

Cinemática PA10

Viktor Yosava

vikyosava@uma.es

Robótica Médica. Ingeniería de la Salud

A. Modelo cinemático directo

1. Construir la cadena cinemática del robot, especificando las distancias significativas, los ejes de rotación y los grados de libertad.

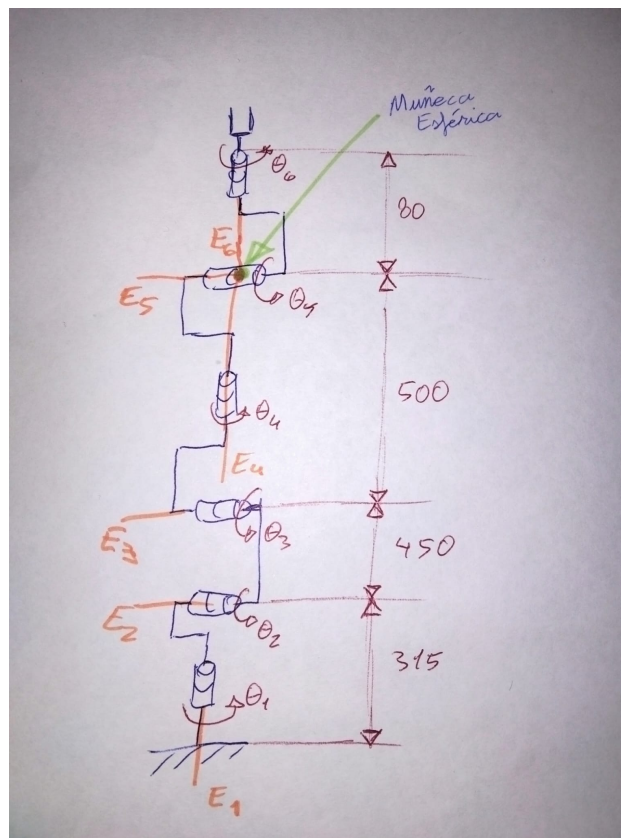


Fig. 1. Cadena cinemática

2. Asignación detallada de los sistemas de referencia correspondientes a cada elemento del manipulador.

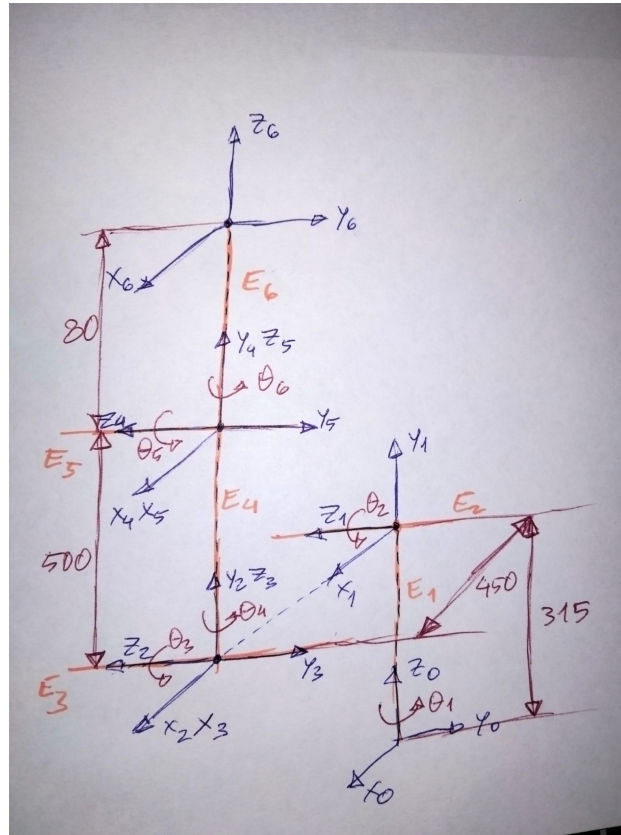


Fig. 2. Ejes

Donde $\{E1, E2, E3, E4, E5, E6\}$ son los ejes, $\{\theta1, \theta2, \theta3, \theta4, \theta5, \theta6\}$ son los ángulos y las distancias vienen indicadas numéricamente.

