МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. Ломоносова

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ И ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

ЗАДАНИЕ №3

по курсу «Вычислительная физика»

Выполнила:

Кунышева Виктория Сергеевна,

студентка 425 гр. ($T0$ = 2.27)

Преподаватель:

Шлёнов Святослав Александрович

Москва 2024

1. Постановка задачи

Численно решить уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

На отрезке x= [0,10] с граничными условиями T (0) = T (10) = 0 и интервале времени t = [0,1] с начальными условиями:

$$T(x,t=0) = T_0(x-x_0)^2 e^{-(x-x_0)^2},$$

где x_0 = 5, а T_0 = 2.27.

1) Воспользоваться явной схемой численного решения. Рассмотреть два варианта выбора шагов интегрирования dx по x и dt по t:

А) $dx = 0.1$, $dt = 0.01$;
Б) $dx = 0.1$, dt = 0.005.

Для каждого набора шагов интегрирования построить графики T(x) для шести моментов времени t = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 1.

2) Использовать схему Кранка-Николсона и метод прогонки. Рассмотреть те же варианты выбора шагов интегрирования, что и в случае явной схемы.
3) Вывести условия устойчивости для использованных схем.
4) Построить графики сеточной диффузии для использованных численных схем и шагов интегрирования в сравнении с диффузией, описываемой исходным уравнением.

2. Явная схема

Зададим дискретные сеточные значения (x_j, t_n) непрерывных переменных (x, t):

$$x_j = (j-1)\Delta x, \quad j = 0,1,\dots,\frac{L}{\Delta x}+1,$$
$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0,1,\dots,\frac{T}{\Delta t}+1,$$

где L и T – размеры пространственного и временного диапазонов соответственно. Тогда сеточное решение для температуры $T(x,t)$:

$$T(x,t) \to T_j^n(x_j, t_n)$$

с граничным и начальным условиями:

$$T_0^n = T_L^n = 0$$

$$T_j^0 = T_0(x_j - x_0)^2 e^{-(x_j-x_0)^2}.$$

Шаблон явной схемы:

$$T_j^{n+1} = T_j^n + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(T_{j+1}^n - 2T_j^n + T_{j-1}^n\right)$$

3. <u>Схема Кранка – Николсона</u>

Шаблон схемы Кранка-Николсона:

$$T_j^{n+1} = T_j^n + \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}\left(T_{j+1}^n - 2T_j^n + T_{j-1}^n\right) + \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}\left(T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}\right)$$

Так как схема неявная, применяем метод прогонки:

$$a_j u_{j+1} + b_j u_j + c_j u_{j-1} = f_j$$
$$u_j \to T_j^{n+1}, \qquad f_j \to T_j^n$$

Для поставленной задачи имеем:

$$T_j^{n+1}\left(1 + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) - \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}T_{j+1}^{n+1} - \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}T_{j-1}^{n+1} = \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}T_{j+1}^n + \left(1 - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right)T_j^n + \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}T_{j-1}^n$$

$$2T_j^{n+1}\left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} + 1\right) - T_{j+1}^{n+1} - T_{j-1}^{n+1} = T_{j+1}^n + 2\left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} - 1\right)T_j^n + T_{j-1}^n$$

Отсюда имеем:

$$\begin{cases} a_j = -1, \;\; c_j = -1 \\ b_j = 2\left(\dfrac{(\Delta x)^2}{\Delta t} + 1\right) \\ f_j = T_{j+1}^n + 2\left(\dfrac{(\Delta x)^2}{\Delta t} - 1\right)T_j^n + T_{j-1}^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{j-1} = \dfrac{1}{2\left(\dfrac{(\Delta x)^2}{\Delta t} + 1\right) - a_j} \\ b_{j-1} = \dfrac{f_j + b_j}{2\left(\dfrac{(\Delta x)^2}{\Delta t} - 1\right) - a_j} \\ f_j = T_{j+1}^n + 2\left(\dfrac{(\Delta x)^2}{\Delta t} - 1\right)T_j^n + T_{j-1}^n \end{cases}$$

