

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2

### Численное решение систем линейных алгебраических уравнений

**ЗАДАНИЕ.** Дана система линейных алгебраических уравнений  $AX = b$ .  
При выполнении задания используйте следующие нормы матриц.

А) Для **четных** вариантов.  $\|A\|_c = \max_{i=1,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$  – норма матрицы, определенная как *максимум сумм модулей элементов строк матрицы* является согласованной и подчиненной для нормы вектора  $\|\bar{x}\|_c = \max_{i=1,n} |x_i|$ .

Б) Для **нечетных** вариантов.  $\|A\|_l = \max_{j=1,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$  – норма матрицы, определенная как *максимум сумм модулей элементов столбцов* является согласованной и подчиненной для нормы вектора  $\|\bar{x}\|_l = \sum_{i=1}^n |x_i|$ .

Здесь  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – вектор пространства  $\mathbf{R}^n$ .

*Замечание о связи метрики (расстояния) и нормы:*  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ , где  $x$  и  $y$  элементы некоторого линейного нормированного пространства.

1. Вычислить определитель матрицы  $A$  и число обусловленности

$$\mu_A = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$$

**Сделать вывод (письменно)** о существовании, единственности и устойчивости решения СЛАУ.

Какие методы (численные) можно использовать при нахождении обратной матрицы и вычислении определителя матрицы? Ответить письменно.

2. Привести систему  $AX = b$  к виду  $X = d + CX$ .

Вычислить норму матрицы  $C$  и проверить (записать) условия сходимости процесса итерации.

Решить систему линейных алгебраических уравнений методом простой итерации и методом Зейделя. Продолжать итерации до тех пор, пока расстояние между последовательными приближениями не станет меньше  $\varepsilon = 10^{-2}$ .

А) в равномерной метрике  $\rho_c(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ ,

Б) в метрике Минковского  $\rho_1(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ .

3. Оценить погрешность приближенных значений в указанных метриках.
4. Оценить абсолютную погрешность полученных приближенных решений с точным решением  $X$ .

5. Вычислите «невязки» приближенного решения  $\varepsilon^{(k)} = b - AX^{(k)}$ ,  $\|\varepsilon^{(k)}\|$ .

**6. Сделать выводы (письменно)** о полученном приближенном решении на основании результатов п. 1, 3, 4, 5.

## Варианты заданий

- Вариант 1.** 
$$\begin{cases} 1,2x_1 + 11,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 5,3, \\ 10,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = -7, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 12,1x_4 = 24,6, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 9,8x_3 + 1,3x_4 = 10,3 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (-1; 0; 1; 2)^T.$$
- Вариант 2.** 
$$\begin{cases} 20,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 21,7, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 19,8x_3 + 1,3x_4 = 28,76, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 32,1x_4 = 49,72, \\ 1,2x_1 + 21,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 27,46 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (0,8; 1; 1,2; 1,4)^T.$$
- Вариант 3.** 
$$\begin{cases} 1,2x_1 + 11,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 10,23, \\ 10,9x_1 - 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = -12,93, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 12,1x_4 = -20,95, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 - 9,8x_3 + 1,3x_4 = -7,5 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (-1; 1,4; 0,5; -2)^T.$$
- Вариант 4.** 
$$\begin{cases} -1,2x_1 + 11,2x_2 - 1,5x_3 + 2,3x_4 = 11,66, \\ 10,9x_1 + 2,5x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 15, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 - 1,3x_3 + 12,1x_4 = 18,6, \\ 2,1x_1 - 1,4x_2 + 9,8x_3 + 1,3x_4 = 13,86 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (0,8; 1; 1,2; 1,4)^T.$$
- Вариант 5.** 
$$\begin{cases} 19,8x_1 + 2,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 65,25, \\ 2,1x_1 - 1,5x_2 + 20,5x_3 + 1,3x_4 = 75,1, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 - 32,1x_4 = -49,9, \\ 1,2x_1 + 24,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 85,85 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (2,5; 3; 3,5; 2)^T.$$
- Вариант 6.** 
$$\begin{cases} 0,8x_1 - 0,85x_2 + 1,22x_3 + 3,5x_4 = 7,42, \\ 1x_1 - 4,5x_2 - 0,98x_3 + 1,52x_4 = 1,06, \\ 0,73x_1 + 0,85x_2 + 4,71x_3 + 0,81x_4 = 5,6, \\ 3,82x_1 + 1,02x_2 + 0,75x_3 + 0,8x_4 = -1,47 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (-1; 0; 1; 2)^T.$$
- Вариант 7.** 
$$\begin{cases} 1,2x_1 + 11,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 10,23, \\ 10,5x_1 - 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = -12,93, \\ 0,9x_1 - 2,5x_2 + 1,3x_3 + 12,1x_4 = -27,95, \\ -2,1x_1 + 1,5x_2 - 9,8x_3 + 1,3x_4 = -3,3 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (-1; 1,4; 0,5; -2)^T.$$
- Вариант 8.** 
$$\begin{cases} 1,2x_1 + 13,5x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 53,75, \\ 10,12x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 38,05, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 - 12,2x_4 = -10,1, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 9,8x_3 - 1,5x_4 = 41,05 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (2,5; 3; 3,5; 2)^T.$$
- Вариант 9.** 
$$\begin{cases} 17,2x_1 - 1,2x_2 - 2,1x_3 - 0,9x_4 = -21,1, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 15,8x_3 + 1,3x_4 = 16,3, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 21,1x_4 = 42,6, \\ 1,2x_1 + 21,2x_2 + 1,5x_3 - 2,5x_4 = -4,7 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (-1; 0; 1; 2)^T.$$
- Вариант 10.** 
$$\begin{cases} 1,2x_1 - 11,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = -4,94, \\ -10,5x_1 - 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = -5,82, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 - 12,1x_4 = -12,16, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 - 9,8x_3 + 1,3x_4 = -6,76 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (0,8; 1; 1,2; 1,4)^T.$$

