Programació 2
Facultat d'Informàtica d'Informàtica, UPC

Professorat de PRO2

Primavera 2021

- Colaboracions (en ordre alfabètic): Juan Luis Esteban, Ricard Gavaldà, Conrado Martínez, Fernando Orejas
- Aquestes transparències **no** substitueixen els apunts de l'assignatura, els complementen

Temari

Part 1:	Disseny Modular
Part 2:	Estructures Lineals
Part 3:	Arbres
Part 4:	Disseny Iteratiu: Verificació i Derivació
Part 5:	Disseny Recursiu
Part 6:	Millores de Eficiència
Part 7:	Tipus Recursius de Dades

Part I

Disseny Modular

Motivació

- Com abordar projectes grans
- Quins ajuts ens pot donar el llenguatge de programació
- I quina disciplina hem de seguir els programadors

Com abordar programes grans

Descomposició en *mòduls*. Clàssica en enginyeria

Facilita

- raonar sobre correctesa, eficiència, etc. per parts
- fer programes llegibles, reusables, mantenibles, etc.
- treballar en equip

Què és una bona descomposició modular?

- *Independència*: canvis en un mòdul no han d'obligar a modificar altres mòduls.
- *Coherència interna*: els mòduls tenen significat per si mateixos. Interactuen amb altres mòduls de manera simple i ben definida

Abstracció

Eina de raonament en programes grans:

Oblidar, temporalment, alguns detalls del problema per tal de transformar-lo en un o bé més simple o bé més general

Especificació Pre/Post

```
/* Pre: a > 0 i b ≥ 0 */
  int pot(int a, int b);
/* Post: el resultat és a multiplicat per ell mateix
         b vegades */
```

Especificació vs. implementació

- Regla: Un canvi en la implementació d'una funció que respecti la Pre/Post no pot mai fer que un programa que la usa deixi de funcionar
- Especificació = Contracte entre usuari i implementador
- Especificació = Abstracció de l'implementació

Part I

Disseny Modular

7 Ampliacions de tipus de dades: mòduls funcionals i llibreries

8 Biblioteques i Genericitat

Tipus de mòduls

- ***Mòdul funcional***: conté un conjunt d'operacions noves necessàries per resoldre algun problema o subproblema
- ***Mòdul de dades***: conté la definició d'un nou tipus i les seves operacions; és habitual a Programació 2

Com els fem "abstractes"?

- Mòdul funcional: només deixem veure les especificacions de les operacions
- Mòdul de dades: només deixem veure les capçaleres de les operacions del tipus i una explicació de com es comporten

Abstracció per dades: tipus predefinits

`int`:

- Valors enters `MININT .. MAXINT`
- Operacions +, *, %, /, <, >, ==, ...
- a+b == b+a; a*b == b*a, a*(b+c)==a*b+a*c, etc. (si no hi ha overflow)
- a+0 == a, a*1 == a, a == a, a < a+1, etc.
- ...

Que s'implementin en base 2 com a vectors de bits és irrellevant per a la majoria de problemes de Programació 1 i Programació 2

Abstracció per dades: nous tipus

Solució insatisfactòria - pro1

```
typedef struct {
            double re, im;
        } Complex;

void suma(Complex a, Complex b, Complex& c) {
        c.re = a.re + b.re;
        c.im = a.im + b.im;
}
```

No hi ha res amagat. No hi ha contracte
Si decidim representar els complexos com a mòdul + angle (forma polar), cal canviar totes les accions/funcions que usen el tipus

Tipus Abstracte de Dades (TADs)

Definim un tipus no per com està implementat,
sinó per quines operacions podem fer amb les variables del tipus

Un tipus es defineix donant:

- El nom del tipus
- Operacions per construir, modificar i consultar elements del tipus
- Descripció de *qué* fan les operacions (no *com*)
- Un tipus de dades pot tenir diverses implementacions. El tipus és la seva especificació, no les seves implementacions

TADs i independència entre mòduls

1. **Fase d'especificació:**
   Decidir operacions del TAD i contractes d'ús

2. **Fase d'implementació:**
   Decidir una representació i codificar les operacions

Conseqüència:

Un canvi en la implementació d'un TAD que no afecti l'especificació de les seves operacions no pot mai fer que un programa que usa el TAD deixi de funcionar