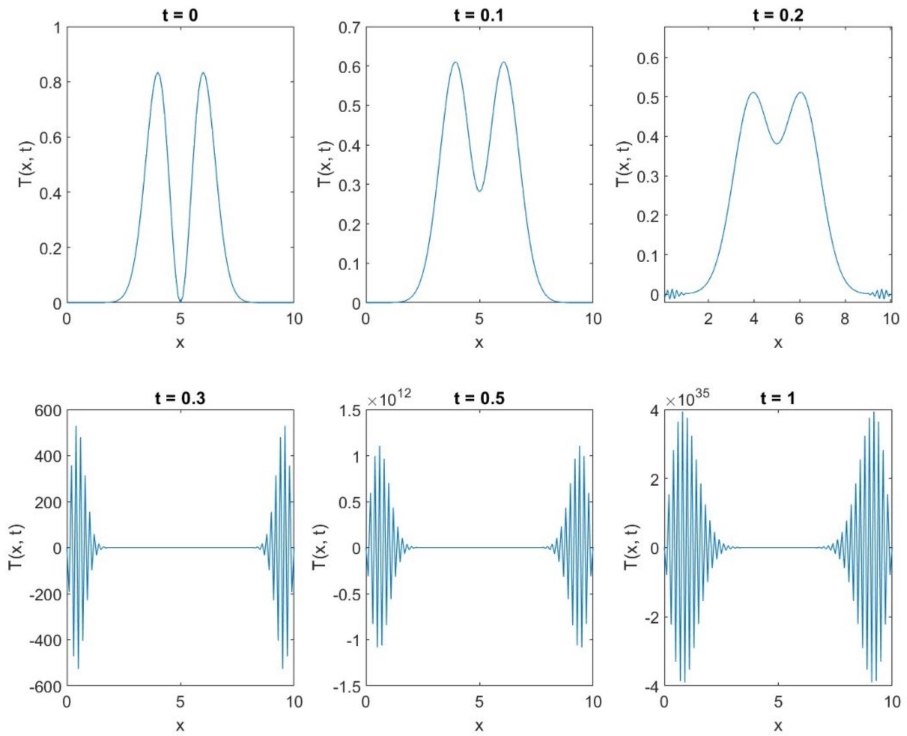
Тогда решение представимо в виде:

