ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων Πληροφορικής
Εργαστήριο Διαχείρισης και Βέλτιστου Σχεδιασμού Δικτύων Τηλεματικής - NETMODE

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφου, 157 80
e-mail: queuing@netmode.ntua.gr, URL: http://www.netmode.ntua.gr

5 Απριλίου 2021

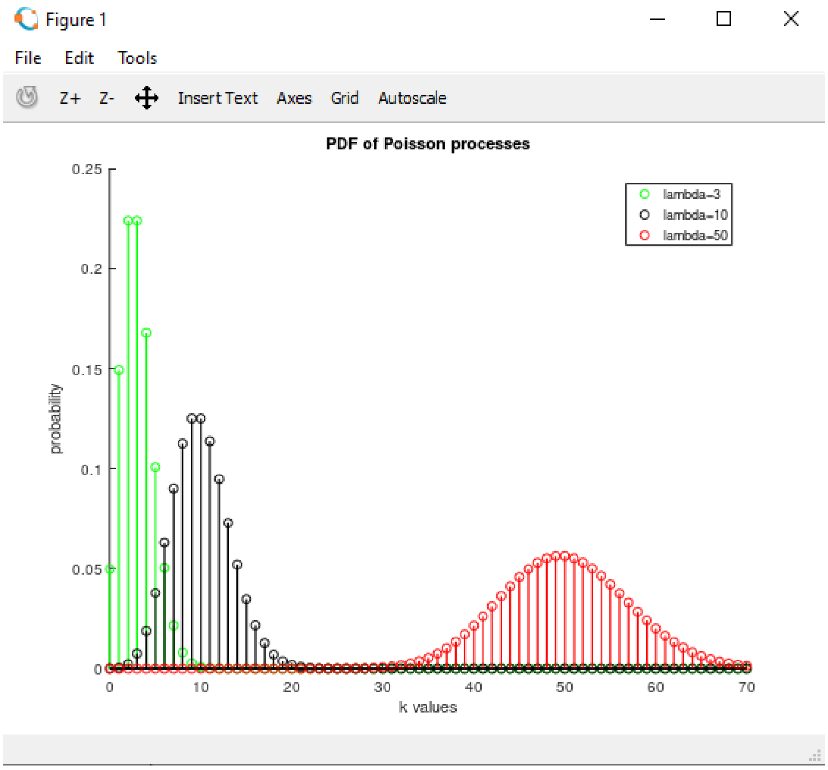
Συστήματα Αναμονής (Queuing Systems)

<u>1η Ομάδα Ασκήσεων</u>

Βικέντιος Βιτάλης el18803

<u>Κατανομή Poisson(διακριτή)</u>

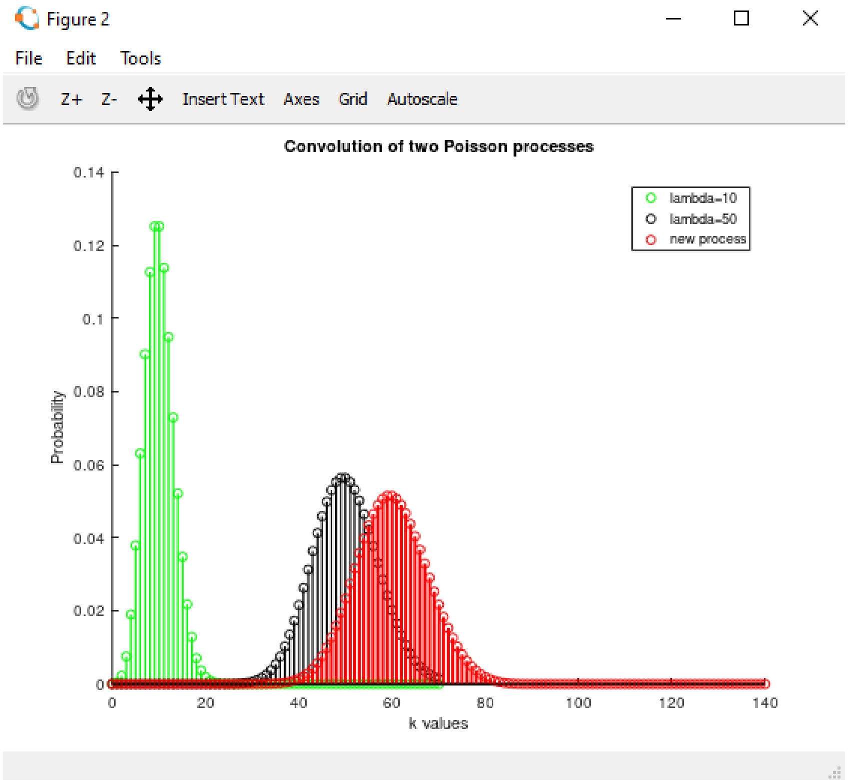
Α) Παρακάτω παραθέτουμε το κοινό διάγραμμα της Probability Mass Function για τις ζητούμενες παραμέτρους λ = 3, 10, 50 :



