f_\bullet : C_\bullet(K, R) \to C_\bullet(L, R)$.

Notació. Si tenim vèrtexs $v_0, \ldots, v_p$ de K que determin en un símplex de K, i $\sigma \in S_{p+1}$, suposem que $v_0 < \cdots < v_p$, aleshores denotem

$$[v_{\sigma(0)}, \ldots, v_{\sigma(p)}] := \mathrm{sig}(\sigma)[v_0, \ldots, v_p]$$

Així doncs, definim

$$\begin{aligned} f_p : C_p(K, R) &\longrightarrow C_p(L, R) \\ [v_0, \ldots, v_p] &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } \exists i \neq j \ :\ f(v_i) = f(v_j) \\ [f(v_0), \ldots, f(v_p)] & \text{altrament} \end{cases} \end{aligned}$$

Per a que això estigui ben definit, s'ha de veure que $\partial'_p \circ f_p = f_{p-1} \circ \partial_p$.

Demostració. Es deixa com a exercici. □

Proposició 15.3.4. *siguin K i L dos complexos simplicials ordenats, i sigui $f : |K| \to |L|$ una aplicació simplicial. Aleshores f indueix un morfisme de R-mòduls $f_\bullet : H_\bullet(K; R) \to H_\bullet(L; R)$, de forma que es verifiquen les igualtats*

$$(g \circ f)_\bullet = g_\bullet \circ f_\bullet \quad i \quad (\mathrm{id}_{K_\bullet}) = \mathrm{id}_{H_\bullet(K)}$$

És a dir, H_p defineix un functor $H_p : \mathbf{Pol} \to C(R-\ \ \mathrm{mod}\ )$, per a tot $p \geq 0$.

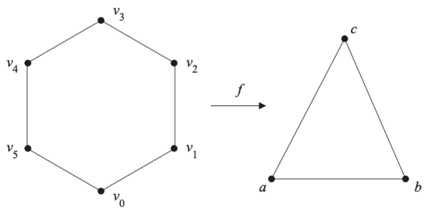


Figura 15.2: Exemple d'aplicacions simplicial.

Per acabar aquest apartat, considerem un exemple elemental de la situació geomètrica presentada. Siguin K i L els complexos simplicials que tenen símplexs maximals donats per

$$K_{\max} = \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_0, v_5\}\},$$
$$L_{\max} = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\},$$

ordenats per $v_0 < v_1 < \cdots < v_5$ i $a < b < c$, respectivament (veure la figura **??**). Sigui f l'aplicació simplicial que sobre el vèrtex ve donada per $f(v_0) = f(v_3) = a$, $f(v_1) = f(v_4) = b$, $f(v_2) = f(v_5) = c$.

Com $|K|$ i $|L|$ són connexos, es té $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ i $H_0(L) \cong \mathbb{Z}$, i a més aquests grups estan generats per un vèrtex qualsevol dels respectius políedres. Així, en resulta que f indueix un isomorfisme $H_0(K) \cong H_0(L)$.

Respecte a l'acció de f en els grups H_1, observem que $H_1(K) \cong \mathbb{Z}$ està generat per la classe del cicle

$$z = [v_0, v_1] + [v_1, v_2] + [v_2, v_3] + [v_3, v_4] + [v_4, v_5] - [v_0, v_5],$$

i que $H_1(L) \cong \mathbb{Z}$ està generat per la classe del cicle

$$z' = [a, b] + [b, c] - [a, c].$$

És immediat comprovar que $f_\bullet(z) = 2z'$. Així, a través dels isomorfismes $H_1(K) = Z[z] \cong \mathbb{Z}$ i $H_1(L) = \mathbb{Z}[z'] \cong \mathbb{Z}$, el morfisme induït en H_1,

$$H_1(K) \longrightarrow H_1(L)$$

correspon a la multiplicació per 2. Aquesta acció té un significat geomètric clar, ja que mentre donem una volta a K, la imatge dona dues voltes a L. Més endavant veurem que l'enter 2 és el grau de f.

15.4 Homotopies entre morfismes de complexos de R-mòduls

Aquest apartat el copiaré gairebé al peu de la lletra dels apunts que algune bone samaritane ha penjat al drive, ja que a classe s'ha donat però en un altre ordre i més endavant, traient-lo de context i, per tant, no m'he enterat de res.

En aquest apartat introduirem la noció d'homotopia entre morfismes de complexos de R-mòduls. Aquesta noció es pot pensar com l'anàleg algebraic de la noció d'homotopia entre aplicacions contínues.

Definició 15.4.1. Siguin $M_\bullet$ i $M'_\bullet$ dos complexos de cadenes de R-mòduls, i $f, g : M_\bullet \to M'_\bullet$ dos morfismes de complexos. Es diu que f i g són *morfismes homòtops* si existeix una successió de morfismes de R-mòduls $\{h_p\}_p$ tal que $h_p : M_p \to M'_{p+1}$, $p \geq 0$, tal que, considerant $h_{-1} = 0$, es verifica

$$f_p - g_p = \partial_{p+1} h_p + h_{p-1} \partial_p,$$

per a tot $p \geq 0$. Direm que h és una *homotopia* entre els morfismes f i g.

El diagrama següent recull la informació que proporciona una homotopia entre els morfismes f i g:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M_{p+2} \arrow[r, "\partial_{p+2}"] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & M_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g_{p+1}"] \arrow[dl, "h"] & M_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d, shift right, "f_p"'] \arrow[d, shift left, "g_p"] \arrow[dl, "h_p"] & M_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] \arrow[dl, "h"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M'_{p+2} \arrow[r, "\partial'_{p+2}"] & M'_{p+1} \arrow[r, "\partial'_{p+1}"] & M'_p \arrow[r, "\partial'_p"] & M'_{p-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

En aquest diagrama s'han de verificar les commutativitats expressades per les igualtats de la definició. Una primera mostra de l'interès d'aquesta definició ve donada pel següent resultat.

Proposició 15.4.2. *Si $f, g : M_\bullet \to M'_\bullet$ són morfismes homòtops de complexos de R-mòduls, llavors indueixen el mateix morfisme en homologia,*

$$H_\bullet(f) = H_\bullet(g) : H_\bullet(M_\bullet) \to H_\bullet(M'_\bullet).$$

Demostració. Prenem una classe $[z] \in H_n(M_\bullet)$, representada per $z \in Z_n(M_\bullet)$, que, en ser un cicle, verifica $\partial_n(z) = 0$. Llavors, $H_\bullet(f)[z]$ està representada per $f(z) \in Z_n(M'_\bullet)$, mentre que $H_\bullet(g)[z]$ està representada per $g(z) \in Z_n(M'_\bullet)$, i per la definició d'homotopia

$$f(z) - g(z) = h(\partial(z)) + \partial(h(z)) = \partial(h(z)),$$

per tant,

$$f(z) - g(z) \in B_n(M'_\bullet)$$

d'on resulta que les classes són iguals en $H_n(M'_\bullet)$. $\square$

Capítol 16

Homologia singular

L'homologia simplicial vista en el capítol anterior s'aplica només a una classe d'espais topològics, els políedres. Per aplicar-la a altres tipus d'espais topològics cal fer una triangulació. Això presenta un problema logístic ja que, de vegades, una triangulació pot tenir molts triangles i això fa els càlculs més pesats. A més, ens podem plantejar la següent pregunta: l'homologia simplicial depèn de la triangulació escollida? En lloc de respondre directament aquesta qüestió, en aquest capítol s'introdueix l'homologia singular, que presenta l'avantatge d'estar definida per a qualsevol espai topològic, i de ser functorial respecte les aplicacions contínues i que, com veurem més endavant, coincideix amb l'homologia simplicial sobre els políedres.

La definició de l'homologia singular és molt general, pel que és necessària una elaboració acurada de la teoria abans d'obtenir aplicacions significatives. Aquest capítol té per objectiu establir els resultats bàsics de l'homologia singular, deixant pels propers capítols les aplicacions més geomètriques. Tot i això, es demostra el teorema del punt fix de Brower.

Com a teoremes fonamentals assenyalarem la invariància homotòpica de l'homologia singular i el teorema de les cadenes petites. Aquest darrer teorema és un resultat molt tècnic a primera vista, però esdevé fonamental pel desenvolupament de l'homologia singular. Com a corol·lari immediat deduirem l'existència de la successió Mayer-Vietoris d'un recobriment, que juntament amb la invariància homotòpica esdevindran les principals eines de càlcul de grups d'homologia simplicial dels capítols següent. Tot aquest capítol estarà extret de les classes magistrals impartides pel Dr. Ricardo Garcia i de les notes de [**x**].

16.1 Cadenes singulars d'un espai topològic

Definició 16.1.1 (Símplex singular)**.** Considerem X un espai topològic. Un *p-símplex singular* en X és una aplicació contínua $\sigma : \Delta^p \to X$, on Δ^p és el p-símplex estàndard.

Exemple 16.1.2. El 0-símplex singular són els punts de X, el 1-símplex singular és l'aplicació que envia Δ^1 a un camí de X.

Definició 16.1.3. Sigui X un espai topològic. El *grup de les cadenes singulars p-dimensionals* de X, que denotarem $S_p(X)$, és el grup abelià lliure generat pels p-símplexs singulars. En altres paraules:

$$S_p(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \sigma_i \ : \ \lambda_i \in \mathbb{Z},\ r \geq 0,\ \sigma_i : \Delta^p \to X \ p\text{-símplex singular} \right\}$$

Si $0 \leq i \leq p$, definim $\delta_i : \Delta^{p-1} \to \Delta^p$ per $\delta_(x_0, \dots, x_{p-1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_{p-1})$, és a dir, afegim un zero a la posició i.

Definició 16.1.4 (Operador vora)**.** Definim l'*operador vora*

$$\partial_p : S_p(X) \to S_{p-1}(X)$$

de la següent manera: si σ és un p-símplex singular,

$$\partial_p(\sigma) := \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma \circ \delta_i \qquad p \geq 1$$

i $\partial_0 = 0$.

Lema 16.1.5. *Per tot $p \geq 1$, se satisfà que $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$.*

Demostració. Com que el grup $S_p(X)$ està generat pels símplexs singulars, és suficient provar que $\partial \circ \partial = 0$.

$$\partial_{p-1}(\partial_p(\sigma)) = \partial \left(\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma \circ \delta_i \right) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j (\sigma \circ \delta_i) \circ \delta_j \right) = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^{i+j} (\sigma \circ (\delta_i \circ \delta_j))$$

Es deixa com a exercici provar que, si $j < i$, $\delta_i \circ \delta_j = \delta_j \circ \delta_{i-1}$. Suposant això provat, tenim que l'expressió anterior és igual a

$$= \sum_{0 \leq j < i \leq p} (-1)^{i+j} \sigma \circ (\delta_i \circ \delta_j) + \sum_{0 \leq i \leq j \leq p-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ (\delta_i \circ \delta_j)$$

i, en el primer sumatori, podem fer el següent joc d'índexs: $i - 1 \mapsto i$, i, juntament amb el fet que $\delta_i \circ \delta_j = \delta_j \circ \delta_{i-1}$, obtenim que aleshores quedarà

$$\sum_{0 \leq j \leq i \leq p-1} (-1)^{i+j+1} \sigma \circ (\delta_j \circ \delta_i)$$

i amb la qual cosa tota l'expressió queda zero, com volíem. □

Definició 16.1.6. Es diu que $(S_\bullet(X), \partial_\bullet)$ és el *complex de cadenes singulars de X*. La seva homologia

$$H_p(X) = H_p(S_\bullet(X), \partial_\bullet)$$

és l'*homologia singular p-èsima* de X.

Anàlogament es defineix, si R és un anell commutatiu i unitari, $(S_\bullet(X, R), \partial_\bullet)$ cadenes singulars a coeficients en R i $H_p(X, R) = H_p((S_\bullet(X, R), \partial_\bullet))$.

Teorema 16.1.7. *Sigui X un espai topològic reduït a un sol punt, $X = \{*\}$. L'homologia singular de X és*

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z} \qquad H_p(X) \cong 0$$

per tot $p \geq 0$.

Demostració. Per a cada $p \geq 0$, només hi ha una aplicació contínua $\sigma_p : \Delta^p \to X$, que és l'aplicació contant. Per tant, $S_p(X) \cong \mathbb{Z}$, per a tot $p \geq 0$. Per definició, $\partial(\sigma_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma_{p-1} \circ \delta_i$ i com $\sigma_p \circ \delta_i = \sigma_{p-1}$ per tot i, tindrem

$$\partial(\sigma_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma_{p-1} = \left(\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \right) \sigma_{p-1} = \begin{cases} 0, & \text{si } p \text{ és senar,} \\ \sigma_{p-1}, & \text{si } p \text{ és parell.} \end{cases}$$

Per tant, el complex de cadenes singulars de X és el complex

$$\cdots \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \cdots,$$

i l'homologia que en resulta és

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}, \qquad H_1(X) \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong 0$$

i en general $H_p(X) \cong 0$ si $p \geq 2$. □

Observem que si X és un políedre que consta d'un sol vèrtex, la seva homologia simplicial és la mateixa que la singular, tot i que el complex de cadenes simplicials és ben diferent, ja que es té $C_0(X) \cong \mathbb{Z}$ i $C_p(X) = 0$ si $p \geq 1$.

A tota aplicació contínua entre espais topològics li podem associar un morfisme en homologia singular.

Proposició 16.1.8. *Siguin X i Y dos espais topològics i $f : X \to Y$ una aplicació contínua. Llavors, f indueix un morfisme de complexos*

$$S_\bullet(f) : S_\bullet(X) \longrightarrow S_\bullet(Y),$$

tal que $S_p(f)(\sigma) = f \circ \sigma$ per a tot p-símplex singular σ de X.

Demostració. Com que $S_p(X)$ és el grup abelià lliure generat pels p-símplexs singulars $\sigma : \Delta^p \to X$, és suficient definir $S_p(f)(\sigma)$, i en aquest cas es pren la composició $\Delta^p \to X \to Y$ com a definició, és a dir,

$$S_p(f)(\sigma) := f \circ \sigma \in S_p(Y)$$

Comprovem que $S_\bullet(f)$ és un morfisme de complexos, és a dir, que commuta amb l'operador vora: $S_\bullet(f)\partial = \partial S_\bullet(f)$. D'una banda tenim

$$S_{p-1}(f)(\partial_p(\sigma)) = S_{p-1}(f) \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma \circ \delta_i = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i f \circ (\sigma \circ \delta_i)$$

mentre que de l'altra obtenim el mateix

$$\partial_p(S_p(f)(\sigma)) = \partial_p(f \circ \sigma) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (f \circ \sigma) \circ \delta_i.$$

□

És immediat provar que el morfisme així definit és compatible amb les composicions d'aplicacions contínues, i que el morfisme induït per la identitat de l'espai topològic X és el morfisme identitat del complex $S_\bullet(X)$, per tant es té el següent resultat provat.

Lema 16.1.9. *El complex de cadenes singulars $S_\bullet$ defineix un functor*

$$S_\bullet : \mathbf{Top} \longrightarrow C_\bullet(\mathbf{Ab}).$$

Ara, per pas a l'homologia, s'obté el resultat en homologia singular.

Proposició 16.1.10. *Siguin X i Y espais topològics i $f : X \to Y$ una aplicació contínua. Aleshores, el morfisme $S_\bullet(f)$ indueix un morfisme de grups*

$$H_\bullet(f) : H_\bullet(X) \longrightarrow H_\bullet(Y),$$

tal que si $[c]$ *és un cicle de* X*, aleshores* $H_\bullet(f)([c]) = [S_\bullet(f)(c)]$*.*

Si $f = \mathrm{id}_X$*, aleshores*

$$H_\bullet(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{H_\bullet(X)},$$

i si $g : Y \to Z$ *és una altra aplicació contínua entre espais topològics, es verifica*

$$H_\bullet(g \circ f) = H_\bullet(g) \circ H_\bullet(f).$$

Per tant, $H_\bullet$ *defineix un functor*

$$H_\bullet : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Ab}_\bullet.$$

Proposició 16.1.11. *Pel que hem vist abans,* f *indueix un morfisme de complexos* $S_\bullet(f) : S_\bullet(X) \to S_\bullet(Y)$*. Ara, per un resultat que vam veure al capítol 2,* $S_\bullet(f)$ *indueix un morfisme entre les homologies dels complexos, el que defineix* $H_\bullet(f)$*. Les propietats enunciades es dedueixen de la definició.*

Notarem indistintament per $H_\bullet(f)$, o per $f_\bullet$, el morfisme induït en l'homologia per una aplicació contínua $f : X \to Y$.

Gran part de l'interès de la "functorialitat" de l'homologia singular expressada en la proposició anterior està en què d'ella se segueix de forma immediata la invariància topològica de l'homologia singular.

Teorema 16.1.12 (Invariància topològica de l'homologia singular)**.** *Siguin* X *i* Y *espais topològics i* $f : X \to Y$ *un homeomorfisme. Llavors, el morfisme*

$$H_\bullet(f) : H_\bullet(X) \longrightarrow H_\bullet(Y)$$

és un isomorfisme.

Demostració. És immediata ja que tot functor conserva els isomorfismes. Recordem-ho: com que $f : X \to Y$ és un homeomorfisme, f és bijectiva i té inversa f^{-1} contínua. De les igualtats $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ i $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$, aplicant la functorialitat de l'homologia, se segueix que

$$H_\bullet(f) \circ H_\bullet(f^{-1}) = H_\bullet(f \circ f^{-1}) = H_\bullet(\mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_{H_\bullet(Y)}$$

i anàlogament $H_\bullet(f^{-1}) \circ H_\bullet(f) = \mathrm{id}_{H_\bullet(X)}$. □

Si bé l'homologia simplicial d'un políedre és sempre finitament generada, com vam veure al capítol 2, l'homologia singular d'un espai topològic no ho és en general, ni tan sols pels espais compactes, com ho prova l'exemple de l'arracada hawaiana. En el cas de l'homologia singular cal, doncs, fer hipòtesis de finitud per definir els nombres de Betti i la característica d'Euler d'un espai topològic.

Definició 16.1.13. Sigui X un espai topològic, i $p \geq 0$ un enter. Si el grup d'homologia singular $H_p(X)$ és finitament generat, es defineix el *p-éssim nombre de Betti* de X per

$$b_p(X) := \mathrm{rk}(H_p(X)).$$

Si tots els grups d'homologia singular de X són finitament generats i només n'hi ha un nombre finit d'ells no nuls, aleshores es defineix la característica d'Euler de X per

$$\chi(X) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p b_p(X).$$

És evident que del teorema anterior se segueix la invariància topològica dels nombres de Betti i de la característica d'Euler, quan aquests estan definits. Més endavant veurem que aquests nombres coincideixen amb els definits pels políedres.

16.2 H_0 i arc-connexió

Teorema 16.2.1. *Sigui X un espai topològic arc-connex, aleshores $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.*

Demostració. Tenim el següent morfisme de grups:

$$\begin{aligned} \varepsilon : S_0(X) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \sum \lambda_x [x] &\longmapsto \sum \lambda_x \end{aligned}$$

És clar que ε és un morfisme de grups exhaustiu i $\varepsilon(\lambda[x_0]) = \lambda \in \mathbb{Z}$, $\forall \lambda \in \mathbb{Z}$. Només queda per veure doncs que $B_0(X) = \ker \varepsilon$ i llavors tindrem que

$$H_0(X) = \frac{S_0(X)}{B_0(X)} = \frac{S_0(X)}{\ker \varepsilon} \cong \mathbb{Z}$$

pel primer teorema d'isomorfia de grups.

Si $\sigma \in S_1(X)$, $\varepsilon(\partial\sigma) = \varepsilon([\sigma(1)] - [\sigma(0)]) = 0$. Per tant, $B_0(X) \subset \ker \varepsilon$. Veiem $\ker \varepsilon \subset B_0$. Sigui $c = \sum \lambda_x \cdot x$ tal que $\sum \lambda_x = 0$. Sigui $x_0 \in X$. Com X és arc-connex, $\exists \gamma_x : \Delta^1 \to X$ tal que $\gamma_x((1,0)) = x_0$, $\gamma_x((0,1)) = x$, llavors

$$c = \sum \lambda_x x = \sum \lambda_x x - \left(\sum \lambda_x\right) x_0 = \sum \lambda_x (x - x_0) \in B_(X)$$

ja que $x - x_0 = \partial(\gamma_x)$. $\square$

Observem que, de fet, hem demostrat que si X és arc-connex i $x_0 \in X$ és un punt qualsevol, aleshores $H_0(X) \cong \mathbb{Z}[x_0]$. Aquest fet té com a conseqüència el següent resultat.

Corol·lari 16.2.2. *Sigui $f : X \to Y$ una aplicació contínua entre espais arc-connexos no buits. Aleshores $f_\bullet : H_0(X) \to H_0(Y)$ és un isomorfisme.*

Proposició 16.2.3. *Si X és un espai topològic, siguin $\{X_i\}_{i \in I}$ les seves components arc-connexes. Aleshores,*

$$H_\bullet(X) \cong \bigoplus_{i \in I} H_\bullet(X_i)$$

i a més

$$H_0(X) \cong \bigoplus_{i \in I} H_0(X_i) \cong \mathbb{Z}^{\oplus |I|}$$

Demostració. Sigui X un espai topològic i X_i, $i \in I$, les seves components arc-connexes, de forma que $X = \cup_{i \in I} X_i$. Un p-símplex singular de X, $\sigma : \Delta^p \to X$, necessàriament és un p-símplex singular d'una component X_i, ja que la imatge d'un espai topològic arc-connex és arc-connexa. Per tant, $\sigma(\Delta^p) \subseteq X_i$ per algun $i \in I$. Així, és immediat que

$$S_\bullet(X) = \bigoplus_{i \in I} S_\bullet(X_i).$$

Aleshores el resultat se segueix de l'additivitat de l'homologia de complexos de $\mathbb{Z}$-mòduls. Finalment, la segona igualtat es dona ja que X_i són arc-connexos $\forall i \in I$. $\square$

Per al cas dels políedres disposàvem d'un resultat anàleg pels que són connexos, ja que aleshores són necessàriament arc-connexos. Aquí és fonamental la distinció entre connexió i arc-connexió. Per exemple, sigui X el subespai de $\mathbb{R}^2$ definit per

$$X = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \ : \ 0 < x \leq 1 \right\} \cup \{0\} \times [-1, 1].$$

Aquest espai X, que és connex, té dues components arc-connexes i, per tant, $H_0(X) \cong \mathbb{Z}^2$

16.3 El teorema d'invariància homotòpica

En aquest apartat provarem que l'homologia singular és un invariant del tipus d'homotopia d'un espai topològic. Recordem que, donats dos espais topològics X i Y, es diu que són *del mateix tipus d'homotopia* si existeixen aplicacions contínues $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$ tals que les composicions $f \circ g$ i $g \circ f$ són homòtopes a les respectives identitats. Recordem també que un espai topològic es deia *contràctil* si és del tipus d'homotopia d'un punt.

De fet, provarem la invariància homotòpica de l'homologia singular no solament per a espais topològics, sinó també per a les aplicacions contínues. Així es té:

Teorema 16.3.1 (Invariància homotòpica)**.** *Siguin X i Y espais topològics, $f, g : X \to Y$ aplicacions contínues i suposem que $f \sim g$. Llavors*

$$H_p(f) = H_p(g) : H_p(X) \longrightarrow H_p(Y) \qquad \forall p \geq 0$$

és a dir, les aplicacions induïdes són iguals. Més encara, si R és un anell commutatiu unitari, aleshores

$$H_p(f) = H_p(g) : H_p(X, R) \to H_p(Y, R)$$

Demostració. La demostració del teorema d'invariància consisteix en una sèrie de reduccions que ens permetran deduir el resultat d'un cas particular, que demostrarem directament.

Com f i g són homòtopes, existeix una homotopia de f a g, és a dir, una aplicació contínua $G : X \times I \to Y$ tal que $G(x, 0) = f(x)$ i $G(x, 1) = g(x)$. Considerem les aplicacions

$$\lambda_i : X \to X \times I \qquad i = 0, 1,$$

definides per $\lambda_i(x) = (x, i)$, que són homòtopes per l'homotopia $\mathrm{id} : X \times I \to X \times I$. Observem que es verifica

$$G \circ \lambda_0(x) = f(x),$$

$$G \circ \lambda_1(x) = g(x).$$

Així, per la functorialitat de l'homologia singular, és suficient provar el teorema per a λ_0, λ_1. En efecte, si suposem conegut el teorema per aquest cas, és a dir, $H_\bullet(\lambda_0) = H_\bullet(\lambda_1)$, tindrem

$$H_\bullet(f) = H_\bullet(G) \circ H_\bullet(\lambda_0) = H_\bullet(G) \circ H_\bullet(\lambda_1) = H_\bullet(g)$$

Ara, per provar que $H_\bullet(\lambda_0) = H_\bullet(\lambda_1)$ és suficient provar que les aplicacions induïdes per λ_0 i λ_1 en el complex de cadenes singulars

$$S_\bullet(\lambda_0), S_\bullet(\lambda_1) : S_\bullet(X) \longrightarrow S_\bullet(X \times I)$$

són morfismes homòtops de complexs de grups abelians.

Recordem que, per definició, $S_\bullet(\lambda_0)$ i $S_\bullet(\lambda_1)$ seran homòtops si, per a tot $q \geq 0$, existeixen morfismes

$$P_q : S_q(X) \to S_{q+1}(X \times I)$$

tals que, definint $P_{-1} = 0$, es verifica

$$\partial_{q+1} P_q + P_{q-1} \partial_q = S_q(\lambda_1) - S_q(\lambda_0),$$

per a tot $q \geq 0$.

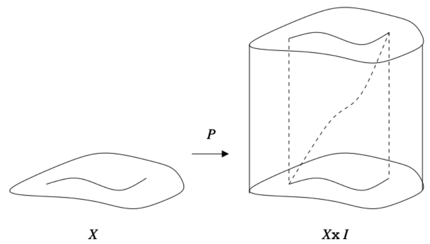


Figura 16.1: Idea geomètrica de l'operador prisma

La idea geomètrica de la construcció dels operadors P_q és la següent: donat un q-símplex singular σ de X es tracta de triangular $\sigma \times I$, de forma que esdevingui una cadena singular. Aquesta idea geomètrica justifica que se l'anomeni l'operador prisma (veure figura **??**) Si l'espai topològic X és arbitrari, no disposem de cap algorisme per realitzar aquesta subdivisió directament. La propera reducció consisteix en veure que és suficient, de fet, definir P sobre els símplexs afins de Δ^q.

Per poder realitzar aquesta reducció imposem una condició suplementària a l'operador prisma: que sigui natural en X. És a dir, volem definir operadors P^X simultàniament sobre tots els espais topològics X i de forma que, donada una aplicació contínua $h : Y \to X$ es tingui un diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd} S_q(Y) \arrow[r, "P_q^Y"] \arrow[d, "S_q(h)"'] & S_{q+1}(Y \times I) \arrow[d, "S_{q+1}(h\times \mathrm{id}_I)"] \\ S_q(X) \arrow[r, "P_q^X"] & S_{q+1}(X \times I) \end{tikzcd}$$

per a tot $q \geq 0$.

Sabem, a més, que és suficient definir P_q^X sobre els generadors de $S_q(X)$.

Sigui $\sigma : \Delta^q \longrightarrow X$ un q-símplex singular. Per la naturalitat imposada a l'operador prisma, el diagrama

$$\begin{tikzcd} S_q(Y) \arrow[r, "P_q^Y"] \arrow[d, "S_q(\sigma)"'] & S_{q+1}(Y \times I) \arrow[d, "S_{q+1}(\sigma\times \mathrm{id}_I)"] \\ S_q(X) \arrow[r, "P_q^X"] & S_{q+1}(X \times I) \end{tikzcd}$$

ha d'ésser commutatiu. Observem que, si notem $\iota_q \in S_q(\Delta^q)$ el q-símplex singular corresponent a la identitat de Δ^q, es té

$$S_q(\sigma)(\iota_q) = \sigma \circ \iota_q = \sigma \in S_q(X)$$

i per tant, la commutativitat del diagrama anterior dóna la igualtat

$$P_q^X(\sigma) = S_{q+1}(\sigma \times \mathrm{id})P_q^{\Delta^q}(\iota_q)$$

és a dir, la imatge de σ per P_q^X, $P_q^X(\sigma)$, queda determinada pel valor de $P_q^{\Delta^q}(\iota_q)$.

En primer lloc observem que, prenent aquesta igualtat com a definició de P_q^X, la naturalitat és immediata: si $h : Y \to X$ és una aplicació contínua i $\sigma \in S_q(Y)$, es té

$$\begin{aligned} P_q^X(S_q(\sigma)) &= S_{q+1}((h \circ \sigma) \times \mathrm{id}_I)(\iota_q) \\ &= S_{q+1}(h \times \mathrm{id}_I)S_{q+1}(\sigma \times \mathrm{id}_I)(\iota_q) \\ &= S_{q+1}(h \times \mathrm{id}_I)P_q^Y(\sigma). \end{aligned}$$

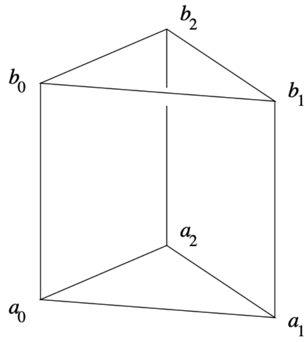


Figura 16.2: Prisma sobre Δ^2

A més a més, la relació d'homotopia entre $S_\bullet(\lambda_0^X)$ i $S_\bullet(\lambda_1^X)$ es dedueix de la corresponent relació per $X = \Delta^q$ i $\sigma = \iota_q$:

$$(S_q(\lambda_1^{\Delta^q}) - S_q(\lambda_0^{\Delta^q}))(\iota_q) = (\partial_{q+1} P_q^{\Delta^q} + P_{q-1}^{\Delta^q}\partial_q)(\iota_q),$$

ja que aleshores es verificaran les igualtats

$$\begin{aligned}
(S_q(\lambda_1^X) - S_q(\lambda_0^X))(\sigma) &= (S_q(\lambda_1^X) - S_q(\lambda_0^X))S_q(\sigma)(\iota_q)\\
&= S_q(\sigma\times \mathrm{id})(S_q(\lambda_1^\Delta) - S_q(\lambda_0^\Delta))(\iota_q)\\
&= S_q(\sigma\times \mathrm{id})(\partial_{q+1}P_q^\Delta(\iota_q) + P_{q-1}^\Delta\partial_q(\iota_q))\\
&= \partial_{q+1}S_{q+1}(\sigma\times \mathrm{id})(P_q^\Delta(\iota_q)) + S_q(\sigma\times \mathrm{id})P_{q-1}^\Delta\partial_q(\iota_q)\\
&= \partial_{q+1}P_q^X(\sigma) + P_{q-1}^X\partial_q(\sigma)
\end{aligned}$$

Per definir l'operador prisma sobre Δ^q aprofitarem la geometria afí dels símplexs estàndards. Considerarem $\Delta^q \subset \mathbb{R}^{q+1}$ amb vèrtexs $\{e_0, e_1, \ldots, e_q\}$, i sobre $\Delta^q \times I \subset \mathbb{R}^{q+1}\times I$ considerem els punts

$$\begin{aligned}
a_0 &= (e_0, 0), \quad a_1 = (e_1, 0), \quad \cdots, \quad a_q = (e_q, 0)\\
b_0 &= (e_0, 1), \quad b_1 = (e_1, 1), \quad \cdots, \quad b_q = (e_q, 1).
\end{aligned}$$

La figura **??** mostra els punts a_i, b_i en el cas $q = 2$.

