ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων Πληροφορικής
Εργαστήριο Διαχείρισης και Βέλτιστου Σχεδιασμού Δικτύων Τηλεματικής - NETMODE

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφου, 157 80
e-mail: queuing@netmode.ntua.gr, URL: http://www.netmode.ntua.gr

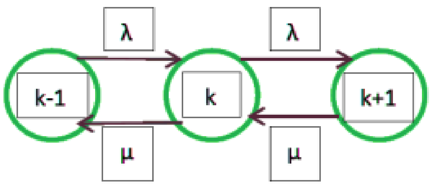
12 Απριλίου 2021

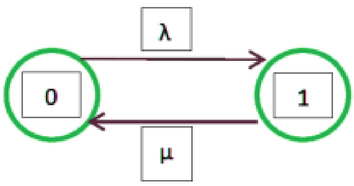
Συστήματα Αναμονής (Queuing Systems)

Βικέντιος Βιτάλης el18803

Θεωρητική μελέτη της ουράς (M/M/1)

α) Για να είναι η ουρά M/M/1 εργοδική θα πρέπει για t→∞ η παράγωγος dPk/dt →0 ,δηλ Pk(t)→Pk . Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων της ουράς M/M/1





Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι οι εξής :

$$(\lambda_k + \mu_k)P_k = \lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1}, \quad k > 1$$
$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$
$$P_0 + P_1 + \cdots + P_k + \cdots = 1$$

Με βάση την εκφώνηση έχουμε αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό λk=λ για k=0,1,2… και οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί με μέση τιμή 1/μ , όπου μk=μ , k=0,1,2… Άρα οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται, εφόσον ισχύει ισορροπία-εργοδικότητα:

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \text{ ή } P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 = \rho P_0$$

$$(\lambda + \mu)P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2 \text{ ή } P_2 = \rho^2 P_0 \text{ και γενικά } P_k = \rho^k P_0, \quad k > 0$$

$$P_0 + P_1 + \cdots + P_k + \cdots = 1 = P_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots)$$

Εφόσον $0 < \rho < 1$ η άπειρη δυναμοσειρά$(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots) \to \frac{1}{1-\rho} \Rightarrow P_0(\frac{1}{1-\rho}) = 1$ και

$$P_0 = (1-\rho), \quad P_k = (1-\rho)\rho^k, \qquad k > 0$$

και ρ=λ/μ < 1 (συνθήκη Erlang)

β) Για τις ουρές M/M/1 ισχύει επίσης σε ισορροπία:

$$E[n(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} kP_k = \frac{\rho}{1-\rho} \quad = \text{μέση κατάσταση συστήματος}$$

Από τον τύπο του Little όμως ισχύει:

$$E(T) = \frac{E[n(t)]}{\gamma} = \frac{E[n(t)]}{\lambda} = \frac{1/\mu}{1-\rho} = \text{μέσος χρόνος καθυστέρησης πελάτη } (=1/\mu\text{-}\lambda)$$

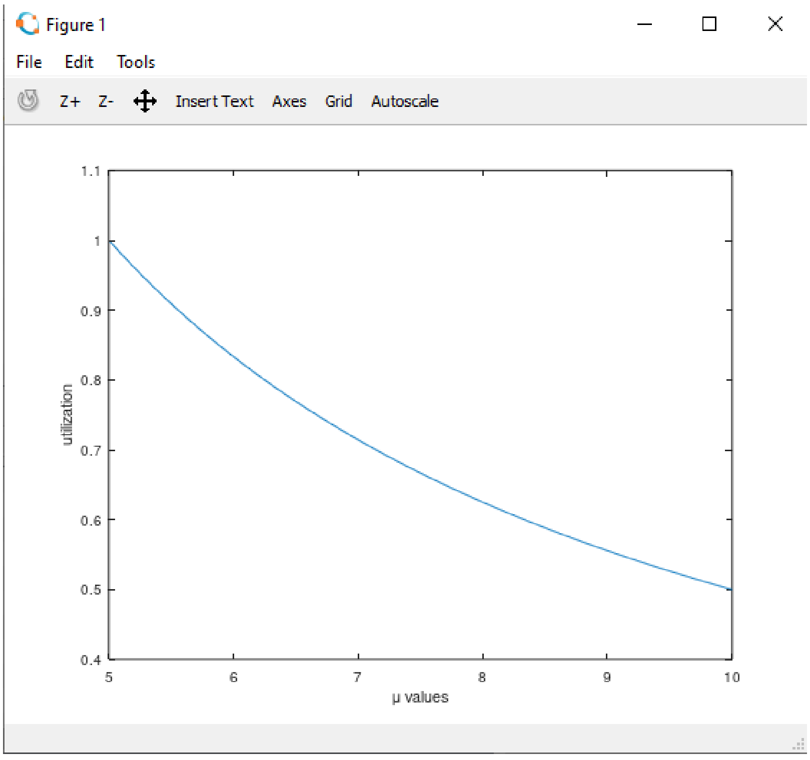
γ) Θα υπάρχει χρονική στιγμή που στο σύστημα θα βρίσκονται 57 πελάτες με πιθανότητα P57=ρ(1-ρ)^57 .

