Introducció a l'àlgebra commutativa

Curs 2021-2022

Semestre de Primavera

Santiago Zarzuela

Algunas ideas básicas sobre módulos proyectivos e inyectivos

Sea A un anillo conmutativo. Las teorías de A-módulos proyectivos y de A-módulos inyectivos son, en primera instancia, duales una de la otra, al menos a nivel formal. Pero en su realización concreta, es decir cuáles son los módulos poryectivos y cuáles los módulos inyectivos, bastante diferentes.

Empecemos por los módulos proyectivos. Recordemos que un A-módulo P se dice que es proyectivo si para toda sucesión exacta corta de A-módulos

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, N) \xrightarrow{\overline{f}} \mathrm{Hom}_A(P, M) \xrightarrow{\overline{g}} \mathrm{Hom}_A(P, L) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Puesto que en clase hemos probado que esta sucesión es siempre exacta por la izquierda, únicamente es necesario comprobar que $\overline{g}$ es exhaustiva. Esto es exactamente lo siguiente: para todo morfismo $h : P \to L$ existe un morfismo $h' : P \to M$ tal que $h = g \circ h'$. Es decir, se verifica el diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] & L \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[u, "h"'] \arrow[ul, "\exists\, h'"] & \end{tikzcd}$$

De entrada, no podemos esperar que todo A-módulo sea proyectivo. En clase hemos visto directamente que $\mathbb{Z}/(2)$ no es proyectivo (veremos la razón más adelante). Pero, ¿existen?. El siguiente resultado nos dice que así es.

Proposición *Todo A-módulo libre es proyectivo.*

En efecto, sea P un A-módulo libre con base $\{e_i\}_{i\in I}$. Sea una familia de elementos $\{m_i\}_{i\in I} \subset M$ tal que $f(m_i) = h(e_i)$, para todo $i \in I$ (existe por ser g exhaustiva). Por la propiedad universal de los módulos libre podemos definir un morfismo $h' : P \to M$ tal que $h'(e_i) = n_i$. Entonces, es claro que $h = g \circ h'$.

Por lo tanto, si A es un cuerpo, todo A-módulo (todo espacio vectorial) es proyectivo. ¿Hay otros anillos no cuerpos para los que todo módulos es proyectivo? Sí, estos son los denominados anillos semisimples. Por ejemplo, si K es un cuerpo, K^n es un anillo semisimple. No vamos a considerar ahora esta teoría, pero nos sirve para ilustrar el hecho de que no podemos esperar que todo A-módulo proyectivo es libre. Por ejemplo, en $A = \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$, tenemos que $\mathbb{Z}/(2) \times 0$ es proyectivo pero no es libre (tiene 2 elementos, mientras que todo libre finito generado de rango n ha de tener 4^n elementos).

Otro ejemplo importante de anillo semisimple es el de los anillos de grupo. Dado un cuerpo K y un grupo abeliano G hemos definido en clase el anillo de grupo $K[G]$. El denominado teorema de Maschke afrima que si G es finito y la característica del K no divide al orden de G, entonces el anillo $K[G]$ es semisimple. (Este teorema también es válido en el caso de ser G no abeliano y entonces $K[G]$ no conmutativo).

Por otro lado, hay anillos muy importantes en los que sí se verifica que todo A-módulo proyectivo es libre. Por ejemplo, si A es un anillo local, o un dominio de ideales principales. También, si $A = K[X_1, \ldots, X_n]$, el anillo de polinomios en n variables a coeficientes en un cuerpo. Las demostraciones de estos resultados son avanzadas y profundas, especialmente este tercer ejemplo.

Una consecuencia importante del hecho de que todo A-módulo libre es proyectivo, es que todo A-módulo es cociente de un proyectivo, ya que lo es de un libre.

Ahora, dado un A-módulo L, podemos considerar un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} M = F \arrow[r, "g"] & L \arrow[r] & 0 \\ & L \arrow[u, "Id_L"'] & \end{tikzcd} ,$$

donde F es un A-módulo libre. Si L es proyectivo, podremos completar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "g"] & L \arrow[r] & 0 \\ & L \arrow[u, "Id_L"'] \arrow[ul, "\exists s = h'"] & \end{tikzcd}$$

de forma que $Id_l = s \circ g$. El morfismo s es lo que en problemas hemos denominado una sección de g. Lo cual es equivalente a que la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} g \xrightarrow{\iota} F \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

escinda. En particular, L será isomorfo a un sumando directo de F.

