Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Факультет комп’ютерних наук і кібернетики

Звіт

з лабораторної роботи №3

з теми «Параметрична ідентифікація параметрів з використанням функцій чутливості»

з моделювання систем

Виконала:

Студентка групи ІПС-31

Білик Вікторія Костянтинівна

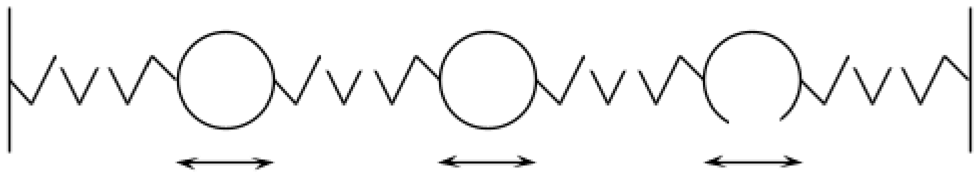
Київ

2024

1. Постановка задачі

Варіант 2

Для математичної моделі коливання трьох мас m_1, m_2, m_3, які поєднані між собою пружинами з відповідними жорсткостями c_1, c_2, c_3, c_4, і відомої функції спостереження координат моделі $\overline{y}(t),\ t \in [t_0, t_k]$ потрібно оцінити частину невідомих параметрів моделі з використанням функції чутливості.



Математична модель коливання трьох мас описується наступною системою:

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(c_2 + c_1)}{m_1} & 0 & \frac{c_2}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{c_2}{m_2} & 0 & -\frac{(c_2 + c_3)}{m_2} & 0 & \frac{c_3}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{c_3}{m_3} & 0 & -\frac{(c_4 + c_3)}{m_3} & 0 \end{pmatrix} y = Ay$$
.

Вектор оцінюваних параметрів $\beta = (c_2, m_1, m_3)^T$, початкове наближення $\beta_0 = (0.1,\ 10,\ 12)^T$, відомі параметри $c_1 = 0.14,\ c_3 = 0.2,$ $c_4 = 0.12,\ m_2 = 28$, ім'я файлу з спостережуваними даними y2.txt.

Спостереження стану моделі проведені на інтервалі часу $t_0 = 0,\ t_k = 50,\ \Delta t = 0.2$.

Підставивши відомі параметри у матрицю А, маємо:

$$A = \Big(0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ -\frac{(0.14+c_2)}{m_1}\ 0\ \frac{c_2}{m_1}\ 0\ 0\ 0\ -\ \ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ \ -\frac{c_2}{28}\ 0\ \ -\frac{(0.2+c_2)}{28}\ 0 - 0\ 0\ 0\ 0$$

Для знаходження y(t) у (n+1)-й момент часу, застосовуємо метод Рунге-Кутти 4-го порядку.

$$\frac{dy}{dt} = Ay, y(t_0) = y_0,$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

де

$$k_1 = \Delta t \times Ay_n.$$

$$k_2 = \Delta t \times A(y_n + \frac{1}{2}k_1),$$

$$k_3 = \Delta t \times A(y_n + \frac{1}{2}k_2),$$

$$k_4 = \Delta t \times A(y_n + k_3),$$

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t.$$

Після цього шукаємо матрицю чутливості U(t), яка визначається з наступної матричної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dU(t)}{dt} = \frac{\partial(Ay)}{\partial y^T}U(t) + \frac{\partial(Ay)}{\partial \beta^T}, U(t_0) = 0, \beta = \beta_i.$$

В даному випадку $\frac{\partial(Ay)}{\partial y^T} = A$.

Аналогічно, для знаходження U в (n+1)-й момент часу, застосовуємо метод Рунге-Кутти 4-го порядку.

$$\frac{dU(t)}{dt} = AU(t) + \frac{\partial(Ay)}{\partial \beta^T},$$

$$U(t_{n+1}) = U(t_n) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

де

$$k_1 = \Delta t \times (AU(t_n) + \frac{\partial(Ay)}{\partial\beta^T}).$$

$$k_2 = \Delta t \times (A(U(t_n) + \frac{1}{2}k_1) + \frac{\partial(Ay)}{\partial\beta^T}),$$

$$k_3 = \Delta t \times (A(U(t_n) + \frac{1}{2}k_2) + \frac{\partial(Ay)}{\partial\beta^T}),$$

$$k_4 = \Delta t \times \left(A(U(t_n) + k_3) + \frac{\partial(Ay)}{\partial\beta^T}\right),$$