<u>Ανάλυση ουράς M/M/1 με Octave</u>

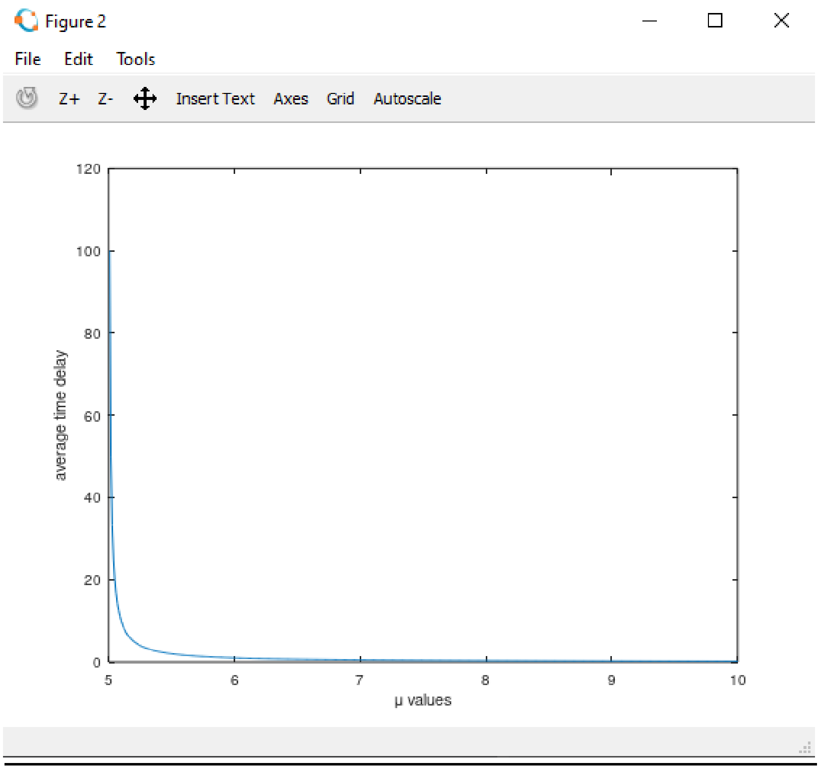
Οι αφίξεις ακολουθούν κατανομή Poisson με παράμετρο λ=5 πελάτες/min = 0.0833 πελάτες/sec Οι εξυπηρετήσεις ακολουθούν κατανομή εκθετική με μ=[0,10] πελάτες/sec (συνεχές μ ,όχι διακριτές)

α) Για να είναι εργοδικό το σύστημά μου θα πρέπει η ένταση φορτίου ρ = λ/μ , μ>5 . Άρα για μ=(5,10]