Por ejemplo, si A es un dominio de integridad, todo A-módulo libre es libre de torsión, luego también todo submódulo. Por lo tanto, si L es un A-módulo proyectivo, será libre de torsión. De ahí que, por ejemplo, para todo ideal $I \neq 0$, el A-módulo A/I no pueda ser proyectivo. Pensad ahora porqué el ejemplo antes citado de $\mathbb{Z}/(2)$ no es proyectivo como grupo abeliano.

En realidad, si P es un A-módulo proyectivo, el argumento anterior lo podemos hacer igualmente para todo epimorfismo

$$M \xrightarrow{g} P \to 0,$$

para concluir que todo epimorfismo sobre P admite una sección, y que toda sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

escinde y P será isomorfo a un sumando directo de M.

No es difícil revertir todo estos argumentos y es posible entonces enunciar lo siguiente:

Proposición *Dado A-módulo P, son equivalente:*

(1) *P es A-módulo proyectivo.*

(2) Para todo epimorfismo $M \xrightarrow{g} P \to 0$ existe una sección.

(3) *P es isomorfo a un sumando directo de un A-módulo proyectivo.*

Puesto que todo A-módulo es cociente de un libre, tenemos que (2) implica (3). Únicamente nos quedaría por demostrar que (3) implica (1). Podemos suponer que P es sumando directo de un A-módulo proyectivo P'. Hemos de probar que podemos completar todo diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] & L \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[u, "h"'] & \end{tikzcd}.$$

Como P es sumando directo de P', podemos extender h a un morfismo $w : P' \to L$ de forma que $w_{|P} = h$ (podemos enviar el complemento de P en P' a 0, por ejemplo). Así, tendremos un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] & L \arrow[r] & 0 \\ & P' \arrow[u, "w"'] & \end{tikzcd}.$$

Pero P' es proyectivo, de manera que podemos completar el diagrama y tenemos

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] & L \arrow[r] & 0 \\ & P' \arrow[u, "w"'] \arrow[ul, "\exists\, w'"] & \end{tikzcd}.$$

Tomado $h' = w_{|P}$ tendremos el diagrama que buscamos:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] & L \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[u, "h"'] \arrow[ul, "\exists\, h'"] & \end{tikzcd}$$

(Se puede probar que (2) implica (1) directamente sin pasar por (3).)

Puesto que en (3) podemos suponer que P es sumando directo de un libre, de alguna forma, podemos concluir que la teoría de módulos proyectivos es la teoría de los sumandos directos de los módulos libres, que son bien fáciles y conocidos. Pero no es tan fácil la teoría de sus sumandos directos...

Ahora, vamos a desarrollar el mismo esquema para módulos inyectivos.

Recordemos que un A-módulo E se dice que es inyectivo si para toda sucesión exacta corta de A-módulos

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(L,E) \xrightarrow{\widetilde{g}} \mathrm{Hom}_A(M,E) \xrightarrow{\widetilde{f}} \mathrm{Hom}_A(N,E) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Puesto que en clase hemos probado que esta sucesión es siempre exacta por la izquierda, únicamente es necesario comprobar que $\widetilde{f}$ es exhaustiva. Esto es exactamente lo siguiente: para todo morfismo $h : N \to E$ existe un morfismo $h' : M \to E$ tal que $h = h' \circ f$. Es decir, se verifica el diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & M \arrow[dl, "\exists\, h'"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

De nuevo, no podemos esperar que todo A-módulo sea proyectivo. En problemas habremos visto algun ejemplo, como puede ser (otra vez) $\mathbb{Z}/(2)$ como $\mathbb{Z}$-módulo. Así que, de nuevo, la pregunta es ¿existen?. La respuesta es que sí, pero de forma bastante más complicada, a diferencia de los proyectivos.

De entrada pensemos el caso en que $A = K$ es un cuerpo. Nos preguntamos si los espacios vectoriales son inyectivos. Naturalmente que sí: si tenemos $N \subset M$ dos espacios vectoriales, siempre tenemos que N es un sumando directo de M, de manera que en un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & M \\ & E & \end{tikzcd}$$

siempre podremos definir un morfismo $h' : M \to E$ tal que $h'_{|N} = h$ (enviando el complemento de N en M a cero, por ejemplo) y completar el diagrama.

Igualmente, podemos preguntarnos si hay anillos para los que todo A-módulo es inyectivo, y que no sean cuerpos. Sí, los hay, y son los mismos en lo que todo A-módulo es proyectivo. Justificaremos eso más tarde.