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t.$$

Цю матрицю застосовуємо при обчисленні $\Delta\beta$, $\beta_{i+1} = \beta_i + \Delta\beta$

$$\Delta\beta = \left(\int_{t_0}^{t_k} U^T(t)U(t)dt\right)^{-1} \int_{t_0}^{t_k} U^T(t)(\overline{y}(t) - y(t))dt$$

І нарешті, підраховуємо показник якості ідентифікації невідомих параметрів β, який має вигляд

$$I(\beta) = \int_{t_0}^{t_k} (\overline{y}(t) - y(t))^T (\overline{y}(t) - y(t))dt$$

І якщо цей показник буде меншим за epsilon, який задаємо при запуску обчислення, то маємо, що β_i – наближений розв’язок задачі. Інакше переходимо на (i+1)-й крок, кладучи $\beta_{i+1} = \beta_i + \Delta\beta$.

2. Код програми

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

BORDER = '-' * 63  # Рамка для виводу
MIDDLE_SPACE = ' '* 17
DISTANS = ' '*6

# Ініціалізація матриці параметрів
def setup_matrix(params):


    c1 = params['c1']
    c2 = params['c2']
    c3 = params['c3']
    c4 = params['c4']

    m1 = params['m1']
    m2 = params['m2']
    m3 = params['m3']

    matrix = [
        [0, 1, 0, 0, 0, 0],
        [-(c2 + c1) / m1, 0, c2 / m1, 0, 0, 0],
        [0, 0, 0, 1, 0, 0],
        [c2 / m2, 0, -(c2 + c3) / m2, 0, c3 / m2, 0],
        [0, 0, 0, 0, 0, 1],
        [0, 0, c3 / m3, 0, -(c4 + c3) / m3, 0]
    ]

    return np.array(matrix)
```

```python
# Обчислення нового стану y
def update_state_y(a_matrix, y_current, step_size):

    k1 = step_size * np.dot(a_matrix, y_current)

    k2 = step_size * np.dot(a_matrix, y_current + k1 / 2)

    k3 = step_size * np.dot(a_matrix, y_current + k2 / 2)

    k4 = step_size * np.dot(a_matrix, y_current + k3)

    return y_current + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6


# Отримання рішення моделі
def solve_model(params, initial_state, time_points, step_size=0.2):

    solution = [initial_state]
    y_current = initial_state

    a_matrix = setup_matrix(params)

    for _ in range(len(time_points) - 1):

        y_current = update_state_y(a_matrix, y_current, step_size)
        solution.append(y_current)

    return np.array(solution)


# Функція для виконання апроксимації
def parameter_approximation(data_matrix, params, target_params, init_values, tolerance, step_size=0.2):

    iteration = 0
    param_vector = np.array([init_values[target_params[0]], init_values[target_params[1]], init_values[target_params[2]]])
```

```python
full_params = {**params, **init_values}
a_matrix = setup_matrix(full_params)


def model_output(b_values):

    full_params.update(b_values)
    a_matrix = setup_matrix(full_params)

    return a_matrix @ y_approx

print(f"{BORDER} \n {MIDDLE_SPACE} Approximations info: \n")
print(f"{'Iteration':<12} {' '.join(f'{p:<10}' for p in target_params)} {'Quality Score'}")
print(BORDER)  # Рамка для виводу


while True:

    u_matrix = np.zeros((6, 3))
    quality_score = 0

    inverse_integral = np.zeros((3, 3))
    multiplied_integral = np.zeros((1, 3))
    y_approx = data_matrix[0]


    full_params.update(init_values)
    full_matrix = setup_matrix(full_params)


    for i in range(len(data_matrix)):

        deriv_matrix = compute_derivatives(model_output, target_params, init_values)
        inverse_integral += u_matrix.T @ u_matrix

        multiplied_integral += u_matrix.T @ (data_matrix[i] - y_approx)
        quality_score += (data_matrix[i] - y_approx).T @ (data_matrix[i] - y_approx)

        u_matrix = runge_kutta_step(full_matrix, deriv_matrix, u_matrix, step_size)
        y_approx = update_state_y(full_matrix, y_approx, step_size)
```