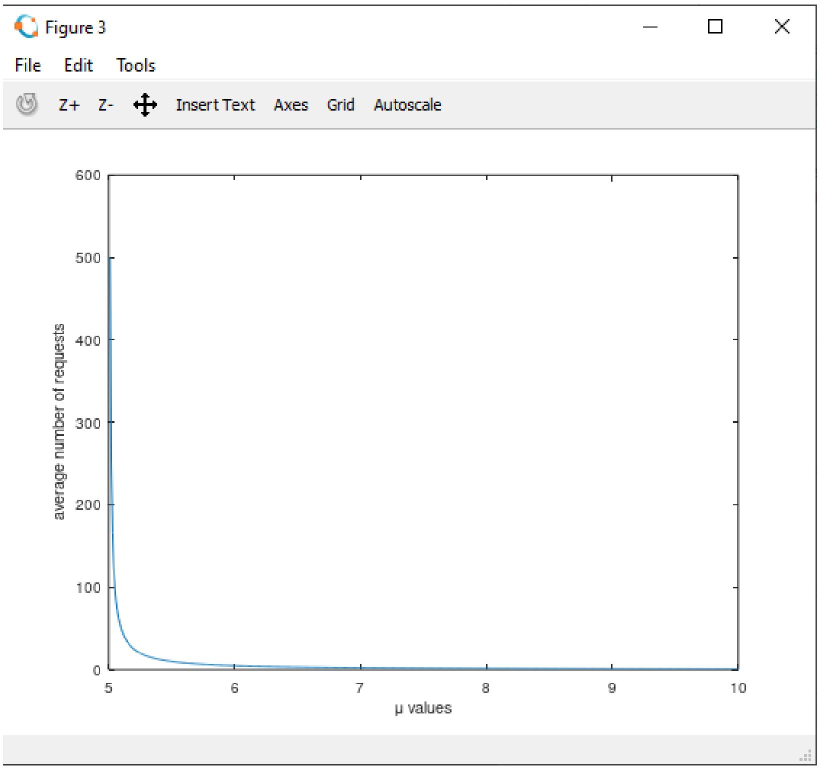
β) Βαθμός χρησιμοποίησης (utilization) ως προς το ρυθμό εξυπηρέτησης(μ).



Μέσος χρόνος καθυστέρησης του συστήματος(response time) E(T) ως προς το ρυθμό εξυπηρέτησης.



Μέσος αριθμός πελατών(aver number of requests) E[n(t)] στο σύστημα ως προς το ρυθμό εξυπηρέτησης.



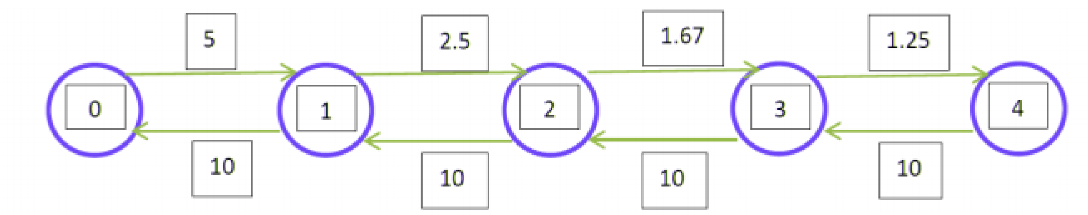
γ) Για να έχουμε μικρό μέσο χρόνο καθυστέρησης από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι πρέπει μ>6. Ιδανικό θα ήταν να είναι μ=10,όμως ο server θα κοστίσει πολύ. Οπότε μ=7 θα ήταν ικανοποιητικό.

δ) Αφού έχουμε άπειρη ουρά , δεν έχουμε απώλειες άρα γ=λ=5. Το οποίο φαίνεται και στο διάγραμμα.

<u>Διαδικασία γεννήσεων θανάτων (birth-death process): εφαρμογή σε σύστημα M/M/1/K</u>

Εφαρμογή σε σύστημα M/M/1/K Για σύστημα M/M/1/4 (1 εξυπηρετητής , μέγιστη χωρητικότητα 4 άτομα) με αφίξεις να ακολουθούν Poisson παραμέτρου λi=5/(i+1) και χρόνος εξυπηρέτησης εκθετική με μi=μ.

α) Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων



Οι εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος προκύπτουν από τις εξισώσης ισορροπίας

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$
$$\lambda_{k-1} P_{k-1} = \mu_k P_k \quad k = 1, 2, \dots N \quad \text{για N=4.}$$

Και επειδή το άθροισμα των πιθανοτήτων ισούται εξ ορισμού με 1 , προκύπτουν:

P0=0.607

P1=0.303

P2=0.076

P3=0.013

P4=0.0016

Η τελευταία είναι η πιθανότητα απώλειας πελάτη.

β) (i)

```
The transition matrix of the system is:
metavatikos =

   -5.00000    5.00000    0.00000    0.00000    0.00000
   10.00000  -12.50000    2.50000    0.00000    0.00000
    0.00000   10.00000  -11.66667    1.66667    0.00000
    0.00000    0.00000   10.00000  -11.25000    1.25000
    0.00000    0.00000    0.00000   10.00000  -10.00000
```

(ii) Οι εργοδικές πιθανότητες

```
The ergodic probabilities of the system are (for each state):
ergodic_prob =

   0.6066351   0.3033175   0.0758294   0.0126382   0.0015798
```

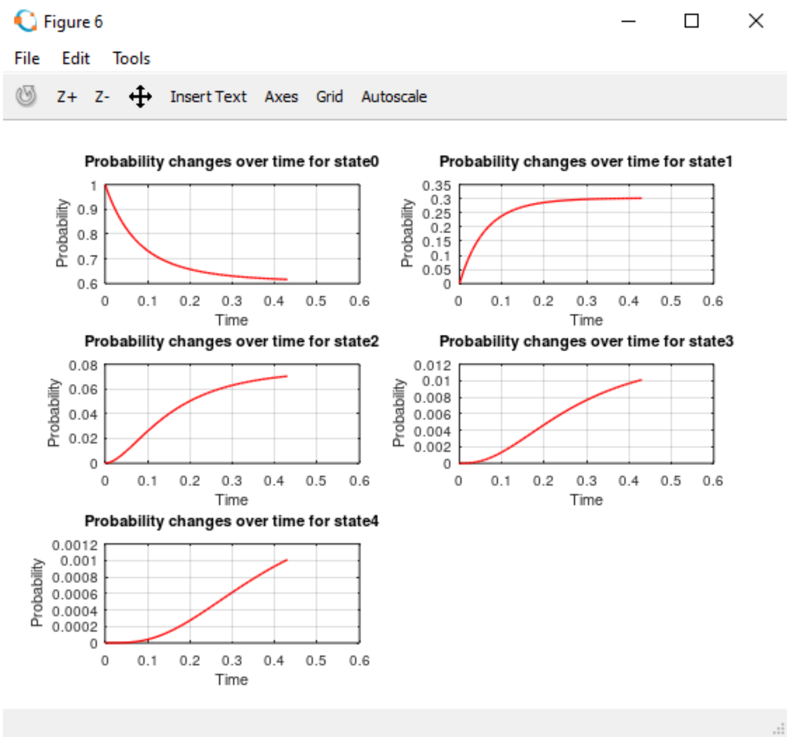
(iii) Προκύπτει η μέση τιμή των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα:

```
The average number of customers in the system is
 0.49921
```