3. Construir la tabla de los parámetros cinemáticos de DH1. Se supone el sistema 0 en la base del manipulador.

i	a_i	α_i	d_i	θ_i	$i-1T_i$
1	0	$\pi/2$	315	θ_1	$0T_1$
2	450	0	0	θ_2	$1T_2$
3	0	$-\pi/2$	0	θ_3	$2T_3$
4	0	$\pi/2$	500	θ_4	$3T_4$
5	0	$-\pi/2$	0	θ_5	$4T_5$
6	0	0	80	θ_6	$5T_6$

Fig. 3. Tabla de parámetros cinemáticos

4. ¿Dispone este manipulador de muñeca esférica? Justifique la respuesta y en caso afirmativo, señale su ubicación.

El manipulador dispone de muñeca esférica, señalada por la flecha verde en la imagen anterior, donde cruzan los ejes E4, E5 y E6.

5. Realizar la función $T=MCDPA10(Q)$

```
function T=MCDPA10(Q)

a=[0 450 0 0 0 0];
alp=[pi/2 0 -pi/2 pi/2 -pi/2 0];
d=[315 0 0 500 0 80];

T01=desp([0 0 d(1)])*rotZ(Q(1))*desp([a(1) 0 0])*rotX(alp(1));
T12=desp([0 0 d(2)])*rotZ(Q(2))*desp([a(2) 0 0])*rotX(alp(2));
T23=desp([0 0 d(3)])*rotZ(Q(3))*desp([a(3) 0 0])*rotX(alp(3));
T34=desp([0 0 d(4)])*rotZ(Q(4))*desp([a(4) 0 0])*rotX(alp(4));
T45=desp([0 0 d(5)])*rotZ(Q(5))*desp([a(5) 0 0])*rotX(alp(5));
T56=desp([0 0 d(6)])*rotZ(Q(6))*desp([a(6) 0 0])*rotX(alp(6));

T=T01*T12*T23*T34*T45*T56;
```

Fig. 4. $T=MCDPA10(Q)$

B. Modelo cinemático inverso

1. Calcular la posición de la muñeca del manipulador 0PW cuando el efector final del se encuentra en la posición incluida en la matriz de transformación T.

```
% Inicialización y desacoplo.  
% -----  
  
d1=315; d4=500; d6=80; a2=450;  
Q=zeros(4,6);  
Pm=T(1:3,4)-d6*T(1:3,3);    % Desacoplo cinemático.
```

Fig. 5. Desacoplo cinemático

2. Resolver las variables articulares θ_1 , θ_2 θ_3 cuando la muñeca se encuentra en 0PW1 0 1. Esta resolución se realizará por métodos geométricos.

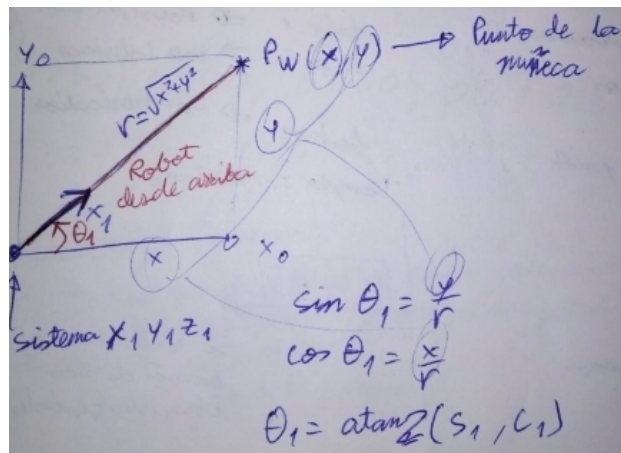


Fig. 6. Cálculo geométrico de θ_1

```
r=sqrt(Pm(1)^2+Pm(2)^2);  
Q(1,1)=atan2(Pm(2)/r,Pm(1)/r);
```

Fig. 7. θ_1

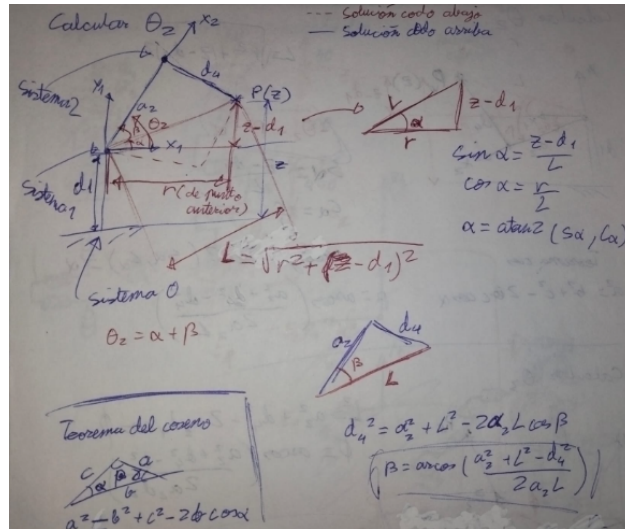


Fig. 8. Cálculo geométrico de θ_2

```

L=sqrt(r^2+(Pm(3)-d1)^2);
ang1=atan2((Pm(3)-d1)/L,r/L);
ang2=arccos((a2^2+L^2-d4^2)/(2*a2*L));
Q(1,2)=ang1+ang2;