Els símplexs singulars afins de Δ^q i de $\Delta^q \times I$ estan determinats pels seus vèrtexs ordenats, pel que si σ és un q-símplex singular afí el denotarem per $(\sigma(0), \ldots, \sigma(q))$. Així, per exemple, ι_q correspon al símplex $(e_0, \ldots, e_q)$.

Ara es defineix l'operador prisma per

$$P_q(e_0, e_1, \ldots, e_q) := \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (a_0, a_1, \ldots, a_i, b_i, \ldots, b_q).$$

Per exemple, per $q = 1$, tindrem $P_1(e_0, e_1) = (a_0, b_0, b_1) - (a_0, a_1, b_1)$, i per $q = 2$ tindrem

$$P_2(e_0, e_1, e_2) = (a_0, b_0, b_1, b_2) - (a_0, a_1, b_1, b_2) + (a_0, a_1, a_2, b_2).$$

Provem ara que P verifica la relació d'homotopia

$$(\partial_{q+1}P_q + P_{q-1}\partial_q)(\iota_q) = (S_q(\lambda_1) - S_q(\lambda_0))(\iota_q).$$

D'una banda tenim

$$\partial_{q+1}P_q(e_0, \ldots, e_q) = \partial_{q+1}\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i(a_0, \ldots, a_i, b_i, \ldots, b_q)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \partial_{q+1}(a_0, \ldots, a_i, b_i, \ldots, b_q) =$$

$$= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \left(\sum_{0 \le j \le i} (-1)^j (a_0, \ldots, \hat{a}_j, \ldots, a_i, b_i, \ldots, b_q) + \sum_{i \le j \le q} (-1)^{j+1} (a_0, \ldots, a_i, b_i, \ldots, \hat{b}_j, \ldots, b_q) \right)$$

Els termes $i = j$ apareixen en els dos sumatoris anteriors però amb signe canviat i per tant es cancel·len dos a dos, llevat de $(b_0, \ldots, b_q)$ i $(a_0, \ldots, a_q)$, pel que podem agrupar la suma anterior de la forma

$$(b_0, \ldots, b_q) + \sum_{0 \le j, i \le q} (-1)^{i+j}) a_0, \ldots, \hat{a}_j, \ldots, a_i, b_i, \ldots, b_q) + \sum_{0 \le i < j \le q} (-1)^{i+j+1} (a_0, \ldots, a_i, b_i, \ldots, \hat{b}_j, \ldots, b_q) - (a_0, \ldots, a_q).$$

D'altra banda, tenim

$$P_{q-1} \partial_q (e_0, \ldots, e_q) = P_{q-1} \left(\sum_{j=0}^{q} (-1)^j (e_0, \ldots, \hat{e}_j, \ldots, e_q) \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{q} (-1)^j P_{q-1} (e_0, \ldots, \hat{e}_j, \ldots, e_q) =$$

$$= \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \left(\sum_{0 \le i < j} (-1)^i (a_0, \ldots, a_i, b_i, \ldots, \hat{b}_j, \ldots, b_q) + \sum_{j < i \le q} (-1)^{i-1} (a_0, \ldots, \hat{a}_j, \ldots, a_i, b_i, \ldots, b_q) \right)$$

pel que, certament, es té

$$(\partial_{q+1} P_q + P_{q-1} \partial_q)(e_0, \ldots, e_q) = (b_0, \ldots, b_q) - (a_0, \ldots, a_q) = (S_q(\lambda_1) - S_q(\lambda_0))(e_0, \ldots, e_q),$$

el que acaba, per fi, la demostració més llarga del mon. □

Com a conseqüència immediata d'aquest resultat trobem la invariància homotòpica de l'homologia singular dels espais topològics.

Corol·lari 16.3.2. *Siguin X, Y espais topològics del mateix tipus d'homotopia. Llavors, els grups d'homologia singular de X i Y són isomorfs, és a dir, $H_\bullet(X) \cong H_\bullet(Y)$.*

Exemple 16.3.3.

1. Sigui X un espai topològic contràctil. Del càlcul de l'homologia singular d'un punt (que s'ha fet a l'apartat 1) i del corol·lari anterior, es deueix que

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}, \qquad H_p(X) \cong 0,\ p \ge 1$$

   En particular, $\forall n\ H_0(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{Z} \cong H_0(\Delta^n)$ i $H_p(\mathbb{R}^n) \cong 0 \cong H_p(\Delta^n)$, per $p \ge 1$.

   Cal tenir en compte que hi ha espais topològics que tenen l'homologia d'un espai contràctil, però que no són contràctils.

2. L'espai $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ és del tipus d'homotopia de l'esfera $\mathbb{S}^n$ i, per tant, $H_p(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) H_p(\mathbb{S}^n)$. Més endavant calcularem l'homologia de l'esfera i podrem acabar això.

Per acabar aquesta secció, veurem una aplicació particular d'aquest teorema relacionada amb els sespais contràctils. Primer, però, calen un parell de definicions.

Definició 16.3.4 (Homotopia de complexos de cadenes)**.** Siguin $(M_\bullet, \partial_\bullet)$ i $(M'_\bullet, \partial'_\bullet)$ complexos de R-mòduls. Siguin $f, g : M_\bullet \to M'_\bullet$ morfismes de complexos de cadenes. Direm que f i g són homòtopes, i es denota $f \sim g$, si $\exists \{h_n\}_n$ tal que $h_p : M_p \to M'_{p+1}$, $\forall p \geq 1$ són morfismes de R-mòduls i

$$f_p - g_p = \partial'_{p+1} \circ h_p + h_{p-1} \circ \partial_p \qquad \forall p \geq 0$$

Definició 16.3.5 (Complex de R-mòduls contràctil)**.** Sigui $(M_\bullet, \partial_\bullet)$ un complex de R-mòduls. Direm que és *contràctil* si $\mathrm{id}_{M_\bullet} \sim 0$, és a dir, si existeixen aplicacions $\{h_p : M_p \to M_{p-1}\}_p$ tals que $\mathrm{id}_p = \partial_{p+1} h_p + h_{p-1} \partial_p$, per tot $p \geq 0$. Si existeixen $\{h_p : M_p \to M_{p-1}\}_{p \geq n_0}$ tal que $\mathrm{id}_p = \partial_{p+1} h_p + h_{p-1} \partial_p$ es verifica $\forall p \geq n_0$, es diu que $(M_\bullet, \partial_\bullet)$ és contràctil en grau més gran que n_0.

Lema 16.3.6. *Si $(M_\bullet, \partial_\bullet)$ és contràctil en grau més gran que n_0, aleshores $H_p(M_\bullet) = 0$ per tot $p > n_0$. En particular, si $(M_\bullet, \partial_\bullet)$ és contràctil, aleshores $H_p(M_\bullet) = 0$ per tot $p \geq 0$).*

Demostració. Es deixa com a exercici. □

Proposició 16.3.7. *A tall d'exemple, fem aquesta proposició que és un exemple molt general. Sigui $X \subset \mathbb{R}^N$ fitat i convex. Aleshores, $S_\bullet(X, R)$ és contràctil en grau més gran que 0. Per tant, $H_p(X) = 0$ si $p > 0$.*

Demostració. Es deixa com a exercici. □

16.4 El teorema de les cadenes petites

En aquest apartat provarem el teorema de les cadenes petites, resultat fonamental de l'homologia singular que ens permetrà provar més endavant el teorema de Mayer-Vietoris i d'escissió. El terme *cadena petita* fa referència al tamany d'una cadena respecte d'un recobriment, com ara precisem.

Definició 16.4.1. Sigui X un espai topològic, sigui $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recobriment de X. Una cadena singular $c \in S_p(X)$ és *$\mathcal{U}$-petita* si prenent $c = \sum_{j=1}^n \lambda_j \sigma_j$, $\sigma_j : \Delta^p \to X$, llavors $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ $\exists i \in I$ tq $\sigma_j(\Delta^p) \subset U_i$. És a dir, si tota la cadena cau a dins d'un dels oberts.

Exemple 16.4.2. Sigui $X = \mathbb{S}^n$, $U_1 = \mathbb{S}^n \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x_n \geq 0$ i $U_2 = \mathbb{S}^n \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x_n \leq 0\}$, és a dir, el recobriment per oberts que són l'hemisferi nord, E^n_+ i sud, E^n_-. Llavors, una cadena que sigui per exemple recórrer un paral·lel (que no sigui l'Equador) és una cadena $\mathcal{U}$-petita. En canvi, un meridià no ho és.

Podem considerar el complex $(S_\bullet(\mathcal{U}), \partial_\bullet)$ que és un complex de cadenes

$$S_\bullet(\mathcal{U}) \hookrightarrow S_\bullet(X)$$

Per tant tenim $\forall p \geq 0$,

$$H_p(S(\mathcal{U})) \longrightarrow H_p(X)$$

Exemple 16.4.3. $X = \mathbb{S}^1$ i τ la topologia estàndard. Prenem $\mathcal{U} = \{\{x\} \ : \ x \in \mathbb{S}^1\}$. Llavors, $H_0(S_\bullet(\mathcal{U}))$ és molt més gran.

Teorema 16.4.4 (Cadenes petites)**.** *Si $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ és un recobriment de X tal que $X = \bigcup_{i \in I} \mathring{U}_i$, aleshores els morfismes*

$$H_p(S_\bullet(\mathcal{U})) \longrightarrow H_p(X)$$

són isomorfismes $\forall p \geq 0$.

La idea de la demostració del teorema de les cadenes petites consisteix en provar que, per un procés de subdivisió baricèntrica anàleg al desenvolupat en el capítol 1, tota cadena singular de X és homòloga a una cadena $\mathcal{U}$-petita. Per exemple, en el cas del meridià de $\mathbb{S}^n$ de l'exemple del rpincipi d'aquest paràgraf, podem subdividir-lo com una cadena formada per la suma de dos arcs, cadascun d'ells corresponent al tall amb els semiespais de $\mathbb{R}^{n+1}$ definits per $x_{n+1} \geq 0$ i $x_{n+1} \leq 0$, que és una cadena $\{E_+^n, E_-^n\}$-petita, on E_+^n representa l'hemisferi nord de $\mathbb{S}^n$ i E_-^n l'hemisferi sud.

Per a dur a terme aquesta idea, hem d'adaptar prèviament els conceptes i resultats de subdivisió baricèntrica del capítol 1 a l'homologia singular.

1. *Con d'un símplex singular afí.*

   Sigui $\sigma : \Delta^p \to \mathbb{R}^n$ un p-símplex singular afí, $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_p)$, $a_i = \sigma(e_i)$. Si b és un punt de $\mathbb{R}^n$, el *con de vèrtex b sobre σ* es defineix com el $(p+1)$-símplex singular afí determinat per

$$b * \sigma := (b, a_0, a_1, \ldots, a_p).$$

   Si $c = \sum_{i=1}^r \lambda_i \sigma_i$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, és una p-cadena singular en la que els símplexs σ_i són afins, definim

$$b * c := \sum_{i=0}^{p} \lambda_i (b * \sigma_i).$$

   Lema 16.4.5. *Es verifica*

   (a) $\partial(b * c) = c - \left(\sum_{i=0}^p \lambda_i\right) b$, *si* $c = \sum_{i=0}^p \lambda_i \sigma_i$ *és* 0*-dimensional,*

   (b) $\partial(b * c) = c - b * \partial c$, *si c és una cadena p-dimensional,* $p > 0$.

   Demostració. Si c és una cadena 0-dimensional, $c = \sum_{i=0}^p \lambda_i (a_i)$, així

$$\begin{aligned} \partial\left(b * \textstyle\sum_{i=0}^p \lambda_i \sigma_i\right) &= \partial\left(\textstyle\sum_{i=0}^p \lambda_i b * \sigma_i\right) = \textstyle\sum_{i=0}^p \partial(b * \sigma_i) = \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^p \lambda_i \partial(b, a_i) = \textstyle\sum_{i=0}^p \lambda_i((a_i) - (b)) = \\ &= c - \left(\textstyle\sum_{i=0}^p \lambda_i\right) b. \end{aligned}$$

   Considerem ara el cas p-dimensional, amb $p > 0$. Com ambdues parts de la igualtat són lineals en c, és suficient demostrar-la per als p-símplexs. Si $\sigma = (a_0, \ldots, a_p)$, es té

$$\begin{aligned} \partial(b * \sigma) &= \partial(b, a_0, \ldots, a_p) = \\ &= (a_0, a_1, \ldots, a_p) - \textstyle\sum_{i=0}^p (-1)^i (b, a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_p) = \\ &= \sigma - b * \partial\sigma. \end{aligned}$$

   □

2. *Operador de subdivisió baricèntrica.*

   La subdivisió baricèntrica d'un símplex afí introduïda al capítol 1 permet escriure un tal símplex com una cadena formada per símplexs de talla tant petita com es vulgui. El resultat següent trasllada aquesta construcció a l'homologia singular.

   Proposició 16.4.6 (Divisió baricèntrica)**.** *Per a tot espai topològic X, existeix un morfisme de complexos*

$$\mathrm{sd}_\bullet^X : S_\bullet(X) \to S_\bullet(X)$$

i morfismes

$$h_p^X : S_p(X) \to S_{p+1}(X) \quad \forall p \geq 0 \quad (h_{-1}^X = 0)$$

tals que

(a) sd_*^X *i* h_p^X *són functorials, si* $f : X \to Y$ *és contínua*

$$\begin{tikzcd} S_\bullet(X) \arrow[r, "\mathrm{sd}_\bullet^X"] \arrow[d, "f_\bullet"'] & S_\bullet(X) \arrow[d, "f_\bullet"] \\ S_\bullet(Y) \arrow[r, "\mathrm{sd}_\bullet^Y"'] & S_\bullet(Y) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} S_p(X) \arrow[r, "h_p^X"] \arrow[d, "f_p"'] & S_{p+1}(X) \arrow[d, "f_{p+1}"] \\ S_p(Y) \arrow[r, "h_p^Y"'] & S_{p+1}(Y) \end{tikzcd}$$

(b) $\{h_p^X\}_p$ *és una homotopia entre* $\mathrm{sd}_\bullet^X$ *i* $\mathrm{id}_{S_\bullet(X)}$.

(c) Si $\mathcal{U} = \{U_i\}i \in I$ *és un recobriment de* X *tal que* $X = \bigcup_{i\in I} \mathring{U}_i$ *i* $z_p \in S_p(X)$, *existeix* $n \geq 0$ *tal que* $(\mathrm{sd}_p^X)^n(z_p) \in S_p(\mathcal{U})$.

Demostració. Començarem definint l'operador sd_p^X, $p \geq 0$, i comprovarem que és un morfisme de complexos, inductivament sobre p. Com en la demostració del teorema d'invariància homotòpica (**??**), podem usar la naturalitat de sd_p^X i assegurar que és suficient definir

$$\begin{aligned} sd_p^\Delta : S_p(\Delta^p) &\longrightarrow S_p(\Delta^p) \\ \iota_p &\longmapsto sd_p(\iota_p) \end{aligned}$$

per tot $p \geq 0$. En efecte, si σ és un p-símplex singular de X, el diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd} S_\bullet(\Delta^p) \arrow[r, "sd_\bullet^{\Delta^p}"] \arrow[d, "S_\bullet(\sigma)"'] & S_\bullet(\Delta^p) \arrow[d, "S_\bullet(\sigma)"] \\ S_\bullet(Y) \arrow[r, "sd_\bullet^Y"'] & S_\bullet(X) \end{tikzcd}$$

obliga aleshores a definir

$$sd_p^X(\sigma) := S_p(\sigma_\bullet)(sd_p^{\Delta^p}(\iota_p)),$$

on ι_p és el p-símplexs singular identitat $\iota_p : \Delta^p \to \Delta^p$.

Sigui b_p el baricentre de ι_p, és a dir,

$$b_p := \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} e_i$$

Es defineix $sd_p^{\Delta^p}(\iota_p)$ inductivament segons

$$sd_p^{\Delta^p}(\iota_p) := \begin{cases} \iota_p, & \text{si } p = 0 \\ b_p * sd_{p-1}^{\Delta^{p-1}}(\partial \iota_p) & \text{si } p > 0, \end{cases}$$

que és una altra forma d'expressar la subdivisió baricèntrica del capítol 1 (que no vam fer...). Per exemple, per $p=1$ trobem

$$sd_1(\iota_1) = b_1 * sd_0[(e_1)-(e_0)] = b_1 * [(e_1)-(e_0)] = b_1 * (e_1) - b_1 * (e_0) = (b_1, e_1) - (b_0, e_0).$$

Provem per inducció sobre p que es verifica $sd^X_{p-1}\partial_p\sigma = \partial_p sd^X_p\sigma$, per a tot p-símplex σ d'un espai topològic qualsevol X. Per $p=0$ el resultat és trivial, ja que $\partial_0 = 0$. Suposem per hipòtesi d'inducció que hem provat $sd^X_{q-1}\partial_q\sigma = \partial_q sd^X_q\sigma$, per tot q-símplex σ d'un espai topològic qualsevol X, si $q<p$. Comencem provant que $sd_{p-1}\partial_p\iota_p = \partial_p sd_p\iota_p$. Es té

$$\begin{aligned}
\partial_p sd_p\iota_p &= \partial_p(b_p * sd_{p-1}\partial_p\iota_p) \\
&= sd_{p-1}\partial_p\iota_p - b_p * \partial_{p-1}sd_{p-1}\partial_p\iota_p && \text{pel lema anterior} \\
&= sd_{p-1}\partial_p\iota_p - b_p * sd_{p-2}\partial_{p-1}\partial_p\sigma_p, && \text{per hipòtesi d'inducció} \\
&= sd_{p-1}\partial_p\iota_p.
\end{aligned}$$

Com hem definit sd^X_p per la igualtat $sd^X_p(\sigma) = S_p(\sigma)(sd^{\Delta^p}_p(\iota_p))$, observem que si σ és un símplex afí, $sd^{\Delta^p}_p(\sigma)$ també és afí, i es verifica

$$\begin{aligned}
sd^X_{p-1}(\partial_p\sigma) &= sd^X_{p-1}(\partial_p S_p(\sigma)(\iota_p)) = sd^X_{p-1}S_{p-1}(\sigma)(\partial_p\iota_p) \\
&= S_{p-1}(\sigma)sd^{\Delta^p}_{p-1}(\partial_p\iota_p) = S_{p-1}(\sigma)\partial_p sd^{\Delta^p}_p(\iota_p) \\
&= \partial_p S_p(\sigma)sd^{\Delta^p}_p(\iota_p) = \partial_p sd^X_p(\sigma).
\end{aligned}$$

Respecte els morfismes T^X_p, una vegada més per la naturalitat imposada als operadors T^X_p, $p\geq 0$, i inducció, és suficient definir $T^{\Delta^p}_p(\iota_p)$, $\iota_p\in S_p(\Delta^p)$, tal que

$$T_{p-1}\partial_p(\iota_p) + \partial_{p+1}T_p(\iota_p) = \mathrm{id}_p(\iota_p) - sd_p(\iota_p),$$

on, per simplificar la notació, he escrit T_p en lloc de $T^{\Delta^p}_p$. No segueixo perquè ja no puc més amb aquesta demostració hiper llarga. No trobo el sentit a la meva existència després de fer aquestes demostracions sense final de no sé quin teorema que ni entenc.

Per demostrar l'apartat (c) utilitzarem les següents coses:

Definició 16.4.7. Sigui X espai mètric i $A\subset X$. Definim el diàmetre de A com

$$\mathrm{diam}(A) = \sup_{x,y\in A}\{d(x,y)\}$$

Lema 16.4.8 (Nombre de Lebesgue)**.** *Si X és un espai mètric compacte i $\mathcal{U}$ un recobriment obert de X, aleshores existeix $\lambda>0$ (el nombre de Lebesgue) tal que per a tot subconjunt $A\subset X$ tal que* $\mathrm{diam}(A)<\lambda$, *$\exists U\in\mathcal{U}$ tal que $A\subset U$.*

Definició 16.4.9. Direm que $\tau:\Delta^p\to\Delta^p$ és afí si

$$\tau\left(\sum_i t_i e_i\right) = \sum_i t_i\tau(e_i)$$

Lema 16.4.10. *Si $\tau:\Delta^p\to\Delta^p$ afí, tot símplex η de $\mathrm{sd}^{\Delta^p}_p(\tau)$ és afí i verifica*

$$\mathrm{diam}(\eta)\leq\frac{p}{p+1}\mathrm{diam}(\tau)$$

Demostració. Siguin $x_0, \ldots, x_p$ els vèrtexs de τ. Per convexitat, tenim

$$\operatorname{diam}(\tau) = \max\{\|x_i - y_j\|\}$$

Llavors, tots els símplexs de la subdivisió baricèntrica contenen algun x_i i el baricentre $b_p = \frac{1}{p+1} \sum_i = x_i$. No és difícil veure (es deixa com a exercici) que $\operatorname{diam}(\eta) = \|b - x_{i_0}\| = \frac{1}{p+1} \left\|\sum_{i=0}^p x_i - (p+1)x_{i_0}\right\|$ i a més, per la desigualtat triangular:

$$\operatorname{diam}(\eta) = \|b - x_{i_0}\| = \frac{1}{p+1} \left\| \sum_{i=0}^{p} x_i - (p+1)x_{i_0} \right\| \leq \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} \|x_i - x_j\|$$

que té p termes. Ara bé, cadascun d'aquests termes és més petit o igual al diàmetre, i.e.

$$\operatorname{diam}(\eta) \leq \frac{p}{p+1} \operatorname{diam}(\tau)$$

□

Corol·lari 16.4.11. *Tot símplex η de $\operatorname{sd}^{\Delta^p}(\operatorname{id}_p)$ és afí i $\operatorname{diam}(\eta) \leq \frac{p}{p+1}\operatorname{diam}(\Delta^p)$.*

Ara ja podem fer la demostració de l'apartat (c) del teorema de divisió baricèntrica.

Podem suposar que $z = \sigma : \Delta^p \to X$. Com $\{\mathring{U}_i\}_{i \in I}$ és un recobriment de X, $\{\sigma^{-1}(\mathring{U}_i)\}_{i\in I}$ és recobriment de Δ^p. Com Δ^p és espai mètric compacte, $\exists \lambda > 0$ nombre de Lebesgue del recobriment. Sigui n suficientment gran tal que $\left(\frac{p}{p+1}\right)^n < \lambda$. Aleshores $\operatorname{diam}(\operatorname{sd}^n(\operatorname{id}_p)) < \lambda$. Tots els símplexs de $\operatorname{sd}^n(\operatorname{id}_p)$ són a dins d'algun $\sigma^{-1}(\mathring{U}_i)$. Aplicar σ i ja està. □

Corol·lari 16.4.12. *El morfisme de complexos de cadenes $\operatorname{sd}^X_\bullet : S_\bullet(X) \to X_\bullet(X)$ indueix*

$$H_p(X) \to H_p(X) \quad \forall p \geq 0$$

i pel teorema d'abans això és l'aplicació identitat.

Observació 16.4.13. $\operatorname{sd}_\bullet \sim \operatorname{id}$ *on la relació és d'homotopia. D'aquí,* $(\operatorname{sd}_\bullet)^n = \operatorname{sd}_\bullet \circ (\operatorname{sd}_\bullet)^{n-1} \sim \operatorname{id}$. *És a dir, si posem* $s = \operatorname{sd}_\bullet$ *i* $1 = \operatorname{id}_{S_\bullet(X)}$, *tenim*

$$(s^n - 1) = (\underbrace{s^{n-1} + s^{n-2} + \cdots + 1}_{g})(s - 1 =$$

i així això és igual a

$$g(s-1) = g(\partial h + h\partial) = (gh)\partial + \partial(gh)$$

3. *Demostració del teorema de les cadenes petites.* La inclusió $S_\bullet(\mathcal{U}) \hookrightarrow S_\bullet(X)$ indueix per pas al quocient una successió exacta de complexos

$$0 \to S_\bullet(\mathcal{U}) \to S_\bullet(X) \to S_\bullet(X)/S_\bullet(\mathcal{U}) \to 0$$

que alhora, indueix una successió exacta llarga d'homologia

$$\cdots \to H_{p+1}\left(\frac{S_\bullet(X)}{S_\bullet(\mathcal{U})}\right) \to H_p(S_\bullet(\mathcal{U}) \to H_p(X) \to H_p\left(\frac{S_\bullet(X)}{S_\bullet(\mathcal{U})}\right) \to \cdots$$

pel que és suficient provar que $H_p(S_\bullet(X)/S_\bullet(\mathcal{U})) = 0$ per a tot $p \geq 0$.

Sigui $[z] \in H_p(S_\bullet(X)/S_\bullet(\mathcal{U}))$ una classe d'homologia representada per $z \in S_p(X)$. Observem, en primer lloc, que z i $sd(z)$ són cicles homòlegs del complex $S_\bullet(X)/S_\bullet(\mathcal{U})$. En efecte, com z és un cicle, verifica $\partial(z) \in S_{p-1}(\mathcal{U})$, és a dir, la cadena $\partial(z)$ és una cadena $\mathcal{U}$-petita. Aplicant a z la igualtat

$$\mathrm{id}_p - sd_p = \partial_{p+1}T_p + T_{p-1}\partial_p$$

obtinguda en el paràgraf anterior, trobem que $z - sd(z) = \partial T(z) + T\partial(z)$, com elements de $S_\bullet(X)$. Ara, com que T és una homotopia natural, la inclusió de U_i en X dona lloc a un diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd} S_p(U_i) \arrow[r, "T_p^{U_i}"] \arrow[d] & S_{p+1}(U_i) \arrow[d] \\ S_p(X) \arrow[r, "T_p^X"] & S_{p+1}(X) \end{tikzcd}$$

el que mostra que $T\partial(z)$ també és $\mathcal{U}$-petita. Per tant, $z - sd(z) = \partial T(z)$ a $S_\bullet(X)/S_\bullet(\mathcal{U})$ i passant a homologies tindrem $[z] - [sd(z)] = 0$ en $H_p(S_\bullet(X)/S_\bullet(\mathcal{U}))$. En definitiva,

$$[z] = [sd(z)] \in H_p(S_\bullet(X)/S_\bullet(\mathcal{U})).$$

Així, per inducció es verifica

$$[z] = [sd(z)] = [sd^2(z)] = \cdots = [sd^n(z)] \quad \text{a} \quad H_p(S_\bullet(X)/S_\bullet(\mathcal{U}))$$

Però, pel teorema (**??**) existeix un n tal que $sd^n(z)$ és $\mathcal{U}$-petita, i per tant és igual a zero en $H_p(S_\bullet(X)/S_\bullet(\mathcal{U}))$. □

En les condicions del teorema de les cadenes petites, el morfisme de complexos $S_\bullet(\mathcal{U}) \to S_\bullet(X)$ no solament indueix un isomorfisme en homologia sinó que, de fet, és una equivalència homotòpica de complexos. La versió que hem donat serà suficient per les necessitats d'aquests apunts, però la versió general del resultat consisteix a provar això mateix.

16.5 La successió exacta de Mayer-Vietoris

El teorema de Mayer-Vietoris que enunciem a continuació és el resultat anàleg, en homologia singular, al corresponent teorema de l'homologia simplicial. Aquest resultat, juntament amb la invariància homotòpica de l'homologia singular, ens permetrà calcular els grups d'homologia de les esferes, i donar les primeres aplicacions geomètriques de l'homologia singular.

Sigui X un espai topològic i U i V dos subconjunts de X tals que $X = U^\circ \cup V^\circ$. Sigui π el morfisme de complexos

$$\begin{aligned} \pi : S_\bullet(U) \oplus S_\bullet(V) &\longrightarrow S_\bullet(X) \\ (c_1, c_2) &\longmapsto c_1 - c_2 \end{aligned}$$

i notem per ι el morfisme induït per la inclusió

$$\begin{aligned} \iota : S_\bullet(U \cap V) &\longrightarrow S_\bullet(U) \oplus S_\bullet(V) \\ c &\longmapsto (c, c) \end{aligned}$$

Teorema 16.5.1. *Amb les notacions anteriors, existeix un morfisme $\partial_{U,V} : H_p(X) \to H_{p-1}(U \cap V)$, per a tot $p \geq 0$, tal que la successió*

$$\cdots \to H_p(U \cap V) \xrightarrow{\iota_\bullet} H_p(U) \oplus H_p(V) \xrightarrow{\pi_\bullet} H_p(X) \xrightarrow{\partial_{U,V}} H_{p-1}(U \cap V) \to \cdots$$

és exacta.

Aquesta successió exacta és natural en U, V, i s'anomena la *successió exacta de Mayer-Vietoris* del recobriment $\{U, V\}$.

Demostració. Sigui $\mathcal{U}$ el recobriment de X format per U i V. La imatge del morfisme

$$\begin{aligned} \pi : S_\bullet(U) \oplus S_\bullet(V) &\longrightarrow S_\bullet(X) \\ (c_1, c_2) &\longmapsto c_1 - c_2 \end{aligned}$$

és exactament $S_\bullet(\mathcal{U})$, mentre que el seu nucli està format per les parelles $(c_1, c_2) \in S_\bullet(U) \oplus S_\bullet(V)$ tals que $c_1 = c_2$, i per tant, $c_1 = c_2 \in S_\bullet(U \cap V)$. És a dir, es té la successió exacta de complexos

$$0 \longrightarrow S_\bullet(U \cap V) \longrightarrow S_\bullet(U) \oplus S_\bullet(V) \longrightarrow S_\bullet(\mathcal{U}) \longrightarrow 0$$

Prenent la successió exacta llarga d'homologia tenim

$$\cdots \to H_p(U \cap V) \xrightarrow{\iota_\bullet} H_p(U) \oplus H_p(V) \xrightarrow{\pi'_\bullet} H_p(X) \xrightarrow{\partial'_{U,V}} H_{p-1}(U \cap V) \to \cdots$$

Però pel teorema de les cadenes petites aplicat al recobriment $\mathcal{U}$, es té isomorfisme $j_\bullet : H_\bullet(S_\bullet(\mathcal{U})) \xrightarrow{\sim} H_\bullet(X)$, induit per la inclusió del complex $S_\bullet(\mathcal{U})$ en el complex $S_\bullet(X)$. Així, $j_\bullet \pi'_\bullet = \pi_\bullet$, i per tant podem substituir $H_\bullet(S_\bullet(\mathcal{U}))$ per $H_\bullet(X)$ en la successió exacta anterior, $\pi'_\bullet$ per $\pi_\bullet$, i finalment definir $\partial_{U,V} = \partial'_{U,V}(j_\bullet^{-1})$, amb el que es verifica l'enunciat del teorema. □

Observem que la successió de Mayer-Vietoris depèn de l'ordre del recobriment $\{U, V\}$ de X ja que aquest ordre determina el morfisme

$$\pi_\bullet : S_\bullet(U) \oplus S_\bullet(V) \longrightarrow S_\bullet(\mathcal{U}) \longrightarrow 0$$

Si invertim l'ordre, aleshores el morfisme resultant

$$-\pi : S_\bullet(V) \oplus S_\bullet(U) \longrightarrow S_\bullet(X)$$

és l'oposat al considerat pel recobriment $\mathcal{U}$, així és immediat completar el teorema de Mayer-Vietoris de la següent forma

Corol·lari 16.5.2. *Si en el teorema anterior invertim l'ordre del recobriment, aleshores $\partial_{V,U} = -\partial_{U,V}$. Així, la successió exacta de Mayer-Vietoris que li correspon és la mateixa però invertida i canviant $\pi_\bullet$ per $-\pi_\bullet$.*

Veiem ara una aplicació d'aquest teorema en el càlcul de l'homologia de les esferes.