Part I

Disseny Modular

7 Ampliacions de tipus de dades: mòduls funcionals i llibreries

8 Biblioteques i Genericitat

Orientació a objectes

Una manera de separar especificació d'implementació, d'implementar Tipus Abstractes de Dades
A Programació 2 només veurem *una part* de la utilitat d'aquesta manera de pensar

Més en altres assignatures: *herència* i *polimorfisme*

Classes i objectes

- Les variables i constants d'un tipus són objectes
- Una classe és el patró comú al *objectes* d'un tipus
- A l'inrevés: Donada una classe, podem definir-ne objectes o instàncies
- Cada classe defineix els atributs (= camps) i els mètodes (= operacions) del tipus.
- Cada objecte és propietari dels seus atributs i mètodes
- Els mètodes tenen un paràmetre implícit: el seu propietari o objecte sobre el qual s'aplica el mètode
- Podem fer més accions/funcions que operen amb el tipus, però si no són dins de la classe no són mètodes

Exemple: La classe `Estudiant`

Un Estudiant es caracteritza per:

- Un DNI, que és un enter no negatiu, obligatori
- Una nota, optativa. Si en té, és un real (`double`) entre 0 i un cert valor màxim (p.ex., 10). Si no la té, es considera NP

Exemple d'ús d'Estudiant: canviar un NP per 0

Ús de la classe `Estudiant`

```
/* Pre: tots els elements de v són Estudiants
        amb DNIs diferents */
bool canvia_np_per_zero(vector<Estudiant>& v, int dni);
/* Post: si v conté un Estudiant amb DNI = dni, i aquest
         no té nota, llavors aquest estudiant passa
         a tenir nota 0; la resta de v no canvia;
         el resultat diu si l'estudiant s'ha trobat */
```

Exemple d'ús d'Estudiant: canviar un NP per 0

Ús de la classe Estudiant

```
bool canvia_np_per_zero(vector<Estudiant>& v, int dni) {
  int i = 0;
  while (i < v.size()) {
    if (v[i].consultar_DNI() == dni) {
      if (not v[i].te_nota())
        v[i].afegir_nota(0);
      return true;
    }
    ++i;
  }
  return false;
}
```

Exemple d'ús d'Estudiant: calcular nota mitjana

Un altre exemple d'ús

```
/* Pre: tots els Estudiants de v tenen DNIs diferents */
double nota_mitjana(const vector<Estudiant>& v);
/* Post: el resultat és la nota mitjana dels Estudiants
         que tenen nota; si cap Estudiant de v té nota,
         retorna -1 */
```

Exemple d’ús d’Estudiant: calcular nota mitjana

Un altre exemple d’ús

```
double nota_mitjana(const vector<Estudiant>& v) {
     int n = 0;
     double suma = 0;
     for (int i = 0; i < v.size(); ++i) {
         if (v[i].te_nota()) {
             ++n;
             suma += v[i].consultar_nota();
         }
     }
     if (n > 0)
        return suma/n;
     else
        return -1;
}
```

Paràmetre implícit

En C++ sense OO:

Declaració d'una funció/acció

```
/* Pre: -- */
bool te_nota(const Estudiant &e);
/* Post: El resultat és cert si i només si e té nota */
```

Amb OO:

Declaració d'un mètode

```
/* Pre: -- */
bool te_nota() const;
/* Post: El resultat és cert si i només si el
         paràmetre implícit té nota */
```

Noteu el `const` referit a l'objecte implícit

Exemple OO: crida a un mètode

Forma general:

```
<nom_de_l'objecte>.<nom_del_mètode>(<altres paràmetres>)
```

Crida a una funció

```
bool b = te_nota(est);
```

Aplicació/invocació d'un mètode

```
b = est.te_nota();
```

Exemple OO: crida a un mètode modificador

Especificació

```
/* Pre: el paràmetre implícit té nota
        i 'nota' és una nota vàlida (entre 0
        i la nota màxima) */
void modificar_nota(double nota);
/* Post: la nota del paràmetre implícit
         passa a ser 'nota' */
```

Fixeu-vos: sense `const`, el paràmetre implícit pot ser modificat pel mètode $\Rightarrow$ el mètode rep el seu paràmetre implícit per *referència*

Crida

```
est.modificar_nota(x);
```

Part I

Disseny Modular

7 Ampliacions de tipus de dades: mòduls funcionals i llibreries

8 Biblioteques i Genericitat

Tipus d'operacions: *Creadores* o *Constructores*

Creadores = funcions que serveixen per crear objectes nous

En C++, hi ha constructores:

- Tenen el mateix nom de la classe i crean un objecte nou d'aquest tipus
- No ténen paràmetre implícit! Crean un object abans no existent!
- La llista de paràmetres permet distingir entre diverses constructores
- Constructora per defecte: sense paràmetres, crea un objecte nou sense informació

Tipus d'operacions: *Constructores*

Exemple 1: Constructora por defecte

```
Estudiant est;
```

Exemple 2: Constructora amb un paràmetre de tipus `int`

```
Estudiant est(46567987);
```

Qué passa quan fem les següents declaracions?

```
vector<char> v;
vector<char> w(10);
vector<char> linea(10,'*');
vector< vector<char> > M(10,vector<char>(5,'-'));
```

Tipus d'operacions: *Destructora*

Destructora

```
~nom_classe() { ... }
```

- En C++, una operació destructora d'objectes de la classe
- Fa operacions que puguin fer falta abans que l'objecte desaparegui
- Rarament la cridarem. No en parlarem més fins al Tema 7
- L'operació per defecte no fa res; s'aplica si no n'escrivim cap
- Podem redefinir-la
- Es crida automàticament al final de cada bloc amb les variables declarades en el bloc

Tipus d'operacions: *Destructora*

```
while (...) {
    Estudiant e1;
    ...
    if (...) {
       Estudiant e2;
       ...
       // aquí es fa la crida e2.~Estudiant()
    }
    ...
    // aquí es fa la crida e1.~Estudiant()
}
```

Pregunta: qué passa si declarem `vector<Estudiant> v(10)`?

Tipus d'operacions: *Modificadores*

- Transformen l'objecte propietari (paràmetre implícit), potser amb informació aportada per altres paràmetres
- Normalment en C++ retornen `void`; són accions
- Seguretat: Tots els canvis es fan via mètodes ben definits

Tipus d'operacions: *Consultores*

- Proporcionen informació sobre l'objecte propietari, potser amb ajut d'informació aportada per altres paràmetres
- Normalment porten `const` perquè no modifiquen el paràmetre implícit
- Normalment funcions, tret que hagin de retornar més d'un resultat; en aquest cas poden ser accions amb més d'un paràmetre de sortida (passat per referència)

Tipus d'operacions: *Consultores*

Exemple 1: Ús d'un mètode consultor

```
double x = est.consultar_nota();
```

Exemple 2: Ús d'un mètode consultor

```
if (est.te_nota()) ... else ...
```

Aquest mètode consultor és necessari perquè hi ha operacions que tenen com a precondició que l'estudiant tingui o no tingui nota

Mètodes de classe

- Són propis de la classe, no de cada objecte
- No tenen paràmetre implícit

Mètode de classe

```
/* Pre: -- */
static double nota_maxima();
/* Post: el resultat és la nota màxima que
      poden tenir qualsevol estudiant */
```

Crida d'un mètode de classe

```
cin >> nota;
if (nota >= 0 and nota <= Estudiant::nota_maxima())
  e.modificar_nota(nota);
else
  cout << "La nota introduïda no és vàlida" << endl;
```

Especificació de classes en C++

```
class Estudiant {
public:
// Constructores
Estudiant();
/* Pre: cert */
/* Post: el resultat és un estudiant amb DNI = 0
         i sense nota */

Estudiant(int dni);
/* Pre: dni >= 0  */
/* Post: el resultat és un estudiant amb DNI = dni
         i sense nota */

// Destructora: esborra automàticament els objectes
//              locals en sortir d'un àmbit de
//              visibilitat
~Estudiant();
```

Especificació de classes en C++

```
...
// Modificadores
void afegir_nota(double nota);
/* Pre: l'estudiant implícit no té nota i
        'nota' és una nota vàlida */
/* Post: la nota de l'estudiant implícit
         passa a ser 'nota' */

void modificar_nota(double nota);
/* Pre: l'estudiant implícit té nota i
        'nota' és una nota vàlida */
/* Post: la nota de l'estudiant implícit
         passa a ser 'nota' */
```

Especificació de classes en C++

```
...
// Consultores
int consultar_DNI() const;
/* Pre: cert  */
/* Post: retorna el DNI de l'estudiant */

bool te_nota()  const;
/* Pre: cert  */
/* Post: retorna cert si i només si
         l'estudiant té nota */

double consultar_nota() const;
/* Pre: l'estudiant té nota */
/* Post: retorna la nota de l'estudiant */

// Mètodes de classe
static double nota_maxima();
/* Pre: cert */
/* Post: retorna la nota màxima que pot
         tenir qualsevol estudiant  */

...
};
```