```

Fig. 9. θ_2

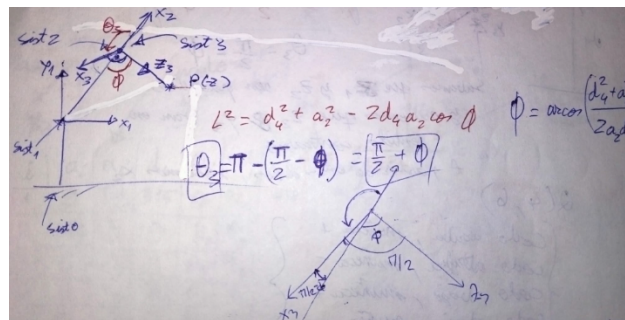


Fig. 10. Cálculo geométrico de θ_3

```

fi=arccos((d4^2+a2^2-L^2)/(2*a2*d4));
Q(1,3)=pi/2+fi;

```

Fig. 11. θ_3

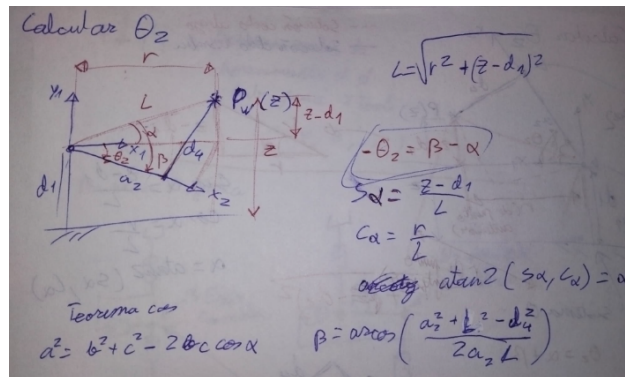


Fig. 12. Cálculo geométrico de θ_2 con el codo hacia abajo

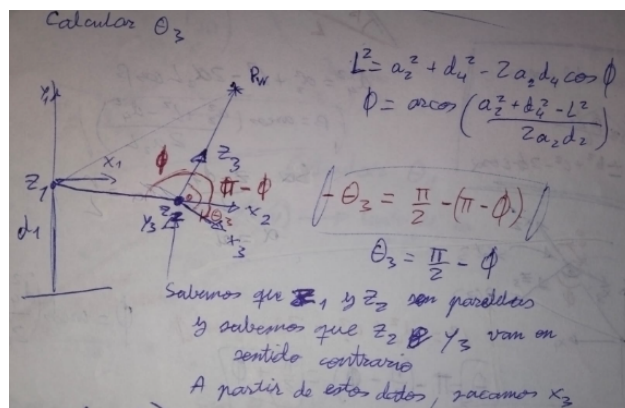


Fig. 13. Cálculo geométrico de θ_3 con el codo hacia abajo

```

% Q codo arriba muñeca -
Q(2,1)=Q(1,1);
Q(2,2)=Q(1,2);
Q(2,3)=Q(1,3);

% Q codo abajo muñeca +
Q(3,1)=atan2(Pm(2)/r,Pm(1)/r);
Q(3,2)=ang1-ang2;
Q(3,3)=pi/2-fi;

% Q codo abajo muñeca -
Q(4,1)=Q(3,1);
Q(4,2)=Q(3,2);
Q(4,3)=Q(3,3);

```

Fig. 14. Ángulos para las otras 3 posiciones que necesitaremos

4. Obtener las matrices $3R6$ necesarias para alcanzar la orientación requerida $0R6$ a través de la expresión $3R6 = (0R3(\theta_1, \theta_2, \theta_3))T * 0R6$ según todas las soluciones obtenidas en el apartado anterior.

```

T01=desp([0 0 d1])*rotZ(Q(i,1))*desp([0 0 0])*rotX(pi/2);
T12=desp([0 0 0])*rotZ(Q(i,2))*desp([a2 0 0])*rotX(0);
T23=desp([0 0 0])*rotZ(Q(i,3))*desp([0 0 0])*rotX(-pi/2);
T03=T01*T12*T23;
T36=inv(T03)*T;