Ya hemos visto que en $\mathbb{Z}$ no todo módulo es inyectivo. ¿Pero hay algún grupo abeliano inyectivo? De entrada, así como al anillo A siempre es proyectivo como A-módulo, no ocurre lo mismo como inyectivo. Por ejemplo, sea el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I = (n) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "h"'] & \mathbb{Z} \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

donde h es el isomorfismo dado por $h(n) = 1$, $n \neq 1, -1$. Es claro que será imposible encontrar $h' : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que complete el diagrama, ya que debería ocurrir que $1 = h(n) = h'(n) = nh'(1)$ y, por lo tanto, $h'(1) = 1/n \notin \mathbb{Z}$.

Pero existen grupos abelianos inyectivos, por ejemplo $\mathbb{Q}$. Para ver un poco la razón, vamos a plantear el mismo caso que antes (restrictivo, pero al final no tanto) de diagrama a completar.

Supongamos que tenemos un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I = (n) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "h"'] & \mathbb{Z} \\ & \mathbb{Q} & \end{tikzcd}$$

y queremos completarlo. El morfiamo h viene completamente determinado por el valor $h(n) \in \mathbb{Q}$. Entonces, $h(n) = na$ para un cierto $a \in \mathbb{Q}$. Podemos definir entonces $h' : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ dada por $h'(1) = a$. Es claro entonces que $h'(n) = nh'(1) = na = h(n)$, por lo que $h' \circ \iota = h$.

Ocurre ahora que un importante criterio probado por Baer nos asegura que, si es posible completar un diagrama de la forma anterior (es decir, para la inclusión de los ideales en el anillo), entonces es posible completar cualquier diagrama. La conclusión es que $\mathbb{Q}$ es un grupo abeliano inyectivo.

Este criterio de Baer es el que generalmente se puede aplicar para comprobar que un A-módulo es inyectivo, pues simplifica mucho las cosas. Con más trabajo, se puede probar que si A es un dominio de integridad, su cuerpo de fracciones es siempre un A-módulo inyectivo.

Observamos que la dificultad que hemos tenido para completar el diagrama tomando $E = \mathbb{Z}$ ha desaparecido al tomar $E = \mathbb{Q}$ debido a que los elementos de $\mathbb{Q}$ se pueden dividir. Formalmente, lo que estamos diciendo es que $\mathbb{Q}$ es un grupo divisible. No vamos a detallar esta teoría de grupos divisibles, solo comentar que los grupos abelianos divisibles son exactamente los inyectivos. Y que la teoría de módulos inyectivos general se inspira en su forma más básica en la teoría de grupos abelianos divisibles. De la misma forma, se puede definir sobre un dominio de ideales principales A el mismo concepto de módulo divisible. Entonces, los A-módulos inyectivos son exactamente los divisibles (por ejemplo, su cuerpo de fracciones).

Volvamos al caso general. Supongamos que tenemos E un A-módulo inyectivo y un monomorfismo de la forma

$$0 \to E \xrightarrow{f} M \,.$$

Podemos considerar el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id_E"'] & M \\ & E & \end{tikzcd} ,$$

de forma que por ser E inyectivo podemos completarlo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id_E"'] & M \arrow[dl, "\exists\, h'=r"] \\
& E &
\end{tikzcd},$$

Tenemos pues $Id_E = r \circ f$ y por lo tanto r es una retracción. En consecuencia, la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} M \xrightarrow{\pi} \operatorname{Coker} f \longrightarrow 0$$

escinde y E es isomorfo a un sumando directo de M. En definitiva, todo módulo inyectivo es sumando directo de cualquier módulo que lo contiene.

Ahora recordamos que en una sucesión exacta corta son equivalentes le existencia de una sección y la existencia de una retracción, equivalentemente que la sucesión exacta escinda. Es clara entonces la siguiente equivalencia:

(1) Todo A-módulo es proyectivo.

(2) Todo A-módulo es inyectivo.

En efecto, (1) es equivalente a que toda sucesión exacta tiene sección, lo cual es equivalente a que toda sucesión exacta escinde, lo cual es equivalente a que toda sucesión exacta tiene retracción, lo cual es equivalente a (2).

Así pues, los anillos semisimples que hemos considerado antes, los que todo A-módulo es proyectivo, son también los que verifican que todo A-módulo es inyectivo. Ya tenemos así más ejemplos de anillos donde hay inyectivos...

Ahora, nos gustaría probar un resultado parecido al de los proyectivos:

Proposición *Dado A-módulo P, son equivalente:*

(1) *E es A-módulo inyectivo.*

(2) Para todo monomorfismo $0 \to E \xrightarrow{f} M \to 0$ existe una retracción.