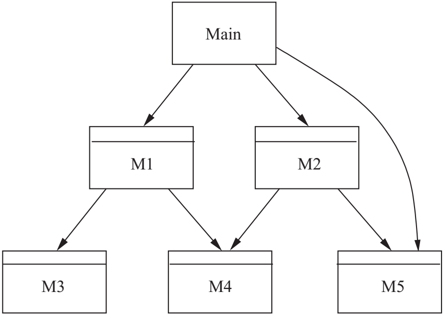
Part I

Disseny Modular

7 Ampliacions de tipus de dades: mòduls funcionals i llibreries

8 Biblioteques i Genericitat

Diagrames modulars



“Jerarquia de classes” en programació OO

Diferents tipus d’arcs per a diferents tipus de relacions

En aquest curs, només relacions d’ús

Diagrames modulars

- Mòdul del programa principal: sense arcs entrants
- Resta mòduls: mòduls de dades o funcionals

- Graf acíclic, no necessàriament un arbre
- “Jerarquia de classes” en programació OO

Relacions entre mòduls

Programa = Conjunt de mòduls relacionats / dependents

Un mòdul pot:

- *definir* un nou tipus de dades, a partir d'altres
- *ampliar/enriquir* un tipus amb noves operacions

Relacions entre mòduls

Programa = Conjunt de mòduls relacionats / dependents

Un mòdul pot:

- *definir* un nou tipus de dades, a partir d'altres
- *ampliar/enriquir* un tipus amb noves operacions

Les relacions d'ús poden ser:

- visibles, en especificació
- ocultes, per una implementació concreta

Exercici: Conjunt d'Estudiants

Volem definir una nova classe `Cjt_estudiants`, per gestionar conjunts d'estudiants

Relació d'ús: Dins de `Cjt_estudiants.hh`

```
#include "Estudiant.hh"
```

Important: per especificar `Cjt_estudiants` no cal saber la implementació de la classe `Estudiant`

Especificació de la classe `Cjt_estudiants`

```
#include "Estudiant.hh"

// Un Cjt_estudiant Representa un conjunt d'estudiants,
// ordenat per DNI creixent amb un màxim nombre d'Estudiants
// Es poden consultar i modificar els seus elements
// (Estudiants) per DNI o per posició en l'ordre
// creixent de DNI

class Cjt_estudiants {
public:
// Constructores

/* Pre: cert */
/* Post: crea un conjunt d'estudiants buit */
Cjt_estudiants();

// Destructora
~Cjt_estudiants();
```

Especificació de la classe `Cjt_estudiants`

```
// Modificadores

/* Pre: el conjunt no conté cap estudiant amb el DNI
        de l'Estudiant 'est'; la mida actual del conjunt
        és menor que la  mida màxima permesa */
/* Post: s'ha afegit l'estudiant 'est' al conjunt  */
void afegir_estudiant(const Estudiant &est);

/* Pre: el conjunt conté un estudiant amb el mateix DNI
        que l'Estudiant 'est' */
/* Post: l'Estudiant 'est' substitueix a l'estudiant del
         conjunt original que tenia el mateix DNI que 'est' */
void modificar_estudiant(const Estudiant &est);
```

Especificació de la classe `Cjt_estudiants`

```
/* Pre: 1 <= i <= nombre d'estudiants en el conjunt,
        l'i-èssim Estudiant del conjunt en ordre creixent
        per DNI té el mateix DNI que 'est' */

/* Post:l'Estudiant 'est' substitueix a l'i-èssim estudiant
        en ordre creixent de DNI del conjunt original */
void modificar_iessim(int i, const Estudiant &est);
```

Especificació de la classe Cjt_estudiants

```
// Consultores

/* Pre: cert */
/* Post: el resultat és el nombre d'estudiants del conjunt */
int mida() const;

/* Pre: dni > 0 */
/* Post: torna cert si i només si el conjunt conté un Estudiant
         amb DNI igual al donat (dni) */
bool existeix_estudiant(int dni) const;


/* Pre: el conjunt conté un Estudiant amb DNI = dni */
/* Post: el resultat és l'Estudiant amb DNI = dni
         present en el conjunt */
Estudiant consultar_estudiant(int dni) const;
```