```

Fig. 15. Obtención de las matrices

Con la ayuda de un script simbólico para MCDPA10, podemos averiguar que las matrices tienen la siguiente forma.

```

R36 =
[cos(q4)*cos(q5)*cos(q6) - sin(q4)*sin(q6), -cos(q6)*sin(q4) - cos(q4)*cos(q5)*sin(q6), -cos(q4)*sin(q5)]
[cos(q4)*sin(q6) + cos(q5)*cos(q6)*sin(q4), cos(q4)*cos(q6) - cos(q5)*sin(q4)*sin(q6), -sin(q4)*sin(q5)]
[cos(q6)*sin(q5), -sin(q5)*sin(q6), cos(q5)]

```

Fig. 16. Forma de las matrices

5. Resolver las variables articulares $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ que producen la orientación 3R6 3 obtenida en el punto anterior para cada una de las soluciones.

$$R_{36} = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_6 s_4 - c_4 s_5 c_6 & -c_4 s_5 \\ c_4 s_6 + c_5 c_6 s_4 & c_4 c_6 - c_5 s_4 s_6 & -s_4 s_5 \\ c_6 s_5 & -s_5 s_6 & c_5 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{R(3,1)^2 + R(3,2)^2} = s_5 \quad \text{atan2}(R(3,3), s_5) = \theta_5$$

$$\frac{R(1,3)}{s_5} = c_6 \quad \text{atan2}(c_6, s_6) = \theta_6$$

$$-\frac{R(3,3)}{s_5} = s_6$$

$$-\frac{R(3,1)}{s_5} = c_4 \quad \text{atan2}(c_4, s_4) = \theta_4$$

$$-\frac{R(3,2)}{s_5} = s_4$$

Si $s_5 = 0$

$$R_{36} = \begin{bmatrix} c_4 c_6 - s_4 s_6 & -c_6 s_4 - c_4 s_6 & 0 \\ c_4 s_6 + c_5 c_6 s_4 & c_4 c_6 - c_5 s_4 s_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(1,1) = \cos(\theta_4 + \theta_6)$$

$$R(2,1) = \sin(\theta_6 + \theta_4)$$

$$\theta_6 = 0$$

$$\theta_4 = \text{atan2}(T_{21}, T_{11})$$

Fig. 17. Resolvemos θ_4, θ_5 y θ_6

```

if(i==1) || (i==3)
    s5=sqrt(T36(3,1)^2+T36(3,2)^2);
    % Al aparecer una raiz cuadrada, puede ser - o +
else
    s5=-sqrt(T36(3,1)^2+T36(3,2)^2);
end
Q(i,5)=atan2(s5,T36(3,3));
if(round(s5,5)~=0)
    Q(i,4)=atan2(T36(2,3)/-s5,T36(1,3)/-s5);
    Q(i,6)=atan2(-T36(3,2)/s5,T36(3,1)/s5);
else
    % Estamos tratando con una solución degenerada, al no poder dividir
    % entre s5 en caso de ser 0, en esos casos Q4 y Q6 tienen infinitas
    % soluciones, igualamos uno de los dos ángulos a 0 y calculamos el
    % otro.
    Q(i,6)=0;
    Q(i,4)=atan2(T36(1,1),T36(1,2));
end

```

Fig. 18. θ_4, θ_5 y θ_6

Realizar la función $Q=MCIPA10_v2(T)$ en la que se seguirán todos los pasos anteriores, pero esta vez, el paso 2 se realizará a través de métodos algebraicos y se obtendrán todas las soluciones.

2'. Resolver las variables articulares $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ cuando la muñeca se encuentra en $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$. Esta resolución se realizará por métodos algebraicos.

```

s3=((Pm(1)^2+Pm(2)^2+(Pm(3)-d1)^2-a2^2-d4^2)/(-2*d4*a2));
c3=sqrt(1-s3^2);

Q(1,3)=atan2(s3,c3);
Q(2,3)=Q(1,3);
Q(3,3)=atan2(s3,c3);
Q(4,3)=Q(3,3);

A=d4*c3;
B=(-d4*s3)+a2;
C=Pm(3)-d1;

Q(1,2)=2*atan((B+sqrt(B^2+A^2-C^2))/(A+C));
Q(2,2)=2*atan((B-sqrt(B^2+A^2-C^2))/(A+C));
Q(3,2)=Q(1,2);
Q(4,2)=Q(2,2);

D=d4*sin(Q(1,2)+Q(1,3))-a2*cos(Q(1,2));
Q(1,1)=atan2(-Pm(2)/D,-Pm(1)/D);
D=d4*sin(Q(2,2)+Q(2,3))-a2*cos(Q(2,2));
Q(2,1)=atan2(-Pm(2)/D,-Pm(1)/D);
D=d4*sin(Q(3,2)+Q(3,3))-a2*cos(Q(3,2));
Q(3,1)=atan2(-Pm(2)/D,-Pm(1)/D);
D=d4*sin(Q(4,2)+Q(4,3))-a2*cos(Q(4,2));
Q(4,1)=atan2(-Pm(2)/D,-Pm(1)/D);