```python
        inverse_integral *= step_size
        multiplied_integral *= step_size

        quality_score *= step_size
        print(f"{iteration:<12} {' '.join(f'{val:<10.4f}' for val in param_vector)} {quality_score:.6f}")

        delta_params = np.linalg.inv(inverse_integral) @ multiplied_integral.flatten()
        param_vector += delta_params
        init_values = {target_params[i]: param_vector[i] for i in range(3)}

        if quality_score < tolerance:
            print(BORDER)  # Рамка для виводу
            return init_values, iteration + 1, quality_score

        iteration += 1


# Відображення графіку
def display_graph(measured_data, model_solution, time_points):

    variables = ['x₁', 'dx₁/dt', 'x₂', 'dx₂/dt', 'x₃', 'dx₃/dt']
    fig, axes = plt.subplots(3, 2, figsize=(15, 12))
    axes = axes.flatten()

    for i, (ax, var) in enumerate(zip(axes, variables)):

        ax.plot(time_points, measured_data[:, i], 'ro-', label='Measured', markersize=5, linewidth=2)
        ax.plot(time_points, model_solution[:, i], 'b--', label='Model', linewidth=2)
        ax.set_title(f'Variable {var}', fontsize=14)
        ax.set_xlabel('Time', fontsize=12)
        ax.set_ylabel('Value', fontsize=12)
        ax.grid(True)
        ax.legend(fontsize=12)

    plt.tight_layout()
    plt.show()
```

```python
# Читання даних з файлу
def load_data(file_name):

    with open(file_name, 'r') as file:

        lines = file.readlines()
        data_matrix = []

        for line in lines:
            values = line.strip().split()
            row = [float(value) for value in values]
            data_matrix.append(row)

    return np.array(data_matrix).T

def get_data():
    data_matrix = load_data('y2.txt')
    time_points = np.arange(0, 0.2 * len(data_matrix), 0.2)

    # Початкові параметри
    initial_params = {'c1': 0.14, 'c3': 0.2, 'c4': 0.12, 'm2': 28}
    adjustable_params = {'m1': 10, 'c2': 0.1, 'm3': 12}

    target_params = ['m1', 'c2', 'm3']

    return data_matrix,initial_params, target_params, adjustable_params, time_points

def view_results(results, num_iterations, quality):

    print(BORDER)
    print("Identified Parameters:\n")

    for key, value in results.items():
        print(f"{DISTANS}{key}: {value:.6f}")

    print(f"{DISTANS}Iterations: {num_iterations}")
    print(f"{DISTANS}Quality Score: {quality:.6f}")
    print(BORDER + '\n')
```

```python
# Основна функція для запуску процесу
def main():

    print(f"{MIDDLE_SPACE}Start program\n")

    data_matrix,initial_params, target_params, adjustable_params,time_points = get_data()

    # Виконання апроксимації
    results, num_iterations, quality = parameter_approximation(
        data_matrix, initial_params, target_params, adjustable_params, 1e-6
    )

    # Отримання моделі з визначеними параметрами
    final_params = {**initial_params, **results}
    model_solution = solve_model(final_params, data_matrix[0], time_points)

    view_results(results, num_iterations, quality)
    display_graph(data_matrix, model_solution, time_points)

    print(f"{MIDDLE_SPACE}End program\n")