Especificació de la classe `Cjt_estudiants`

```
/* Pre: 1 <= i <= mida del conjunt */
/* Post: torna l'Estudiant i-èssim del conjunt
         en ordre creixent de DNI */
Estudiant consultar_iessim(int i) const;

// Mètode de classe
/* Pre: cert */
/* Post: el resultat es el nombre maxim d'estudiants que
         pot arribar a tenir un Cjt_Estudiant */
static int mida_maxima();
```

Especificació de la classe `Cjt_estudiants`

```
// Lectura i escriptura

/* Pre: cert */
/* Post: el paràmetre implícit conté el conjunt d'estudiants
         llegits del canal estàndard d'entrada */
void llegir();

/* Pre: cert */
/* Post: s'han escrit en canal estàndard de sortida els
         estudiants del conjunt en ordre ascendent per DNI */
void escriure() const;

private:
// elements privats de la classe: atributs,
// mètodes privats, ...
};
```

Part I

Disseny Modular

Implementació d’una classe

Fases:

- Implementar el tipus: Triar una representació. Definir els atributs amb tipus ja existents
- Implementar les operacions: Codificar les seves operacions en termes d’instruccions
- Pot ser convenient definir mètodes i funcions auxiliars (privades, no visibles des de fora)

Fitxers

Ideal: Separació completa públic i privat

- `.hh`: Capçaleres de les operacions públiques
- `.cc`: Atributs i codi de totes les operacions

Fitxers

Ideal: Separació completa públic i privat

- `.hh`: Capçaleres de les operacions públiques
- `.cc`: Atributs i codi de totes les operacions

Com es fa:

- `.hh` $\Rightarrow$ part `private`: Atributs i capçaleres de operacions privades
- `.hh` $\Rightarrow$ part `public`: Capçaleres de les operacions públiques
- `.cc` $\Rightarrow$ Implementació de les operacions públiques i privades

Exemple: Implementació de la classe `Estudiant`

Fitxer `Estudiant.hh`

```
class Estudiant {
public:

// ...

// Lectura i escriptura
void llegir();
void escriure() const;

private:
int dni;
double nota;
bool amb_nota;
static const int MAX_NOTA = 10;

/* Invariant de la representacio:
   dni >= 0
   si amb_nota llavors 0 <= nota <= MAX_NOTA
*/
};
```

Exemple: Implementació de la classe `Estudiant`

- En aquesta implementació de la classe `Estudiant` no es defineixen mètodes privats
- La constant estàtica `MAX_NOTA` és un atribut de classe

Exemple: Implementació de la classe `Estudiant`

Fitxer `Estudiant.cc`

```
#include <iostream>
#include "Estudiant.hh"
using namespace std;

Estudiant::Estudiant()
/* Pre: cert */
/* Post: crea un estudiant amb DNI=0 i sense nota */
{
    dni = 0; amb_nota = false;
}

Estudiant::Estudiant(int d)
/* Pre: dni>=0 */
/* Post: crea un estudiant amb DNI=d i sense nota */
{
    dni = d; amb_nota = false;
}

Estudiant::~Estudiant() {}
```

Exemple: Implementació de la classe `Estudiant`

```
void Estudiant::afegir_nota(double n)
/* Pre: l'Estudiant no té nota i 0 <= n <= nota_maxima() */
/* Post: la nota de l'Estudiant passa a ser "nota" */
{
    nota = n;
    amb_nota = true;
}

void Estudiant::modificar_nota(double n)
/* Pre: l'Estudiant té nota i 0 <= n <= nota_maxima() */
/* Post: la nota de l'Estudiant passa a ser n */
{
    nota = n;
}

int Estudiant::consultar_DNI() const
/* Pre: cert  */
/* Post: torna el DNI de l'Estudiant  */
{
    return dni;
}
```

Exemple: Implementació de la classe `Estudiant`

```
double Estudiant::consultar_nota() const
/* Pre: l'Estudiant té nota */
/* Post: torna la nota de l'Estudiant */
{
    return nota;
}

double Estudiant::nota_maxima() // aquí no es posa "static"
/* Pre: cert */
/* Post: torna la nota màxima que pot tenir qualsevol Estudiant */
{
    return MAX_NOTA;
}

bool Estudiant::te_nota() const
/* Pre: cert */
/* Post: torna cert si i només si l'Estudiant té nota */
{
    return amb_nota;
}
```