Como en el caso de los proyectivos, existen demostraciones directas de que (2) implica (1). Pero nos gustaría una que fuera como en el caso de los proyectivos, con algun módulo inyectivo que hiciera un papel similar al de los proyectivos en la demostración, lo cual venía garantizado por ser todo A-módulo cociente de un libre. Así, que debería ocurrir el hecho dual que podemos formular como que todo A-módulo ha de poderse incluir en un inyectivo. Y esto siempre ocurre. Lo establecemos como un teorema, por la importancia que tiene:

Teorema *Sea A un anillo y M un A-módulo. Entonces, existe un A-módulo inyectivo E y un monomorfismo $0 \to M \xrightarrow{f} E$.*

La demostración de este teorema tiene cierta dificultad y parte del hecho, que ya hemos comentado, de que $\mathbb{Q}$ es un grupo abeliano inyectivo.

Ahora ya tiene sentido formular para inyectivos el resultado que deseamos:

Proposición *Dado A-módulo E, son equivalentes:*

(1) *E es A-módulo inyectivo.*

(2) Para todo monomorfismo $0 \to E \xrightarrow{f} M$ existe una retracción.

(3) *E es isomorfo a un sumando directo de un A-módulo inyectivo.*

Puesto que todo A-módulo puede incluirse en un inyectivo, tenemos que (2) implica (3). De forma que solo nos queda por probar que (3) implica (1). Para ello procedemos de la misma forma que para los proyectivos: sea un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & M \\ & E & \end{tikzcd}.$$

Sea E' un A-módulo inyectivo del cual E es sumando directo: $E' = E \oplus E''$. Podemos definir un morfismo $v : N \to E'$ como $v = h \oplus 0$, de forma que por ser E' inyectivo existe $v' : M \to E'$ tal que $v = v' \circ f$. Entonces, para todo $n \in N$ tenemos $h(n) = \pi_E(v(n)) = \pi_E(v'(f(n))) \in E$, de forma que si definimos $h' = \pi_E \circ v'$ tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & M \arrow[dl, "h'"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

como deseábamos.

Hemos visto, pues, que a nivel formal las teorías de módulos proyectivos e inyectivos son duales la una de la otra, pero que a nivel concreto no. En primera instancia, la de módulos proyectivos es más sencilla que la de los módulos inyectivos, especialmente gracias a que los libres son siempre son proyectivos. Además, en general, los módulos inyectivos son siempre no finito generados. Basta pensar que, si un anillo es local, el lema de Nakayama nos asegura que casi siempre los módulos finito generados no son inyectivos (basta que haya un no divisor de cero en el anillo para el argumento). Así, que la naturaleza no finito generada de los inyectivos los hace más difíciles de estudiar. Pero en una segunda instancia, la teoría de módulos inyectivos es muy rica y, bajo condiciones adecuadas, se pueden describir bastante bien.

Por ejemplo: dado un A-módulo finito generado M, siempre podemos presentar M como cociente de un libre finito generado. Tomando un sistema minimal de generadores, podemos conseguir que el libre tenga rango el cardinal de ese sistema minimal. Además, si A es local, sabemos que todos los sistemas minimales de generadores tienen el mismo cardinal, de forma que el rango de ese libre estará bien determinado y llamaremos minimal a esa presentación. Esta presentación será única, salvo isomorfismos. Es claro que si M no es finito generado, tal cosa no será posible, al menos por este método.

La pregunta natural es si podemos hacer algo parecido para los módulos inyectivos. Podemos formularlo así: ¿existe una forma minimal de incluir M en un A-módulo inyectivo? Pues sí, esto es posible, no solo para módulos finito generados, si no para todo A-módulo M. Este módulo inyectivo se denomina envolvente inyectiva de M y denota por $E_A(M)$, y es el más pequeño A-módulo inyectivo que contiene a M, salvo isomorfismo que dejan fijo a M. La envolvente inyectiva está muy ligada al propio módulo M, y aunque puede ser muy grande, su complejidad viene muy determinada por el propio M. En cierta forma. las envolventes inyectivas de los A-módulos simples (es decir, de la forma $A/\mathfrak{m}$, con $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de A) son también los A-módulos inyectivos más simples. A partir de esta idea, es posible describir de forma completa, en ciertos casos, todos los A-módulos inyectivos. Esto ocurre, por ejemplo, con los anillos noetherianos mediante el que se denomina teorema de Matlis de estructura de los módulos inyectivos para anillos noetherianos, donde las piezas simples que describen a todos los demás son de la forma $E_A(A/\mathfrak{p})$, con $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A.

Una última observación: todo lo anterior lo hemos planteado para anillos conmutativos, pero gran parte de lo que hemos considerado tiene su versión idéntica para módulos (por la izquierda o por la derecha) sobre un anillo no conmutativo.