$$T_{j+1}^{n+1} = a_j T_j^{n+1} + b_j$$

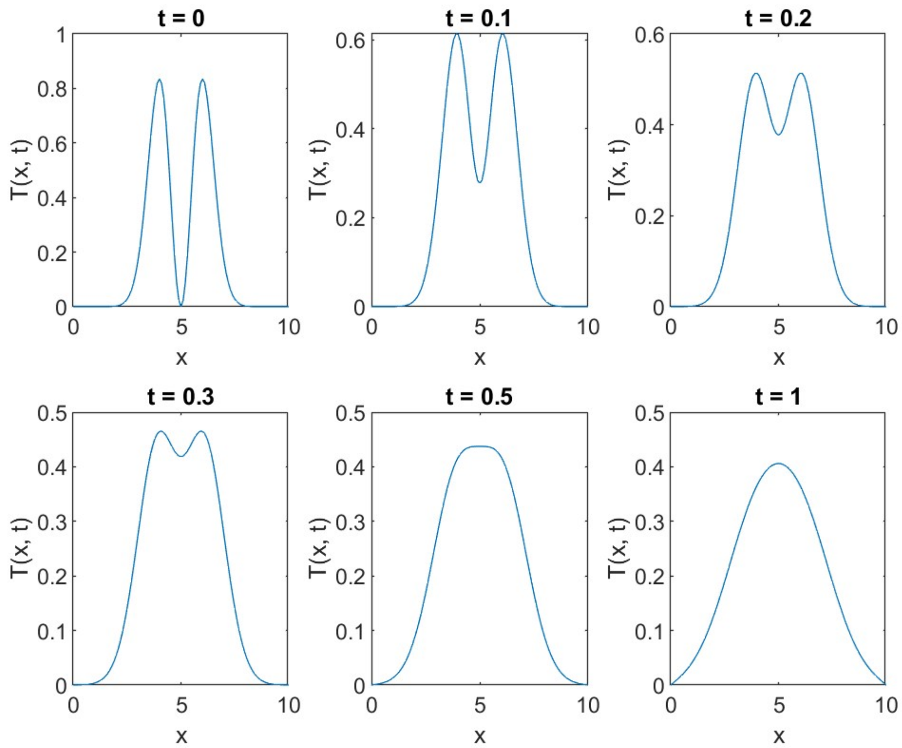
4. Графики полученных решений

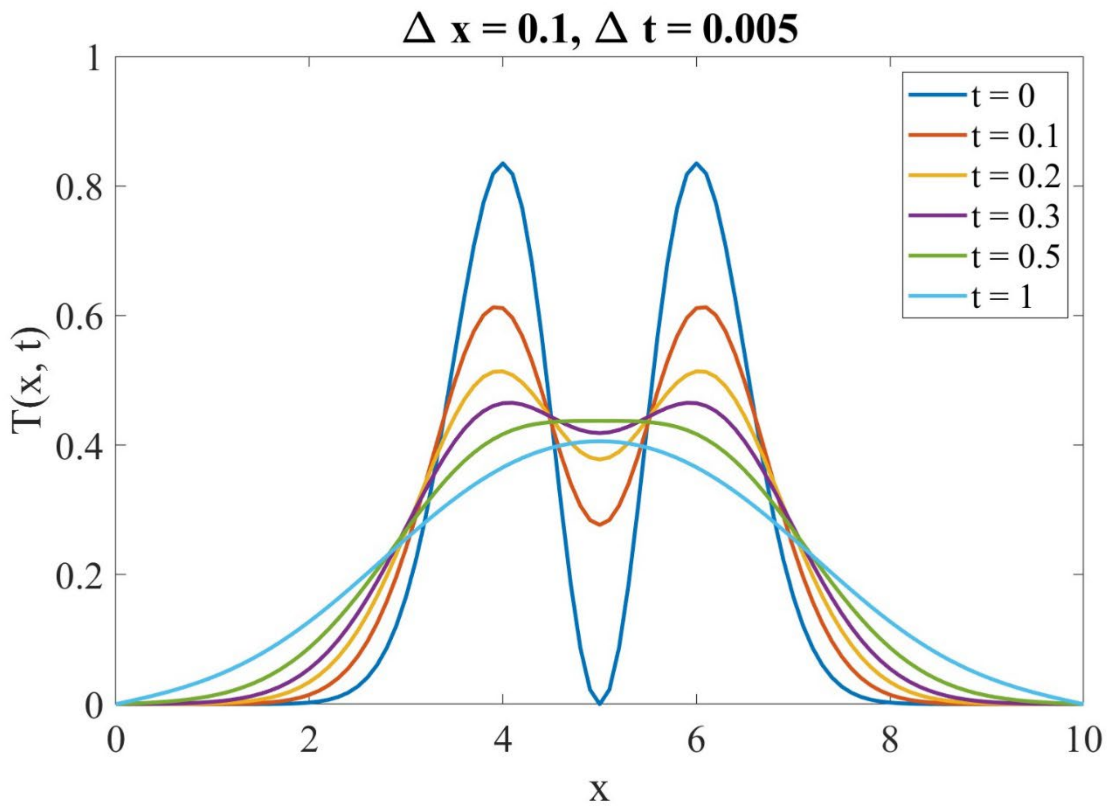
Теперь посмотрим на графики решения по явной схеме и по схеме Кранка-Николсона с разными шагами по времени:

А) явная схема, dt = 0.01



Б) явная схема, dt = 0.005





5. Условия устойчивости

1) **Явная схема**

Для пространственной Фурье-моды $\hat{T}_j^n e^{ikx_j}$ с учётом $\hat{T}_j^{n+1} = \lambda \hat{T}_j^n$ имеем:

$$\hat{T}_k^{n+1} e^{ikx_j} = \hat{T}_k^n e^{ikx_j} + \alpha\left(\hat{T}_k^n e^{ik(x_j+\Delta x)} - 2\hat{T}_k^n e^{ikx_j} + \hat{T}_k^n e^{ik(x_j-\Delta x)}\right)$$
$$= \hat{T}_k^n e^{ikx_j}\left(1 + \alpha\left(e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x} - 2\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 1 - 2\alpha(1 - \cos k\Delta x)$$

$$\lambda = 1 - 4\alpha \sin^2 \tfrac{k\Delta x}{2}, \quad \text{где } \alpha = \tfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2}.$$

Схема устойчива при $|\lambda| \le 1$, то есть при

$$4\alpha \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \le 2$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \le \frac{1}{2}$$

Следовательно, условие устойчивости явной схемы:

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \le \frac{1}{2}$$

Поэтому при $dt = 0.01$ и при $dx = 0.1$ решение получилось ошибочным.