main()
```

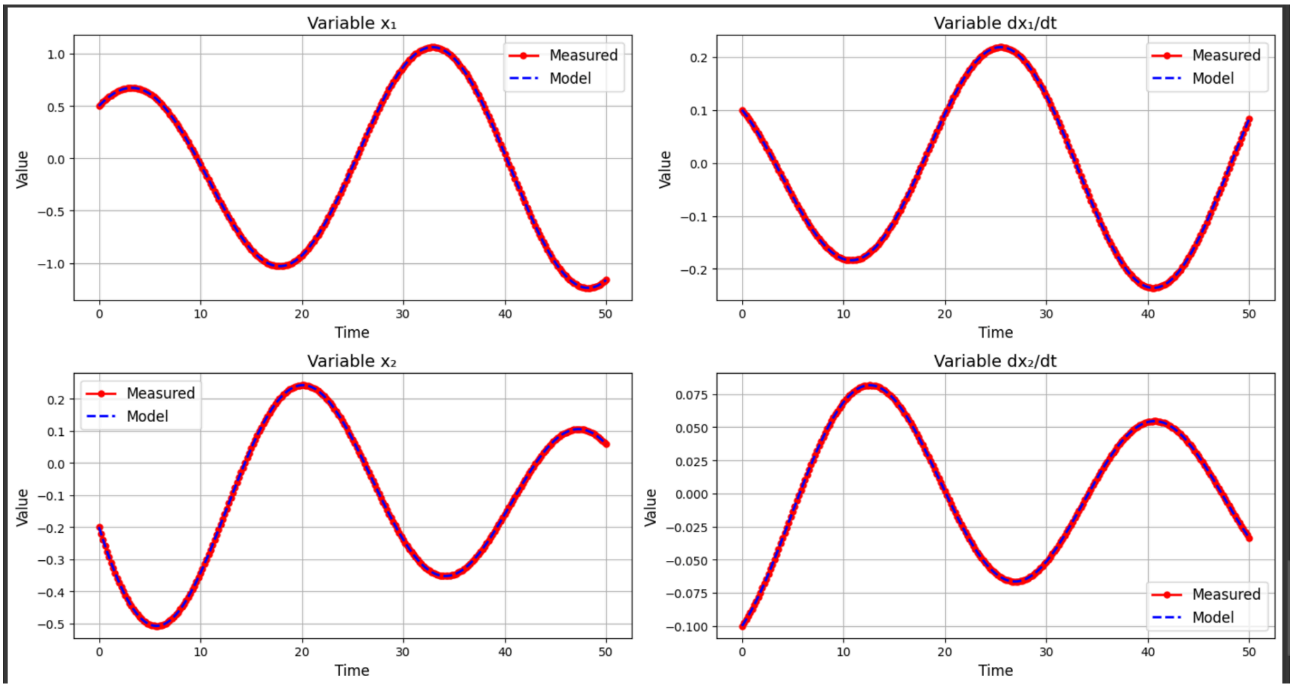
Отримане виведення:

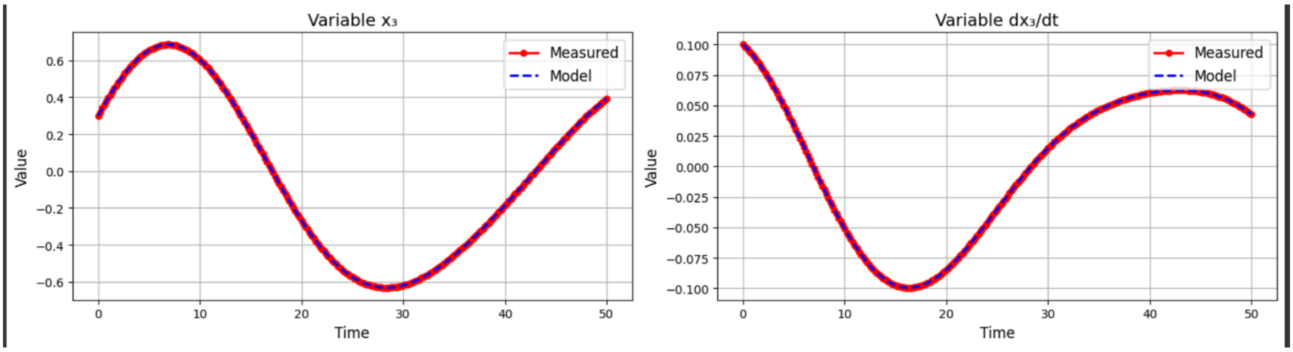
```
                    Start program

  ---------------------------------------------------------------
                    Approximations info:

  Iteration    m1          c2          m3          Quality Score
  ---------------------------------------------------------------
  0            10.0000     0.1000      12.0000     72.822930
  1            12.2903     0.2233      14.8269     15.239681
  2            12.8256     0.2996      17.0440     0.802758
  3            12.0874     0.3027      17.9316     0.002298
  4            12.0001     0.3000      18.0001     0.000000
  ---------------------------------------------------------------
  ---------------------------------------------------------------
  Identified Parameters:

        m1: 11.999997
        c2: 0.300000
        m3: 17.999998
        Iterations: 5
        Quality Score: 0.000000
  ---------------------------------------------------------------
```


Variable x₁
Variable dx₁/dt
Variable x₂
Variable dx₂/dt
Measured
Model
Value
Time


Variable x₃
Variable dx₃/dt
Measured
Model
Value
Time