Παρατηρούμε πως όσο αυξάνεται αριθμητικά η παράμετρος λ, τόσο μετατοπίζεται δεξιά και χαμηλώνει η υψηλότερη τιμή της καμπύλης. Αυτό σημαίνει πως μειώνεται φυσικά και η μέση τιμή της. Ταυτόχρονα αυξάνεται και το διάστημα κατανομής, η διακύμανση δηλαδή.

Β) Μετά την εκτέλεση του επισυναπτόμενου κώδικα, εντοπίζουμε πως η μέση τιμή κι η διασπορά είναι ίσες με 30. Κάτι τέτοιο το περιμέναμε διότι σύμφωνα με την θεωρία, η κατανομή Poisson έχει μέση τιμή και διασπορά ίσες με την επιλεχθείσα παράμετρο.

Γ) Παραθέτουμε την συνέλιξη δύο κατανομών με παραμέτρους 10 και 50.



Η υπέρθεση αυτών των δύο Poisson είναι και αυτή Poisson αλλά με $\lambda = 10 + 50 = 60$. Το αποτέλεσμα είναι το επιθυμητό καθώς γνωρίζουμε από την θεωρία πως υπέρθεση 2 Poisson έχει τελικό αποτέλεσμα Poisson. Οφείλουμε να αναφέρουμε πως οι δυο αρχικές κατανομές είναι στατιστικά ανεξάρτητες μεταξύ τους.

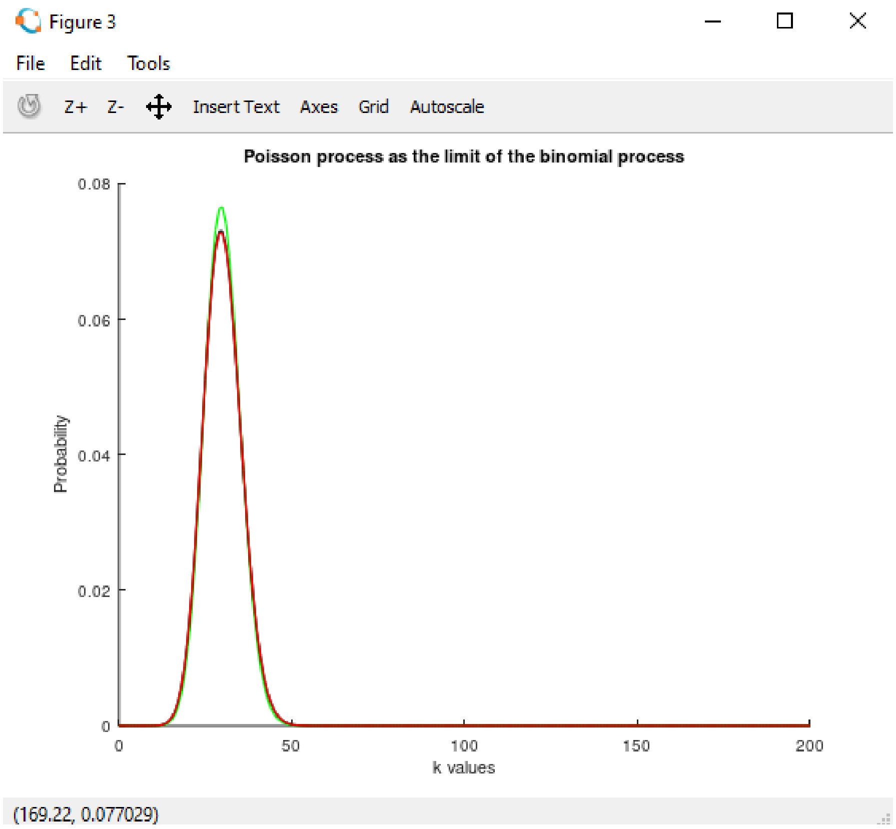
Δ) Η κατανομή Poisson, προσεγγίζεται σαν διωνυμική κατανομή σε χρονικό διάστημα t. Χωρίζουμε το διάστημα σε n χρονικά παράθυρα διάρκειας Δt, με πιθανότητα εμφάνισης $p = \lambda \times \Delta t$ και πιθανότητα μη εμφάνισης $1 - p$.