2) **Схема Кранка-Николсона**

Подставим пространственную Фурье-моду $\hat{T}_k^n e^{ikx_j}$ в шаблон схемы Кранка-Николсона с учётом $\hat{T}_k^{n+1} = \lambda \hat{T}_k^n$:

$$\hat{T}_k^{n+1} e^{ikx_j} = \hat{T}_k^n e^{ikx_j} + \frac{\alpha}{2}\left(\hat{T}_k^n e^{ik(x_j+\Delta x)} - 2\hat{T}_k^n e^{ikx_j} + \hat{T}_k^n e^{ik(x_j+\Delta x)}\right) + \frac{\alpha}{2}\left(\hat{T}_k^{n+1} e^{ik(x_j+\Delta x)} - 2\hat{T}_k^{n+1} e^{ikx_j} + \hat{T}_k^{n+1} e^{ik(x_j+\Delta x)}\right)$$

$$\hat{T}_k^{n+1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\left(e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x} - 2\right)\right) = \hat{T}_k^n\left(1 + \frac{\alpha}{2}\left(e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x} - 2\right)\right)$$

$$\lambda = \frac{\hat{T}_k^{n+1}}{\hat{T}_k^n} = \frac{1 - \alpha(1 - \cos k\Delta x)}{1 + \alpha(1 - \cos k\Delta x)} = \frac{1 - 2\alpha \sin^2 \frac{k\Delta x}{2}}{1 + 2\alpha \sin^2 \frac{k\Delta x}{2}}$$

Следовательно,

$$|\lambda| \le 1 \;\forall\; \Delta x, \Delta t$$

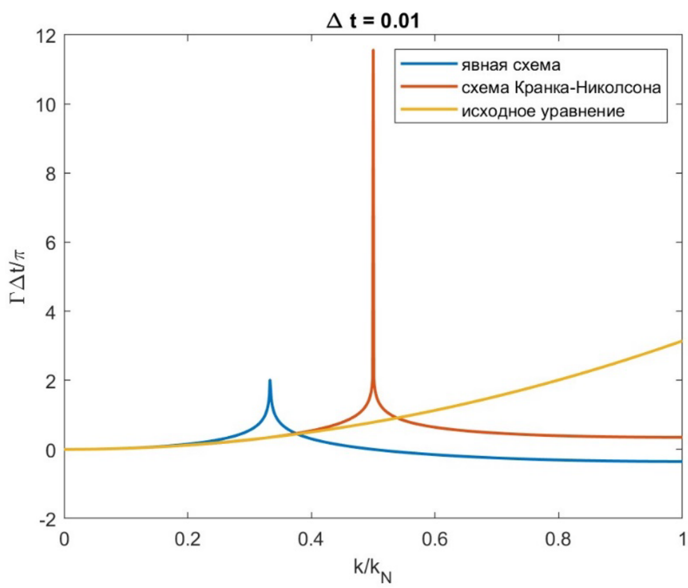
Значит, схема абсолютно устойчива.

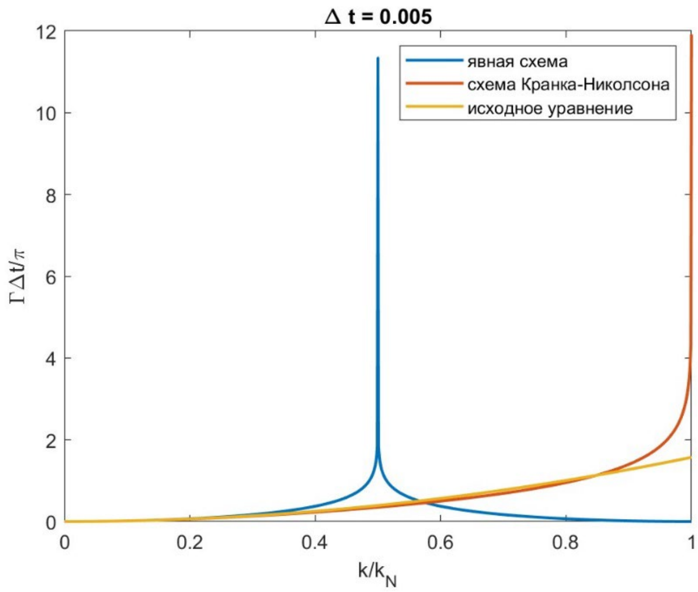
6. <u>Сеточная диффузия</u>

Из формулы для сеточной диффузии $\Gamma\Delta t = -\ln|\lambda|$ имеем:

$$\Gamma = \begin{cases} -\ln\left|1 - 4\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2\frac{k\Delta x}{2}\right|\frac{1}{\Delta t} & - \text{ для явной схемы} \\ -\ln\left|\dfrac{1 - 2\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2\frac{k\Delta x}{2}}{1 + 2\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2\frac{k\Delta x}{2}}\right|\frac{1}{\Delta t} & - \text{ для схемы Кранка} - \text{Николсона} \\ k^2 & - \text{ для исходного уравнения} \end{cases},$$