16.6 Càlcul d'homologies singulars

Com a aplicació de la successió exacta de Mayer-Vietoris calcularem l'homologia singular de les esferes.

Considerem en primer lloc la circumferència $\mathbb{S}^1$. Siguin A, B dos punts diferents de $\mathbb{S}^1$, i descomponem $\mathbb{S}^1$ de la forma

$$\mathbb{S}^1 = (\mathbb{S}^1 \setminus A) \cup (\mathbb{S}^1 \setminus B).$$

Aleshores, si prenem $U = \mathbb{S}^1 \setminus A \simeq \mathbb{R}$ i $V = \mathbb{S}^1 \setminus B \simeq \mathbb{R}$ tindrem $U \cap V \simeq \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$. Tenim doncs,

- $H_0(U) \cong \mathbb{Z}$. Això és perquè és contràctil i ja vam veure quin era l'homologia singular de l'espai topològic amb un sol punt. Utilitzant això i el teorema d'invariància homotòpica s'obté aquesta homologia. Un generador és $[p]$, per a $p \in U$ i aleshores $H_0(U) \cong \mathbb{Z}$, $\forall p \in U$. El mateix passa amb $H_0(V) \cong \mathbb{Z}[q]$, per qualsevol $q \in V$. Notem que podria donar-se que p i q fossin els mateixos, però prendrem $p \neq q$. Ara bé, si considerem el símplex $\sigma : \Delta^1 \to \Delta^1$ tal que $\sigma(p) = q$, aleshores $\partial\sigma = [p] - [q] = 0$ ja que en $H_0(U)$ o en $H_0(V)$, $[p] = [q]$. Ara bé, compte! Perquè si haguéssim pres $p = A$ o $q = B$ tot això és mentida! Per tant hem de prendre p i q de U i de V respectivament, que ja és el que hem fet. Això implica que està ben generat.

- Calculem ara $H_0(U \cap V)$. És clar que l'homologia simplicial serà

$$H_0(U \cap V) \cong \mathbb{Z}[p] \oplus \mathbb{Z}[q]$$

Busquem ara l'aplicació $f : H_0(U \cap V) \to H_0(U) \oplus H_0(V)$. Notem que si prenem $[p], [q] \in H_0(U \cap V)$ amb $p \in U \setminus V$ i $q \in V \setminus U$ com abans, aleshores $[p] \neq [q]$ en $H_0(U \cap V)$, però $[p] = [q]$ en $H_0(U) \oplus H_0(V)$. Per tant, podem prendre l'aplicació que envia $[p] \mapsto ([p], [p])$ i $[q] \mapsto ([q], [q]) = ([p], [p])$. Per tant, tenim la successió

$$\cdots \to H_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial} H_0(U \cap V) \xrightarrow{f} H_0(U) \oplus H_0(V) \longrightarrow H_0(\mathbb{S}^1)$$

on $\ker f = \langle [p] - [q] \rangle$ pel que hem dit abans.

El morfisme de connexió és ara

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_1(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d] & S_1(U) \oplus S_1(V) \arrow[r] \arrow[d] & S_1(\{U, V\}) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & S_0(U \cap V) \arrow[r] & S_0(U) \oplus S_0(V) \arrow[r] & S_0(\{U, V\})
\end{tikzcd}$$

Llavors, si aconseguim calcular $S_1(\{U, V\})$ (generadors), aleshores sabem que $H_1(\mathbb{S}^1) \cong H_1(S_1(\mathbb{S}^1))$ i com que U i V són un recobriment de $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^1 \simeq \{U, V\}$.

Llavors, si prenem els camins

$$\begin{aligned} \alpha : [0,1] &\longrightarrow U \\ t \quad & e^{2\pi i\left(1 - \frac{t}{2}\right)} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \beta : [0,1] &\longrightarrow V \\ t &\longmapsto e^{2\pi i\left(\frac{1-t}{2}\right)} \end{aligned}$$

tenim que $\alpha + \beta$ és un generador de $S_1(\{U, V\})$. Anem a provar això. Primer notem que, si situem $\mathbb{S}^1$ com la circumferència centrada en $(0, 0)$ i radi 1, de manera que els punts que hem extret siguin el pol nord i sud, i situem $p = (1, 0)$ i $q = (-1, 0)$ per a que tot sigui més visual, aquests camins no són més que recórrer l'hemisferi sud de p a q (en el cas de α) i el nord de p a q també (en el cas de β). Ara observem que $\partial(\alpha + \beta) = 0$ trivialment, ja que $\partial\alpha = [q] - [p]$ i $\partial\beta = [p] - [q]$. El que s'ha de fer és pensar en α i β com a 1-símplexs singulars, ja que $[0, 1] = \Delta^1$ i U i V són els espais topològics de sortida. Aleshores, podem veure què fa el morfisme de connexió amb α i β:

$$\begin{aligned} S_1(U) \oplus S_1(V) &\longrightarrow S_0(U) \oplus S_0(V) \\ (\alpha, -\beta) &\longmapsto ([q] - [p], [q] - [p]) \end{aligned}$$

O sigui, mirant el morfisme de connexió, el que hem de fer és, sabent els generadors de $S_0(U \cap V)$, anar definint morfismes per poder saber a on van a parar aquests generadors quan arribem a $S_1(\{U, V\})$. Llavors, hem començat ara dient que $S_0(U) \oplus S_0(V) \to S_1(U) \oplus S_1(V)$ envia $([q] - [p], [q] - [p])$ a $(\alpha, -\beta)$ i sabem que $S_1(U) \oplus S_1(V) \to S_1(\{U, V\})$ envia $(\alpha, -\beta)$ a $\alpha + \beta$ pel tema de l'exactitud, ja que $S_0(U) \oplus S_0(V) \to S_0(\{U, V\})$ ha d'enviar $([q] - [p], [q] - [p])$ a 0 ja que $[q] = [p]$ en $S_0(\{U, V\})$. Aleshores si definim

$$\begin{aligned} S_1(U \cap V) &\longrightarrow S_0(U) \oplus S_0(V) \\ [q] - [p] &\longmapsto ([q] - [p], [q] - [p]) \end{aligned}$$

ja aconseguim el que volem. Pel teorema de les cadenes petites aconseguim que $[\alpha+\beta]$ siguin generadors de $H_1(\mathbb{S}^1)$, és a dir, $H_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}[\alpha+\beta]$.

Aquest càlcul és el primer pas de la inducció que ens permet calcular l'homologia de les esferes.

Teorema 16.6.1 (Homologia singular de l'esfera)**.** *L'homologia singular de l'esfera n-dimensional, $\mathbb{S}^n$, $n \geq 1$, és*

$$H_p(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & si\ p=0\ \ o\ p=n \\ 0, & si\ p \neq 0\ \ i\ p \neq n \end{cases}$$

Demostració. La demostració es fa per inducció sobre n. El pas $n=1$ ja l'hem comentat abans, per tant passem directament al pas inductiu. Suposem que $n \geq 2$ i que el resultat és cert per a $\mathbb{S}^{n-1}$, i demostrem-lo per $\mathbb{S}^n$. Usarem el mateix tipus de raonament que per a la circumferència $\mathbb{S}^1$.

Siguin A i B dos punts diferents de $\mathbb{S}^n$ i prenem els oberts

$$U = \mathbb{S}^n \setminus A \simeq \mathbb{R}^n, \qquad V = \mathbb{S}^n \setminus B \simeq \mathbb{R}^n.$$

Tindrem qu $\mathbb{S}^n = U \cup V$ i $U \cap V = \mathbb{S}^n \setminus \{A, B\}$, que és del tipus d'homotopia de $\mathbb{S}^{n-1}$. Com U i V són contràctils, $H_p(U) = H_p(V) = 0$ per a $p \geq 1$, i així, la successió llarga de Mayer-Vietoris es redueix, per a $p > 1$, a les successions exactes

$$0 \to H_p(\mathbb{S}^n) \to H_{p-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \to 0$$

d'on es dedueix el resultat, per $p > 1$, usant la hipòtesi d'inducció. Per $p = 1$, el resultat ja és conegut, per comparació amb el grup fonamental, tot i que també podem deduir-lo de la successió de Mayer-Vietoris, ja que aquesta acaba en la forma

$$0 \to H_1(\mathbb{S}^n) \to H_0(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{i_\bullet} H_0(\mathbb{R}^n) \oplus H_0(\mathbb{R}^n) \to H_0(\mathbb{S}^n) \to 0,$$

i com $i_\bullet$ és un morfisme injectiu, per (??), se segueix que $H_1(\mathbb{S}^\ltimes) = 0$, el que conclou la demostració del teorema. $\square$

Corol·lari 16.6.2. *Si $n \neq m$, les esferes $\mathbb{S}^n$ i $\mathbb{S}^m$ no són homeomorfes.*

Demostració. Si fossin homeomorfes en resultaria un isomorfisme $H_n(\mathbb{S}^n) \cong H_n(\mathbb{S}^m)$ la qual cosa és absurda ja que $H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ mentre que $H_n(\mathbb{S}^m) \cong 0$. $\square$

Observem que $\mathbb{S}^2$ i $\mathbb{S}^3$ no són homeomorfes, mentre que $\pi_1(\mathbb{S}^2) \cong \pi_1(\mathbb{S}^3) \cong 0$, és a dir, el grup fonamental no permet distingir-les. El raonament anterior prova, de fet, que $\mathbb{S}^n$ i $\mathbb{S}^m$ no tenen el mateix tipus d'homotopia si $n \neq m$.

Corol·lari 16.6.3. *Si $\mathbb{R}^n$ és homeomorf a $\mathbb{R}^m$, aleshores $n = m$.*

Demostració. Això és anterior. Però aquí proposem una nova demostració utilitzant aquest tema de les homologies singulars. Com que la compactificació d'Alexandroff de $\mathbb{R}^n$ és homeomorfa a $\mathbb{S}^n$, aleshores tenim $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^m$ i aleshores $\mathbb{R}^n_\infty \simeq \mathbb{R}^m_\infty$ i per tant $\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{S}^m$, on el ∞ vol dir compactificació d'Alexandroff. D'aquesta manera, com que $H_p(\mathbb{S}^n) \cong H_p(\mathbb{S}^m)$ pel que acabem de veure, per tot $p \geq 0$, ha de ser $n = m$. $\square$

Corol·lari 16.6.4. $\mathbb{S}^{n-1}$ *no és un retracte de $\mathbb{B}^n$, per cap $n \geq 1$.*

Demostració. Això també ha estat demostrat però només per $n = 2$ amb el grup fonamental. Ara ho demostrarem per a $n \geq 2$ utilitzant homologies. Suposem que $\exists r : \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ continua tal que si $i : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{B}^n$ és la inclusió, $r \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Suposem que $p = n - 1 \geq 1$,

$$\underbrace{H_p(\mathbb{S}^{n-1}}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{i_p} \underbrace{H_p(\mathbb{B}^n)}_{\substack{0 \\ \text{si } p=n-1}} \xrightarrow{r_p} \underbrace{H_p(\mathbb{S}^{n-1}}_{\mathbb{Z}}$$

la qual cosa és una contradicció, ja que no pot ser que passem de $\mathbb{Z}$ a 0 i després a $\mathbb{Z}$ mitjançant la identitat. $\square$

Corol·lari 16.6.5 (Teorema del Punt Fix de Brower). *$\forall n \geq 2$, si $f_{\mathbb{B}}^n \to \mathbb{B}^n$ és contínua, aleshores té un punt fix, i.e. $\exists p \in \mathbb{B}^n$ tal que $f(p) = p$.*

Demostració. Suposem que $\exists f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ contínua sense punt fixos. Prenem un retracte que sigui enviar cada punt a l'escorça de $\mathbb{B}^n$, és a dir, a $\mathbb{S}^{n-1}$:

$$\begin{aligned} r : \mathbb{B}^n &\longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ p &\longmapsto r(p) \end{aligned}$$

Si veiem que r és contínua, com que $r_{|\mathbb{S}^{n-1}} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ tindrem una contradicció, pel corol·lari anterior.

Podem comprovar la continuïtat de r de la forma següent: analíticament la definició de r és $r(x) = x + \lambda(x)(x - f(x))$, amb $\lambda : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^+$ tal que $\|r(x)\| = 1$. Així com $\langle r(x), r(x)\rangle = 1$, la funció $\lambda(x)$ verificarà l'equació

$$\langle x + \lambda(x)(x - f(x)), x + \lambda(x)(x - f(x))\rangle = 1,$$

i serà l'arrel positiva de

$$\|x\|^2 + 2\lambda(x)\langle x, x - f(x)\rangle + \lambda(x)^2\|x - f(x)\|^2 = 1,$$

el que prova que, efectivament, $\lambda(x)$, i per tant $r(x)$, és contínua. $\square$

Recordem d'apunts anteriors què era el grau d'una aplicació.

Definició 16.6.6 (Grau). Sigui $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ contínua ($n \geq 1$). Aleshores f indueix

$$f_\bullet : H_n(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$$

que és un morfisme de grups. Per tant, $f_\bullet$ és la multiplicació per un $k \in \mathbb{Z}$. Anomenarem *grau* de f a aquest $k \in \mathbb{Z}$, i el denotarem per $\deg(f)$.

Altres exemples

Com a exemples he pensat en escriure aquí alguns dels càlculs d'homologies singulars que he anat trobant o bé a exercicis o bé a exàmens d'anys anteriors i intentar explicar-los bé, a fi d'entendre com s'ha d'utilitzar el teorema de Mayer-Vietoris i tal.

Exercici 12. *Considerem els següents subespais topològics de $\mathbb{R}^3$:*

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \\ X_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ z = 0\} \\ X_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = (1 - z)^2, \ 0 \leq z \leq 1\} \end{aligned}$$

Calcular l'homologia singular de $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$.

Solució. Interpretem quin és X. És clar que X_1 és l'esfera de radi 1 centrada al $(0,0,0)$, que X_2 és la circumferència que té centre $(0,0,0)$ i radi 1 i està en el pla XY, i que X_3 és un con, amb base diguéssim X_2 "plena" i les parets també plenes, i el vèrtex és el pol nord de X_1, el punt $(0,0,1)$.

Clarament X és arc-connex i per tant $H_0(X) = \mathbb{Z}$. La resta d'homologies singulars es pot calcular amb la successió de Mayer-Vietoris. Moltes eleccions d'oberts són possibles, per exemple es poden prendre

$$A = X \setminus \{(0,0,1)\}, \qquad B = X \cup B_{1/2}(0,0,1)$$

Aleshores B és contràctil perquè es pot fer un retracte de tot cap al punt $(0,0,1)$. D'altra banda, A admet una esfera 2-dimensional com a retracte de deformació, doncs podem fer tendir tot el con cap a la base i tot l'hemisferi nord de l'esfera cap a l'equador, i aleshores ens queda mitja esfera, però "tapada", cosa que és homeomorfa a $\mathbb{S}^2$. Finalment, $A \cap B$ és més difícil d'imaginar. Hem de pensar que A consisteix a treure el pol nord i B és una mena de tall de la nostra figura X a l'altura del tròpic per dir-ho d'alguna manera, de forma que si fem la intersecció, el que ens queda és la part de l'esfera del tròpic cap amunt, la part del con sense base i sense el pol nord. Llavors, com que no es toquen aquestes dues parts, són una unió disjunta. I ara pensem que el que tenim són com dues cintes tancades, que es poden retractar en dues circumferències. Per tant $A \cap B$ és homeomorf a la unió disjunta de dues circumferències $\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$. Les homologies d'aquestes coses ja són conegudes:

$$H_2(A) \cong H_2(\mathbb{S}^2) \cong \mathbb{Z}, \quad H_2(B) \cong H_2(*) \cong 0, \quad H_2(A \cap B) \cong H_2(\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1) \cong 0$$

$$H_1(A) \cong H_1(\mathbb{S}^2) \cong 0, \quad H_1(B) \cong H_1(*) \cong 0, \quad H_1(A \cap B) \cong H_1(\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$H_0(A) \cong H_0(\mathbb{S}^2) \cong \mathbb{Z}, \quad H_0(B) \cong H_0(*) \cong \mathbb{Z}, \quad H_0(A \cap B) \cong H_0(\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

i aleshores el que tenim és la següent successió de Mayer-Vietoris

$$\cdots \to H_2(A \cap B) \to H_2(A) \oplus H_2(B) \to H_2(X) \to H_1(A \cap B) \to$$

$$\to H_1(A) \oplus H_1(B) \to H_1(X) \to H_0(A \cap B) \to H_0(A) \oplus H_0(B) \to H_0(X)$$

que quedarà

$$\cdots \to 0 \to \mathbb{Z} \to H_2(X) \to \mathbb{Z}^{\oplus 2} \to 0 \to H_1(X) \to \mathbb{Z}^{\oplus 2} \to \mathbb{Z}^{\oplus 2} \to \mathbb{Z} \to 0$$

Per començar veiem que tots els termes $H_p(X) = 0$ per $p > 2$. Ara el que ens falta fer és deduir $H_2(X)$ i $H_1(X)$ del fet que aquesta successió és exacta. Com hi ha zeros pel mig, podem "partir" la successió en dos i la primera seria

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_2(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

que està entre zeros i aleshores es diu que el terme de la dreta és lliure. Per tant, la suma alternada de les característiques d'Euler ha de ser igual a zero i això dona que $H_2(X) \cong \mathbb{Z}^{\oplus 3}$. El mateix passa amb el troç de la dreta, que queda

$$0 \to H_1(X) \to \mathbb{Z}^{\oplus 2} \to \mathbb{Z}^{\oplus 2} \to \mathbb{Z} \to 0$$

i pels mateixos motius d'abans, obtenim $H_1(X) \cong \mathbb{Z}$.

Exercici 13. *Calcular l'homologia singular de* $\mathbb{Q}$.

Solució. Si tenim un símplex singular en $\mathbb{Q}$, $\sigma : \Delta^n \to \mathbb{Q}$, aleshores en Δ^n la topologia és la euclidiana i en $\mathbb{Q}$ és la induïda per la euclidiana. Aleshores, per una aplicació contínua, la imatge d'un connex ha de ser connex. Com que Δ^n és arc-connex, la imatge de qualsevol punt de Δ^n ha de ser un conjunt arc-connex de $\mathbb{Q}$, però $\mathbb{Q}$ no és arc-connex, ergo σ ha de ser constant. Per tant tots els símplexs singulars han de ser constants. Llavors, el complex de cadenes singulars serà

$$S_n(\mathbb{Q}) \longrightarrow S_{n-1}(\mathbb{Q})$$

Ara, símplexs n-dimensionals de $\mathbb{Q}$ tindrem tants com elements de $\mathbb{Q}$ i el mateix per $n-1$. Aleshores podem escriure que tindrem $S_n(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus|\mathbb{Q}|}$ dient que tenim els $\mathbb{Z}$ indexats pels elements de $\mathbb{Q}$.

En $S_n(\mathbb{Q})$, els generadors són, si $p \in \mathbb{Q}$, $\sigma_{n,p} : \Delta^n \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto p$, per a tot $x \in \Delta^n$. I l'operador vora quin és? Doncs prenem un símplex $\sigma_{n,p} \mapsto \partial_\bullet(\sigma_{n,p})$ que és la suma alternada de les cares:

$$\partial_\bullet(\sigma_{n,p}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_{n-1,p}$$

i aleshores dependrà de la paritat de n. Tindrem, per n parell,

$$S_n(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} S_{n-1}(\mathbb{Q}) \xrightarrow{0} S_{n-2}(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \cdots \to S_1(\mathbb{Q}) \xrightarrow{0} S_0(\mathbb{Q}) \to 0$$

i finalment doncs, obtenim

$$H_p(\mathbb{Q}) = \begin{cases} 0 & p > 0 \\ \mathbb{Z}^{\oplus|\mathbb{Q}|} & p = 0 \end{cases}$$

Exercici 14. *Calcular la homologia singular de l'espai* $X = \mathbb{S}^n \cup \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \; : \; x_{n+1} = 0\}$.

Solució. Ens hem d'imaginar X com una bola tallada per un pla horitzontal a l'equador. Resoldrem aquest exercici fent Mayer-Vietoris, en el cas $n = 1$. El que tenim és $\mathbb{S}^1$ tallada per una recta per la meitat. Aleshores X es pot retractar en una $\mathbb{S}^1$ amb una línia al mig. Aleshores podem prendre U com l'hemisferi nord i una mica del sud, amb línia, V com l'hemisferi sud i una mica del nord i la línia, i aleshores $U \cap V$ és una mena de segment. Clarament es pot veure que $U \simeq \mathbb{S}^1$, $V \simeq \mathbb{S}^1$ i $U \cap V \simeq *$, l'espai amb només un punt.

Com que X és arc-connex, ja tenim $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. Escrivim la successió de Mayer-Vietoris:

$$\cdots 0 \to H_1(U \cap V) \to H_1(U) \oplus H_1(V) \to H_1(X) \to H_0(U \cap V) \to H_0(U) \oplus H_0(V) \to H_0(X) \to 0$$

i ara sabem que $H_1(U) \cong H_0(U) \cong H_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(V) \cong H_0(U) \cong H_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ i $H_1(U \cap V) \cong H_1(*) \cong 0$ i $H_0(U \cap V) \cong H_0(*) \cong \mathbb{Z}$. També hem dit que $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$, per tant la successió queda

$$\cdots \to 0 \to 0 \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to H_1(X) \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0$$

Ara per trobar $H_1(X)$ utilitzem el fet que la successió és exacta, i aleshores la imatge de la funció $\partial : H_1(X) \to \mathbb{Z}$ ha de ser lliure perquè està dins de $\mathbb{Z}$. Podem considerar a part la successió exacta següent:

$$0 \to \mathrm{Im}\partial \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0$$

que no és la d'abans, sinó que tallant a ∂, com és exacta, comença al 0 perquè va a la imatge de ∂. Aleshores, com que la imatge està ficada dins de Z, im∂ només pot ser o 0 o $\mathbb{Z}$. Ara, comptant els rangs surt que $r - 1 + 2 - 1 = 0$ i per tant $r = 0$. Així doncs, Im$\partial = 0$. Així doncs, escrivim l'altra part, la de l'esquerra de la sucessió, i trobem

$$0 \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to H_1(X) \to 0$$

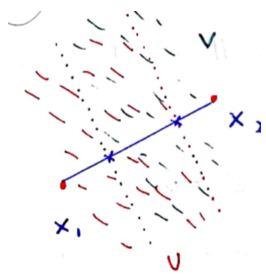


Figura 16.3: Representació gràfica de X en $n = 2$

on el zero de la dreta és de la imatge de ∂. Aleshores, com és exacta, ha de ser $H_1(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Ara hem calculat tot amb la $n = 1$. Notem que $H_p(X) = 0$ per $p \geq 2$ perquè tot és zero. Aleshores, què passa si agafem n en general? Doncs el que fem és retractar-ho tot a l'esfera $\mathbb{S}^n$ i el pla horitzontal el retractem a només la part de dins de l'esfera. Agafem els oberts U i V anàleg i aleshores $U \cong \mathbb{S}^n$, $V \cong \mathbb{S}^n$ i $U \cap V$ serà una mena de disc que es pot retractar en un punt. Llavors els càlculs d'homologia són fàcils.

Exercici 15. *Calcular l'homologia singular de* $X = \mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}$.

Solució. No ho diu, però suposem que $n > 1$. El que farem serà inducció sobre m.

1. Si $m = 1$, aleshores $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ cosa que ens dona directament

$$H_p(\mathbb{R}^n \setminus \{x_1\}) \cong H_p(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0 \text{ o si } p = n-1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

2. Si $m = 2$, aleshores tenim $X = \mathbb{R}^n \setminus \{x_1, x_2\}$. Per imaginar-nos-ho millor, podem pensar que $n = 2$ i aleshores és un pla menys dos punts. Considerem el segment que uneix aquests dos punts i prenem dos punts entre mig de x_1 i x_2 que caiguin a aquest segment, per exemple $\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2$ i $\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2$ i aleshores considerem els hiperplans (que ens els podem imaginar com rectes) que passen per aquests dos punts perpendiculars al segment que uneix x_1 i x_2.

   Llavors, prenem U com la part vermella de la figura **??** i V com la part negra d'aquesta figura. Clarament $U \cap V$ és la part com del mig. Aquí tenim doncs que $X = U \cup V$ i aleshores apliquem Mayer-Vietoris.

$$\cdots \to H_p(U \cap V) \to H_p(U) \oplus H_p(V) \to H_p(X) \to \cdots$$

   Clarament $U \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ i el mateix per a V. En efecte, doncs U és com un semiplà gegant amb un forat al punt x_1 i aleshores retractem tots els punts cap a aquest punt, però sense arribar perquè no existeix. Aleshores obtenim una cosa semblant a una circumferència. Això que explico és amb $n = 2$ eh. Finalment, és clar que $U \cap V$ és $\mathbb{R}^n$ que, de fet, és contràctil, per tant $U \cap V \simeq *$. Amb això tenim ja moltes coses conegudes. Per començar, coneixem $H_p(U) \cong \mathbb{Z}$ per $p = n-1$ i $p = 0$ i $H_p(V)$ el mateix. Aleshores $H_p(U) \oplus H_p(V) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ per $p = 0$ i $p = n-1$, per a la resta és zero. A més, $H_p(U \cap V) \cong \mathbb{Z}$ per $p = 0$ i per la resta és zero. Per tant, quedarà:

$$\cdots \to 0 \to H_{n+1}(X) \to 0 \to 0 \to H_n(X) \to 0 \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to H_{n-1}(X) \to \cdots$$

$$\cdots \to 0 \to H_1(X) \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to H_0(X) \to 0$$

També sabem que $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ en ser X arc-connex. Per tant, la resta són fàcils ja que queden entre successions exactes de termes lliures de torsió. La primera és la següent:

$$0 \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to H_{n-1}(X) \to 0$$

que com té dos termes, és un isomorfisme per ser exacta, és a dir, $H_{n-1}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. La segona sub-cadena que queda és

$$0 \to H_1(X) \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0$$

que, si anomeno r al rang de $H_1(X)$, obtinc l'equació

$$r - 1 + 2 - 1 = 0$$

que ens dona $r = 0$ i per tant $H_1(X) \cong 0$. Obtenim doncs,

$$H_p(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } p = n-1, \\ 0 & \text{si } p \neq n-1 \text{ i } p \neq 0 \\ \mathbb{Z} & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

3. Fem el cas general. És molt similar al d'abans, de fet. Agafem els mateixos oberts d'abans, amb U contenint $x_1, \dots, x_{m-1}$ i V contenint x_m. Aleshores veiem que $U \simeq V \simeq X \setminus \{x_1, \dots, x_{m-1}\}$ i $U \cap V \simeq \mathbb{R}^n \simeq *$. Així doncs, és clar que $V \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{x_m\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ anàlogament al d'abans i aleshores $H_p(V) = H_p(\mathbb{S}^{n-1})$ $\forall p \geq 0$. A més, tenim $H_p(U)$ de forma inductiva. També tenim $H_p(U \cap V) = 0$ per tot $p > 0$ per ser contràctil i $H_0(U \cap V) \cong \mathbb{Z}$. Llavors la successió exacta de Mayer Vietoris és una cosa similar a

$$\cdots \to 0 \to \mathbb{Z}^m \to H_{n-1}(X) \to 0 \to \cdots$$
$$\cdots \to 0 \to H_1(X) \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to H_0(X) \to 0$$

on $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ perquè és arc-connex. Seguint els raonaments anàlegs al cas $m = 2$ obtenim $H_1(X) \cong 0$, $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$, $H_{n-1}(X) \cong \mathbb{Z}^{\oplus m}$ i $H_p(X) \cong 0$.

Exercici 16. *Calcular l'homologia singular de l'Ampolla de Klein $\mathbb{K}^2$.*

Solució. Considerem $X = \mathbb{K}^2$ que surt d'identificar **??** segons indica la figura.

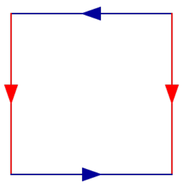


Figura 16.4: Ampolla de Klein sense fer les identificacions

Prenem els següents oberts (figura **??**)

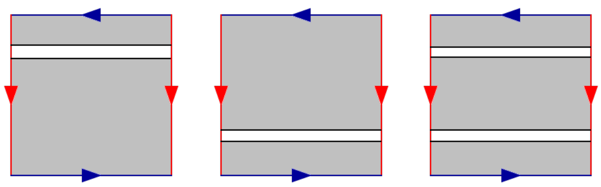


Figura 16.5: Oberts U, V i $U \cap V$ de $\mathbb{K}$

i és clar que $\mathbb{K}^2 = U \cup V$ i $U \cap V$ és el que he dibuixat. Observem que, retractant com és degut, podem arribar a $U \simeq \mathbb{S}^1$, $V \simeq \mathbb{S}^1$ i $U \cap V \simeq \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$. No faig els dibuixos perquè em fa mandra, però amb uns dibuixos es veu prou clar. Tenim la següent successió llarga de Mayer-Vietoris:

$$\cdots 0 \to H_2(\mathbb{K}^2) \xrightarrow{\partial_2} H_1(U \cap V) \xrightarrow{\phi} H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{\pi} H_1(\mathbb{K}^2) \to$$

$$\to H_0(U \cap V) \to H_0(U) \oplus H_0(V) \to H_0(\mathbb{K}^2) \to 0$$

on observem que $H_p(\mathbb{K}^2) \cong 0$ per $p > 2$: en efecte, doncs $H_p(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ per $p = 0$ i $p = 1$ i per $p \geq 2$ és $H_p(\mathbb{S}^1) \cong 0$ i aleshores la successió llarga de Mayer Vietoris per a $p > 2$ és

$$\cdots \to 0 \to 0 \to H_p(\mathbb{K}^2) \to 0 \to 0 \to \cdots$$

i per tant $H_p(\mathbb{K}^2) = 0$ per $p > 2$. Veiem per $p = 2, 1, 0$. Per $p = 0$ podem dir que al ser arc-connex, $H_0(\mathbb{K}^2) \cong \mathbb{Z}$. Ara, per calcular $H_1(\mathbb{K}^2)$ i $H_2(\mathbb{K}^2)$ podem separar la successió llarga a partir del morfisme que he anomenat ϕ de la següent manera:

$$0 \longrightarrow H_2(\mathbb{K}^2) \xrightarrow{\partial_2} H_1(U \cap V) \longrightarrow \mathrm{Im}(\phi) \longrightarrow 0$$

Llavors, aquí tenim una successió curta exacta i, per tant, $H_2(\mathbb{K}^2) \cong \ker \phi$ ja que $\mathrm{Im}\partial_2 = \ker \phi$ per l'exactitud i de la mateixa manera $\mathrm{Im}\partial_2 \cong H_2(\mathbb{K}^2)$ perquè ∂_2 és injectiva, al provenir d'un zero cap a $H_2(\mathbb{K}^2)$ i ser la successió exacta (ha de ser $\mathrm{im} 0 = \ker(\partial_2) = 0$). Llavors, tenim que $H_2(\mathbb{K}^2) \cong \ker \phi$.