$$P[N(t) = k] = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \times \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

Παίρνοντας το όριο της πιο πάνω σχέσης για $\Delta t \to 0, n \to \infty$ έχουμε $\frac{n!}{(n-k)!} \to n^k, \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \to e^{-\lambda t}$ και η σχέση γίνεται:

$$P[N(t) = k] = \binom{n}{k} \times \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \to \frac{n^k}{k!} \times \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \times e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

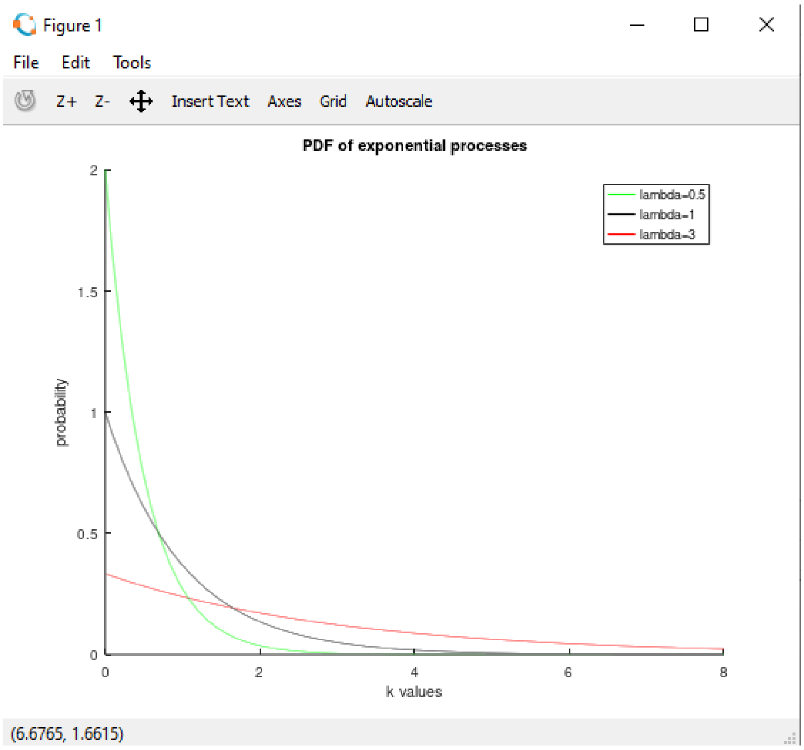
Στην Octave παίρνουμε την εξής απεικόνιση για n = 300, 3000, 30000:



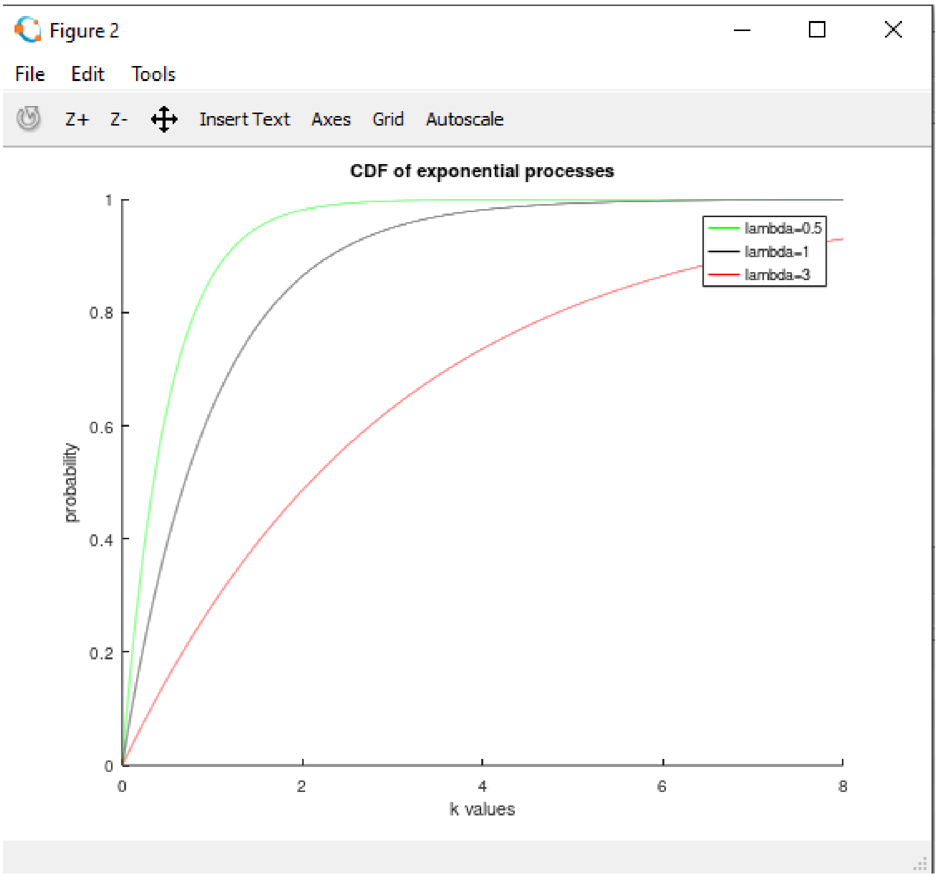
Για λ = n * p , θα έχουμε πως για μεγάλα n και p να τείνει στο μηδέν, η διωνυμική κατανομή προσεγγίζει όλο και περισσότερο την Poisson.

Εκθετική κατανομή (συνεχής)

Α) Παρά το γεγονός πως η εκθετική είναι συνεχής, θα την προσεγγίσουμε ως διακριτή προκειμένου να ελαττώσουμε το σφάλμα.



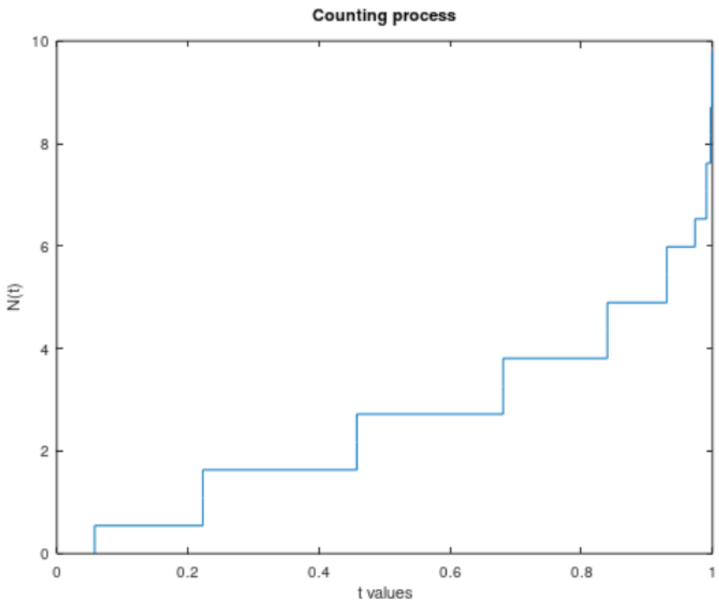
Β) Οι συναρτήσεις Cumulative Density Function των εκθετικών είναι :

