МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Имени М. В. Ломоносова

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ И ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

ЗАДАНИЕ № 2

по курсу “Вычислительная физика”

$u0$ = 1.13

Выполнила:

Кунышева Виктория Сергеевна,

студентка 425 группы.

Преподаватель:

Шлёнов Святослав Александрович.

Москва 2024

Постановка задачи и выбор программного обеспечения

Численно решить задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + u = 0 \\ u(t=0) = u_0,\ \dot{u}(t=0) = v_0 \end{cases}$$

на отрезке t = [0, 20] для v0 = 0 и u0 = [код(К) + код(В) + код(С)]/30 = (12 + 3 + 19)/30 = 1.13(3). Использовать двухслойную схему с перешагиванием.

Для расчета значений функций в следующем за начальным узлом сетки использовать:

I. Точное решение. Рассмотреть три варианта шага интегрирования: 1) на границе устойчивости схемы; 2) шаг в два раза меньше предыдущего; 3) шаг в 5 раз меньше границы устойчивости.

II. Схему Эйлера. Для основного шага интегрирования в 2 раза меньше границы устойчивости рассмотреть два варианта получения решения в следующем за начальным узле основной сетки: а) шаг в схеме Эйлера совпадает с шагом основной сетки; б) шаг в схеме Эйлера 2 раза меньше шага основной сетки.

Построить графики численных решений совместно с графиком точного аналитического решения задачи (шкалы на осях обязательны).

Для решения данной задачи я использую программу Matlab.

Аналитическое решение

Общее решение начальной задачи для дифференциального уравнения осцилляторного типа:

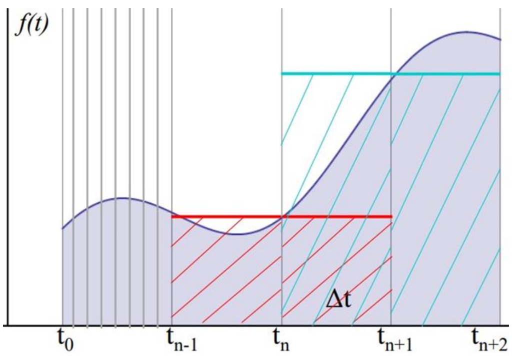
$$u(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$$

Подставляя начальные условия, имеем:

*u(t) = 1.13*cos(t).*

Численное решение

Двуслойная схема с перешагиванием



Делаем замену: $v = \dfrac{du}{dt}$.

Тогда схема с перешагиванием:

$$u_{n+1} = u_{n-1} + v_n \cdot 2\Delta t$$

$$v_{n+1} = v_{n-1} - u_n \cdot 2\Delta t$$

Условие устойчивости схемы:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\omega}$$

В поставленной задаче $\omega=1$, следовательно, схема устойчива при $\Delta t \leq 1$.

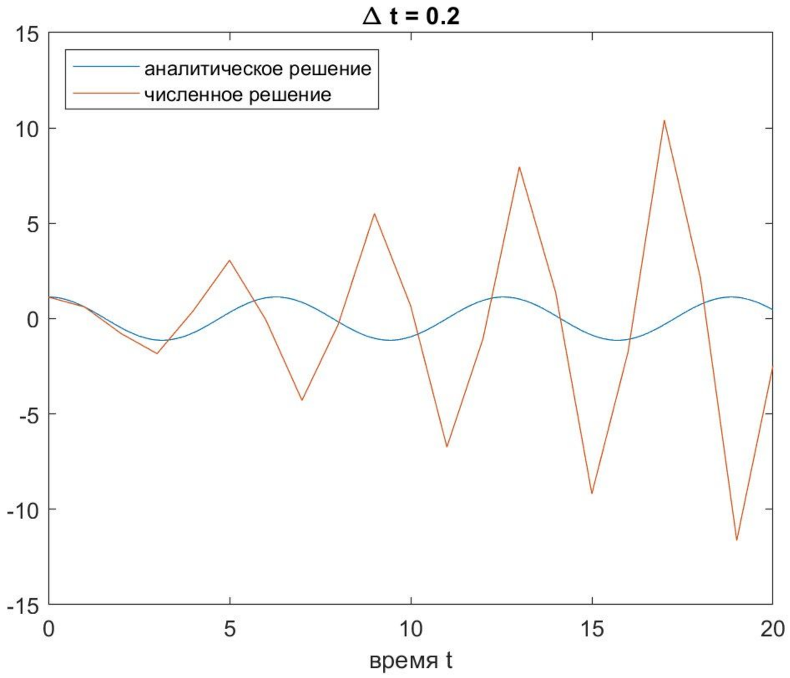
Листинг программы

```
dt1 = 1;% на границе устойчивости
dt2 = 0.5; % половинный шаг от границы устойчивости
dt3 = 0.2; % 1/5 от границы устойчивости
dta = 0.1;
w = 1;
t = 0:dt2:20;
t_a = 0:dta:20;
u = 0*t;
v = 0*t;
u(1) = u0;
v(1) = v0;
%% аналитическое решение
u_a = u0 * cos(w*t_a);
v_a = - w * u0 * sin(w*t_a);
% u(2) = u_a(2); % тут получаем следующее значение для применения схемы численного расчета
% v(2) = v_a(2);
%% 2 шаг эйлер
u(2) = u(1) + v(1)*dt2;
v(2) = v(1) - u(1)*dt2;
%% второй шаг по эйлеру с половинным шагом
% u(2) = u(1) + v(1)*dt2 - u(1)*(dt2/2)^2;
% v(2) = v(1) - u(1)*dt2 - v(1)*(dt2/2)^2;

%% расчет leapfrog
for it = 1:(length(t) - 2)
 u(it + 2) = u(it) + 2 * dt2* v(it + 1);
 v(it + 2) = v(it) - 2 * dt2 * u(it + 1);
end

%% сравнение результатов численного и аналитического решения
figure(1)
plot(t_a, u_a, t, u)
xlabel('время t')
title('\Delta t = 0.5')
legend('аналитическое решение', 'численное решение', 'Location','NorthWest')
return
```