Fem ara un altre tall de la successió llarga, aquest cop per π i obtenim la següent successió:

$$0 \to \mathrm{Im}\pi \to H_1(\mathbb{K}^2) \to H_0(U \cap V) \to H_0(U) \oplus H_0(V) \to H_0(\mathbb{K}^2) \to 0$$

Al posar $\mathrm{Im}\pi$ obtinc el zero de l'esquerra de tot, ja que $\mathrm{Im}\pi \hookrightarrow H_1(\mathbb{K}^2)$ s'injecta. Ara, el primer teorema d'isomorfia em donarà

$$\mathrm{Im}\pi \cong \frac{H_1(U) \oplus H_1(V)}{\ker \pi}$$

i per exactitud tenim $\ker \pi \cong \mathrm{Im}\phi$, ergo tenim

$$\mathrm{Im}\pi \cong \frac{H_1(U) \oplus H_1(V)}{\mathrm{Im}\phi}$$

Per tant, si estudiem el morfisme ϕ tindrem més pistes sobre $H_1(\mathbb{K}^2)$ i obtindrem $H_2(\mathbb{K}^2)$.

Estudiem doncs el morfisme $\phi : H_1(U \cap V) \longrightarrow H_1(U) \oplus H_1(V)$. Sabem que $U \cap V \simeq \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$ i aleshores $H_1(U \cap V) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Trobem generadors (figura **??**):

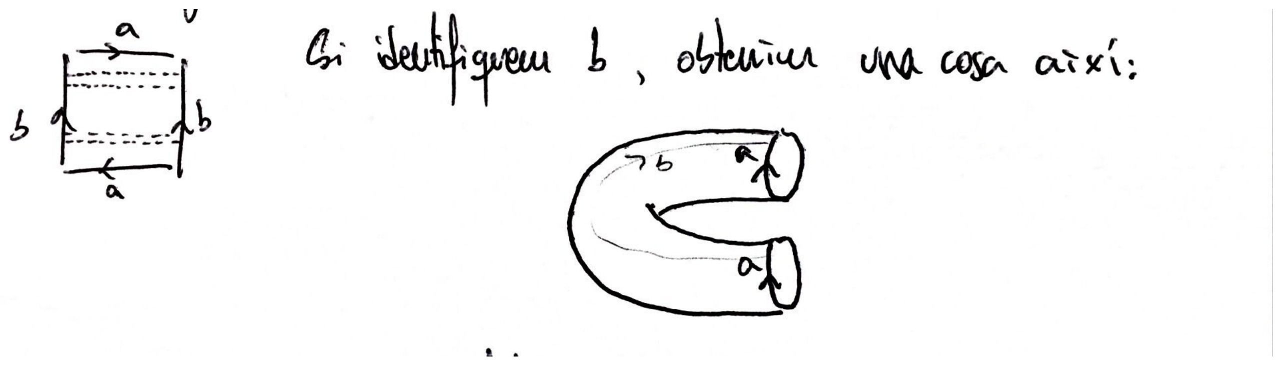


Figura 16.6: Si identifiquem b, obtenim una cosa així

Llavors, si després identifiquem a, en $U \cap V$ queden dos cilindres oberts, un dels quals contenint a i l'altre conté la franja com del mig del quadrat inicial. Per tant, si fico allà un altre camí c tinc la figura ??

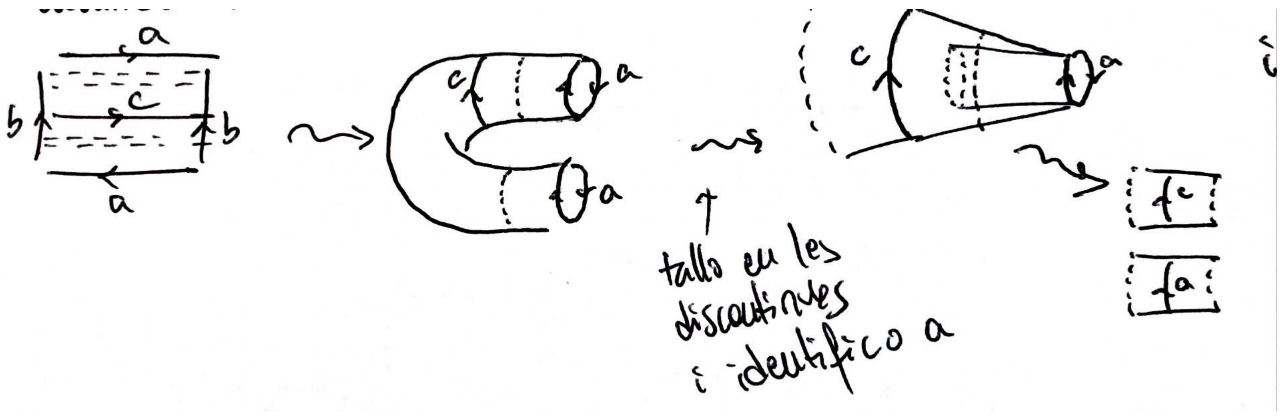


Figura 16.7: Retracte de deformació de $U \cap V$

i veiem que al fer retracte de deformació de $U \cap V$ en $\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$ obtinc una $\mathbb{S}^1$ generada per a i l'altra per c. Per tant, ja tinc dos generadors.

Veiem ara què els hi passa quan fem ϕ. El dibuix d'abans ho representava molt bé. Veiem on va a parar c en U (figura ??)

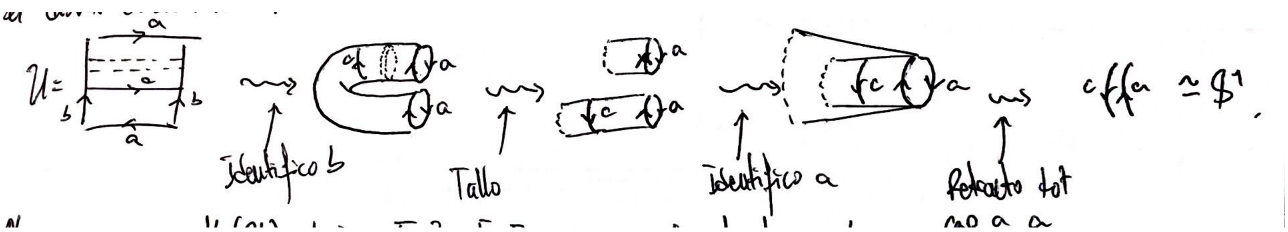


Figura 16.8: Classe de la imatge de c en $H_1(U)$

Observem que en $H_1(U)$ tenim $[a] = -[c]$ ja que al retractar sobre a tot U, obtinc que els dos camins s'ajunten però en sentit contrari, en una $\mathbb{S}^1$. En V en canvi (figura ??)

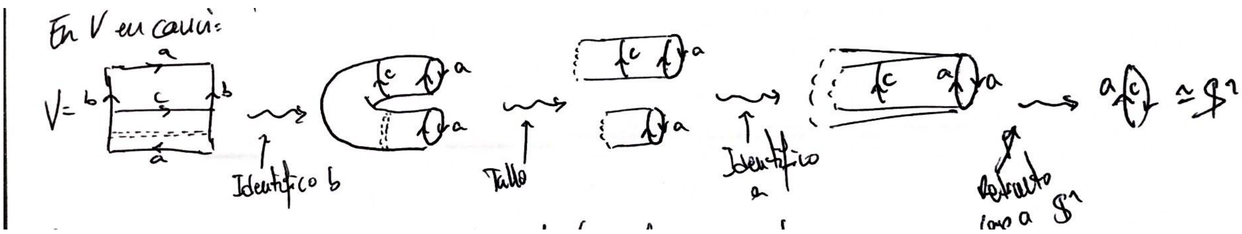


Figura 16.9: Classe de la imatge de c en $H_1(V)$

Aquí els dos camins van a parar a $\mathbb{S}^1$ amb la mateixa orientació, ergo en $H_1(V)$ tenim $[a] = [c]$.

Per tant, ja sabem les imatges de $[a]$ i $[c]$ pel morfisme ϕ:

$$\begin{aligned} \phi : H_1(U \cap V) &\longrightarrow H_1(U) \oplus H_1(V) \\ [a] &\longmapsto ([a]\,, [a]) \\ [c] &\longmapsto ([c]\,, [c]) = (-\,[a]\,, [a]) \end{aligned}$$

i així, ϕ té la matriu $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Calculem nucli i imatge i obtenim $\ker\phi = 0$ i $\mathrm{Im}\phi = \langle(1,-1),(1,1)\rangle$ que són linealment independents.

Llavors, seguim amb el problema. Ja hem vist quin era $\ker\phi$ i per tant $H_2(\mathbb{K}^2) \cong 0$. Ara també sabem quina és la imatge de ϕ i per tant tenim

$$\frac{H_1(U)\oplus H_1(V)}{\mathrm{Im}\phi} \cong \frac{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{\langle(-1,1),(1,1)\rangle} \cong \frac{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{\langle(1,1),(2,0)\rangle}$$

ara, a dalt podem escollir generadors de $\mathbb{Z}$ en cada cas de la següent forma:

$$\cong \frac{\mathbb{Z}(1,1)\oplus\mathbb{Z}(1,0)}{\mathbb{Z}(1,1)\oplus\mathbb{Z}(2,0)} \cong \frac{\mathbb{Z}(1,0)}{2\mathbb{Z}(1,0)} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

i d'aquesta manera, la successió que teníem curta quedarà

$$0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to H_1(\mathbb{K}^2) \to \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0$$

i així, $H_1(\mathbb{K}^2) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Resum del càlcul de grups d'homologia d'alguns espais famosos

Proposició 16.6.7 (Homologia singular d'espais coneguts)**.** *Els càlculs anteriors i altres càlculs que hem fet al llarg del curs donen pas a les següents homologies singulars:*

(a) Si X i Y són del mateix tipus d'homotopia, aleshores $H_p(X) \cong H_p(Y)$.

(b) Si X és contràctil, $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ i $H_p(X) \cong 0$ per $p \geq 1$.

(c) Si X és arc-connex, aleshores $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

(d) Si X és fitat i convex, aleshores $H_p(X) = 0$ per $p > 0$.

(e) L'homologia singular de l'esfera $\mathbb{S}^n$ ve donada per

$$H_p(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & si\ p = 0\ o\ p = n \\ 0, & altrament \end{cases}$$

(f) $H_p(\mathbb{Q}) \cong 0$ per $p > 0$ i $H_0(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus|\mathbb{Q}|}$ on $\oplus|\mathbb{Q}|$ a l'exponent de $\mathbb{Z}$ representa que és la suma de $\mathbb{Z}$ indexada per tots els elements de $\mathbb{Q}$.

(g) $\tilde{H}_0(X) \cong \mathbb{Z}^{\oplus r}$, on r és el nombre de components arc-connexes de X. Aleshores $H_0(X)$ és afegir una $\mathbb{Z}$ a això. D'altra banda $\tilde{H}_p(X) \cong H_p(X)$ per $p \geq 1$.

(h) $\tilde{H}_0(X_1 \vee X_2) \cong \tilde{H}_0(X_1) \oplus \tilde{H}_0(X_2)$ però no és cert per H_0 normal. En canvi, per $n \geq 1$ sí que és cert $H_n(X_1 \vee X_2) \cong H_n(X_1) \oplus H_n(X_2)$.

(i) $H_p(X \times \mathbb{S}^n) \cong H_{p-1}(X) \oplus H_p(X)$, per $p \geq 0$.

16.7 Homologia relativa singular

En aquest apartat estudiarem les parelles d'espais topològics formades per un espai topològic X i un subespai A de X, direm aleshores que (X, A) és un parell topològic. Si (X, A) i (Y, B) són parells topològics, una aplicació contínua de parells $f : (X, A) \to (Y, B)$ és una aplicació contínua $f : X \to Y$ tal que $f(A) \subset B$. És immediat comprovar que els parells topològics i les aplicacions de parells formen una categoria, que notarem $\mathbf{Top}^2$.

L'aplicació d'inclusió $i : A \hookrightarrow X$ és una aplicació contínua i, per tant, indueix un morfisme de complexos de cadenes singulars

$$\begin{aligned} S_\bullet(i) : S_\bullet(A) &\longrightarrow S_\bullet(X) \\ \sigma &\longmapsto \sigma \end{aligned}$$

que és injectiu.

Definició 16.7.1. El *complex de cadenes singulars relatives del parell* (X, A), que denotarem per $S_\bullet(X, A)$, és el complex quocient $S_\bullet(X)/S_\bullet(A)$, és a dir,

$$S_p(X, A) := \frac{S_p(X)}{S_p(A)},$$

per a tot $p \geq 0$. Es defineix l'*homologia relativa del parell* (X, A), que denotarem per $H_\bullet(X, A)$, com l'homologia del complex $S_\bullet(X, A)$, és a dir,

$$H_\bullet(X, A) := H_\bullet(S_\bullet(X, A)) = H_\bullet\left(\frac{S_\bullet(X)}{S_\bullet(A)}\right).$$

Els grups $S_p(X, A)$ són grups abelians lliures, ja que són isomorfs als subgrups de $S_p(X)$ generats per tots els p-símplexs singulars no continguts en A.

Proposició 16.7.2. *Siguin (X, A), (Y, B) parells topològics i $f : (X, A) \to (Y, B)$ una aplicació contínua de parells. Aleshores f indueix un morfisme natural en homologia relativa*

$$H_\bullet(f) : H_\bullet(X, A) \to H_\bullet(Y, B),$$

tal que, si σ és un cicle relatiu, aleshores $H_\bullet(f)(\sigma) = [S_\bullet(f)(\sigma)]$. A més a més, l'homologia relativa indueix un functor

$$H_\bullet : \mathbf{Top}^2 \longrightarrow \mathbf{Ab}.$$

Demostració. Per definició

$$S_\bullet(X, A) := S_\bullet(X)/S_\bullet(A), \qquad S_\bullet(Y, B) := S_\bullet(Y)/S_\bullet(B).$$

L'aplicació f indueix un morfisme de complexos que per la functorialitat de $S_\bullet$ fan commutatiu el diagrama

$$\begin{tikzcd} S_\bullet(A) \arrow[r, "S_\bullet(f)"] \arrow[d, "S_\bullet(i)"'] & S_\bullet(B) \arrow[d, "S_\bullet(i)"] \\ S_\bullet(X) \arrow[r, "S_\bullet(f)"] & S_\bullet(Y). \end{tikzcd}$$

Així, per pas al quocient, resulta el diagrama commutatiu de les successions exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S_\bullet(A) \arrow[r] \arrow[d, "S_\bullet^A"'] & S_\bullet(X) \arrow[r] \arrow[d, "S_\bullet^X"'] & S_\bullet(X, A) \arrow[r] \arrow[d, "S_\bullet^{(X,A)}"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & S_\bullet(B) \arrow[r] & S_\bullet(Y) \arrow[r] & S_\bullet(Y, B) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

El morfisme de complexos $S_\bullet^{(X,A)}(f)$ indueix el morfisme en homologia buscat. La functorialitat és immediata a partir de la functorialitat de $S_\bullet^{(X,A)}$. □

Teorema 16.7.3. *Si (X,A) és un parell topològic, llavors hi ha una successió exacta llarga*

$$\cdots \longrightarrow H_p(A) \xrightarrow{i_\bullet} H_p(X) \xrightarrow{\pi_\bullet} H_p(X,A) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{p-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

que s'anomena la successió exacta d'homologia relativa del parell (X,A). Aquesta successió exacta és natural en el parell (X,A), és a dir, si $f:(X,A)\to(Y,B)$ és una aplicació contínua de parells, aleshores el diagrama de successions exactes

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_p(A) \arrow[r, "i_\bullet"] \arrow[d] & H_p(X) \arrow[r, "\pi_\bullet"] \arrow[d] & H_p(X,A) \arrow[r, "\partial_\bullet"] \arrow[d] & H_{p-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_p(B) \arrow[r, "j_\bullet"] & H_p(Y) \arrow[r, "\pi'_\bullet"] & H_p(Y,B) \arrow[r, "\partial_\bullet"] & H_{p-1}(B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

és commutatiu.

Demostració. Per la definició del complex singular relatiu $S_\bullet(X,A)$, tenim la successió exacta de complexos

$$0 \longrightarrow S_\bullet(A) \xrightarrow{S_\bullet(i)} S_\bullet(X) \xrightarrow{S_\bullet(\pi)} S_\bullet(X,A) \longrightarrow 0,$$

i per no sé quin teorema s'obté la successió exacta llarga d'homologia ssociada

$$\cdots \longrightarrow H_p(A) \xrightarrow{i_\bullet} H_p(X) \xrightarrow{\pi'_\bullet} H_p(X,A) \xrightarrow{S_\bullet(\pi)} S_\bullet(X,A) \longrightarrow \cdots$$

Si $f:(X,A)\to(Y,B)$ és una aplicació contínua de parells, aleshores el diagrama de successions exactes de complexos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_\bullet(A) \arrow[r] \arrow[d] & S_\bullet(X) \arrow[r] \arrow[d] & S_\bullet(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_\bullet(B) \arrow[r] & S_\bullet(Y) \arrow[r] & S_\bullet(Y,B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

és commutatiu, així de (??) resulta la naturalitat de la successió exacta d'un parell. □

Hi ha una noció d'homotopia de parelles.

Definició 16.7.4. Donades $f,g:(X,A)\to(Y,B)$ direm que f i g són homòtopes en $\mathbf{Top}_2$ (o homòtopes mòdul A) si existeix

$$F:(X\times[0,1], A\times[0,1])\to Y\times B$$

tal que $F(x,0)=f(x)$ i $F(x,1)=g(x)$, $\forall x\in X$.

Observació 16.7.5. *$f,g: X\to Y$, $A\subset X$, teníem la noció d'aplicacions homotòpicament equivalents, $f\sim_A g$. Però aquella noció no és idèntica al que hem definit. La definició actual d'homotopia implica la definició anterior.*

Teorema 16.7.6 (Invariància homotòpica de parelles). *Si $f,g:(X,A)\to(Y,B)$ homòtopes en $\mathbf{Top}_2$, aleshores*

$$f_\bullet = g_\bullet : H_p(X,A) \longrightarrow H_p(Y,B), \quad \forall p\geq 0$$

Demostració. Sigui $i : A \hookrightarrow X$. És fàcil veure que l'homotopia que vam construir en el cas absolut és funcional. En el nostre cas

$$\begin{tikzcd}
S_p(A) \arrow[r, "h_p^A"] \arrow[d, "i_\bullet"] & S_{p+1}(A \times [0,1]) \arrow[d, "i_\bullet \times \mathrm{id}"] & \lambda_0^A \overset{h_p^A}{\sim} \lambda_1^A \\
S_p(X) \arrow[r, "h_p^X"'] & S_{p+1}(X \times [0,1]) & \lambda_0^X \overset{h_p^X}{\sim} \lambda_1^X
\end{tikzcd}$$

Fent servir aquesta homotopia com en el cas absolut, s'obté $f_\bullet = g_\bullet : H_p(X,A) \to H_p(Y,B)$, $\forall p \geq 0$. $\square$

16.8 El teorema d'escissió

Sigui X un espai topològic, $A \subset X$ i $U \subset A$. Llavors tenim un morfisme de parelles en $\mathbf{Top}_2$

$$(X \setminus U, A \setminus U) \longrightarrow (X, A)$$

Es pot interpretar com una simple inclusió de $X \setminus U$ dins de X i el mateix amb A. Aquesta aplicació indueix, $\forall p \geq 0$,

$$H_p(X \setminus U, A \setminus U) \longrightarrow H_p(X, A) \quad \forall p \geq 0$$

Definició 16.8.1 (Escissió)**.** Sigui (X, A) un parell topològic i U un subespai de A. Es diu que U és *escissió* en (X, A) si el morfisme $H_\bullet(X \setminus U, A \setminus U) \to H_\bullet(X, A)$ induït per la inclusió, és un isomorfisme.

Teorema 16.8.2 (Teorema d'escissió)**.** *Sota les mateixes hipòtesis, si es verifica* $\overline{U} \subset \overset{\circ}{A}$*, aleshores*

$$H_p(X \setminus U, A \setminus U) \longrightarrow H_p(X, A)$$

és isomorfisme $\forall p \geq 0$*. Es diu que* U *és escissió en* (X, A)*.*

Demostració. Considerem el recobriment de X, $\mathcal{U} = \{A, X \setminus U\}$. Aleshores podem reescriure X així:

$$X = \overline{U} \cup (X \setminus \overline{U}) = \overset{\circ}{A} \cup (X \setminus \overline{U}) = \overset{\circ}{A} \cup (X \setminus U)^\circ$$

Per tant, $S_\bullet(\mathcal{U}) \to S_\bullet(X)$ indueix un isomorfisme en homologia (pel Teorema de les Cadenes Petites, **??**).

Considerem

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_\bullet(\{A, A \setminus U\}) \arrow[r] \arrow[d] & S_\bullet(\{A, X \setminus U\}) \arrow[r] \arrow[d] & \frac{S_\bullet(\{A, X \setminus U\})}{S_\bullet(\{A, A \setminus U\})} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_\bullet(A) \arrow[r] & S_\bullet(X) \arrow[r] & S_\bullet(X, A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tenim

$$\begin{tikzcd}
H_p(A) \arrow[r] \arrow[d] & H_p(\{A, X \setminus U\}) \arrow[r] \arrow[d] & H_p\left(\frac{S_\bullet(\{A, X \setminus U\})}{S_\bullet(\{A, A \setminus U\})}\right) \arrow[r] \arrow[d] & H_{p-1}(A) \arrow[r] & \cdots \\
H_p(A) \arrow[r] & H_p(X) \arrow[r] & H_p(X, A) \arrow[r] & H_{p-1}(A) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Llavors, pel lema dels 5,

$$H_p\left(\frac{S_\bullet(\{A, X \setminus U\})}{S_\bullet(\{A, X \setminus U\})}\right) \cong H_p(X, A)$$

Ara, pel lema dels 9, tenim el següent diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & S_\bullet(A\setminus U) \arrow[r] \arrow[d] & S_\bullet(A\setminus U) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_\bullet(A)\oplus S_\bullet(A\setminus U) \arrow[r] \arrow[d] & S_\bullet(A)\oplus S_\bullet(X\setminus U) \arrow[r] \arrow[d] & \frac{S_\bullet(X\setminus U)}{S_\bullet(A\setminus U)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_\bullet(\{A, A\setminus U\}) \arrow[r] \arrow[d] & S_\bullet(\{A, X\setminus U\}) \arrow[r] \arrow[d] & \frac{S_\bullet(A, X\setminus U)}{S_\bullet(A, A\setminus U)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Totes les files són exactes (es pot comprovar fàcilment) i les dues primeres columnes també són exactes. Faltaria demostrar que la tercera columna és exacta, i aleshores tindrem l'isomorfisme desitjat, ja que si tenim una successió exacta $0 \to A \to B \to 0$, on $f : A \to B$, aleshores f és isomorfisme perquè $\ker 0 = \mathrm{Im} f$ i $\ker f = \mathrm{Im} 0$, la primera implica exhaustivitat i la segona injectivitat. Així doncs, tenim l'isomorfisme

$$\frac{S_\bullet(X\setminus U)}{S_\bullet(A\setminus U)} \cong \frac{S_\bullet(A, X\setminus U)}{S_\bullet(A, A\setminus U)}$$

Llavors, la homologia del primer, que és $H_p(X\setminus U, A\setminus U)$ és isomorfa a la homologia del segon, que és la que teníem abans que era isomorfa a $H_p(X, A)$. Per tant, es compleix l'isomorfisme $H_p(X\setminus U, A\setminus U) \cong H_p(X, A)$. $\square$

Exercici 17 (Fórmula equivalent del teorema d'escissió)**.** *Si X és un espai topològic, $V, W \subset X$ tals que $X = \mathring{U} \cup \mathring{V}$, aleshores*

$$(V, V\cap W) \hookrightarrow (X, W)$$

indueix un isomorfisme de grups $H_p(V, V\cap W) \to H_p(X, W)$, $\forall p \geq 0$.

Exemple 16.8.3. Sigui $X = \mathbb{S}^2$ i $A = \mathbb{S}^2_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \ : \ z \geq 0\}$ i $U = \{(0, 0, 1)\}$ el pol nord. Com $\overline{U} = U \subset \mathring{A}$, pel teorema d'escissió U és escissiu, i els morfismes

$$H_p(X\setminus U, A\setminus U) \to H_p(X, A)$$

són isomorfismes per $p \geq 0$. En el cas $p = 0$ això és trivial ja que $H_0(X\setminus U, A\setminus U) = H_0(X, A) = 0$, però per $p = 1$ es té

$$H_1(X\setminus U, A\setminus U) \cong \mathbb{Z} \qquad H_1(X, A) \cong \mathbb{Z},$$

i en aquest cas el fet que el morfisme $H_1(X\setminus U, A\setminus U) \to H_1(X, A)$ sigui un isomorfisme ja no és una trivialitat.

Corol·lari 16.8.4. *Sigui X un espai topològic, i $U \subseteq A \subseteq B \subseteq X$ tres subespais de X. Si $\overline{U} \subseteq \mathring{B}$ i les inclusions $A \hookrightarrow B$, $A\setminus U \hookrightarrow B\setminus U$ són equivalències homotòpiques, aleshores U és escissió en (X, A).*

Exemple 16.8.5. Sigui $X = \mathbb{S}^2$, $A = \mathbb{S}^2_+$ i $U = \mathbb{E}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : \mathrm{z}{>}0\}$. Si prenem $B = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$, tindrem que $\overline{U} \subseteq \mathring{B} = B$ i A i $A\setminus U$ són retractes de deformació de B i $B\setminus U$, respectivament. Podem aplicar doncs el corol·lari anterior i deduir que U és escissió en (X, A).

16.9 Comparació homologia singular i simplicial

En els apartats anteriors hem anat desenvolupant les propietats bàsiques de l'homologia singular. En aquest apartat anem a veure com aquestes propietats ens permeten comparar l'homologia simplicial d'un políedre amb la seva homologia singular.

Si K és un complex simplicial i $K' \subset K$ és un subcomplex, aleshores definim

$$C_\bullet(K, K') = \frac{C_\bullet(K)}{C_\bullet(K')}$$

i l'homologia simplicial del parell (K, K')

$$H_p(K, K') := H_p(C_\bullet(K, K'))$$

Tenim la cadena

$$0 \to C_\bullet(K') \to C_\bullet(K) \to C_\bullet(K, K') \to 0$$

que en dona una successió llarga (exacta)

$$\cdots \to H_p(K') \to H_p(K) \to H_p(K, K') \to \cdots$$

- Una cosa que també serà molt útil és el càlcul de l'homologia simplicial d'un símplex. Això està com a exercici a les llistes, però ho resumeixo a continuació. Si Δ^n és un símplex n-dimensional, $C_\bullet(\Delta^n)$ és contràctil en grau > 0, és a dir,

  $$H_p(\Delta^n) = 0, \forall p > 0$$

  S'assembla molt a un resultat que dèia que $\mathbb{R}^n$ que sigui convex i acotat (crec), aleshores la seva homologia singular s'anul·la Es defineixen $h_p : C_p(\Delta^n) \to C_{p+1}(\Delta^n)$ tal que $\mathrm{id} = \partial h + h\partial$. La sub-$p$ es defineix tal que si v_0 és un vèrtex de Δ^n, donat un $\sigma_p = [v_{i_0}, \ldots, v_{i_p}]$ es defineix

  $$h_p(\sigma_p) = \begin{cases} 0 & \text{si } v_0 \in \{v_{i_0}, \ldots, v_{i_p}\} \\ [v_0, v_{i_0}, \ldots, v_{i_p}] & \text{si } v_0 \notin \{v_{i_0}, \ldots, v_{i_p}\} \end{cases}$$

  on aquí s'ha d'entendre la signatura del símplex ordenat multiplicada pel símplex ordenat.

- Sigui K un complex simplicial ordenat. Si $s = [v_{i_0}, \ldots, v_{i_p}]$ és un símplex de K, definim en $|K|$ un símplex singular per

  $$\begin{aligned} \sigma_s : \Delta^p &\longrightarrow |K| \\ (\lambda_0, \ldots, \lambda_p) &\longmapsto \textstyle\sum_{j=0}^{p} \lambda_j v_{i_j} \end{aligned}$$

  Tenim morfismes

  $$\begin{aligned} C_p(K) &\longrightarrow S_p(|K|) \\ s &\longmapsto \sigma_s \end{aligned}$$

  que defineixen morfismes de complexos de cadenes $C_\bullet(K) \to S_\bullet(|K|)$. Si $K_1 \xrightarrow{f} K_2$ és simplicial, tenim

  $$|f| : |K_1| \longrightarrow |K_2|$$

  i es verifica que el diagrama

  $$\begin{tikzcd} C_\bullet(K_1) \arrow[r, "\varsigma_{K_1}"] \arrow[d, "f"'] & S_\bullet(|K_1|) \arrow[d, "|f|"] \\ C_\bullet(K_2) \arrow[r, "\varsigma_{K_2}"] & S_\bullet(|K_2|) \end{tikzcd}$$

  és commutatiu.

Teorema 16.9.1. *Si K és un complex simplicial ordenat, aleshores l'aplicació induïda per ς_K*

$$H_p^{\text{simp}}(K) \longrightarrow H_p^{\text{sing}}(|K|)$$

és isomorfisme $\forall p \geq 0$.

Demostració. Per inducció sobre $n = \dim K$.

(1) Si $n = 0$, aleshores $|K|$ és finit (amb la topologia discreta) i

$$H_0(K) \longrightarrow H_0(|K|)$$

és isomorfisme ja que les classes $[v]$ són base a tots dos grups.

(2) Suposem donat el resultat per políedres K de dimensió $\dim K < n$ i prenem un políedre K de dimensió $\leq n$. Ara farem inducció sobre el nombre de símplexs de K que tinguin exactament n vèrtexs. Siguin $S_1, \dots, S_m$ els símplexs n-dimensionals de K. Fem inducció sobre m.

El pas $m = 0$ és absurd ja que aleshores no hi ha cap símplex n-dimensional i per tant s'aplica la hipòtesi d'inducció sobre n. En efecte, si $m = 0$, aleshores $\dim K < n$ i s'aplica hipòtesi d'inducció sobre n i ja ho tenim.

Sigui doncs $m > 0$ i aleshores sigui L el subcòmplex de K amb les mateixes cares llevat de S_m i que les cares de S_m no siguin comunes amb cap altre símplex de K. Tenim

$$C_p(L) = C_p(K) \qquad p \neq n$$

i en cas que $p = n$ tenim

$$C_n(L) = \bigoplus \mathbb{Z} S_i, \quad i = 1, \dots, m-1$$

Llavors tenim el diagrama commutatiu següent

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_\bullet(L) \arrow[r] \arrow[d, "\nu^L"] & C_\bullet(K) \arrow[r] \arrow[d, "\nu^K"] & C_\bullet(K, L) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_\bullet(|L|) \arrow[r] & S_\bullet(|K|) \arrow[r] & S_\bullet(|K|, |L|) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Les aplicacions horitzontals són les naturals de sempre i les verticals són el morfisme que volem trobar que dona un isomorfisme en homologia, per L i per K respectivament i l'últim el quocient. Aquest diagrama és commutatiu.