где $k_N = \frac{\pi}{\Delta x}$. С учётом равенства $\frac{k\Delta x}{2} = \frac{k}{k_N}\frac{\pi}{2}$ построены графики сеточной диффузии для шагов интегрирования по времени $\Delta t = 0.01$ и $\Delta t = 0.005$:





7. Листинг программы

Программа написана на языке программирования MatLab.

```
close all
clear all
%% объявление переменных
%шаг
dx = 0.1;
dt = 0.005; % а)0.01 б)0.005
%сетка
x = 0:dx:10;
t = 0:dt:1;
%задаю массив температуры
T = zeros(length(x), length(t));
%задаю граничные условия
T(1, :) = 0;
T(end, :) = 0;
%задаю начальные условия
T0 = 2.27;
x0 = 5;
T(:, 1) = T0*(x - x0).^2.*exp(-(x - x0).^2);

% шесть моментов времени, для которых просят построить графики T(x)
i1 = find(t == 0);
i2 = find(t == 0.1);
i3 = find(t == 0.2);
i4 = find(t == 0.3);
i5 = find(t == 0.5);
i6 = find(t == 1);
I = [i1, i2, i3, i4, i5, i6];

%% явная схема %x -> j, t -> n
alpha = dt/dx^2;
for it = 1:length(t) - 1
 for ix = 2:length(x) - 1
 T(ix, it + 1) = T(ix, it) + alpha*(T(ix - 1 , it)...
 - 2*T(ix, it) + T(ix + 1, it)); %шаблон явной схемы
 end
end
%% построение графиков явной схемы решения
```

```
figure(1)
plot(x, T(:, I), 'LineWidth', 2)
set(gca,'FontSize',20,'FontName','Times New Roman')
legend('t = 0', 't = 0.1','t = 0.2', 't = 0.3', 't = 0.5', 't = 1')
xlabel('x')
ylabel('T(x, t)')
title('\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.01') %тут исправлять при расчете А и Б
%%
figure(2)
for k = 1:6
subplot(2, 3, k)
plot(x, T(:, I(k)));
title(['t = ', num2str(t(I(k)))]);
xlabel('x')
ylabel('T(x, t)')
end
%% схема кранка-николсона
% x -> j, t -> n
a = 0*x;
a(end) = 0;
b = 0*x;
b(end) = 0;
f = 0*x;
f(end) = 0;
% граничные условия
T2 = 0*T;
T2(1, :) = 0;
T2(end, :) = 0;
% начальные условия
T2(:, 1) = T0*(x - x0).^2.*exp(-(x - x0).^2);

%%
for n = 1:length(t) - 1
 % расчет коэффициентов решения
 for j = length(x)-1:-1:2
 a(j - 1) = 1/(2*(1 + 1/alpha) - a(j));
 f(j) = T2(j + 1, n) + 2*(1/alpha -1)*T2(j, n) + T2(j - 1, n);
 b(j - 1) = (f(j) + b(j))/(2*(1/alpha + 1) - a(j));
 end
 %решение
 for j = 1:length(x) - 1
 T2(j + 1, n + 1) = a(j)*T2(j, n + 1) + b(j);
 end
end

%% построение графиков FN
figure(3)
plot( x, T2(:, I), 'LineWidth', 2)
legend('t = 0', 't = 0.1','t = 0.2','t = 0.3', 't = 0.5', 't = 1')
xlabel('x')
ylabel('T(x, t)')
title('\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.005')

%% сеточная диффузия
%шаг по времени
dt = 0.01;

f = (0:0.001:1)*pi/2; %k/k_n*pi/2

G1 = -log(abs(1 - 4*dt/dx/dx.*(sin(f)).^2))/pi;
G2 = -log(abs((1 - 2*dt/dx/dx.*(sin(f)).^2)./((1 + 2*dt/dx/dx.*(sin(f)).^2))))/pi;
G3 = dt/pi* (2/dx.*f).^2; %(f.*2/dx).^2/pi; %dt/2* (pi^2/2/dx.*f).^2;
```

```
%построение графиков
figure(4)
plot(f*2/pi, G1,f*2/pi, G2, f*2/pi, G3, 'LineWidth', 1.5);
legend('явная схема', 'схема Кранка-Николсона', 'исходное уравнение')
xlabel('k/k_N')
ylabel('\Gamma\Deltat/\pi')
title('\Delta t = 0.01')
```