```

Fig. 19. Cálculo algebraico de θ_1, θ_2 y θ_3

El programa se completa tal y como en la versión geométrica del resto del apartado B.

C. Validación

Para validar todas las posibles posiciones al mismo tiempo se ha modificado un poco el script de pruebas en MATLAB que se proporciona de la siguiente forma:

```
Q=[pi/4, pi/6, pi/3, 5*pi/12, pi/12, pi/4]
T=MCDPA10(Q);
Q2=MCIPA10(T)
for i=1:1:4
    MCDPA10(Q2(i,1:6))-T
end
```

Fig. 20. prueba.m

Tras ejecutar la prueba con el MCDPA10.m geométrico muestra los siguientes resultados:

```
Q =
    0.7854    0.5236    1.0472    1.3090    0.2618    0.7854

Q2 =
   -2.3562    2.6180    2.0944   -1.8326    0.2618    0.7854
   -2.3562    2.6180    2.0944    1.3090   -0.2618   -2.3562
   -2.3562   -0.3879    1.0472   -2.8085    2.2713    2.3051
   -2.3562   -0.3879    1.0472    0.3331   -2.2713   -0.8365
```

Fig. 21. Ángulos resultantes Geométrico

```
ans =
1.0e-13 *
   -0.0022         0    0.0022    0.8527
         0    0.0019   -0.0011   -0.2842
    0.0022   -0.0011   -0.0010         0
         0         0         0         0

ans =
1.0e-13 *
         0   -0.0022         0    0.8527
   -0.0006   -0.0014   -0.0011    0.2842
    0.0011         0    0.0014         0
         0         0         0         0

ans =
1.0e-13 *
   -0.0011         0    0.0022    0.8527
   -0.0006    0.0011   -0.0011   -0.2842
    0.0011   -0.0011   -0.0007         0
         0         0         0         0

ans =
1.0e-13 *
    0.0011   -0.0011   -0.0011    0.8527
   -0.0006   -0.0033         0    0.5684
         0    0.0011    0.0014         0
         0         0         0         0
```

Fig. 22. Errores resultantes Geométrico

Tras ejecutar la prueba con el MCDPA10_v2.m algebraico muestra los siguientes resultados:

```

Q =
    0.7854    0.5236    1.0472    1.3090    0.2618    0.7854

T =
   -0.7253    0.4665   -0.5062  -118.4847
    0.4665   -0.2077   -0.8598  -146.7689
   -0.5062   -0.8598   -0.0670   534.6410
         0         0         0         1.0000

Q2 =
    0.7854    0.5236    1.0472    1.3090    0.2618    0.7854
   -2.3562   -0.3879    1.0472    0.3331   -2.2713   -0.8365
    0.7854    0.5236    1.0472    1.3090    0.2618    0.7854
   -2.3562   -0.3879    1.0472    0.3331   -2.2713   -0.8365

```

Fig. 23. Ángulos resultantes Algebraico

```

ans =
    1.0e-13 *
         0   -0.0022    0.0033    0.8527    0.0011   -0.0011   -0.0011    0.8527
   -0.0011    0.0022         0    0.5684   -0.0006   -0.0033         0    0.5684
    0.0033         0   -0.0006         0         0    0.0011    0.0014         0
         0         0         0         0         0         0         0         0

ans =
    1.0e-13 *
         0   -0.0022    0.0033    0.8527    0.0011   -0.0011   -0.0011    0.8527
   -0.0011    0.0022         0    0.5684   -0.0006   -0.0033         0    0.5684
    0.0033         0   -0.0006         0         0    0.0011    0.0014         0
         0         0         0         0         0         0         0         0

```

Fig. 24. Errores resultantes Algebraico

Como podemos observar los errores son prácticamente iguales resolviendo por los dos métodos.