La part horitzontal de dalt dona lloc a una successió llarga d'homologia simplicial i la de sota dona pas a una successió llarga d'homologia singular i ambdues estan connectades. Llavors, per hipòtesis d'inducció, els morfismes ν^L indueixen isomorfismes entre les homologies simplicial i singular. Llavors, si aconseguim veure que els morfismes $C_\bullet(K, L) \to S_\bullet(|K|, |L|)$ indueixen isomorfismes en homologia singular i simplicial, tindrem que els ν^K estan rodejats de morfismes que indueixen isomorfismes en homologies singular i simplicial i, aleshores, ho hauran de ser també pel lema dels cinc. Ho torno a dir més clar.

Si veiem que els morfismes induïts en homologia

$$H_p^{\text{simp}}(K, L) \to H_p^{\text{sing}}(|K|, |L|)$$

són isomorfismes $\forall p \geq 0$, aleshores considerant les successions llargues d'homologia, la hipòtesi d'inducció i el lema dels 5 tindran el resultat que volem.

Considerem el següent quadrat commutatiu:

$$\begin{tikzcd} H_p^{\text{simp}}(S_m, \partial S_m) \arrow[r] \arrow[d] & H_p^{\text{simp}}(K, L) \arrow[d, "\nu"] \\ H_p^{\text{sing}}(|S_m|, |\partial S_m|) \arrow[r] & H_p^{\text{sing}}(|K|, |L|) \end{tikzcd}$$

Aquesta aplicació (la horitzontal de dalt) és induïda per $(S_m, \partial S_m) \hookrightarrow (K, L)$; l'aplicació vertical de l'esquerra és la que volem estudiar per $K = S_m$ i $L = \partial S_m$ i l'aplicació horitzontal de sota és la induïda per la inclusió de parelles d'espais topològics $(|S_m|, |\partial S_m|) \hookrightarrow (|K|, |L|)$. Queda com a exercici provar que el quadrat és commutatiu.

Llavors, nosaltres el que volem és mostrar que ν és isomorfisme, cosa que farem demostrant que les altres ho són. Les numeraré així:

$$\begin{tikzcd} H_p^{\text{simp}}(S_m, \partial S_m) \arrow[r, "(a)"] \arrow[d, "(b)"] & H_p^{\text{simp}}(K, L) \arrow[d, "\nu"] \\ H_p^{\text{sing}}(|S_m|, |\partial S_m|) \arrow[r, "(c)"] & H_p^{\text{sing}}(|K|, |L|) \end{tikzcd}$$

per poder fer-ho més clar.

(a) Mostrem que això és isomorfisme. El complex

$$C_p(K, L) = \frac{C_p(K)}{C_p(L)} \cong \begin{cases} 0 & p \neq n \\ \mathbb{Z}s_n & p = n \end{cases}$$

i el complex de l'esquerra és, anàlogament,

$$C_p(S_m, \partial S_m) = \begin{cases} 0 & p \neq n \\ \mathbb{Z}s_n & p = n \end{cases} \tag{16.1}$$

i per tant és clar que (a) és un isomorfisme.

(b) Per provar que (b) és un isomorfisme considerarem el següent lema.

Lema 16.9.2. *Sigui X un espai topològic, $U \subset A \subset B \subset X$ subespais. Anem a suposar primer que $\overline{U} \subset \mathring{B}$, $A \hookrightarrow B$, $A \setminus U \hookrightarrow B \setminus U$ són equivalències homològiques. Aleshores*

$$H_p(X \setminus U, A \setminus U) \longrightarrow H_p(X, A)$$

és isomorfisme $\forall p \geq 0$.

Demostració. Tenim

$$\begin{tikzcd} H_p(X \setminus U, A \setminus U) \arrow[r] \arrow[d] & H_p(X, A) \arrow[d] \\ H_p(X \setminus U, B \setminus U) \arrow[r] & H_p(X, B) \end{tikzcd}$$

Es té que $H_p(X \setminus U, A \setminus U) \to H_p(X \setminus U, B \setminus U)$ és isomorfisme. En efecte,

$$\begin{tikzcd}
H_p(A \setminus U) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_p(X \setminus U) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_p(X \setminus U, A \setminus U) \arrow[r] \arrow[d, "(*)"] & H_{p-1}(A \setminus U) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\
H_p(B \setminus U) \arrow[r] & H_p(X \setminus U) \arrow[r] & H_p(X \setminus U, B \setminus U) \arrow[r] & H_{p-1}(B \setminus U) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

i pel lema dels 5 més la hipòtesis, tenim que és isomorfisme. Ara, $H_p(X \setminus U, B \setminus U) \to H_p(X, B)$ també és isomorfisme per escissió. Per tant, finalment, $H_p(X, A) \to H_p(X, B)$ és isomorfisme com volíem veure. □

Continuem amb la demostració. Aplicarem aquest lema a la nostra situació. Sigui b_m el baricentre de S_m. Siguin $A = |L|$, $B = |K| \setminus \{b_m\}$, $X = |K|$, $U = |K| \setminus |S_m|$. Tenim doncs, $A \hookrightarrow B$ equivalència homològica (de fet, és una retracció de $|S_m| \setminus \{b_m\}$ sobre $|\partial S_m|$); $A \setminus U \hookrightarrow B \setminus U$ també és equivalència homològica ja que $|\partial S_m| \hookrightarrow |S_m| \setminus \{b_m\}$ fent una retracció com abans; finalment, $\overline{U} \subset \mathring{B} = B$ (ja que B és obert) és clar perquè $|L| \subset |K| \setminus \{b_m\}$. Aplicant el lema doncs, tenim que

$$H_p(|S_m|, |\partial S_m|) \xrightarrow{\cong} H_p(|K|, |L|)$$

que és el que volíem.

(c) Demostrem ara que (c) és isomorfisme. Tenim

$$\begin{tikzcd}
H_p(\partial S_m) \arrow[r] \arrow[d] & H_p(S_m) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_p(S_m, \partial S_m) \arrow[r] \arrow[d] & H_{p-1}(\partial S_m) \arrow[d, "\cong"] \\
H_p(|\partial S_m|) \arrow[r] & H_p(|S_m|) \arrow[r] & H_p(|S_m|, |\partial S_m|) \arrow[r] & H_{p-1}(|\partial S_m|)
\end{tikzcd}$$

on, per hipòtesi d'inducció, la primera columna és isomorfisme i, per tant, la tercera columna, que és el nostre (3), també és isomorfisme pel lema dels 5 que vam veure.

□

Corol·lari 16.9.3. *La característica d'Euler-Poincaré d'un poliedre és invariant per homeomorfismes.*

Demostració. Siguin P_1 i P_2 políedres geomètrics amb $P_1 = |K_1|$ i $P_2 = |K_2|$. Si P_1 és homeomorf a P_2, aleshores $H_p^{\text{sing}}(P_1) \cong H_p^{\text{sing}}(P_2)$ per tot $p \geq 0$. i també tenim doncs que $H_p^{\text{simpl}}(K_1) \cong H_p^{\text{simpl}}(K_2)$ per tota $p \geq 0$ i tenim

$$\chi(K_1) = \sum (-1)^i \dim H_p^{\text{simpl}}(K_1) = \chi(K_2)$$

□

Capítol 17

Aplicacions de l'homologia

17.1 Homologia reduïda

En aquest apartat s'introdueix l'homologia reduïda d'un espai topològic. Aquesta homologia és una variant de l'homologia singular que permetrà formular amb més concisió alguns dels càlculs i raonaments dels propers apartats. No és res de concepte, sinó més aviat una qüestió de notació.

Sigui X un espai topològic i $*$ l'espai topològic amb només un element. Considerem l'aplicació constant $\varepsilon : X \rightrightarrows *$.

Definició 17.1.1 (Homologia reduïda)**.** Es defineix l'homologia reduïda de X com

$$\tilde{H}_p(X) = \ker\left[\varepsilon_p : H_p(X) \to H_p(*)\right]$$

amb $\tilde{H}_0(X) = \ker(\varepsilon_p : H_p(X) \to \mathbb{Z})$ i $\tilde{H}_p(X) = H_p(X)$ si $p \geq 1$.

Proposició 17.1.2. *Algunes propietats de l'homologia reduïda són*

(i) Si X és contràctil, aleshores $\tilde{H}_\bullet(X) = 0$.

(ii) Si X té r components arc-connexes,

$$\tilde{H}_0(X) \cong \mathbb{Z}^{\oplus r-1}$$

(iii) Si $f : X \to Y$ és contínua, indueix $\tilde{f}_p : \tilde{H}_p(X) \longrightarrow \tilde{H}_p(Y)$.

(iv) Si $f, g : X \to Y$ són homòtopes, indueixen la mateixa aplicació en homologies reduïdes.

(v) Si X és un espai topològic, $A \subset X$, tenim una successió exacta llarga

$$\cdots \to \tilde{H}_p(A) \to \tilde{H}_p(X) \to H_p(X, A) \to \tilde{H}_{p-1}(A) \to \cdots$$

Demostració. Com l'homologia reduïda coincideix amb l'homologia en dimensions més grans que 0 i la diferència pels grups H_0 és prou simple, resulta immediat provar que l'homologia reduïda té propietats anàlogues a les de l'homologia singular. □

Exemple 17.1.3. 1. Si X té r components arc-connexes, amb $r \geq 1$, llavors $\tilde{H}_0(X) \cong \mathbb{Z}^{\oplus r+1}$ i, en particular, X és arc-connex si, i només si, $\tilde{H}_0(X) = 0$.

2. Si X és un espai topològic contràctil, $\tilde{H}_\bullet(X) = 0$ i en particular $\tilde{H}_\bullet(\mathbb{R}^n) = 0$.

Proposició 17.1.4. *Sigui X un espai topològic i U i V oberts de X tals que $X = U \cup V$. Si $U \cap V \neq \emptyset$ llavors les inclusions naturals indueixen una successió exacta*

$$\cdots \to \tilde{H}_p(U \cap V) \to \tilde{H}_p(U) \oplus \tilde{H}_p(V) \to \tilde{H}_p(X) \to \tilde{H}_{p-1}(U \cap V) \to \cdots$$

que s'anomena successió exacta de Mayer-Vietoris en homologia reduïda.

Demostració. Segons el que hem comentat i la definició de homologia reduïda aquesta successió és exactament la mateixa que la successió usual de Mayer-Vietoris que ja vam veure, llevat dels termes de grau zero.

Considerem els termes de grau zero i el següent diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \tilde{H}_1(X) \arrow[r] \arrow[d] & H_1(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{H}_0(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d] & H_0(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{H}_0(U) \oplus \tilde{H}_0(V) \arrow[r] \arrow[d] & H_0(U) \oplus H_0(V) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{H}_0(X) \arrow[r] \arrow[d] & H_0(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

que té files exactes, perquè en ser no buits tots els espais que intervenen, els morfismes $H_0(*) \to \mathbb{Z}$ són exhaustius. Anomenem $K_\bullet$, $M_\bullet$ i $L_\bullet$ els complexos formats per la primera, segona i tercera columna respectivament, de manera que el diagrama anterior correspon a la successió exacta de complexos

$$0 \longrightarrow K_\bullet \longrightarrow M_\bullet \longrightarrow L_\bullet \longrightarrow 0.$$

$M_\bullet$ és la successió exacta de Mayer-Vietoris usual, i per tant és un complex exacte. El complex $L_\bullet$ és exacte trivialment, per tant, $H_\bullet(M_\bullet) = 0$ i $H_\bullet(L_\bullet) = 0$. Així, si considerem la successió exacta llarga d'homologia associada

$$\cdots \longrightarrow H_{p+1}(L_\bullet) \longrightarrow H_p(K_\bullet) \longrightarrow H_p(M_\bullet) \longrightarrow H_p(L_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

en resulta immediatament que $K_\bullet$ és un complex exacte i per tant, que la successió de Mayer-Vietoris en homologia reduïda és exacta. □

17.2 Teorema de no separació

Denotarem $I = [0,1]$, $I^r = [0,1] \times \overset{r)}{\cdots} \times [0,1]$ i $\mathbb{B}^r = \{x \in \mathbb{R}^r \ : \ \sum_{i=1}^r x_i^r \leq 1\}$.

Observació 17.2.1. *I^r és homeomorf a $\mathbb{B}^r$.*

Demostració. Exercici. Ja es va fer en el seu moment. □

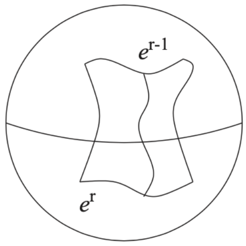


Figura 17.1: Les cel·les e^r i e^{r-1}.

Definició 17.2.2. Si X és un espai topològic, $\varphi : I^r \to X$ contínua i tal que $I^r \to \varphi(I^r)$ és homeomorf. Direm que $\varphi(I^r)$ és una bola topològica de dimensió r en X.

Teorema 17.2.3 (No-separació)**.** *Sigui e^r una bola topològica en $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \sum_{i=1}^r x_i^2 = 1\}$. Aleshores $\mathbb{S}^n \setminus e^r \neq \emptyset$ i a més,*

$$\tilde{H}_p(\mathbb{S}^n \setminus e^r) = 0 \quad \forall p \geq 0$$

Demostració. Observem en primer lloc que $\mathbb{S}^n \setminus e^r$ és no buit, ja que en cas contrari tindríem $\mathbb{S}^n = e^r$ el que és absurd perquè e^r és contràctil i $\mathbb{S}^n$ no.

Provem ara per inducció sobre r que es verifica $\tilde{H}_\bullet(\mathbb{S}^n \setminus e^r) = 0$. Per $r = 0$, e^0 és només un punt, i per tant $\mathbb{S}^n \setminus e^0$ és homeomorf a $\mathbb{R}^n$, d'on se segueix que

$$\tilde{H}_\bullet(\mathbb{S}^n \setminus e^0) \cong \tilde{H}_\bullet(\mathbb{R}^n) = 0.$$

Fem el pas d'inducció. Suposem cert el teorema per boles topològiques de dimensió $r-1$ i provem-lo per una bola de dimensió r, $e^r = \varphi(I^r)$. Sigui $[z] \in H_p(\mathbb{S}^n \setminus e^r)$ una classe d'homologia. Volem provar que $[z] = 0$, és a dir, que z és una vora a $\mathbb{S}^n \setminus e^r$. Dividim la prova en dues etapes:

1. Considerem les boles de dimensió r de $\mathbb{S}^n$ donades per

$$e_1^r = \varphi(I^{r-1} \times [0, 1/2])$$

$$e_2^r = \varphi(I^{r-1} \times [1/2, 1])$$

i la bola de dimensió $r-1$

$$e^{r-1} = \varphi(I^{r-1} \times \{1/2\})$$

que per entendre-ho millor enganxo la figura **??** dels apunts.

Si $[z] \neq 0$ aleshores al menys per un dels morfismes en homologia induïts per les inclusions

$$\mathbb{S}^n \setminus e^r \hookrightarrow \mathbb{S}^n \setminus e_i^r, \quad i = 1, 2$$

la imatge de $[z]$ és no nul·la. En efecte, notem $U = \mathbb{S}^n \setminus e_1^r$ i $V = \mathbb{S}^n \setminus e_2^r$. Observem que

$$U \cap V = \mathbb{S}^n \setminus e^r \quad \text{i} \quad U \cup V = \mathbb{S}^n \setminus e^{r-1}.$$

En particular, $U \cap V \neq \emptyset$ i per tant podem utilitzar la definició de Mayer-Vietoris en homologia reduïda, corresponent a aquest recobriment

$$\tilde{H}_{p+1}(\mathbb{S}^n \setminus e^{r-1}) \to \tilde{H}_p(\mathbb{S}^n \setminus e^r) \to \tilde{H}_p(\mathbb{S}^n \setminus e_1^r) \oplus \tilde{H}_p(\mathbb{S}^n \setminus e_2^r) \to \tilde{H}_p(\mathbb{S}^n \setminus e^{r-1})$$

Per hipòtesi d'inducció $\tilde{H}_\bullet(\mathbb{S}^n \setminus e^{r-1}) = 0$, i per tant resulten isomorfismes

$$\tilde{H}_p(\mathbb{S}^n \setminus e^r) \cong \tilde{H}_p(\mathbb{S}^n \setminus e_1^r) \oplus \tilde{H}_p(\mathbb{S}^n \setminus e_2^r),$$

el que prova que $[z]$ ha de tenir una imatge no nul·la per alguna de les inclusions esmentades.

2. Provem ara que no hi ha classes $[z]$ diferents de zero. Suposem que existeix $[z] \neq 0$. Pel que acabem de provar en la primera etapa, la classe de $[z]$ serà no nul·la a $\mathbb{S}^n \setminus e_i^r$ per a $i = 1$ o $i = 2$. Suposem que $[z] \neq 0$ en $\mathbb{S}^n \setminus e_1^r$. Podem repetir el procés a l'interval $[0, 1/2]$, és a dir, considerar les cel·les $\varphi(I^{r-1} \times [0, 1/4])$ i $\varphi(I^{r-1} \times [1/4, 1/2])$, i concloure que la imatge de $[z]$ en el complementari d'alguna d'aquestes boles és no nul·la. Iterant la primera etapa s'obté una successió d'intervals encaixats

$$\cdots [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [0, 1]$$

amb $b_i - a_i = (1/2)^i$ i tals que la imatge de $[z]$ a $\tilde{H}_p(\mathbb{S}^n \setminus \varphi(I^{r-1} \times [a_i, b_i])$ és diferent de zero per a tot i. Com la longitud dels intervals encaixats $[a_i, b_i]$ tendeix a zero, la intersecció de tots ells serà un punt. Notem $\{c\} = \cap_i [a_i, b_i]$ i sigui

$$e^{r-1} = \varphi(I^{r-1} \times \{c\}) = \cap_i \varphi(I^{r-1} \times [a_i, b_i])$$

de forma que els oberts $U_i = \mathbb{S}^n \setminus \varphi(I^{r-1} \times [a_i, b_i])$ formen un recobriment obert de $\mathbb{S}^n \setminus e^{r-1}$:

$$\mathbb{S}^n \setminus e^{r-1} = \cup_i (\mathbb{S}^n \setminus \varphi(I^{r-1} \times [a_i, b_i]).$$

Per hipòtesi d'inducció, $\tilde{H}_p(\mathbb{S}^n \setminus e^{r-1}) = 0$, per a tot $p \geq 0$, per tant, $z = \partial w$ en el complementari de e^{r-1}. Sigui $w = \sum_j \lambda_j \sigma_j$, on σ_j són $(p+1)$-símplexs singulars, el suport de la cadena w

$$\mathrm{sup} w = \cup_j \sigma_j(\Delta^{p+1})$$

és compacte, i per tant del recobriment de sup$w$ induït pels oberts U_i se'n pot extreure un subrecobriment finit. Però, com $U_i \subseteq U_{i+1}$, això significa que existirà un j de forma que

$$\mathrm{sup} w \subseteq U_j = \mathbb{S}^n \setminus \varphi(I^{r-1} \times [a_j, b_j]),$$

és a dir, $[z]$ és zero a $\tilde{H}_p(\mathbb{S}^n \setminus \varphi(I^{r-1} \times [a_j, b_j]))$, el que és contradictori amb l'elecció dels intervals $[a_j, b_j]$.

□

El teorema de no separació que acabem de veure dona l'anul·lació de l'homologia reduïda del complementari d'una bola topològica de $\mathbb{S}^n$, i sembla natural preguntar-se si aquest complementari és contràctil. La resposta és negativa, encara que no és fàcil donar un contraexemple.

17.3 El teorema de separació de Jordan-Brouwer

Recordem que una corba de Jordan del pla $\mathbb{R}^2$ és, per definició, una corba $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua i tal que $\alpha(0) = \alpha(1)$ i és injectiva. Equivalentment, una corba de Jordan és una aplicació contínua i injectiva $\tilde{\alpha} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$. El clàssic teorema de la corba de Jordan s'enuncia com segueix: *el complementari d'una corba de Jordan en el pla té exactament dues components connexes, una d'elles acotada i l'altra no, que la tenen per frontera comú.*

L'objectiu d'aquest apartat és provar aquest teorema i, de fet, provarem una generalització d'aquest resultat en qualsevol dimensió, en la que l'ingredient essencial de la demostració és el teorema de no separació de l'apartat anterior. Per fer-ho, ens serà més còmode estudiar el complementari d'una corba de Jordan a $\mathbb{S}^2$ en lloc de $\mathbb{R}^2$, i en general a $\mathbb{S}^n$. De fet, és equivalent estudiar el nombre de components connexes del complementari en un i altre cas: si $\varphi : \mathbb{S}^r \to \mathbb{R}^n$ és una aplicació contínua, $\varphi(\sim^r)$ és un compacte i per tant $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^r)$ té una única component no acotada, i així, el nombre de components connexes de $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^r)$ i $\mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^r)$ és el mateix.

Teorema 17.3.1 (Separació)**.** *Sigui $\varphi : \mathbb{S}^r \to \mathbb{S}^n$ una aplicació que és un homeomorfisme de $\mathbb{S}^r$ amb la seva imatge $s^r := \varphi(\mathbb{S}^r)$. Aleshores:*

1. *Si $s^r = \mathbb{S}^n$, llavors $r = n$ i $\varphi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ és un homeomorfisme.*
2. *Si $s^r \neq \mathbb{S}^n$, llavors*
$$\tilde{H}_p(\mathbb{S}^n \setminus s^r) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & si\ p = n - r - 1 \\ 0 & altrament \end{cases}$$
i, en particular, $r < n$.

Demostració. Si $s^r = \mathbb{S}^n$, llavors $\varphi : \mathbb{S}^r \to \mathbb{S}^n$ és un homeomorfisme, on $\mathbb{S}^r$ i $\mathbb{S}^n$ són varietats topològiques de dimensions r i n respectivament i per tant $r = n$, pel teorema d'invariància de la dimensió.

Suposem ara que $s^r \neq \mathbb{S}^n$. Aleshores $\mathbb{S}^n \setminus s^r \neq \emptyset$ i calcularem l'homologia reduïda $\tilde{H}_\bullet(\mathbb{S}^n \setminus s^r)$ per inducció sobre r.

Si $r = 0$, s^0 està formada per dos punts diferents de l'esfera, $s^0 = \{x, y\}$ amb $x \neq y$, i tindrem isomorfismes
$$\tilde{H}_\bullet(\mathbb{S}^n \setminus \{x, y\}) \cong \tilde{H}_\bullet(\mathbb{R}^n \setminus \{y\}) \cong \tilde{H}_\bullet(\mathbb{S}^{n-1}),$$
i per tant
$$\tilde{H}_p(\mathbb{S}^n \setminus s^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = n - 1, \\ 0 & p \neq n - 1 \end{cases}.$$
Suposem ara cert el resultat per esferes topològiques de dimensió $r - 1$. Usarem les notacions següents:
$$E^r_+ = \{x \in \mathbb{S}^r \ : \ x_{r+1} \geq 0\}, \qquad E^r_- = \{x \in \mathbb{S}^r \ : \ x_{r+1} \leq 0\},$$
i direm $\mathbb{S}^{r-1} = E^r_+ \cap E^r_- = \{x \in \mathbb{S}^r \ : \ x_{r+1} = 0\}$. També anomenarem $e^r_+ = \varphi(E^r_+)$, $e^r_- = \varphi(E^r_-)$ i $s^{r-1} = \varphi(\mathbb{S}^{r-1})$. Observem que es tenen les igualtats
$$\begin{aligned} s^r &= e^r_+ \cup e^R_-, \\ s^{r-1} &= e^r_+ \cap e^r_-, \\ \mathbb{S}^n \setminus s^r &= (\mathbb{S}^n \setminus e^r_+) \cap (\mathbb{S}^n \setminus e^r_-) \neq \emptyset, \\ \mathbb{S}^n \setminus s^{r-1} &= \mathbb{S}^n \setminus (e^r_+ \cap e^r_-) = (\mathbb{S}^n \setminus e^r_+) \cup (\mathbb{S}^n \setminus e^r_-). \end{aligned}$$
La successió exacta de Mayer-Vietoris en homologia reduïda associada és
$$\cdots \to \tilde{H}_{p+1}(\mathbb{S}^n \setminus e^r_+) \oplus \tilde{H}_{p+1}(\mathbb{S}^n \setminus e^r_-) \to \tilde{H}_{p+1}(\mathbb{S}^n \setminus s^{r-1}) \to \tilde{H}_p(\mathbb{S}^n \setminus s^r) \to \tilde{H}_p(\mathbb{S}^n \setminus e^r_+) \oplus \tilde{H}_p(\mathbb{S}^n \setminus e^r_-) \to \cdots$$
Com e^r_+ i e^r_- són r-boles topològiques podem aplicar el teorema de no separació i deduir que la successió anterior dóna els isomorfismes
$$\tilde{H}_{p+1}(\mathbb{S}^n \setminus s^{r-1}) \cong \tilde{H}_p(\mathbb{S}^n \setminus s^r),$$

el que permet aplicar la hipòtesi d'inducció i deduir

$$\tilde{H}_p(\mathbb{S}^n \setminus s^r) \cong \tilde{H}_{p+1}(\mathbb{S}^n \setminus s^{r-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & p+1 = n-(r-1)-1, \\ 0, & p+1 \neq n-(r-1)-1. \end{cases}$$

Finalment, suposem que $r \geq n$. Aleshores $\tilde{H}_p(\mathbb{S}^n \setminus s^r) \cong \mathbb{Z}$ si $p = n-r-1 \leq -1$ el que és absurd ja que $\tilde{H}_p(\mathbb{S}^n \setminus s^r) = 0$ si $p < 0$. □

Corol·lari 17.3.2. *1. Tota s^{n-1} separa $\mathbb{S}^n$ en dues components connexes.*

2. Si $r < n-1$, llavors $\mathbb{S}^n \setminus s^r$ és connex, és a dir, s^r no separa $\mathbb{S}^n$.

Demostració. 1. $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^n \setminus s^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$, per tant $H_0(\mathbb{S}^n \setminus s^{n-1}) \cong \mathbb{Z}^2$, i per tant $\mathbb{S}^n \setminus s^{n-1}$ té dues components arc-connexes o connexes.

2. Si $r \neq n-1$, el teorema dóna $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^n \setminus s^r) = 0$, i per tant $\mathbb{S}^n \setminus s^r$ és connex.

□

Podem expressar el resultat anterior dient que s^r separa $\mathbb{S}^n$ en dimensió $n-r-1$. Observem, però, que el teorema de separació no dóna encara el teorema de la corba de Jordan tal i com l'hem comentat al començament d'aquest apartat, ja que cal precisar la relació entre les components de $\mathbb{S}^n \setminus s^{n-1}$ i l'esfera s^{n-1}.

Teorema 17.3.3 (Jordan-Brower)**.** *Sigui s^{n-1} una $(n-1)$-esfera topològica en $\mathbb{S}^n$. Aleshores $\mathbb{S}^n \setminus s^{n-1}$ té dues components connexes amb frontera s^{n-1}.*

Demostració. Suposem U, V components arc-connexes de $\mathbb{S}^n \setminus s^{n-1}$. Volem veure que $\partial U = s^{n-1}$. Tenim d'una banda $\partial U \subset s^{n-1}$ fàcilment, ja que observem que $\partial U \subset U \cup s^{n-1}$ ja que si no fos així, voldria dir que la frontera de U tindria algun punt de l'altra component arc-connexa, però la frontera de U és $\partial U = \overline{U} \setminus \mathring{U}$ i aleshores si $\partial U \cap V \neq \emptyset$, tindríem que $\overline{U} \cap V \neq \emptyset$ i per tant seria $U \cap V \neq \emptyset$ la qual cosa és absurda.

Hem de veure l'altra inclusió de la frontera, és a dir, $s^{n-1} \subset \overline{U}$. Sigui $x \in s^{n-1}$, sigui N un entorn obert de x. Volem veure que $N \cap U \neq \emptyset$. Tenim

$$\varphi : \mathbb{S}^{n-1} \to s^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$$

homeomorfisme. Sigui $y \in \mathbb{S}^{n-1}$ tal que $\varphi(y) = x$. Sigui B una bola (mètrica) en $\mathbb{S}^{n-1}$, de centre y. Sigui $A = \varphi(B)$ i podem suposar que $A \subset N$. Tenim que $\mathbb{S}^{n-1} \setminus B$ és homeomorf a una bola tancada. Si apliquem φ, tenim que $e^{n-1} := s^{n-1} \setminus A$ és una $(n-1)$-bola topològica en $\mathbb{S}^n$. Així, si apliquem el teorema de no separació,

$$\tilde{H}_0(\mathbb{S}^n \setminus e^{n-1}) = 0$$

i, per tant, $Z = \mathbb{S}^n \setminus e^{n-1}$ és connex. Com

$$Z = U \cup V \cup A \subseteq U \cup V \cup N,$$

si $N \cap U$ fos buit, aleshores $U \cap (V \cup N)$ també ho seria, i podríem desconnectar Z en la forma

$$Z = (Z \cap U) \cup (Z \cap (V \cup N)),$$

el que és absurd perquè Z és connex. Així doncs, $N \cap U \neq \emptyset$. □

Ara ja per fi podem demostrar el teorema de la Corba de Jordan, que era l'objectiu d'aquests apartats. Primer repeteixo en forma de definició què era una corba de Jordan.

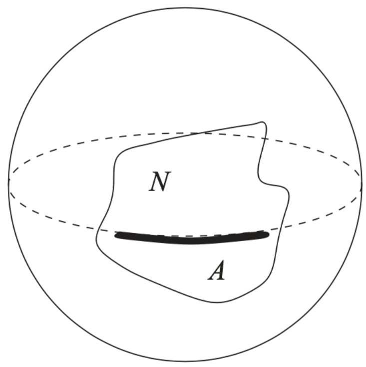


Figura 17.2: La bola A i l'entorn N.

Definició 17.3.4 (Corba de Jordan)**.** Una *corba de Jordan* és la imatge d'una aplicació $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ contínua i injectiva.

Teorema 17.3.5 (Corba de Jordan)**.** *Sigui $C \subset \mathbb{R}^2$ una corba de Jordan. Aleshores $\mathbb{R}^2 \setminus C$ té exactament dues components connexes, una fitada i l'altra no, i totes dues tenen com a frontera la corba C.*

Demostració. Sigui $\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(\mathbb{S}^1)$ és corba de Jordan. Considerem la projecció estereogràfica π_e^{-1} i tenim

$$\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\pi_e^{-1}} \mathbb{S}^2 \setminus \{p\} \subset \mathbb{S}^2$$

Tenim que $\alpha'; \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ i $\mathbb{S}^1 \cong \alpha(\mathbb{S}^1)$ per tant $\mathbb{S}^2 \setminus \alpha(\mathbb{S}^1)$ té dues components connexes i amb frontera $\alpha(\mathbb{S}^1)$ pel teorema que acabem de veure (**??**). □

Com a comentari, entenem què diu aquest teorema. Ens ho podem imaginar en $\mathbb{R}^2$ i aleshores pillem una bola $\mathbb{S}^2$ traient-li el punt p que sigui el pol nord. Aleshores la projecció estereogràfica fa que $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{S}^2 \setminus \{p\}$ i llavors, de les dues components connexes que té el complementari, una d'elles contindrà p i l'altra no. Si passem la que conté p, via l'homeomorfisme π_e^{-1} (projecció estereogràfica) a $\mathbb{R}^2$, aleshores obtenim una component que no està fitada i la component que no contingui p, via la projecció estereogràfica, ens dona una component connexa fitada en $\mathbb{R}^2$.