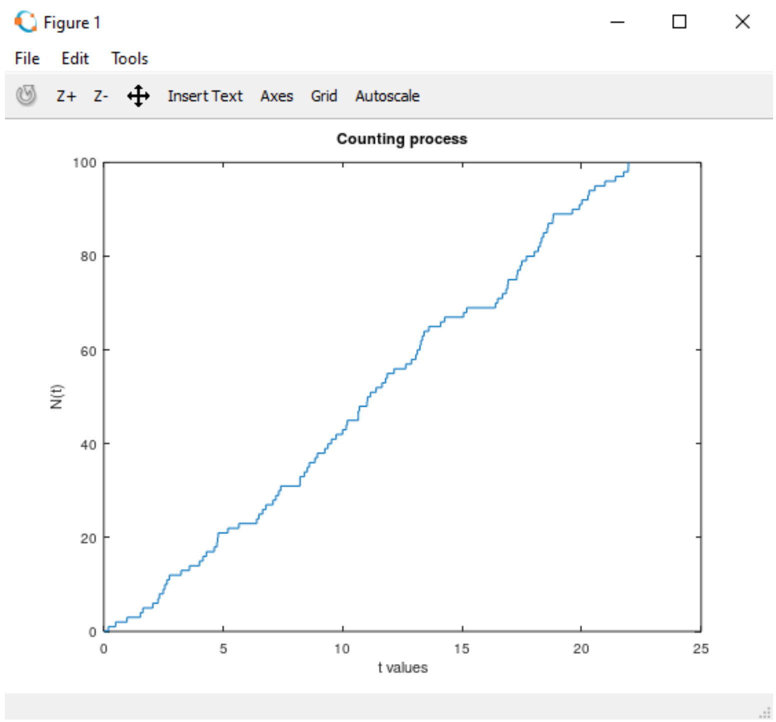


Γ) Παρατηρούμε πως και οι δυο πιθανότητες είναι ίσες με 0.88692. Κάτι το αναμενόμενο διότι γνωρίζουμε πως P(X>b+a | X>a) = P(X>a) . Δηλαδή, η εκθετική κατανομή διαθέτει την ιδιότητα έλλειψης μνήμης.

<u>Διαδικασία Καταμέτρησης Poisson</u>

Α) Υποθέτουμε πως T είναι το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δυο εμφανίσεις γεγονότων Poisson. Υποθέτουμε επίσης πως v=N(t+T)-N(t), ο αριθμός των εμφανίσεων στο διάστημα[t , t+Δt]. Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε πως οι χρόνοι που μεσολαβούν μεταξύ τους έχουν εκθετική κατανομή, με παράμετρο λ της Poisson.





B) Έστω T το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε εμφανίσεις δύο γεγονότων Poisson.
Αν $\nu = N(\Delta t) = N(t + \Delta t) - N(t)$ ο αριθμός των εμφανίσεων στο διάστημα $[t, t + \Delta t]$ τότε η τυχαία μεταβλητή ν ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο-μέση τιμή λΔt. (E[ν]=λT). Μέσος αριθμός γεγονότων = λ * Δt . Στην μονάδα του χρόνου Δt=1 sec ,άρα μ.α.γ = λ.

200 γεγονότα : 0.19041

300 γεγονότα : 0.20120

500 γεγονότα : 0.20187

1000 γεγονότα : 0.20276

10000 γεγονότα 0.19965

Παρατηρούμε ότι προσεγγίζουν την μέση τιμή (παράμετρο) της εκθετικής κατανομής. Γνωρίζουμε πως mean_exp = 1/ λ . Άρα λ περίπου ίσο με 5 σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις. Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει το πλήθος των γεγονότων τόσο καλύτερη προσέγγιση.

Τα αρχεία με το κώδικα της Octave έχουν επισυναπτεί στο αρχείο .rar το οποίο και υποβλήθηκε.