- Вариант 11.** 
$$\begin{cases} 2,4x_1 + 22,4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -37,8, \\ 10,9x_1 - 1,6x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = -13,2, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 12,1x_4 = -28,9, \\ -2,1x_1 - 1,5x_2 - 9,8x_3 - 1,3x_4 = 16 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (-1; -1; -1; -2)^T.$$
- Вариант 12.** 
$$\begin{cases} 20,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 38,5, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 19,8x_3 + 1,3x_4 = -34,1, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 32,1x_4 = 31,3, \\ 1,2x_1 + 21,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 1,9 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (2; 0; -2; 1)^T.$$
- Вариант 13.** 
$$\begin{cases} 0,88x_1 + 0,81x_2 + 1,28x_3 + 3,5x_4 = -4,7, \\ 1,05x_1 + 4,52x_2 + 0,98x_3 + 1,52x_4 = -7,95, \\ 0,73x_1 + 0,85x_2 + 4,71x_3 + 0,81x_4 = 3,58, \\ 3,82x_1 + 1,02x_2 + 0,75x_3 + 0,8x_4 = 8,57 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (3; -2; 1; -2)^T.$$
- Вариант 14.** 
$$\begin{cases} 1,2x_1 + 11,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 52,2, \\ 10,5x_1 - 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 4,77, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 12,1x_4 = 36,21, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 - 9,8x_3 + 1,3x_4 = -2,11 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (0,5; 4; 1,2; 2)^T.$$
- Вариант 15.** 
$$\begin{cases} -1,2x_1 - 11,2x_2 - 1,5x_3 - 2,5x_4 = -15,5, \\ 12,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 - 1,9x_4 = -9,4, \\ 0,9x_1 - 2,5x_2 + 1,3x_3 - 13,1x_4 = -13,9, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 9,8x_3 + 1,3x_4 = 20,3 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (-1; 1; 2; 1)^T.$$
- Вариант 16.** 
$$\begin{cases} 20,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 57,23, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 19,8x_3 + 1,3x_4 = 45,65, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 32,1x_4 = -23,75, \\ 1,2x_1 - 18,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = -21,98 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (2,5; 1,4; 2; -1)^T.$$
- Вариант 17.** 
$$\begin{cases} 1,2x_1 + 11,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = -5,7, \\ 10,5x_1 - 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 6,3, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 12,1x_4 = 12,2, \\ -2,1x_1 - 1,5x_2 + 9,8x_3 - 1,3x_4 = 19,8 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (0; -1; 2; 1)^T.$$
- Вариант 18.** 
$$\begin{cases} 1,2x_1 + 11,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = -23,9, \\ 10,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = -26,06, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 12,1x_4 = 5,9, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 9,8x_3 + 1,3x_4 = -19,36 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (-2; -2; -1,4; 1,2)^T.$$
- Вариант 19.** 
$$\begin{cases} 20,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 34,14, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 19,8x_3 + 1,3x_4 = 48,44, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 32,1x_4 = 56,12, \\ 1,2x_1 + 21,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 71,54 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (1,2; 3; 2; 1,4)^T.$$