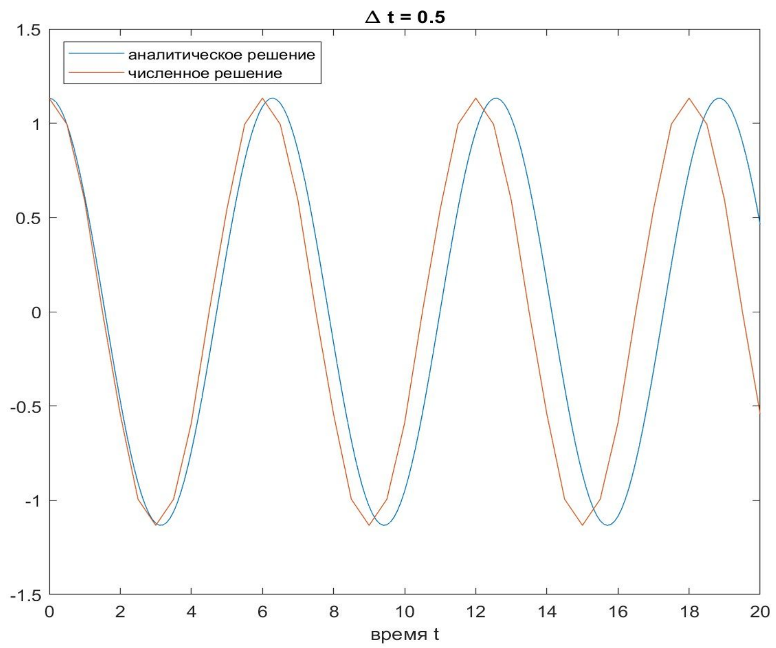
Результаты

I. Численные решения задачи Коши при различных значениях шага сетки в сравнении с аналитическим решением: (В узле сетки, следующим за начальным, использовано аналитическое (точное) решение.)

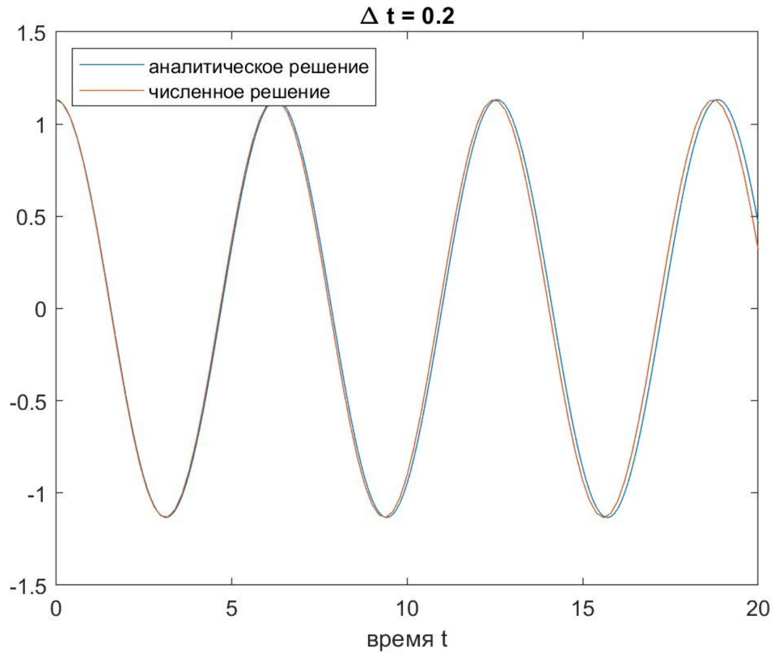
1) на границе устойчивости схемы (Δt = 1)