17.4 Altres teoremes importants

Aquest és un teorema que té moltes formulacions equivalents, potser una de les més habituals és la que veurem a continuació.

Teorema 17.4.1 (Borsuk-Ulam)**.** *Sigui $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua. Aleshores, existeix un $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Ara bé, per conveniència, nosaltres demostrarem la següent formulació.

Teorema 17.4.2 (Borsuk-Ulam)**.** *Sigui $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$ contínua i imparella, és a dir, que per tot $x \in \mathbb{S}^n$ es té $g(x) = -g(-x)$. Llavors, $n \leq m$.*

En el que segueix donarem una demostració del teorema de Borsuk-Ulam que requereix l'homologia amb coeficients en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, mostrant així l'interès de disposar d'aquest tipus de coeficients.

La demostració del teorema es basarà en algunes propietats homològiques del pas al quocient de $\mathbb{S}^n$ per la relació d'equivalència $x \sim -x$, és a dir, de la identificació $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$, que resumim en l'enunciat següent:

Proposició 17.4.3. *Existeix un morfisme de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-mòduls*

$$t_\bullet : H_\bullet(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H_\bullet(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

que verifica

(i) La composició

$$H_\bullet(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_\bullet} H_\bullet(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{t_\bullet} H_\bullet(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

és nul·la.

(ii) Hi ha una successió exacta llarga

$$H_p(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{t_\bullet} H_p(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_\bullet} H_p(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{p-1}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

(iii) Si $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$ és una aplicació contínua que commuta amb l'aplicació antipodal, i $\tilde{g} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ denota l'aplicació induïda per g, aleshores el diagrama

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H_p(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r, "t_\bullet"] \arrow[d, "\tilde{g}_\bullet"'] & H_p(\mathbb{S}^n) \arrow[r, "\pi_\bullet"] \arrow[d, "g_\bullet"'] & H_p(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{g}_\bullet"'] & {} \\
{} \arrow[r] & H_p(\mathbb{P}^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r, "t_\bullet"] & H_p(\mathbb{S}^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r, "\pi_\bullet"] & H_p(\mathbb{P}^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

és un diagrama commutatiu de successions exactes.

Demostració. Sigui $\mathcal{U}$ un recobriment obert de $\mathbb{S}^n$ tal que si $\mathcal{V}$ és el recobriment de $\mathbb{P}^n$ format pels oberts $V = \pi(U)$ de $\mathbb{P}^n$, amb $U \in \mathcal{U}$, aleshores π indueixi homeomorfismes $U \to V$. Si $\sigma \in S_p(\mathcal{V})$ és un p-símplex $\mathcal{V}$-petit, $\sigma(\Delta^p)$ està contingut en un obert V de $\mathcal{V}$, així si U és obert de $\mathcal{U}$ tal que $\pi_{|U} : U \to V$ és un homeomorfisme, podem considerar el símplex de $\mathbb{S}^n$ definit per $\tilde{\sigma} = (\pi_{|U})^{-1} \circ \sigma$. Observem que aquest aixecament depèn de l'obert U escollit, però en qualsevol altre obert dóna lloc al mateix aixecament o a $a\ell^n \circ \tilde{\sigma}$. Definim un morfisme de complexos

$$t_\bullet^{\mathcal{U}} : S_\bullet(\mathcal{V}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow S_\bullet(\mathcal{U}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

que sobre els símplexs singulars val

$$t_\bullet^{\mathcal{U}}(\sigma) = \tilde{\sigma} + a\ell^n \circ \tilde{\sigma}.$$

Pel teorema de les cadenes petites, $t_\bullet^{\mathcal{U}}$ indueix un morfisme

$$t_\bullet : H_\bullet(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H_\bullet(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

a través del següent diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_\bullet(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & H_\bullet(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\
H_\bullet(\mathcal{V}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "t_\bullet^{\mathcal{U}}"] & H_\bullet(\mathcal{U}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[u, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

És un exercici comprovar que el morfisme així definit no depèn del recobriment $\mathcal{U}$ escollit.

Per demostrar la primera propietat observem que

$$(t_\bullet \circ \pi_\bullet)(z) = (1 + \deg_2 a\ell^n_\bullet)(z)$$

per a tot $z \in H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, i com $\deg_2 a\ell = 1$ en homologia amb coeficients en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, per motius que no entenc resulta que $t_\bullet \circ \pi_\bullet = 0$.

Per demostrar la segona propietat és suficient provar que es té la successió exacta de complexos

$$0 \longrightarrow S_\bullet(\mathcal{V}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{t_\bullet}\xrightarrow{t_\bullet} S_\bullet(\mathcal{U}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_\bullet} S_\bullet(\mathcal{V}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

per la definició de $t_\bullet$, la composició $\pi_\bullet \circ t_\bullet$ correspon a multiplicar per 2, i per tant és zero ja que utilitzem coeficients en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. D'altra banda, si c és una cadena del nucli de $\pi_\bullet$, i σ és un símplex de c, aleshores c ha de contenir també el símplex $a\ell^n(\sigma)$, i per tant és de la imatge de $t_\bullet$.

Finalment, la demostració de 1 es deixa com a exercici. □

A continuació farem un càlcul dels grups d'homologia de l'espai $\mathbb{P}^n$ sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i finalment demostrarem el teorema de Borsuk-Ulam.

Corol·lari 17.4.4. *Els grups d'homologia amb coeficients en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dels espais projectius reals són*

$$H_p(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & 0 \le p \le n, \\ 0, & p > n. \end{cases}$$

Demostració. Si $p > n$, aleshores $H_p(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ ja que l'espai projectiu real de dimensió n és un espai triangulable de dimensió n.

Considerem ara la successió exacta llarga de la proposició anterior,

$$\to H_p(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{t_\bullet} H_p(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_\bullet} H_p(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_{p-1}(\mathbb{P}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to$$

Observem que

$$\pi_\bullet : H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

és el morfisme zero, ja que $t_\bullet : H_n(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ és injectiu, com resulta de la successió exacta anterior, mentre que la composició $t_\bullet \circ \pi_\bullet$ és zero segons la proposició que hem vist abans. A més, com $H_p(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, si $0 < p < n$, i $\pi_\bullet : H_0(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_0(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ és un isomorfisme ja que ambdós espais són connexos, la successió exacta considerada dóna lloc als isomorfismes

$$H_p(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H_{p-1}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

per a tot $1 \le p \le n$. Així inductivament en resulten els isomorfismes

$$H_p(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \qquad p \le n,$$

d'on se segueix el corol·lari. □

Finalment podem fer ja la demostració del teorema de Borsuk-Ulam. Demostrarem la segona versió, ja que la demostració es basa en això que acabem de veure.

Demostració de Borsuk-Ulam. Sigui $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$ una aplicació equivariant respecte el morfisme antipodal, és a dir, tal que $g(-x) = -g(x)$ per a tot $x \in \mathbb{S}^n$, i suposem que $n > m$. Per la proposició (**??**) tindrem un diagrama commutatiu de successions exactes

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & H_p(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r, "t_\bullet"] \arrow[d, "\tilde{g}_\bullet"'] & H_p(\mathbb{S}^n) \arrow[r, "\pi_\bullet"] \arrow[d, "g_\bullet"'] & H_p(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{g}_\bullet"'] & {} \\ {} \arrow[r] & H_p(\mathbb{P}^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r, "t_\bullet"] & H_p(\mathbb{S}^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r, "\pi_\bullet"] & H_p(\mathbb{P}^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

Així, tenint present l'anul·lació de l'homologia de les esferes per sota de la seva dimensió, el diagrama commutatiu de successions exactes llargues dóna lloc, per $1 \leq p \leq m$, a diagrames commutatius

$$\begin{tikzcd} H_p(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\tilde{g}_p"'] & H_{p-1}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[d, "\tilde{g}_{p-1}"'] \\ H_p(\mathbb{P}^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r, "\sim"] & H_{p-1}(\mathbb{P}^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \end{tikzcd}$$

en el que els morfismes horitzontals són isomorfismes, segons la demostració del corol·lari anterior.

Com els espais projectius són connexos, el morfisme $\tilde{g}_0 : H_0(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_0(\mathbb{P}^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ és un isomorfisme, i usant el diagrama anterior es dedueix, inductivament, que els morfismes $\tilde{g}_p$ són també isomorfismes, per $0 \leq p \leq m$.

Per $p = m$ es té també el diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd} H_m(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\tilde{g}_m"'] & H_m(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[d] \\ H_m(\mathbb{P}^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r, "\sim"] & H_m(\mathbb{S}^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \end{tikzcd}$$

Com $\tilde{g}_m$ és un isomorfisme i $H_m(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ perquè estem suposant que $n > m$, aquest diagrama és de la forma

$$\begin{tikzcd} H_m(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\tilde{g}_m"'] & 0 \arrow[d] \\ H_m(\mathbb{P}^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \end{tikzcd}$$

el que és absurd. □

Com a conseqüència de la demostració que hem efectuat, podem demostrar també el resultat següent, que és una altra versió del Teorema de Borsuk-Ulam.

Corol·lari 17.4.5 (Borsuk-Ulam)**.** *Sigui $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ una aplicació contínua tal que $f(-x) = -f(x)$. Aleshores el grau de f és senar.*

Demostració. Com f és compatible amb l'aplicació antipodal, f indueix una aplicació contínua $\tilde{f} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$. Segons la demostració anterior del teorema de Borsuk-Ulam, es té un diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd} H_n(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\tilde{f}_n"'] & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[d, "f_n"'] \\ H_n(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r, "\sim"] & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \end{tikzcd}$$

en el que els morfismes horitzontals i $\tilde{f}_n$ són isomorfismes i, per tant, també ho ha de ser f_n. Així doncs, $\deg_2 f = 1$, i per tant el grau de f és senar. □

17.5 Annex: Grau d'aplicacions entre esferes

En aquest apartat farem un incís sobre el grau de les aplicacions entre esferes. Això ho faig perquè a classe no es va donar a la teoria, però en canvi hi havia una llista d'exercicis sencera dedicada a aquest apartat. La llista és, de fet, els resultats que veurem a continuació. No obstant això, als apunts que segueixo sí que hi ha un apartat dedicat al grau d'aplicacions entre esferes i és d'aquí d'on trauré la informació.

Recordem primer què era el grau. Sigui $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \|x\| = 1\}$ l'esfera n-dimensional, amb $n \geq 0$, com sempre. Tota aplicació ortogonal $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ indueix una aplicació contínua $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, i d'aquesta forma obtenim un bon nombre d'aplicacions contínues de l'esfera en ella mateixa. Exemples d'aquesta mena d'aplicacions són les rotacions o l'*aplicació antipodal* definida per

$$\begin{aligned} a\ell^n : \mathbb{S}^n &\longrightarrow \mathbb{S}^n \\ x &\longmapsto -x \end{aligned}$$

Com podem classificar aquestes aplicacions respecte de la relació d'homotopia? Volem saber, per exemple, si una rotació i l'aplicació antipodal poden ser homòtopes. Per estudiar aquest tipus de qüestió és convenient conèixer l'acció de f en homologia.

En aquest apartat veurem que en el cas de les esferes aquesta acció ve determinada per un cert enter, el grau de f, que ja vam definir prèviament molt fora de context (veure índex de paraules). En efecte, f indueix un morfisme

$$f_\bullet : \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \longrightarrow \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n),$$

i, com $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$, aquest morfisme $f_\bullet$ serà igual a la multiplicació per un enter. A aquest enter l'anomenarem grau:

Definició 17.5.1 (Grau)**.** Sigui $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ una aplicació contínua. Es defineix el *grau de* f com l'enter $\deg f := z$ tal que

$$f_\bullet : \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \longrightarrow \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n)$$

és multiplicar per z, per a tot $z \in \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$.

Resumim les propietats més immediates en la següent proposició.

Proposició 17.5.2. *(1) El grau de l'aplicació identitat és 1.*

(2) Siguin $f, g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Si f és homòtopa a g, aleshores $\deg f = \deg g$. *En particular, si f és homòtopa a una aplicació constant, aleshores* $\deg f = 0$.

(3) Siguin $f, g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ aplicacions contínues. Aleshores

$$\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$$

(4) Si $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ és una equivalència homotòpica, aleshores $\deg f = \pm 1$.

Demostració. Només provaré la 3, ja que les altres són fàcils i es deixen com exercici, i la 3 era un exercici de la llista. És fàcil, donades les igualtats:

$$(f \circ g)_\bullet(z) = f_\bullet(g_\bullet(z)) = f_\bullet(\deg g \cdot z) = \deg g \cdot f_\bullet(z) = \deg g \cdot \deg f \cdot z$$

□

El valor del grau de l'aplicació antipodal prova que aquesta no és homòtopa a l'aplicació identitat o a una rotació per a les esferes de dimensió parella, ja que est té el següent resultat:

Proposició 17.5.3. *El grau de l'aplicació antipodal* $a\ell^n : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *és* $(-1)^{n+1}$.

Demostració. Farem la demostració per inducció sobre n.

Calculem $\deg a\ell^0$. En aquest cas, $\mathbb{S}^0 = \{x, y\}$ amb $x \neq y$ i l'homologia reduïda està generada pel 0-cicle $[x - y]$ ja que es té

$$H_0(\mathbb{S}^0) = \ker(H_0(\mathbb{S}^0) \cong \mathbb{Z}[x] \oplus \mathbb{Z}[y] \longrightarrow H_0(*)) = \mathbb{Z}[x - y].$$

D'altra banda, l'aplicació antipodal intercanvia els punts x i y, i per tant

$$a\ell^0_\bullet(x - y) = y - x = -(x - y),$$

és a dir, $\deg a\ell^0 = -1$.

Suposem ara cert el resultat per a esferes de dimensió $n - 1$ i provem-lo per a esferes de dimensió n. Prenem un punt qualsevol $R \in \mathbb{S}^n$ i la seva imatge $T = a\ell^n(R)$ i considerem el recobriment de $\mathbb{S}^n$ format pels oberts

$$U = \mathbb{S}^n \setminus \{R\}, \qquad V = \mathbb{S}^n \setminus \{T\}.$$

La intersecció és $U \cap V = \mathbb{S}^n \setminus \{R, T\}$, i és homotòpicament equivalent a l'esfera $\mathbb{S}^{n-1}$. L'aplicació antipodal canvia U per V i, a més, és compatible amb la retracció de $U \cap V$ sobre l'esfera $\mathbb{S}^{n-1}$, induint en aquesta l'aplicació antipodal $a\ell^{n-1}$. Per tant, es té un diagrama commutatiu de successions de Mayer-Vietoris

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_n(U) \oplus \tilde{H}_n(V) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "a\ell^n_\bullet"'] & \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "a\ell^n_\bullet"'] & \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "a\ell^{n-1}_\bullet"'] & \tilde{H}_{n-1}(U) \oplus \tilde{H}_{n-1}(V) \arrow[d, "a\ell^n_\bullet"'] \\
\tilde{H}_n(U) \oplus \tilde{H}_n(V) \arrow[r, "-p"] & \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \arrow[r, "-\delta"] & \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \arrow[r] & \tilde{H}_{n-1}(U) \oplus \tilde{H}_{n-1}(V)
\end{tikzcd}$$

Com $\tilde{H}_\bullet(U) = \tilde{H}_\bullet(V) = 0$, el diagrama es redueix a

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "a\ell^n_\bullet"'] & \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "a\ell^{n-1}_\bullet"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \arrow[r, "-\delta"] & \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La commutativitat d'aquest diagrama i la hipòtesi d'inducció permeten escriure, per $z \in \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n)$, les igualtats

$$a\ell^n_\bullet(z) = (-\delta)^{-1} a\ell^{n-1}_\bullet \delta(z) = -\delta^{-1}(-1)^n \delta(z) = (-1)^{n-1} z$$

i en definitiva,

$$\deg a\ell^n = (-1)^{n-1}.$$

□

Anem a veure ara com podem aplicar el càlcul del grau de l'aplicació antipodal per estudiar la presència de punts fixos o antifixos per les aplicacions entre esferes. Recordem que donada una aplicació $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ es diu que $x \in \mathbb{S}^n$ és un *punt fix* de f si $f(x) = x$ i *punt antifix* de f si $f(x) = -x$.

Proposició 17.5.4. *Sigui* $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *una aplicació contínua. Aleshores:*

(1) Si f no té punts fixos, $\deg f = (-1)^{n-1}$.

(2) Si f no té punts antifixos, $\deg f = 1$.

Demostració. Demostrem cada cas per separat.

(1) Si f no té punts fixos, es tindrà $f(x) \neq x$ per a tot $x \in \mathbb{S}^n$. Per tant, 0 no pertany al segment determinat per $-x$ i $f(x)$, és a dir, $(1-t)f(x) - tx \neq 0$ per a tot $t \in [0,1]$. Així,

$$H : \mathbb{S}^n \times I \longrightarrow \mathbb{S}^n, \quad H(x,t) = \frac{(1-t)f(x) - tx}{\|(1-t)f(x) - tx\|}$$

defineix una homotopia contínua entre $H(x,0) = f(x)$ i $H(x,1) = a\ell^n(x)$ i tindrem $\deg f = \deg a\ell^n = (-1)^{n+1}$.

(2) Considerem $g = a\ell^n \circ f$. El punt x és un punt fix de g si, i només si, és punt antifix de f. Per tant, g no té punts fixos. Així, per l'apartat 1, $\deg g = (-1)^{n+1}$ i per tant, per les propietats (**??**) $\deg g = \deg a\ell^n \cdot \deg f = (-1)^{n+1} \deg f$ i per tant $\deg f = 1$.

□

D'aquesta proposició es dedueix el següent cas particular.

Corol·lari 17.5.5. *Tota aplicació contínua $f : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$, o té un punt fix, o té un punt antifix. Equivalentment, existeix un $x_0 \in \mathbb{S}^{2n}$ tal que $f(x_0) = \pm x_0$.*

Demostració. Si f no té punts fixos, $\deg f = (-1)^{2n+1} = -1$ i si f no té punts antifixos, $\deg f = 1$- Per tant, una de dues. □

Observació 17.5.6. *Si $f : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{S}^{2n+1}$ és una aplicació contínua, el resultat anterior és fals. Per exemple, per $n = 1$, podem considerar un gir d'angle $\alpha \notin \{0, \pi\}$ que no té ni punts fixos ni antifixos.*

Part IV

Apèndix

Apèndix A

Introducció a la teoria de categories

Farem una mini introducció a la teoria de categories, que és una teoria molt extensa i que donaria per una assignatura sencera, però que per raons pràctiques farem només una introducció a les seves nocions bàsiques.

Definició A.0.1 (Categoria)**.** Una *categoria* $\mathcal{C}$ consta de

1) Una *classe d'objectes* $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;

2) Per a cada parella d'objectes X i Y de $\mathcal{C}$, un conjunt $\mathrm{Hom}(X,Y)$ (també pot ser anomenat $\mathrm{Mor}(X,Y)$ o $\mathcal{C}(X,Y)$) que anomenarem *conjunt de morfismes de* X *en* Y;

3) Si X,Y,Z són objectes de $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, una aplicació $\mathrm{Hom}(X,Y)\times\mathrm{Hom}(Y,Z)\to\mathrm{Hom}(X,Z)$ que anomenem *composició*. La imatge de (f,g) la denotarem $g\circ f$. És a dir,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(X,Y)\times\mathrm{Hom}(Y,Z) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(X,Z)\\ (f,g) &\longmapsto g\circ f\end{aligned}$$

tals que es verifiquen dues propietats:

(i) Si $f\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ i $g\in\mathrm{Hom}(Y,Z)$ i $h\in\mathrm{Hom}(Z,W)$, llavors, $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

(ii) Per tot $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, existeix $\mathrm{id}_X\in\mathrm{Hom}(X,X)$ i que verifica que

$$\begin{aligned} f&=\mathrm{id}_X\circ f \quad \forall f\in\mathrm{Hom}(Y,X)\\ g&=g\circ\mathrm{id}_X \quad \forall g\in\mathrm{Hom}(X,Y)\end{aligned}$$

Exemple A.0.2. Exemples de categories

1. *Sets*: la categoria que té per objectes els conjunts, les aplicacions són els morfismes, etc.

2. *Gr*: la categoria on els objectes són els grups, els morfismes són els morfismes de grups, etc.

3. *Top*: la categoria on els objectes són els espais topològics, els morfismes són les aplicacions entre espais topològics, etc.

4. Vect_k: la categoria on els objectes són els k-espais vectorials, etc.

5. També podem parlar de "sub"-categories com Gr_{ab}, la dels grups abelians, etc.

6. Suposem que G és un grup. Definim la categoria associada al grup G com $\mathcal{C}_G$, on

(a) $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_G) = \{\bullet\}$

(b) $\mathrm{Hom}(\bullet, \bullet) = G$

(c) La composició és el producte del grup, i.e. $(g, h) \mapsto g \bullet h$.

O sigui és un grup que es pot re-interpretar com a categoria.

Definició A.0.3 (Functor)**.** Suposem que tenim dues categories $\mathcal{C}, \mathcal{D}$. Un *functor covariant* de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$, que denotarem

$$F : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D},$$

és una assignació del tipus següent:

(i) Per a tot $X \in \mathcal{O}\lfloor(\mathcal{C})$, tenim $F(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$.

(ii) Per a tot morfisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, tenim $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$. tals que

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$$

$$F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}, \quad \forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$$

Exemple A.0.4. Vegem exemples de functors:

1. El functor “forgetful” que es defineix com For : Gr $\to$ Sets i envia cada grup a ell mateix però reinterpretat com a conjunt.

2. Considerem la categoria Top_* tal que els objectes siguin (X, x), on X és un espai topològic i $x \in X$ un punt fixat (espai topològic puntejat) i $\mathrm{Hom}((X, x), (Y, y)) = \{f : X \to Y$ contínues tals que $f(x) = y\}$. Llavors podem definir $F : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Gr}$ tal que $(X, x) \mapsto \pi_1(X, x)$ (a cada espai puntejat l'envia al seu grup fonamental). Aquest és el *functor grup fonamental*.

3. Un altre exemple de functor és prendre la categoria d'espai vectorial i considerem l'aplicació que envia un espai vectorial E al seu espai dual E^*. Això estrictament no és un functor. Però és un functor contravariant. Per això a la definició hem posat “covariant”. Nosaltres treballarem només amb aquests. Sí que és un functor una aplicació que envia E a E^{**}.

Definició A.0.5 (Isomorfisme)**.** Sigui $\mathcal{C}$ una categoria, siguin X, Y objectes de $\mathcal{C}$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Direm que f és un isomorfisme si $\exists g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ tal que

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y \quad \text{i} \quad g \circ f = \mathrm{id}_X$$

Proposició A.0.6. *Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ és un functor covariant i $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ és un isomorfisme, aleshores $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ és un isomorfisme en $\mathcal{D}$.*

Demostració. Si $\exists g \in \mathrm{Hom}(Y, X)$, llavors

$$\left.\begin{array}{l} f \circ g = \mathrm{id}_Y \\ g \circ f = \mathrm{id}_X \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} F(f) \circ F(g) = F(\mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_{F(Y)} \\ F(g) \circ F(f) = F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)} \end{array}\right.$$

$\square$

Definició A.0.7 (Transformació natural)**.** Sigui $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categories, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ functors (covariants). Una *transformació natural* τ de F en G (o *morfisme de functors*) és una familia de morfismes

$$\{\tau_X \in \mathrm{Hom}(F(X), G(X))\}_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

tal que, per a tot morfisme $f : X \to Y$ (i.e. $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$), el diagrama següent és commutatiu:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\tau_X"] & F(Y) \arrow[d, "\tau_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "F(g)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

és a dir, $F(g) \circ \tau_X = \tau_Y \circ F(f)$.

Definició A.0.8. Si $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ són functors i $\tau : F \to G$ és una transformació natural es diu que τ és una *equivalència natural* (o *isomorfisme de functors*) si per a cada $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, el morfisme $\tau_X : F(X) \to G(X)$ és un isomorfisme. Es diu que F i G són *isomorf.*

Exemple A.0.9. Sigui k un cos. Prenem $\mathcal{C} = \mathrm{Vectfin}_k$ la categoria dels k-espais vectorials finits. Prenem $F = \mathrm{id} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $E \mapsto E$ i $G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $E \mapsto E^{**}$. Llavors, per a tot E se satisfà $f^{**} \circ \tau_E = \tau_F \circ f$ i aleshores $F \cong G$.

Apèndix B

Teoria bàsica de grups (en anglès)

Aquest capítol l'he afegit ja que en molts temes es tracten coses referents a la teoria de grups. Aleshores he pensat en escriure un breu resum dels apunts d'Estructures Algebraiques de Teoria de Grups, el que passa que els que tenia eren massa extensos i ho trobava exagerat. Aleshores, pel meu TFG vaig realitzar aquestes notes com a repàs de teoria de grups i m'han semblat adients, ja que tracten les definicions més bàsiques però d'una manera més breu ja que no estem en uns apunts de Grups, sinó de Topologia. Estan en anglès perquè faig el TFG en anglès i al igual em poso ara a traduir.

Based on notes of classes of "Estructures Algebraiques" and also on references [**rotmanadvancedmodernalgebra**] [**hungerfordalgebra**] and [**dummitfooteabstractalgebra**], which my teacher recommended me.

B.1 Preliminary concepts

In this section, I will cover the very preliminary concepts of Group Theory, such as the definition of group itself, and the basic notation and definitions such as subgroups, homomorphisms, etc. This will be done by translating into English my old notes from Estructures Algebraiques classes with Carlos d'Andrea.

Definició B.1.1 (Group)**.** A *group* is a set G together with a binary intern operation which satisfies

(i) *Associative*: $\forall x, y, z \in G$, $(xy)z = x(yz)$;

(ii) *Neutral element*: $\exists e \in G$ such that $ex = xe = x$, $\forall x \in G$;

(iii) *Inverse or symmetric element*: $\forall x \in G$, $\exists x' \in G$ such that $gg' = g'g = e$.

If the operation is commutative, i.e. $xy = yx$, $\forall x, y \in G$, we say that G is an *abelian group*.

Definició B.1.2 (Order of a group)**.** If G is a group, we define the order of G, denoted $|G|$ or $\operatorname{ord}(G)$ as the number of elements of G as a set, i.e. $|G| = \#G$. If $|G|$ is finite, we will call G a *finite group*, and if it is infinite, i.e. $|G| = \infty$, then G will be called a group of an infinite order.

Proposició B.1.3. *Some properties of a group $(G, \cdot\,)$ are as follows:*

(a) Neutral element is unique.

(b) If $g\cdot g = g$ for some $g \in G$, then $g = e$, the neutral element.

(c) Cancellative property: $\forall a, b, c \in G$, if we have $ab = ac$ we can "cancel" a and it is equivalent to $b = c$. Same happens if we have $ba = ca$, then $b = c$.

(d) $\forall x \in G$*, its inverse is unique.*

(e) $\forall x \in G$*,* $(x^{-1})^{-1} = x$*.*

(f) $\forall x, y \in G$*,* $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$*.*

Definició B.1.4 (Subgroup)**.** Let $(G, \cdot)$ be a group. A subset $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$, will be called *subgroup of* G if

(i) $1 \in H$

(ii) H is closed, i.e. if $x, y \in H$, then $xy \in H$.

(iii) If $x \in H$, then $x^{-1} \in H$.

Sometimes H being a subgroup of G is denoted by $H < G$.

Exemple B.1.5. The set $\mathbb{Z}$ with the sum is a group. All the subgroups of this group is equal to $m\mathbb{Z}$ for some $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Note that $(\mathbb{Z}, \cdot)$, where $\cdot$ represents the standard product of integers, does not conform a group, as for example 2 has no inverse with respect to the product, because $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Proposició B.1.6. *Useful ways of checking whether a given set* $H \neq \emptyset$ *is a subgroup of a given group* $(G, \cdot)$*:*

(a) $\forall a, b \in H$*,* $ab^{-1} \in H$ *implies that* H *is subgroup of* G*.*

(b) If H *is finite and* $\forall a, b \in H$ *we have* $ab \in H$*, then* H *is a subgroup of* G*.*

(c) If H_1 *and* H_2 *are both subgroups of the same group* G*, then* $H_1 \cap H_2$ *is a subgroup of* G*. We can generalize it to a more general family of subgroups* $\{H_i\}_{i \in I}$*.*

Demostració. I will not do this proof as it migth be found on my “Estructures Algebraiques” course's notes and it is not necessary for the purpose of this text. □

Definició B.1.7 (Centre)**.** Let $(G, \cdot)$ be a group. We call the *centre* (or *center* in american english) of G to the set

$$\mathcal{Z}(G) := \{g \in G \ : \ gx = xg, \ \forall x \in G\}$$

i.e. the set of all elements of G such that they commute with every other element in G.

Proposició B.1.8. *Let* G *be a group and* $\mathcal{Z}(G)$ *its center. Then,*

(a) G *is abelian if, and only if,* $\mathbb{Z}(G) = G$*;*

(b) $\mathbb{Z}(G) \neq \emptyset$ *for all group* G*;*

(c) $(\mathbb{Z}(G), \cdot_G)$ *is a subgroup of* G *with its operation;*

(d) $\mathbb{Z}(G)$ *is, of course, abelian.*

Demostració. I will not do this proof as it migth be found on my “Estructures Algebraiques” course's notes and it is not necessary for the purpose of this text. □

Definició B.1.9 (Homomorphism)**.** Let $(G_1, \bullet_1)$ and $(G_2, \bullet_2)$ be groups and let $f : G_1 \to G_2$ be an application. Then it is called *group morphism* or *homomorphism* if $f(x \bullet_1 y) = f(x) \bullet_2 f(y)$, $\forall x, y \in G$. If f is an injective map, then it is called *monomorphism*, if it is surjective, then it is called *epimorphism* and if it is bijective, then it is *isomorphism*. In this last case, G_1 and G_2 are said to be *isomorphic* and it is written $G_1 \cong G_2$. Also, a homomorphism $f : G \to G$ is called *automorphism* and if is an isomorphism then it is called *endomorphism*.

Observació B.1.10. *If G_1 and G_2 are groups and $f : G_1 \to G_2$ is an homomorphism, and let $e_1 \in G_1$ and $e_2 \in G_2$ be the respective neutral elements of G_1 and G_2, then it is easy to see that both satisfy:*

$$f(e_1) = e_2 \qquad \textit{and} \qquad f(x^{-1}) = f(x)^{-1}.$$

Demostració. I will not do this proof as it migth be found on my "Estructures Algebraiques" course's notes and it is not necessary for the purpose of this text. □

Definició B.1.11 (Kernel, image and inverse image)**.** Let $f : G \to G'$ be a homomorphism of groups. The *kernel* of f, denoted $\ker f$ is $\{x \in G \ : \ f(x) = e_{G'}\} \subset G$. The *image* of f, denoted *Im(f)* or also $f(G)$ is $\{b \in G' \ : \ b = f(a)$, for some $a \in G\} \subset G'$. The *inverse image* or *pre-image* of f is $f^{-1}(G') = \{a \in G \ : \ f(a) \in G'\}$.