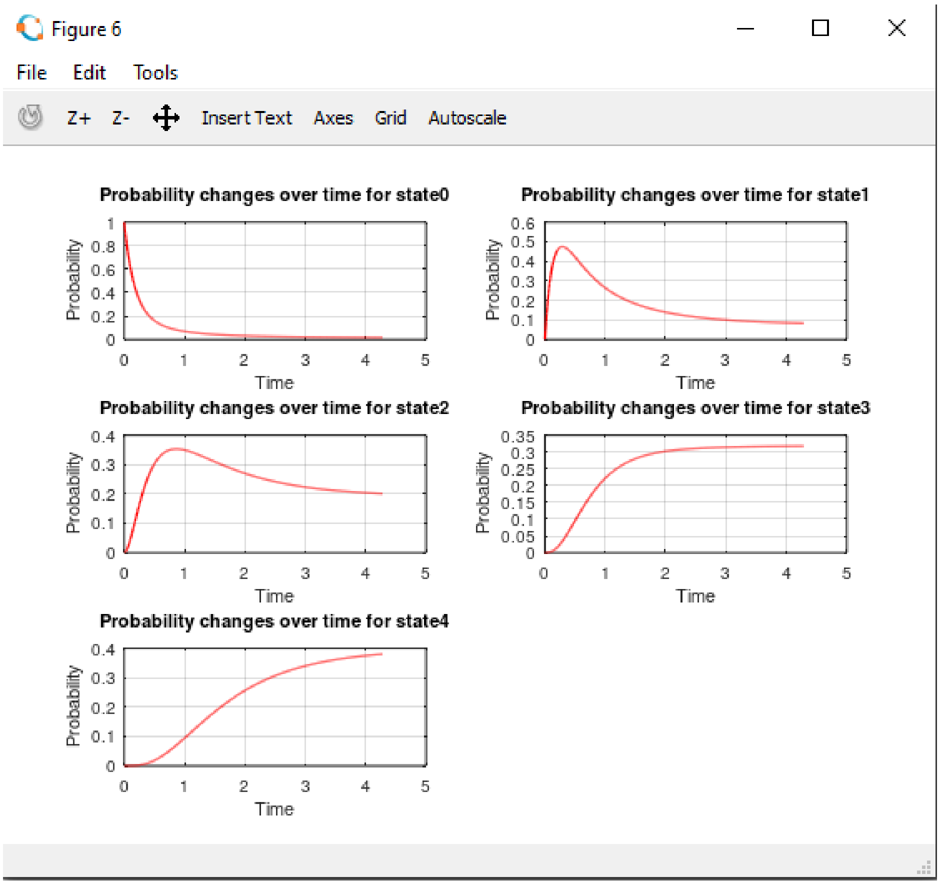
(iv) η πιθανότητα απώλειας πελάτη είναι το PN όπου N=4 , το οποίο υπολογίσαμε πριν στις εργοδικές.

```
The blocking probability of the system is
 0.0015798
```

(v) παρακάτω τα διαγράμματα: (λ=5, μ=10)