- Вариант 20.** 
$$\begin{cases} -0,88x_1 - 0,81x_2 - 1,28x_3 - 3,5x_4 = -9,5, \\ 2,1x_1 + 9,04x_2 + 1,96x_3 + 3,04x_4 = 26,26, \\ 0,73x_1 + 0,85x_2 + 4,71x_3 + 0,81x_4 = 4,05, \\ -3,82x_1 + 1,02x_2 + 0,75x_3 + 0,8x_4 = -0,18 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (1; 2; 0; 2)^T.$$
- Вариант 21.** 
$$\begin{cases} 1,2x_1 - 14,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = -7,93, \\ 10,5x_1 - 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 5,19, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 12,1x_4 = -1,09, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 - 9,8x_3 + 1,3x_4 = 25,24 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (1; 0; 4; -2; 3; 0)^T.$$
- Вариант 22.** 
$$\begin{cases} 1,2x_1 + 11,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 19,18, \\ 10,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 32,23, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 12,1x_4 = -3,75, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 9,8x_3 + 1,3x_4 = 25,65 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (2,5; 1,4; 2; -1)^T.$$
- Вариант 23.** 
$$\begin{cases} 20,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 19,57, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 19,8x_3 + 1,3x_4 = 33,41, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 32,1x_4 = 76,21, \\ 1,2x_1 + 21,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 92,2 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (0,5; 4; 1,2; 2)^T.$$
- Вариант 24.** 
$$\begin{cases} 0,88x_1 + 0,81x_2 + 1,28x_3 + 3,5x_4 = 9,5, \\ 1,05x_1 + 4,52x_2 + 0,98x_3 + 1,52x_4 = 13,13, \\ 0,73x_1 + 0,85x_2 + 4,71x_3 + 0,81x_4 = 4,05, \\ 3,82x_1 + 1,02x_2 + 0,75x_3 + 0,8x_4 = 7,46 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (1; 2; 0; 2)^T.$$
- Вариант 25.** 
$$\begin{cases} 1,2x_1 + 11,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 1,9, \\ 10,5x_1 - 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 17,7, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 12,1x_4 = 11,3, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 - 9,8x_3 + 1,3x_4 = 25,1 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (2; 0; -2; 1)^T.$$
- Вариант 26.** 
$$\begin{cases} 20,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 65, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 19,8x_3 + 1,3x_4 = 81,65, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 13,1x_4 = 40,5, \\ -1,2x_1 + 21,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 70,85 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (2,5; 3; 3,5; 2)^T.$$
- Вариант 27.** 
$$\begin{cases} 0,9x_1 + 0,81x_2 + 1,28x_3 + 3,5x_4 = 9,52, \\ 1,05x_1 + 4,52x_2 + 0,98x_3 + 1,52x_4 = 13,13, \\ 0,73x_1 + 0,85x_2 + 4,71x_3 + 0,81x_4 = 4,05, \\ 3,82x_1 + 1,02x_2 + 0,75x_3 + 0,8x_4 = 7,46 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (1; 2; 0; 2)^T.$$
- Вариант 28.** 
$$\begin{cases} 1,2x_1 + 11,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = -18,9, \\ 10,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = -16, \\ -0,9x_1 - 2,5x_2 - 1,3x_3 - 12,1x_4 = 28,9, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 - 9,8x_3 + 1,3x_4 = 3,6 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (-1; -1; -1; -2)^T.$$
- Вариант 29.** 
$$\begin{cases} 20,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 38,5, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 19,8x_3 + 1,3x_4 = -34,1, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 32,1x_4 = 31,3, \\ 1,2x_1 + 21,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 1,9 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (2; 0; -2; 1)^T.$$

**Вариант 30.** 
$$\begin{cases} 0,88x_1 + 0,81x_2 + 1,28x_3 + 3,5x_4 = -4,7, \\ -1,05x_1 + 4,52x_2 + 0,98x_3 + 1,52x_4 = -14,25, \\ 0,73x_1 + 0,85x_2 + 4,71x_3 + 0,81x_4 = 3,58, \\ 3,82x_1 + 1,02x_2 + 0,75x_3 + 0,8x_4 = 8,57 \end{cases}; \text{точное решение:}$$

$$X = (3; -2; 1; -2)^T.$$