Teorema B.1.12. *Let $f : G \to G'$ be a homomorphism of groups. Then*

(i) f is a monomorphism if, and only if, $\ker f = \{e\}$*;*

(ii) f is an isomorphism if, and only if, there is a homomorphism $f^{-1} : G' \to G$ such that $f \circ f^{-1} = 1_{G'}$ and $f^{-1} \circ f = 1_G$.

Demostració. I will not do this proof as it migth be found on my "Estructures Algebraiques" course's notes and it is not necessary for the purpose of this text. □

B.2 Cosets and Lagrange's Theorem

In this section we obtain the first significant theorem relating the structure of a finite group G with the number theoretic properties of its order $|G|$. We begin by extending the concept of congruence modulo m in the group $\mathbb{Z}$. By definition, $a \equiv b \pmod{m}$ if and only if $m \mid a - b$, that is, if and only if $a - b$ is an element of the subgroup $\langle m \rangle = m\mathbb{Z} = \{mk \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ (see cyclic groups). The next definition will generalize this concept to any group.

Definició B.2.1 (Congruent)**.** Let H be a subgroup of a group G and $a, b \in G$. We say a is *right congruent* to b modulo H, denoted $a \equiv_r b \pmod{H}$ if $ab^{-1} \in H$. Analogously, a is *left congruent* to b modulo H, denoted $a \equiv_\ell b \pmod{H}$, if $a^{-1}b \in H$.

Observació B.2.2. *If G is abelian, then right and left congruence modulo H coincide, since $ab^{-1} \in H \Leftrightarrow (ab^{-1})^{-1}) = ba^{-1} = a^{-1}b \in H$. There also exist non-abelian groups G and subgroups H such that right and left congruence coincide, but this is not true in general.*

Teorema B.2.3. *Let H be a subgroup of G.*

(i) Right (resp. left) congruence modulo H is an equivalent relation on G.

(ii) The equivalence class of $a \in G$ under right (resp. left) congruence modulo H is the set $Ha = \{ha : h \in H\}$ (resp. $aH = \{ah : h \in H\}$. This is called the right coset (resp. left coset).

(iii) $|aH| = |Ha| = |H|$, for all $a \in G$.

Demostració. I will not do this proof as it migth be found on my "Estructures Algebraiques" course's notes and it is not necessary for the purpose of this text. □

Corol·lari B.2.4. *Let H be a subgroup of a group G.*

(a) G is the union of the right (resp. left) cosets of H in G.

(b) Two right (resp. left) cosets of H in G are either disjointed or equal.

(c) For all $a, b \in G$, $Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ and $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$.

(d) If $\mathcal{R}$ is the set of distinct right cosets of H in G and $\mathcal{L}$ is the set of distinct left cosets of H in G, then $|\mathcal{R}| = |\mathcal{L}|$.

Definició B.2.5 (Index)**.** Let H be a subgroup of G. The *index of H in G*, denoted $[G : H]$, is the cardinal number of the set of distinct right (resp. left) cosets of H in G.

Teorema B.2.6 (Lagrange)**.** *Let G be a group and H a subgroup of G. Then G is finite if, and only if, H and $[G : H]$ are finite. In this case $|G| = |H| \cdot [G : H]$.*

Demostració. I will not do this proof as it migth be found on my "Estructures Algebraiques" course's notes and it is not necessary for the purpose of this text. □

To end this section, I will talk about permutation groups, cyclic groups and I will give other examples of finite groups, that may be used later in this text. I will present them as something already known, so I will not stop myself to explain any details about them.

Recall that, if we have a group G with its associated product $\bullet$, then we may write x^n, where $x \in G$, to indicate that x is operated with himself n times within the product $\bullet$. If G is a additive group, one may find nx to indicate the same, as in additive groups we use $+$ or similar symbols to indicate the operation.

Definició B.2.7 (Order of an element)**.** Let G be a group and $x \in G$ an arbitrairy element. Then we call *order of x*, denoted by $\mathrm{ord}(x)$, to the lowest positive integer m such that $x^m = e$, where e denotes the neutral element of G. If $m = 0$ we say that $\mathrm{ord}(x) = \infty$.

Definició B.2.8 (Subgroup generated by an element)**.** Let G be a group and $x \in G$ be an arbitrary element. Then we call the *subgroup of G generated by x*, denoted by $\langle x \rangle$, to the set

$$\langle x \rangle := \{x^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

The Laws of Exponents show that $\langle x \rangle$ is, in fact, a subgroup: $1 = x^0 \in \langle x \rangle$, $x^n x^m = x^{n+m} \in \langle x \rangle$ and $x^{-1} \in \langle x \rangle$.

Definició B.2.9 (Cyclic group)**.** A group G is called *cyclic* if there exists $x \in G$ such that $G = \langle x \rangle$. In this case, we call x a *generator* of the group G.

Proposició B.2.10. *Let G be a group. If $x \in G$, then the order of x is equal to $|\langle x \rangle|$, the order of the cyclic subgroup generated by x.*

Demostració. I will not do this proof as it migth be found on my "Estructures Algebraiques" course's notes and it is not necessary for the purpose of this text. □

Recall from Arithmetic that, taking $n \geq 1$ integer, we defined the *Euler ϕ-function* as

$$\phi(n) := \#\{k \in \mathbb{Z} \,:\, 1 \leq k \leq n \text{ and } \gcd(k,n) = 1\}$$

Teorema B.2.11. *(i) If $G = \langle a \rangle$ is a cyclic group of order n, then a^k is a generator of G if and only if* $\gcd(k,n) = 1$.

(ii) If G is a cyclic group of order n and call $g(G)$ the set of all generators of g, then $\#g(G) = \phi(n)$, where $\phi(n)$ is the Euler ϕ-function.

Demostració. I will not do this proof as it migth be found on my "Estructures Algebraiques" course's notes and it is not necessary for the purpose of this text. □

Exemple B.2.12. Let's check out some examples.

(i) The group S_3 is not cyclic, for τ_1, τ_2, τ_3 are transpositions (i.e. of order 2) and σ_1, σ_2 have order 3.

(ii) The group $\mu_n = \{z \in \mathbb{C}^* \;:\; z^n = 1\}$, i.e. the group of all n-th roots of unity over $\mathbb{C}$, is a cyclic group generated by $e^{2\pi i/n}\}$. This is an important group regarding solutions of polynomials over an algebraically closed field, but in this notes I will not study it so much.

Corol·lari B.2.13. *Every group G of order p prime is cyclic.*

Demostració. Take $x \in G$ such that $x \neq e$, where e is the neutral element of G. Then, its order must be strictly higher than 1 and also has to divide p, the order of G. As p is prime, it must be $\operatorname{ord}(x) = p$, hence, by previous results, it must be $G = \langle x \rangle$ □

Proposició B.2.14. *(i) All cyclic infinite group is isomorphic to $\mathbb{Z}$ with $+$ operation.*

(ii) All cyclic finite group of order m, with $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, is isomorphic to $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ with $+$ operation.

Demostració. The proof is rather easy considering the map, taking $x \in G$ such as $G = \langle x \rangle$, defined by $f_x : \mathbb{Z} \to \langle x \rangle = G$, $n \mapsto x^n$. This is an epimorphism, which can be easily proved, and then we specify each case. If G is infinite, only $0 \mapsto e_G$, and then $\ker f_x = \{0\}$ because no other element makes $x^m = e_G$ rather than $m = 0$, and thus f_x is an isomorphism. The other case is considering that G has order $m < \infty$, i.e. x has order m. Then, $\ker f_x = m\mathbb{Z}$ and we can use the First Isomorphism Theorem (which I state later, at **??**) to prove the isomorphism $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong G$. □

Indeed, this is cheating because I know the Isomorphism Theorems but I still have not stated them in this notes. But the purpose of these notes is just to collect information about Groups and hence I do not really care about the order.

To end the subsection talking about cyclic groups, I will state a proposition that collects some random facts about cyclic groups that can be useful in the future.

Proposició B.2.15. *(1) Let G_1 and G_2 be cyclic groups. Then, $|G_1| = |G_2| \iff G_1 \cong G_2$.*

(2) If G is a cyclic group, then all subgroup of G is also cyclic.

(3) If G is a cyclic group of order n, then for all d divisor of n there exists a unique subgroup of order d of G.

As I will be interested in the future, I will define now a special kind of group: the Klein Group or the Four-Group. Also there will be some new concepts as the cartesian product of groups which I did not introduce, because I assume they are already known and are not so important to the purpose of these notes.

Definició B.2.16 (Klein Group)**.** The *Klein Group* or *Four-Group* is a group with only four elements. It is often written $\mathbb{V}_4$ and it is isomorphic to $C_2 \times C_2$, where C_2 means the cyclic group of order 2[1] A presentation of the group can be

$$\mathbb{V}_4 = \{a, b \ : \ a^2 = b^2 = (ab)^2 = e\} = \{a, b, ab, e\}$$

Observe that there are two groups of order 4. One of these is $\mathbb{V}_4 \cong C_2 \times C_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ and the other is $C_4 \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. In Klein group, there are only three elements plus the neutral element, and every element can be obtained by multiplying the other two. Also it is an abelian group.

To end this section, I give a brief description of the symmetric group and permutation groups.

Given a set X, a permutation of X is a map from X to X. The set S_X with the composition of maps is a group with the identity map as neutral element. For an integer $n \geq 1$, we call permutation group to the group of all permutations of $\{1, \ldots, n\}$, technically written $S_{\{1,\ldots,n\}}$ but to simplify we will write S_n. Then S_n is the group of all possible permutations of n elements. We call it the *symmetric group of degree n*. We denote its elements $\sigma \in S_n$ by a matrix indicating which element is changed by which:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots \end{pmatrix}$$

It is clear to see that $|S_n| = n!$ and also that if $\sigma, \tau \in S_n$, then $\sigma\tau$ (as composition) satisfies that $(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$, for all $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Moreover, given r different elements component-wise $k_1, \ldots, k_r$ from $\{1, \ldots, n\}$, we write $(k_1, \ldots, k_r)$ the permutation σ from S_n defined by

$$\begin{cases} \sigma(k_1) = k_2, \ \sigma(k_2) = k_3, \ \cdots \ \sigma(k_{r-1}) = k_r, \ \sigma(k_r) = k_1 \\ \sigma(p) = p, \ \ \forall p \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k_1, \ldots, k_r\} \end{cases}$$

and we call σ an r-cycle.

For an example, take S_3. Then we can write its elements as $\tau_1 = (2, 3)$, $\tau_2 = (1, 3)$ and $\tau_3 = (1, 2)$, its 2-cycles, and also $\sigma_1 = (1, 2, 3)$ and $\sigma_2 = (1, 3, 2)$ its 3-cycles, together with the identity. In general, we don't have a unique way of representing cycles. For example, $(1, 2, 3) = (2, 3, 1) = (3, 1, 2)$. We also call *transposition* to a 2-cycle and then we have the following important statements:

Proposició B.2.17. *Let $n \geq 1$ be an integer.*

(i) If $\tau \in S_n$ is a transposition, then $\tau^2 = \mathrm{id}$, i.e. a transposition is of order 2, i.e. the inverse of a transposition is itself.

(ii) All permutation from S_n, different from identity, can be written as a disjoint cycle product unequivocally determined except from the order.

(iii) All cycles can be written as a product of transpositions.

[1] See that there is only a group of order 2, for **??** point 1.

(iv) *All permutations can be written as a product of transpositions*

Demostració. The first statement is more an observation, as it is very trivial. The second one is not trivial, but I leave its proof as an exercise. The third one is very easy to prove and the last one is a direct consequence of the second and third statements. □

Regarding this statement, we call the *signature* of a permutation $\sigma \in S_n$, to the number $(-1)^t$, where $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ is the number of transpositions in which σ decomposes. Sometimes it is written $\varepsilon(\sigma)$, sometimes $\text{sg}(\sigma)$. We say that σ is an *even permutation* if $\varepsilon(\sigma) = 1$ and an *odd permutation* if $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Definició B.2.18 (Alternate group)**.** We call the *alternate group* to the subgroup of S_n which contains all the even permutations. It is written

$$A_n := \{\sigma \in S_n \ : \ \varepsilon(\sigma) = 1\}$$

B.3 Normality, quotient groups and isomorphism's theorems

In the last section we described the cosets, i.e. the sets of left and right congruent classes. Now we want to describe and structure as a group the quotient set formed by a group G and a subgroup H of G. Our first problem is that we should give two different definitions, one for the right cosets and the other for the left cosets. The second problem is that the product of classes would depend on the representant of the class, i.e. it would not be well defined. All these problems will be solved with the new concept we are going to treat right now: the normal subgroup. That is, we will not be able to construct the quotient for any group and any subgroup, we will need a special subgroup.

Definició B.3.1 (Normal subgroup)**.** A subgroup $H \subset G$ of a group G is said to be *normal in* G, denoted $H \lhd G$, if $\forall x \in G$ it occurs one of the following (which are equivalent):

(i) $xHx^{-1} \subseteq H$, where $xHx^{-1} = \{xhx^{-1} \ : \ h \in H\}$, or

(ii) $xHx^{-1} = H$, or

(iii) $xH = Hx$.

Before continuing to the next statement, I will define two different product of groups, as they will be useful from now on. The first one is the direct product which is the same definition for any given two arbitrary sets. The second one is a proper product of groups.

First, let's see a new important group.

Definició B.3.2. If H and K are subgroups of a group G, then

$$H \vee K = \langle H \cup K \rangle$$

is the *subgroup generated by* H *and* K.

This is the smallest subgroup of G that contains both H and K. It is easy to check that. Also, if G is abelian, then $H \vee K = H + K = \{sh + tk \ : \ h \in H, k \in K, \ s, t \in \mathbb{Z}\}$. This is not a real product, but the notation reminds me of it, so that is why I give this definition now, talking about products. The following product is the direct product.

Definició B.3.3 (Direct product)**.** Let H and K be groups, then their *direct product*, denoted $H \times K$, is the set of all ordered pairs (h, k), with $h \in H$ and $k \in K$, equipped with the operation

$$(h, k)(h', k') = (hh', kk')$$

It is easy to check that, with this definition, $H \times K$ is indeed a group with neutral element $(1_H, 1_K)$, where 1_H is the neutral element of H and 1_K of K, and $(h, k)^{-1} = (h^{-1}, k^{-1})$.

The last product I want to show is the product of all possible elements of two groups by one side. That is, if H and K are both groups, then we define

$$HK := \{hk \ : \ h \in H, \ k \in K\}$$

One may observe that, if H and K are subgroups of G, then HK might not be a subgroup of G. For example, if $G = S_3$ and $H = \langle(1, 2)\rangle$ and $K = \langle(1, 3)\rangle$. Then,

$$HK = \langle \mathrm{id}, (1, 2), (1, 3), (1, 3, 2)\rangle$$

is not a subgroup, as it is not closed because $(1, 3)(1, 2) = (1, 2, 3) \notin HK$.

With these definitions we can continue our discussion on normal subgroups and its properties, regarding these new structures we just saw.

Proposició B.3.4. *Let K and N be subgroups of a group G, with N normal in G. Then,*

(a) $N \cap K$ is a normal subgroup of K;

(b) N is a normal subgroup of $N \vee K$;

(c) $NK = N \vee K = KN$;

(d) if K is normal in G and $K \cap N = \{e\}$, then $nk = kn$ for all $k \in K$ and $n \in N$.

Demostració. I will not do this proof as it migth be found on my "Estructures Algebraiques" course's notes and it is not necessary for the purpose of this text. □

Now finally we can define the quotient group and give to it a group structure. First we must define the quotient operation.

Definició B.3.5 (Quotient group)**.** Let G a group and H a subgroup of G. Consider the binary operation $\bullet_q$ defined as follows:

$$(xH) \bullet_q (yH) := \{k_1 k_2 \ : \ k_1 \in xH, \ k_2 \in yH\}$$

If H is normal on G the $\bullet_q$ operation is $(xH) \bullet_q (yH) = (xy)H$ (the proof is left as an exercise). If we denote G/H, with H normal on G, as the set of all left (or right) cosets of G then $(G/H, \bullet_q)$ is a group. It is called the *quotient group*.

It remains as an exercise to prove that this quotient group is, indeed, a group. One must prove that the operation is well defined, i.e. it does not depend on the representant, and then prove that it has a group structure following the definition. We will denote often the elements of G/H as $[x]$ to denote it is the class of $x \in G$ modulo H. As it will be the same, given that $H \lhd G$, we will have $[x] = xH = Hx$, $\forall x \in G$.

Definició B.3.6 (Quotient map)**.** Let G be a group and H be a normal subgroup of G. Define the *natural map* or *quotient map* $\pi : G \to G/H$ by $\pi(x) = [x]$, i.e. the projection to the quotient.

Observació B.3.7. *It is clear that π is a homomorphism of groups and also that* $\ker\pi = \{a \in G \,:\, \pi(a) = H\} = \{a \in G \,:\, [a] = H\} = H$, *i.e. if $y \in H$ then $\pi(y) = [e] = 1_{G/H}$. It is also important to remark that π is an epimorphism.*

Teorema B.3.8. *Let G and G' be groups, and let H be a subgroup of G. Then, H is normal on G if, and only if, there exists some homomorphism $f : G \to G'$ such that* $\ker f = H$.

Demostració. I will not do this proof as it migth be found on my "Estructures Algebraiques" course's notes and it is not necessary for the purpose of this text. □

Proposició B.3.9. *Let $f : G \to G'$ a group homomorphism.*

(a) If H is a subgroup of G, then $f(H)$ is a subgroup of G'.

(b) If H' is a subgroup of G', then $f^{-1}(H')$ is a subgroup of G. Moreover, if H' is a normal subgroup of G', then $f^{-1}(H')$ is a normal subgroup of G.

(c) If $H_1 \lhd G_1$, then $f(H_1) \lhd f(G_1)$ but not necessarily in G_2.

Let G, G' be groups, $f : G \to G'$ a group homomorphism and let H be a subgroup normal on G. We say that f *factorizes through G/H* if there exists a group homomorphism $\overline{f} : G/H \to G'$ such that $f = \overline{f} \circ \pi$, where $\pi : G \to G/H$ is the natural homomorphism, i.e. if there exists a group homomorphism that makes the following diagram commutative:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & G' \\ & G/H \arrow[u, "\overline{f}"'] \end{tikzcd}$$

Firstly, I will state a result that will be useful to demonstrate the Isomorphism theorems and then I will state these theorems.

Proposició B.3.10. *Let G and G' be groups and $f : G \to G'$ a homomorphism, and let H be a normal subgroup of G. Then, f factorizes through G/H if, and only if, $H \subset$* $\ker f$.

Demostració. Take the implication to the right. Take as hypothesis that f factorizes through G/H. Let $h \in H$. According to the definition of π and that $\overline{f}$ is a homomorphism, we obtain that $f(h) = \overline{f}(\pi(h)) = \overline{f}([e]) = e'$, where $[e]$ means the neutral element of G/H and e' the neutral element of G'. Then, it is clear that $H \subseteq \ker f$.

Take the implication to the left. We take as hypothesis that $H \subset \ker f$. We define now $\overline{f} : G/H \to G'$ as $\overline{f}([x]) = f(x)$, where $[x]$ indicates the class of $x \in G$. We have to see that this is well-defined, i.e. that the definition does not depend on the representant chosen for the class. If $y \in [x]$, we have $y = xh$, for $h \in H$. Now, this means that

$$f(y) = f(xh) = f(x)f(h) = f(x)e' = f(x)$$

because $h \in H \subset \ker f$. Now, if $x, y \in G$, we have $\overline{f}([x][y]) = \overline{f}([xy]) = f(xy) = f(x)f(y) = \overline{f}([x])\overline{f}([y])$ because of the definition of the class-product. Hence, $\overline{f}$ is a homomorphism. Eventually, it is clear that $f = \overline{f} \circ \pi$. □

Teorema B.3.11 (First isomorphism). *Let G and G' be groups and $f : G \to G'$ a group homomorphism. Then, f factorizes through $G/\ker f$ and we have $f = i \circ \tilde{f} \circ \pi$, where $\tilde{f}$ is a group isomorphism from $G/\ker f$ to $\mathrm{Im} f$, $\pi : G \to G/H$ is the normal morphism and $i : \mathrm{Im} f \to G$ is the inclusion. We have, then, that the following diagram is commutative:*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & G' \\ & G/H \arrow[u, "\tilde{f}"'] \end{tikzcd}$$

Demostració. Because of the last proposition **??**, there exists a homomorphism $\overline{f} : G/\ker f \to G'$ such that $f = \overline{f} \circ \pi$. Clearly $\overline{f}$ is injective and $\overline{f} = i \circ \tilde{f}$, where $\tilde{f}$ is an isomorphism from $G/\ker f$ into $\mathrm{Im}\overline{f}$. Finally, as $\mathrm{Im}\overline{f} = \mathrm{Im} f$ by the definition of $\tilde{f}$, we obtain hence the result. □

Now, for the following two theorems, I will just state the results, but I won't prove them, because I think it is not necessary for the purpose of these notes. One can find the proofs in any books and also in my last Group Theory notes from the classes of *Estructures Algebraiques.*

Teorema B.3.12 (Second isomorphism). *Let G be a group, H a normal subgroup and F an arbitrary subgroup of G. Then, HF is subgroup of G, $F \cap H$ is normal subgroup of F and H is normal subgroup of HF. Moreover, the inclusion $F \hookrightarrow HF$ induces an isomorphism between $F/(F \cap H) \cong (HF)/H$.*

Teorema B.3.13 (Third isomorphism). *Let $\varphi : G \to G'$ an epimorphism, H' a normal subgroup of G' and $H := \varphi^{-1}(H')$. Then φ induces an isomorphism between G/H and G'/H'.*

Proposició B.3.14 (Correspondence Theorem). *Let G be a group, let $K \lhd G$, and let $\pi : G \to G/K$ be the natural map. Then*

$$S \mapsto \pi(S) = S/K$$

is a bijection between $\mathrm{Sub}(G; K)$, the family of all those subgroups S of G that contain K, and $\mathrm{Sub}(G/K)$, the family of all the subgroups of G/K. Moreover, $T \subseteq S \subseteq G$ if, and only if, $T/J \subseteq S/K$, in which case $[S : T] = [S/K : T/K]$, and $T \lhd S$ if and only if $T/K \lhd S/K$, in which case $S/T \cong (S/K)/(T/K)$.

Demostració. I will not do this proof as it migth be found on my "Estructures Algebraiques" course's notes and it is not necessary for the purpose of this text. □

The following diagram is a way to remember this theorem:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, dash] \arrow[dr] & \\ S \arrow[d, dash] \arrow[dr] & G/K \\ T \arrow[d, dash] \arrow[dr] & S/K \\ K \arrow[d, dash] \arrow[dr] & T/K \\ 0 & \{1\} \end{tikzcd}$$

B.4 Actions and Sylow theorems

Definició B.4.1 (Action of a group on a set)**.** Let X be a set and G a group. A map

$$\begin{aligned}\rho : G \times X &\longrightarrow X\\ (g,x) &\longmapsto \rho(g,x) := gx\end{aligned}$$

is called an *action from G on X*, or alternatively it is said that G *acts on* X if it satisfies the following conditions:

(i) $ex = x$, for all $x \in X$;

(ii) $g(g'x) = (gg')x$, for all pair $g, g' \in G$ and all element $x \in X$.

If G acts on a set X, we also say that X is a G-set.

If a group G acts on a set X, then fixing the first variable, say g, gives a function $\alpha_g : X \to X$, namely $\alpha_g : x \mapsto gx$. This function is a permutation of X, for its inverse is $\alpha_{g^{-1}}$:

$$\alpha_g \alpha_{g^{-1}} = \alpha_1 = 1_X = \alpha_{g^{-1}} \alpha_g$$

Definició B.4.2 (Orbit, stabilizer, orbit space)**.** If G acts on X and $x \in X$, then the *orbit* of x, denoted by $\mathcal{O}(x)$, is the subset

$$\mathcal{O}(x) := \{gx \ : \ g \in G\} \subseteq X;$$

the *stabilizer* of x, denoted by G_x or also $E(x)$, is the subgroup

$$G_x := \{g \in G \ : \ gx = x\} \subseteq G.$$

The *orbit space*, denoted by X/G, is the set of all the orbits.

If G acts on a set X, define a relation on X by $x \sim y$ if, an only if there exists $g \in G$ with $y = gx$. It is easy to see that this is an equivalence relation whose equivalence classes are the orbits. The orbit space is the family of equivalent classes.

Before getting into the heavy examples, let's see a few properties that will be useful in the future.

Proposició B.4.3. *Let ρ be an action of G over X. Then,*

(i) if $x \in X$ is an arbitrary element, the stabilizer G_x is, indeed, a subgroup of G;

(ii) it is satisfied $gG_xg^{-1} = G_{gx}$, for all $x \in X$ and $g \in G$.

(iii) if G is a finite group and $x \in X$, then $\#Gx$ is finite and, moreover,

$$|Gx| = [G : G_x] = \frac{|G|}{|G_x|}.$$

Demostració. I will not do this proof as it migth be found on my "Estructures Algebraiques" course's notes and it is not necessary for the purpose of this text. □

Exemple B.4.4 (Heavy examples)**.** Let's begin with the heavy examples. I call them "heavy examples" because they are a little bit more than examples, as they work for the theory as well. And they are heavy, because they are a lot to take.

(1) Given a group G, let's consider the action

$$\begin{aligned} \rho : G \times G &\longrightarrow G \\ (g,h) &\longmapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

this action is called *action by conjugation on a group by himself*. We define the *centre of* G as the kernel of ρ, i.e.

$$Z(G) = \{g \in G \ : \ ghg^{-1} = h, \ \forall h \in G\}$$

Notice that it is the same definition we got at the beginning. We also say that the orbit of an element $h \in G$ by this action is the *conjugation class of* h. Finally, we call *centralizer of* h *in* G to the stabilizer of an element by this particular action. It is written

$$Z_G(h) := G_x = \{g \in G \ : \ ghg^{-1} = h\}$$

(2) If G is a group, H a subgroup of G and $g \in G$, we call *conjugated of* H *by* g to the set $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \ : \ h \in H\}$. It can be easily proved that it is indeed a subgroup of G. Take now $\mathcal{H}$ the set of all subgroups of G, i.e.

$$\mathcal{H} := \{H \subseteq G \ : \ H \text{ subgroup of } G\}$$

Then we consider the following map

$$\begin{aligned} \rho : G \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ (g,H) &\longmapsto gH_0g^{-1} \end{aligned}$$

We can observe that ρ is an action of G on $\mathcal{H}$, the set of all subgroups of G, and we can call it *action by conjugation of a group on its subgroups' set* The orbit of a picked subgroup H_0 by this action is the set of all its conjugated, i.e.

$$\mathcal{O}(H_0) = \{gH_0g^{-1} \ : \ g \in G\}$$

The stabilizer of $H_0 \in \mathcal{H}$ by this action is called *normalizer of* H_0 *in* G and it is written $N_G(H_0)$. It has been proved in "Estructures Algebraiques" that $N_G(H_0)$ is the biggest subgroup of G which contains H_0 as a normal subgroup.

(3) Let H be a subgroup of a group G, then we consider the action

$$\begin{aligned} \rho : H \times G &\longrightarrow G \\ (h,g) &\longmapsto hg \end{aligned}$$

which is called the *right translation*. We can analogously consider the *left translation*. This allows us to define the *centralizer* of a subgroup H of G as

$$C_G(H) = \{g \in G \ : \ gh = hg, \ \forall h \in H\}$$

which is easy to see that it is a subgroup of G and also that $C_G(G) = Z(G)$. Finally, note that $C_G(H) \subseteq N_G(H)$

Proposició B.4.5 (The N/C lemma). *(i) If $H \subseteq G$, then $C_G(H) \lhd N_G(H)$ and there is an embedding*

$$N_G(H)/C_G(H) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(G).$$

(ii) $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$*, where* $\mathrm{Inn}(G)$ *is the subgroup of* $\mathrm{Aut}(G)$ *consisting of all the inner automorphisms*[2]*.*

Demostració. I will not do this proof as it migth be found on my "Estructures Algebraiques" course's notes and it is not necessary for the purpose of this text. □

Observació B.4.6. *We claim that* $\mathrm{Inn}(G) \triangleleft \mathrm{Aut}(G)$*. Indeed, if* $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ *and* $g \in G$*, then*

$$\varphi\gamma_a\varphi^{-1} : g \mapsto \varphi^{-1}g \mapsto a\varphi^{-1}ga^{-1} \mapsto \varphi(a)g\varphi(a^{-1})$$

thus $\varphi\gamma_a\varphi^{-1} = \gamma_{\varphi(a)} \in \mathrm{Inn}(G)$*. Recall that an automorphism is called outer if it is not inner. The outer automorphism group is defined by* $\mathrm{Out}(G) = \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$*.*

We may now define, given a group G and an action ρ of G over a set X, the relation

$$x \sim y \iff y = gx,$$

for some $g \in G$, where $x, y \in X$. This is an equivalence relation which is very easy to prove. We may observe that the orbits of all $x \in X$ form a partition of X, i.e. $\bigcup_{x\in X} \mathcal{O}(x) = X$. We can write X/G to express $G/\sim$, i.e. the set of all the orbits.

Proposició B.4.7. *It is satisfied*

$$|X| = \sum_{\mathcal{O}\in X/G} |\mathcal{O}| = \sum_{x\in X} |\mathcal{O}(x)|$$

and if X *is finite, say* $X = \{x_1, \ldots, x_\ell\}$*, then*

$$|X| = \sum_{i=1}^{\ell} |\mathcal{O}(x_i)|$$

Demostració. I will not do this proof as it migth be found on my "Estructures Algebraiques" course's notes and it is not necessary for the purpose of this text. □

Teorema B.4.8. *If* G *acts on a set* X *and* $x \in X$*, then*

$$|\mathcal{O}(x)| = [G : G_x],$$

the index of the stabilizer G_x *in* G*.*

Demostració. I will not do this proof as it migth be found on my "Estructures Algebraiques" course's notes and it is not necessary for the purpose of this text. □

With this result, we can rewrite the last proposition we saw by

$$|X| = \sum_{x\in X} [G : G_x]$$

All these equations are called *orbit equations*. We can adapt the orbit equations to the heavy example's actions. For example, if x lies in a finite group G, then the number of conjugates of x is the index of its centralizer; or if H is a subgroup of a finite group G, then the number of conjugates of H in G is $[G : N_G(H)]$.

We will now introduce the p-groups, after saying some more results of orbits and actions, and finally we will state Cauchy's Theorem which characterizes the subgroups of a finite group regarding the divisors of its order.

[2]An *inner automorphism* is an automorphism of a group G, given by the conjugated action. That is, all homomorphisms $f : G \to G$ such that, for some fixed $a \in G$ we have for all $x \in G$, $f(x) = axa^{-1}$.

Definició B.4.9 (p-group)**.** Let p be an odd prime number and G a finite group. Then G is called *p-group* if there exists $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ such that $|G| = p^r$. Analogously we will say that H is a *p-subgroup*.

Proposició B.4.10. *(1) If G is a p-group that acts on a finite set X, then*

$$|X| \cong |X_0| \quad (mod\ p)$$

where X_0 is the subset of X of fixed points.

(2) If G is a p-group, its center $Z(G)$ is not trivial.