(vi) Για τιμές (1) λ=5, μ=1



(2) λ=5, μ=5

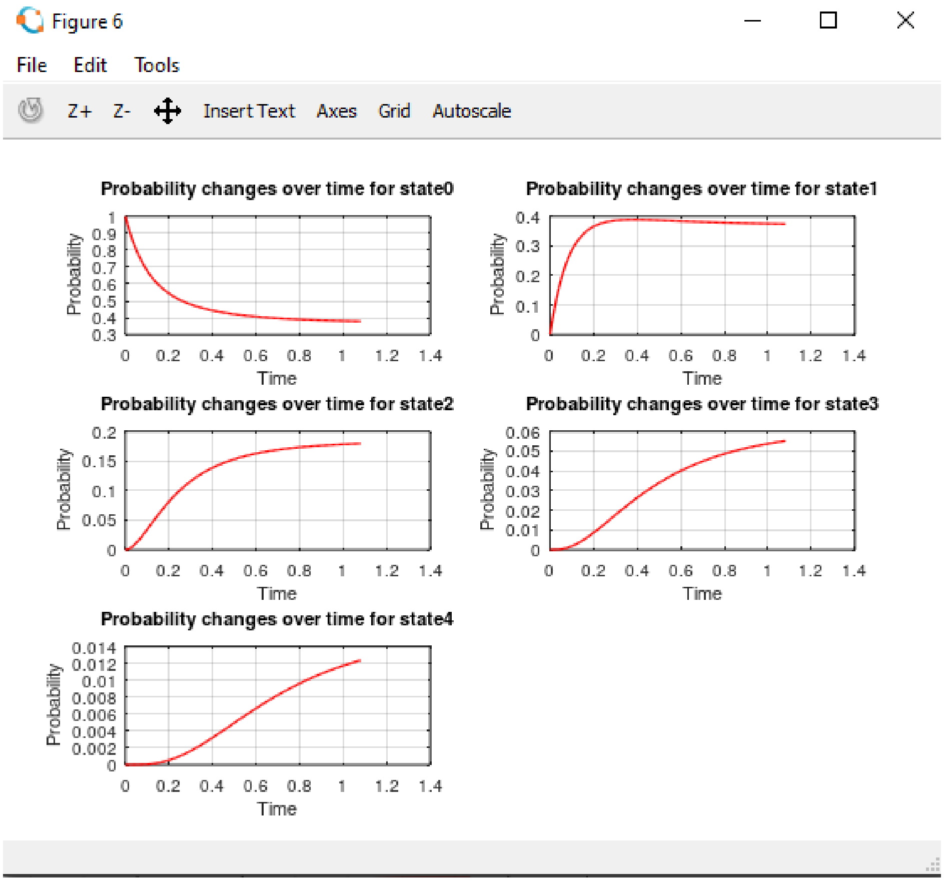
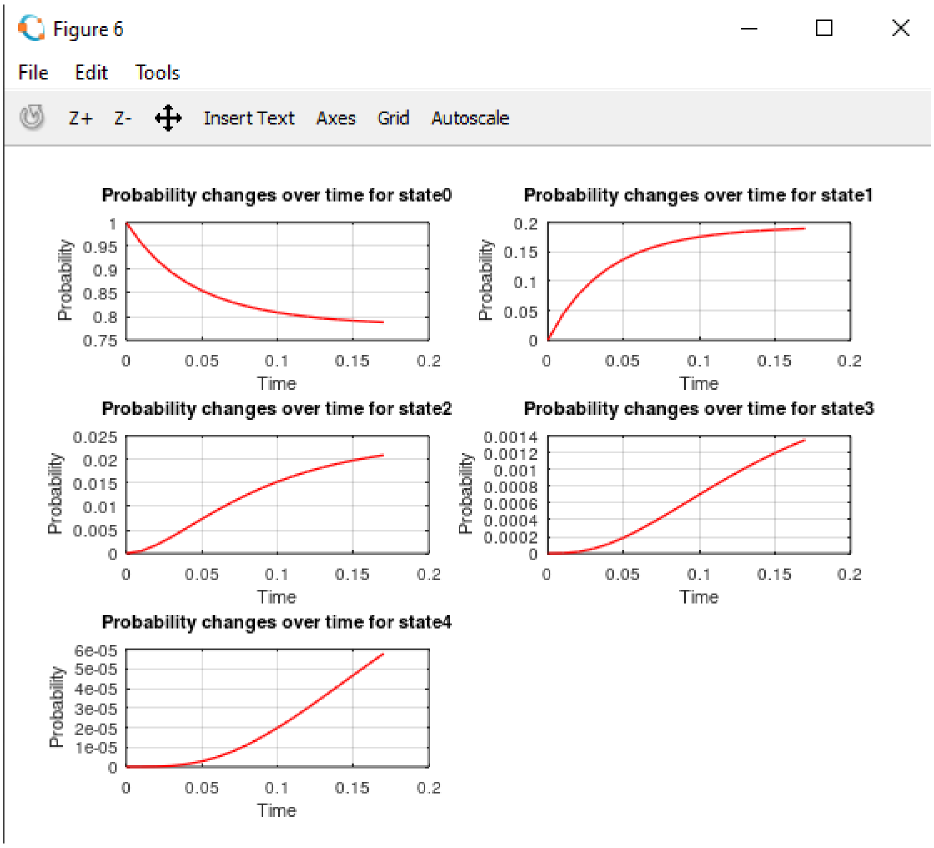


Figure 6
File Edit Tools
Z+ Z- Insert Text Axes Grid Autoscale
Probability changes over time for state0
Probability changes over time for state1
Probability changes over time for state2
Probability changes over time for state3
Probability changes over time for state4
Probability
Time

(3) λ=5, μ=20



Το σύστημα συγκλίνει πιο γρήγορα στις εργόδικες πιθανότητες για μεγαλύτερα μ. Επίσης, βλέπουμε πως για μεγαλύτερα μ οι εργόδικες πιθανότητες στις οποίες συγκλίνει το σύστημα «ευνοούν» την κατάσταση 0, δηλαδή το σύστημα να είναι άδειο. Βλέπουμε, δηλαδή την πιθανότητα P0 να αυξάνεται ενώ οι πιθανότητες P1, P2, P3 και P4 μειώνονται.