2) шаг в два раза меньше границы устойчивости схемы (Δt = 0.5)

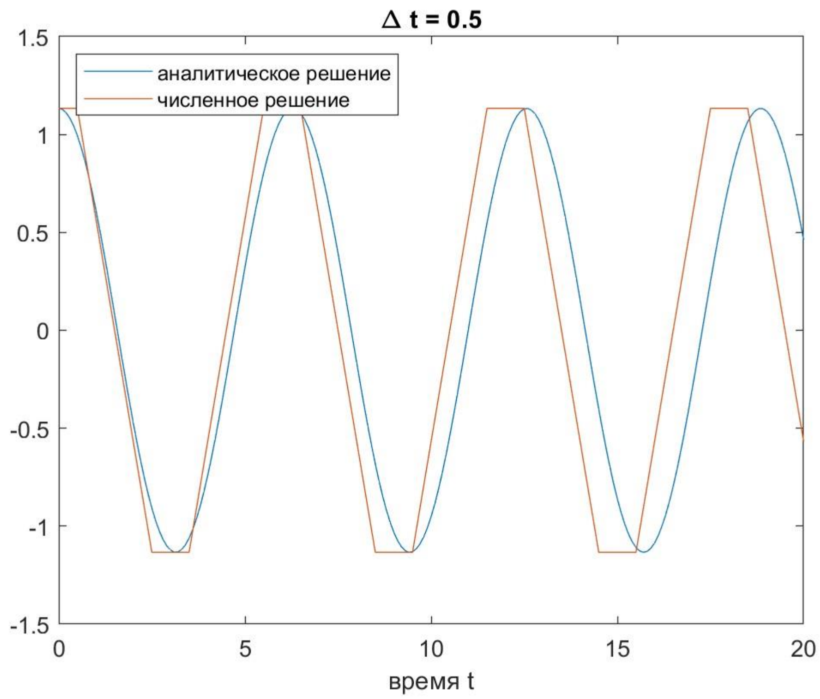


3) шаг в 5 раз меньше границы устойчивости (Δt = 0.2)

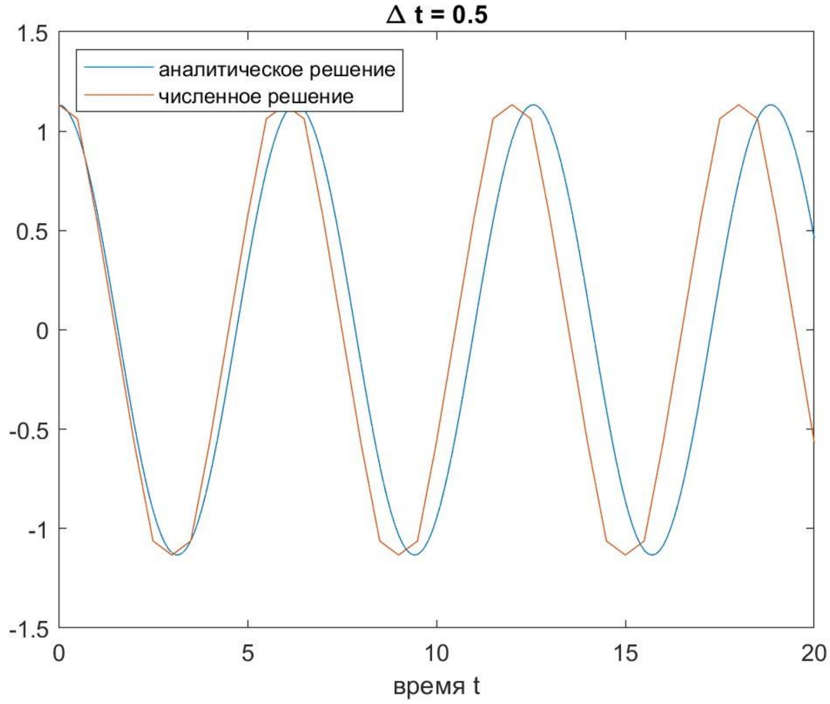


II. Численные решения задачи Коши для шага основной сетки в два раза меньше границы устойчивости. Значение функции в узле сетки, следующим за начальным рассчитано:

1) По схеме Эйлера



2) По схеме Эйлера с шагом в 2 раза меньше шага основной сетки


∆ t = 0.5
аналитическое решение
численное решение
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
5
10
15
20
время t