(3) If H is a p-subgroup of a finite group G, then

$$[N_G(H) : H] \equiv [G : H] \quad (mod\ p)$$

Demostració. I will not do this proof as it migth be found on my “Estructures Algebraiques” course's notes and it is not necessary for the purpose of this text. □

We can finally state the Cauchy's theorem, although it will not be proved in this notes, because again, it is not very relevant for the purpose of this text.

Teorema B.4.11 (Cauchy)**.** *Let G be a finite group of order m and $p \in \mathbb{Z}$ prime which divides m. Then G has an element (and hence a subgroup) of order p.*

I will now state some results regarding simple groups, due to the fact that I will use them in the future and I have not yet even defined them.

Definició B.4.12 (Simple group)**.** A group G is called *simple* if $G \neq \{1\}$ and G has no normal subgroups other than $\{1\}$ and G itself.

Proposició B.4.13. *An abelian group G is simple if and only if it is finite of prime order.*

Demostració. I will not do this proof as it migth be found on my “Estructures Algebraiques” course's notes and it is not necessary for the purpose of this text. □

Corol·lari B.4.14. *A finite p-groupe G is simple if and only if $|G| = p$.*

From this point I will start with Sylow Theorems. I will not only state these theorems, but also I will give relevant results and definitions around them. We begin by defining a new type of group.

Definició B.4.15 (Sylow p-subgroup)**.** Let G be a finite group and P a subgroup. We call P a *Sylow p-subgroup* of G if P is a p-subgroup and also it is maximal between all possible p-subgroups. That is, if P' is another p-subgroup, then the Sylow p-subgroup will contain P'.

It follows from Lagrange's Theorem that if p^e is the largest power of p dividing the order of a group G, then a subgroup of G of order p^e is a maximal p-subgroup. It is not clear though that G has any subgroups of order p^e, but it is clear that the maximal p-subgroup always exists. This maximality means that if Q is another p-subgroup of G such that $P \subseteq Q$, then $P = Q$.

Let us show that if S is any p-subgroup of G (perhaps $S = \{1\}$), then there exists a Sylow p-subgroup P containing S. If there is no p-subgroup strictly containing S, then S itself is a Sylow p-subgroup. Otherwise, there is a p-subgroup P_1 with $S \subsetneq P_1$. If P_1 is maximal, it is Sylow, and we are done. Otherwise there is some p-subgroup P_2 with $P_1 \subsetneq P_2$. This procedure of producing larger and larger p-subgroups P_i must end after a finite number of steps because by hypothesis $|G| < \infty$ and $|P_i| < |G|$ for all i; the largest P_i must, therefore, be a Sylow p-subgroup.

Lema B.4.16. *Let P be a Sylow p-subgroup of a finite group G.*

(i) Every conjugate of P is also a Sylow p-subgroup of G.

(ii) $|N_G(P)/P|$ is prime to p.

(iii) If $a \in G$ has order some power of p and $aPa^{-1} = P$, then $a \in P$.

Demostració. (i) Suppose $a \in G$ and aPa^{-1} not a Sylow p-subgroup of G. Then there exists a p-subgroup greater, i.e. Q with $aPa^{-1} \subsetneq Q$. But then $P \subsetneq a^{-1}Qa$ contradicting that P is a Sylow p-subgroup of G.

(ii) If p divides $|N_G(P)/P|$, then Cauchy's Theorem shows that $N_G(P)/P$ contains an element aP of order p, and hence $N_G(P)/P$ contains a subgroup $S^* = \langle aP \rangle$ of order p. By the Correspondence Theorem (**??**), there is a subgroup S with $P \subseteq S \subseteq N_G(P)$ such that $S/P \cong S^*$. But S is a p-subgroup of $N_G(P) \subseteq G$ strictly larger than P, contradicting the maximality of P. We conclude that p does not divide $|N_G(P)/P|$.

(iii) By the definition of normalizer, the element a lies in $N_G(P)$. If $a \notin P$, then the coset aP is a nontrivial element of $N_G(P)/P$ having order some power of p; inlight of part (ii), this contradicts Lagrange's Theorem.

□

Now I will state the three Sylow Theorems all at once, and I will not change anything from what I got from the classes of "Estructures Algebraiques". Again, I will not provide the proofs because they can be found in my old notes and also in the references [**rotmanadvancedmodernalgebra**], [**hungerfordalgebra**] and [**dummitfooteabstractalgebra**].

Teorema B.4.17 (Sylow)**.** *(1) Let G be a finite group, p a prime number and $r > 0$ an integer such that $p^r \mid |G|$. Then there exist $H_1, \dots, H_r$ subgroups of G such that*

(i) $|H_i| = p^i$, for all $1 \leq i \leq r$, and

(ii) $H_i \lhd H_{i+1}$, for all $1 \leq i \leq r-1$.

(2) Let G be a finite group, H a p-subgroup of G and S a Sylow p-subgroup of G. Then, there exists $x \in G$ such that $H \subset xSx^{-1}$. In particular, every Sylow p-subgroup is conjugate to S. This also means that all Sylow p-subgroups are isomorphic (with same p).

(3) Let G be a group and n_p the number of Sylow p-subgroups of G. Then it is satisfied

(i) $n_p = [G : N_G(S_p)]$, for all S_p Sylow p-subgroup of G;

(ii) $n_p \mid [G : S_p]$, for all Sylow p-subgroup S_p;

(iii) $n_p \equiv 1 \bmod p$.

From these theorems it follows some further results that can be useful.

Corol·lari B.4.18. *A finite group G has a unique Sylow p-subgroup S for some prime p if and only if $S \lhd G$.*

B.5 Grups abelians finitament generats

D'acord, us preguntareu per què està de sobte en català. Però és que aquesta part no estava en els apunts en anglès, ja que pel meu TFG no calen els grups abelians, però sí per la topologia, sobre tot per la part d'homologies. Aleshores ho he incorporat aquí. Tot el que escric a continuació en aquesta secció està extret dels apunts de la Doctora Teresa Crespo d'Estructures Algebraiques, on ella mateixa va posar com a apèndix aquesta secció. Està pràcticament copiada al peu de la lletra.

Aquesta secció està inclosa originalment al temari de grups. Jo, però, no la he inclòs perquè no ho vam donar ja que no hi va haver temps. La incloc aquí perquè em sembla important i pot ser necessari per algun cop en la vida, i a més em sembla interessant.

En aquesta secció considerarem grups abelians i denotarem l'operació del grup com a suma, l'element neutre per 0, l'element simètric d'un element x com $-x$. Si $(E,+)$ és grup abelià, $x \in E$, $n \in \mathbb{Z}$, posem

$$nx := x^n = \begin{cases} x + \overset{n}{\cdots} + x & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ (-x) + \overset{n}{\cdots} + (-x) & \text{si n<0} \end{cases}$$

Anomenarem suma directa el producte directe de grups abelians i el denotarem per $\oplus$.

Havíem vist que un grup finit és finitament generat però no recíprocament. El grup $\mathbb{Z}$ i, més generalment, la suma directa $\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ d'un nombre finit de còpies de $\mathbb{Z}$ són grups infinits finitament generats.

B.5.1 Bases

Definició B.5.1. Siguin E un grup abelià i $e_1, \dots, e_r$ elements de E.

1) Els elements $e_1, \dots, e_r$ són *linealment independents sobre* $\mathbb{Z}$ si, per a $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$,

$$n_1 e_1 + \cdots + n_r e_r = 0 \Longrightarrow n_1 = 0, \dots, n_r = 0.$$

2) $(e_1, \dots, e_r)$ és *base de* E si els elements $e_1, \dots, e_r$ són linealment independents sobre $\mathbb{Z}$ i generen E.

Proposició B.5.2. *Siguin E un grup abelià i $e_1, \dots, e_r$ elements de E. Aleshores $(e_1, \dots, e_r)$ és base de E si i només si tot element de E s'escriu de manera única en la forma $n_1 e_1 + \cdots + n_r e_r$, amb $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$.*

Demostració. Aquesta proposició es demostra igual que pels espais vectorials. □

Definició B.5.3. Un grup abelià finitament generat és *lliure* si és isomorf a $\mathbb{Z} \oplus \overset{r}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}$, per algun enter $r > 0$.

Proposició B.5.4. *Un grup abelià finitament generat és lliure si i només si té una base.*

Demostració. Si $(e_1, \dots, e_r)$ és base de E, definim l'aplicació

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \oplus \overset{r}{\cdots} \oplus \mathbb{Z} &\longrightarrow E \\ (n_1, \dots, n_r) &\longmapsto n_1 e_1 + \cdots + n_r e_r. \end{aligned}$$

Clarament és isomorfisme de grups. Recíprocament, si φ és isomorfisme de $\mathbb{Z} \oplus \overset{r}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}$ en E, $(\varphi(1, 0, \dots, 0), \dots, \varphi(0, \dots,$
és base de E. □

Lema B.5.5. *Si $(e_1, \dots, e_r)$ és base de E, $d_1, \dots, d_r$ són enters naturals, aleshores*

$$E/\langle d_1e_1, \dots, d_re_r\rangle \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}.$$

Demostració. Definim l'aplicació

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z} \\ n_1e_1 + \cdots + n_re_r &\longmapsto (n_1 \mod d_1, \dots, n_r \mod d_r). \end{aligned}$$

clarament és epimorfisme de grups i el seu nucli és el subgrup $\langle d_1e_1, \dots, d_re_r\rangle$ del grup E. Pel teorema d'isomorfia (**??**), obtenim l'isomorfisme volgut. □

Proposició B.5.6. *Si un grup abelià E té una base amb r elements, totes les bases de E tenen r elements. L'enter r es diu rang de E.*

Demostració. Sigui $(e_1, \dots, e_r)$ una base de E. Posem $2E := \{2x \ : \ x \in E\}$. Clarament $2E$ és el subgrup de E generat per $2e_1, \dots, 2e_r$ i, per tant $E/2E \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \overset{r}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Com $2E$ no depèn de la base escollida, r tampoc. □

B.5.2 Subgrup de torsió

Definició B.5.7. Els elements d'ordre finit d'un grup abelià E s'anomenen també *elements de torsió* i formen un subgrup $F(E)$ de E anomenat *subgrup de torsió de E*. Diem que E és *lliure de torsió* si $F(E) = \{0\}$.

Clarament un grup abelià és lliure de torsió. Veiem ara el recíproc.

Lema B.5.8. *Si un conjunt de generadors $\{e_1, \dots, e_r\}$ d'un grup abelià E no és $\mathbb{Z}$-linealment independent, aleshores existeixen un altre conjunt de generadors $\{e'_1, \dots, e'_r\}$ de E (amb el mateix nombre d'elements) i un enter no nul q tals que $qe'_i = 0$, per a algun índex i.*

Demostració. Siguin $n_1, \dots, n_r$ enters no tots nuls tals que $n_1e_1 + \cdots + n_re_r = 0$. Si només un n_i és no nul, ja tenim el resultat volgut. Suposem doncs que al menys dos n_i's són nuls. Reordenant els e_i si cal, podem suposar $|n_1| \geq |n_2| > 0$. Tenim les igualtats

$$n_1e_1 + n_2e_2 = (n_1 - n_2)e_1 + n_2(e_1 + e_2) = (n_1 + n_2)e_1 + n_2(e_2 - e_1)$$

i un dels nombres $|n_1 - n_2|$ o $|n_1 + n_2|$ és estrictament més petit que $|n_1|$. Per tant existeix una relació no trivial, o bé entre els generadors $e_1, e_1 + e_2, \dots, e_r$, o bé entre els generadors $e_1, e_2 - e_1, \dots, e_r$, per a la qual la suma dels valors absoluts dels coeficients és estrictament més petita que $m = |n_1| + \cdots + |n_r| > 0$. El resultat s'obté doncs fent inducció sobre m. □

Proposició B.5.9. *Sigui E un grup abelià finitament generat i lliure de torsió. Aleshores E és un grup abelià lliure.*

Demostració. Sigui $\{e_1, \dots, e_r\}$ un conjunt de generadors de E amb r mínim. Vegem que $e_1, \dots, e_r$ són $\mathbb{Z}$-linealment independents. Siguin $n_1, \dots, n_r$ enters tals que

$$n_1e_1 + \cdots + n_re_r = 0.$$

Volem veure $n_i = 0$, per a tot i, $1 \leq i \leq r$. Raonem per l'absurd. Suposem que no tots els n_i són nuls. aleshores, pel lema anterior, existeixen un conjunt de generadors $\{e'_1, \dots, e'_r\}$ de E, un enter no nul q i un índex i tals que $qe'_i?'$. com E no té elements de torsió no nuls, ha de ser $e'_i = 0$ però aleshores, E es pot generar amb $r - 1$ elements, contradient la minimalitat de r. □

Proposició B.5.10. *Tot grup abelià finitament generat és suma directa d'un grup abelià lliure i un grup finit.*

Demostració. Sigui E un grup abelià finitament generat i sigui F el seu subgrup de torsió. Aleshores $L = E/F$ és lliure de torsió i finitament generat. Per la proposició anterior, L és lliure. Siguin $e_1, \dots, e_r$ elements de E tals que les seves classes $[e_1], \dots, [e_r]$ a L formin base de L. Sigui $L' = \langle e_1, \dots, e_r \rangle$. Com la imatge de L' p3el morfisme de pas al quocient $E \to L$ és igual a L, tenim $L' + F = E$. D'altra banda, $e_1, \dots, e_r$ són linealment independents sobre $\mathbb{Z}$, ja que una relació de dependència entre ells donaria una entre $[e_1], \dots, [e_r]$, per tant L' és lliure. Això implica que $L' \cap F = \{0\}$. Notem que F és isomorf al quocient E/L' i per tant finitament generat i, per ser de torsió, finit. □

direm que un grup abelià finitament generat E té *rang* r si $E/F(E)$ té rang r. Els grups abelians finits són els grups abelians finitament generats de rang 0.

B.5.3 Estructura dels grups abelians finitament generats

Proposició B.5.11. *Sigui L un grup abelià lliure de rang r i L' un subgrup de L. Aleshores existeixen una base $(e_1, \dots, e_r)$ de L, un enter natural $s \leq r$ i enters positius $d_1, \dots, d_s$ tals que $(d_1 e_1, \dots, d_s e_s)$ és una base de L' i $d_i | d_{i+1}$, per a $1 \leq i \leq s$.*

Demostració. Fem inducció sobre r. Per a $r = 1$, és la proposició (**??**), tenint en compte que 1 és base de $\mathbb{Z}$. Suposem doncs $r \geq 2$. Si existeix una base $(v_1, v_2, \dots, v_r)$ de L tal que $L' \subset \langle v_2, \dots, v_r \rangle$, aleshores l'enunciat és cert per la hipòtesi d'inducció. Podem doncs suposar que, per a tota base $v = (v_1, v_2, \dots, v_r)$ de L es compleix $L' \not\subset \langle v_2, \dots, v_r \rangle$. Donada v, considerem el morfisme

$$\begin{aligned} p_v : L &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x = n_1 v_1 + \cdots + n_r v_r &\longmapsto n_1 \end{aligned}$$

Com $L' \not\subset \langle v_2, \dots, v_r \rangle$, el subgrup $p_v(L')$ és no nul per a tota base v. Per a cada base v de L, existeix doncs un enter $d_v > 0$ tal que $p_v(L') = \langle d_v \rangle$. Escollim v tal que d_v sigui mínim i posem $d_1 = d_v$. Vegem que, si $x' \in L'$ és de la forma $x' = d_1 v_1 + n_2' v_2 + \cdots + n_r' v_r$, aleshores $d_1 | n_j'$, $2 \leq j \leq r$, de forma que, en particular, existeix $x \in L$ tal que $x' = d_1 x$. En efecte, si $n_j' = c_j d_1 + k_j$, amb $0 \leq k_j \leq d_1$, $2 \leq j \leq r$, aleshores $x' = d_1(v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_r v_r) + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r$ i, com $v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_r v_r, v_2, \dots, v_r$ és base de L, la definició de d_1 implica $k_2 = \cdots = k_r = 0$.

Sigui $e_1' \in L'$ qualsevol element tal que $p_v(e_1') = d_1$ i sigui $e_1 \in L$ tal que $e_1' = d_1 e_1$. Aleshores és clar que $p_v(e_1) = 1$, de forma que $e_1, v_2, \dots, v_r$ és una base de L. Vegem que

$$L' = (L' \cap \langle v_2, \dots, v_r \rangle) \oplus \langle d_1 e_1 \rangle. \tag{B.1}$$

Com la intersecció dels dos sumands és clarament $\{0\}$. n'hi ha prou amb veure

$$L' = (L' \cap \langle v_2, \dots, v_r \rangle) + \langle d_1 e_1 \rangle.$$

Sigui $x' \in L'$. Per definició de d_1, existeix un enter k tal que $p_v(x') = k d_1$. Per tant $k d_1 e_1 \in \langle d_1 e_1 \rangle$ i $x' - k d_1 e_1 \in L' \cap \langle v_2, \dots, v_r \rangle$, ja que $x' - k d_1 e_1 \in L'$ i $p_v(x' - k d_1 e_1) = 0$. Per tant, $x' = (x' - k d_1 e_1) + k d_1 e_1 \in (L' \cap \langle v_2, \dots, v_r \rangle) + \langle d_1 e_1 \rangle$.

Per hipòtesi d'inducció, existeix una base $(e_2, \dots, e_r)$ de $\langle v_2, \dots, v_r \rangle$, un enter $s \leq r$ i enters positius $d_2, \dots, d_s$ tals que $(d_2 e_2, \dots, d_s e_s)$ és base de $L' \cap \langle v_2, \dots, v_r \rangle$ i tals que $d_i | d_{i+1}$, per a $i = 2, \dots, s-1$. Aleshores, $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ és base de E i per **??**, $(d_1 e_1, d_2 e_2, \dots, d_s e_s)$ és base de L'.

Només falta veure que, si $s > 1$, $d_1 | d_2$. Com $x' = d_1 e_1 + d_2 e_2 \in L'$ i $p_v(x') = d_1$, se segueix del que hem demostrat abans. $\square$

Teorema B.5.12 (Estructura dels grups abelians finitament generats)**.** *Sigui E un grup abelià finitament generat de rang r. Existeixen un nombre natural s i enters positius $d_1, \dots, d_s$ amb d_j dividint d_{j+1}, per a $1 \leq j < s$, tals que E és suma directa de subgrups cíclics F_j d'ordre d_j $(1 \leq j \leq s)$ i de r subgrups cíclics finits.*

Demostració. Sigui E un grup abelià finitament generat. Si $\{g_1, \dots, g_k\}$ és un sistema de generadors de E, l'aplicació

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z} \oplus \overset{k}{\cdots} \oplus \mathbb{Z} &\longrightarrow E \\ (n_1, \dots, n_k) &\longmapsto n_1 g_1 + \cdots + n_k g_k \end{aligned}$$

és epimorfisme de grups. Per la proposició anterior, existeix una base $(e_1, \dots, e_k)$ de $\mathbb{Z}^k$, un enter natural $s \leq k$ i enters naturals $d_1, \dots, d_s$, amb $d_j | d_{j+1}$, $1 \leq j < s$, tals que $(d_1 e_1, \dots, d_s e_s)$ és una base de $\ker \varphi$. Com φ indueix un isomorfisme entre E i $\mathbb{Z}^k / \ker \varphi$ i el quocient $\mathbb{Z}^k / \ker \varphi$ és isomorf a $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \overset{r}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}$, pel lema (**??**), obtenim el resultat. $\square$

Corol·lari B.5.13. *Si F és un grup abelià finit, existeixen un nombre natural s i enters positius $d_1, \dots, d_s$ amb d_j dividint d_{j+1}, per a $1 \leq j < s$, tals que F és suma directa de subgrups cíclics F_j d'ordre d_j $(1 \leq j \leq s)$. En particular, l'ordre de F és igual al producte $d_1 \cdots d_s$.*

Definició B.5.14. Els enters $d_1, \dots, d_s$ d'aquest corol·lari s'anomenen *factors invariants* del grup F.

Proposició B.5.15. *Sigui F un grup abelià finit. Sigui $|F| = p_1^{k_1} \cdots p_l^{k_l}$ la descomposició de l'ordre de F en producte de nombres primers. Aleshores existeixen enters positius s_i, $1 \leq i \leq l$ i $k_{i1} \geq k_{i2} \geq \cdots \geq k_{is_i} > 0$ tals que*

$$F = \bigoplus_{1 \leq i \leq l} \left(\bigoplus_{1 \leq j \leq s_i} F_{ij} \right)$$

on F_{ij} és grup cíclic d'ordre $p_i^{k_{ij}}$, $1 \leq j \leq s_i$, $1 \leq i \leq l$, i $k_i = k_{i1} + \cdots + k_{is_i}$, $1 \leq i \leq l$.

A més, els primers $p_1, \dots, p_l$ i les successions k_{ij} queden determinats unívocament pel grup F.

Demostració. En el corol·lari vist anteriorment podem suposar $d_i > 0$, per a cada i, ja que $F_i = \{0\}$ si $d_i = 1$. Sigui ara $d_s = p_1^{k_{s1}} \cdots p_l^{k_{sl}}$ la descomposició de d_s en producte de nombres primers. Com $d_1 | d_2 | \cdots | d_s$, la descomposició dels d_i en producte de primers és $d_i = p_1^{k_{i1}} \cdots p_l^{k_{il}}$, amb $k_{sj} \geq \cdots \geq k_{1j} \geq 0$, per a tot $j = 1, \dots, l$. A partir d'aquesta factorització de d_i, sabem que

$$\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{k_{i1}}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_l^{k_{il}}\mathbb{Z},$$

per ser els factors $p_1^{k_{i1}}, \dots, kp_l^{k_{il}}$ primers entre ells dos a dos. Observem que, si $k_{ij} = 0$, el sumand corresponent és 0. L'ordre de F és igual a $d_1 d_2 \cdots d_s = p_1^{k_1} \cdots p_l^{k_l}$ i, per tant, $k_j = k_{1j} + \cdots + k_{sj}$, $1 \leq j \leq l$.

És clar que els primers $p_1, \dots, p_l$ queden determinats per F. Ara, sigui P un grup cíclic d'ordre p^t amb p primer. Si P_j és el subgrup de P format pels elements amb ordre dividint p^j, tenim $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_t = P$ i P_j / P_{j-1} té ordre p. De fet, P_j és el subgrup d'ordre p^j de P. Sigui ara F un grup d'ordre potència de p tal que $F = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_s$, amb Q_i cíclic d'ordre p^{ki}, $1 \leq i \leq s$, amb $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_s > 0$. Sigui F_j (resp. Q_{ij}) el subgrup de F (resp. Q_i) format pels elements amb ordre dividint p_j. Clarament F_j és suma directa de Q_{ij}. Posem p^{d_j} l'ordre de F_j. Aleshores $d_j - d_{j-1}$ és el nombre h_j de subgrups Q_i amb ordre $\geq p^j$.

En conseqüència, $\nu_j = h_j - h_{j+1}$ és el nombre de subgrups Q_i amb ordre exactament igual a p^j i, per tant, $\nu_j = -d_{j+1} + d_j - d_{j-1}$. Com el terme de la dreta d'aquesta igualtat depèn només de F, queda demostrat que el nombre de subgrups Q_i de la descomposició de F amb ordre igual a un p^j donat depèn només de F. Si $|F| = p_1^{k_1} \cdots p_l^{k_l}$, F és suma directa de grups d'ordres $p_1^{k_1}, \ldots, p_l^{k_l}$. Aplicant el que acabem de veure a cada sumand, queda provada la proposició. $\square$

Definició B.5.16. Els enters $p_i^{k_{ij}}$ de la proposició (**??**) s'anomenen divisors elementals del grup F.

Corol·lari B.5.17.

- *Dos grups abelians finits són isomorfs si i només si tenen els mateixos divisors elementals.*

- *Dos grups abelians finits són isomorfs si i només si tenen els mateixos factors invariants.*

Aplicant la proposició (**??**), podem determinar, tret d'isomorfisme, totes els grups abelians finits d'un ordre donat n. Si $n = p_1^{k_1} \cdots p_l^{k_l}$, com $k_j = k_{1j} + \cdots + k_{sj}$, $1 \leq j \leq l$, el conjunt de les classes d'isomorfisme dels grups abelians d'ordre n està en bijecció amb el conjunt $\Pi_1 \times \cdots \times \Pi_l$, on Π_j és el conjunt de particions de k_j.

Exemple B.5.18. Determinarem tots els grups abelians d'ordre 72, tret d'isomorfisme. Tenim $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Aleshores $l = 2$, $k_1 = 3$, $k_2 = 2$. Tenim $3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$, $2 = 1 + 1$, per tant, $\Pi_1 = \{3, 2+1, 1+1+1\}$, $\Pi_2 = \{2, 1+1\}$, de forma que hi ha 6 classes d'isomorfisme de grups abelians d'ordre 72:

1) $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ amb divisors elementals 8, 9;

2) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ amb divisors elementals 4, 2, 9;

3) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \oplus \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ amb divisors elementals 2, 2, 2, 9;

4) $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ amb divisors elementals 8, 3, 3;

5) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ amb divisors elementals 4, 2, 3, 3;

6) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ amb divisors elementals 2, 2, 2, 3, 3.

Determinem ara els factors invariants. Tenim

1) $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$ té factors invariants $d_1 = 72$.

2) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ té factors invariants $d_1 = 2$, $d_2 = 36$.

3) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \oplus \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ té factors invariants $d_1 = 2$, $d_2 = 2$, $d_3 = 18$.

4) $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ té factors invariants $d_1 = 3$, $d_2 = 24$.

5) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ té factors invariants $d_1 = 6$, $d_2 = 12$.

6) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ té factors invariants $d_1 = 2$, $d_2 = 6$, $d_3 = 6$.

B.5.4 Càlcul efectiu dels factors invariants

Donarem ara un algoritme per classificar un grup abelià finitament generat donat per generadors i relacions. Sigui E un grup abelià amb generadors $g_1, \dots, g_n$ i relacions

$$\begin{cases} a_{11}g_1 + \cdots + a_{1n}g_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}g_1 + \cdots + a_{mn}g_n = 0 \end{cases}$$

amb $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Si $(e_1, \dots, e_n)$ és una base de $\mathbb{Z}^n$, tenim un epimorfisme

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^n &\longrightarrow E \\ e_i &\longmapsto g_i \ (1 \leq i \leq n) \end{aligned}$$

amb nucli $L' = \langle a_{11}e_1 + \cdots + a_{1n}e_n, \dots, a_{m1}e_1 + \cdots + a_{mn}e_n \rangle$. Per tant, E és isomorf al quocient $\mathbb{Z}^n/L'$. Posem $r_1 = a_{11}e_1 + \cdots + a_{1n}e_n, \dots, r_m = a_{1m}e_1 + \cdots + a_{nm}e_n$. Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ és la matriu de coeficients de les relacions de E, tenim

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

Per la proposició (**??**), existeixen una base $(e'_1, \dots, e'_n)$ de $\mathbb{Z}^n$, un enter natural $s \leq n$ i enters positius $d_1, \dots, d_s$ tals que $(d_1e'_1, \dots, d_se'_s)$ és base de L' i $d_i | d_{i+1}$, per a $1 \leq i < s$. Tenim una matriu $V \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ tal que

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix}.$$

Si trobem matrius $V \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, $W \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$ tals que

$$WAV = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & \cdots \\ & \ddots & & & & & \cdots \\ & & d_s & & & & \cdots \\ & & & 0 & & & \cdots \\ & & & & \ddots & & \cdots \\ & & & & & 0 & \cdots \end{pmatrix},$$

la base $(d_1e'_1, \dots, d_se'_s)$ de L' s'expressa com $WAV(e'_1, \dots, e'_n)^T$.

Construirem les matrius V i W per passos. Denotem per E_{ij} la matriu quadrada d'ordre n que té un 1 en el lloc (i, j) i 0's en la resta de llocs i posem P_{ij} la matriu quadrada d'ordre n que té un 1 en els llocs (k, k), amb $k \neq i$ i $k \neq j$, un 1 en els llocs (i, j) i (j, i) i 0's en la resta de llocs. Observem que $A(Id + qE_{ij})$ és la matriu obtinguda a partir de A sumant a la columna j de A el resultat de multiplicar per q la columna i, $(Id + qE_{ij})A$ (on ara $Id + qE_{ij}$ és matriu d'ordre m) és la matriu obtinguda a partir de A sumant a la fila j de A el resultat de multiplicar per q la fila i, AP_{ij} (on ara P_{ij} és matriu d'ordre m) és la matriu obtinguda a partir de A permutant les files i i j.

Algoritme

L'algoritme consisteix en reduir la matriu A fent transformacions successives que són permutacions de files (resp. columnes) o sumar a una fila (resp. columna) un múltiple enter d'una altra fila (resp. columna). Cada una d'aquestes transformacions equival a multiplicara A a l'esquerra (resp. a la dreta) per una matriu $Id + qE_{ij}$ o P_{ij}. Si ens interessa obtenir les matrius W i V anirem guardant les matrius $Id + qE_{ij}$ o P_{ij} corresponents a cada transformació.

1. Busquem a la matriu A un element a_{ij} no nul que sigui menor en valor absolut que qualsevol altre element de A i el portem al lloc $(1, 1)$.

2. Per a cada enter $k = 2, \dots, n$, siguin q_{1k} i r_{1k} el quocient i el residu de la divisió entera de a_{1k} entre a_{11}. Restem a la columna k la primera columna multiplicada per q_{1k}. La primera fila de la matriu és ara $a_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n}$. Si algun dels residus és no nul tornem al pas 1.

   En un nombre finit de passos, obtenim una matriu amb la primera fila $a_{11}, 0, \dots, 0$. Fem el procés anàleg amb la primera columna, fins a obtenir una matriu de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \tag{B.2}$$

3. Si A' és nul·la ja estem. Si no, si existeix un element a_{ij} de A' no divisible per a_{11}, sumem la fila i-èssima de A a la primera i tornem al punt 1. En un nombre finit de passos, arribem a una matriu de la forma **??** tal que a_{11} divideix tots els elements de A'. Aleshores, posem $d_1 = a_{11}$ i fem de nou el mateix procés amb la matriu A' en comptes de A.

Exemple B.5.19 (Exercici)**.** Determineu els factors invariants i els divisors elementals dels grups abelians definits pels generadors i les relacions següents.

(a) Generadors a, b, c, d; relacions $\begin{cases} 2a + 3b = 0 \\ 4a = 0 \\ 4c + 11d = 0 \end{cases}$

(b) Generadors a, b, c, d, e; relacions $\begin{cases} a - 7b + 14c - 21d = 0 \\ 5a - 7b - 2c + 10d - 15e = 0 \\ 3a - 3b - 2c + 6d - 9e = 0 \\ a - b + 2d - 3e = 0 \end{cases}$

Demostració. Solució.

(a) Posem

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Apliquem l'algoritme

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 11 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 11 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 11 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 11 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenim $d_1 = d_2 = 1$, $d_3 = 12$, $E = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ i els divisors elementals són $2^2, 3$. Tenim

$$\begin{aligned} &W = (Id - E_{12})P_{12}(Id - 2E_{12})P_{23}(Id - 2E_{24})P_{24}(Id - 5E_{24}), \\ &V = P_{23}(Id + 4E_{21}). \end{aligned}$$

Operant,

$$W = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Es deixa com a exercici.

$\square$