Exemple: Implementació de la classe `Estudiant`

```
void Estudiant::llegir()
/* Pre: el cin conté un enter no negatiu d i un double n */
/* Post: l'Estudiant passar a tenir el DNI d; si n està
         en el rang [0..nota_maxima()] llavors la nota de
         l'Estudiant passa a ser n; altrament l'Estudiant
         es queda sense nota */
{
    cin >> dni;
    double x;
    cin >> x;
    if (x >= 0 and x <= MAX_NOTA) {
       nota = x;
       amb_nota = true;
    } else {
      amb_nota = false;
    }
}
```

Exemple: Implementació de la classe Estudiant

```
void Estudiant::escriure() const
/* Pre: cert */
/* Post: s'han escrit en el cout el DNI i la nota de l'Estudiant
         si l'Estudiant té nota, separats per un espai en blanc,
         o bé el DNI seguit de "NP" si l'Estudiant
         no té nota; a més de aquesta informació, a la sortida
         s'ha escrit un salt de línia */
{
    if (amb_nota) cout << dni << " " << nota << endl;
    else cout << dni << " NP" << endl;
}
```

Exercici: implementació alternativa del tipus `Estudiant`

Objectiu: demostrar la independència de la implementació

- Eliminem l'atribut booleà
- Si l'atribut `nota` és `-1`, l'estudiant no té nota

No canviem l'especificació → no cal revisar classes que l'usen

Atributs

- Variables o constants de tipus previs
- Sempre els declarem a la part `private`

Atributs

- Variables o constants de tipus previs
- Sempre els declarem a la part `private`

- `const` = és una constant (no modificable)

Atributs

- Variables o constants de tipus previs
- Sempre els declarem a la part `private`

- `const` = és una constant (no modificable)
- `static` = és un atribut de classe (*compartit* per tots els objectes de la classe)
  - S'accedeix amb `classe::atribut` i no `objecte.atribut` (no cal posar `classe::` quan s'accedeix a l'atribut des de dintre de la classe)

Operacions auxiliars privades

- Útils per a implementar les públiques
- Capçalera a la part `private` del fitxer `.hh`: Només poden ser cridades per un mètode públic o privat de la classe
- Tenen accés als atributs dels objectes de la classe
- Poden ser mètodes (s'apliquen sobre l'objecte propietari) o mètodes de classe (`static`)

Implementació de mètodes públics i privats

Notació: `nom_classe::nom_operacio(...)`

- :: vol dir "No estem implementant una op. nova, sinó la que ja haviem declarat abans"
- lliguem cada operació amb les seva capçalera al corresponent arxiu `.hh`
- dóna el dret d'accedir a la part private de la classe
- tant per a ops. públiques com privades
- en la implementació dels mètodes de classe no es posa `static`

Accés a un camp/atribut

Forma general: `nom_objecte.nom_atribut`

Exemple: `x.c`

Si `x` és un objecte de tipus `T`, llavors `c` ha de ser un atribut de `T`

Accés a un camp/atribut

Casos particulars:

- Quan accedim als atributs de l'objecte implícit en un mètode només s'escriu el nom de l'atribut
  - Ex: `dni` sols es refereix al camp `dni` del paràmetre implícit

Accés a un camp/atribut

Casos particulars:

- Quan accedim als atributs de l'objecte implícit en un mètode només s'escriu el nom de l'atribut
  - Ex: `dni` sols es refereix al camp `dni` del paràmetre implícit

- En alguns casos molt específics necessitem referir-nos explícitament a l'objecte implícit d'un mètode: `this` = el paràmetre implícit = l'objecte propietari.
  Usos:
  - Desambiguar quan en aquell àmbit de visibilitat hi ha una variable amb el mateix nom que un atribut.
  - Pasar el paràmetre implícit com a paràmetre explícit d'una operació
  - En realitat, `this` és un apuntador a l'objecte implícit; l'objecte implícit és `*this`

Exemple: Implementació de `Cjt_estudiants`

Representació i invariant:

- Un atribut de classe constant `MAX_NEST`, que estableix el màxim nombre d'estudiants que pot haver en un conjunt

Exemple: Implementació de `Cjt_estudiants`

Representació i invariant:

- Un atribut de classe constant `MAX_NEST`, que estableix el màxim nombre d'estudiants que pot haver en un conjunt
- Un atribut enter `nest`, el nombre d'estudiants en el conjunt, $0 \leq \texttt{nest} \leq \texttt{MAX\_NEST}$
- Un atribut `vest` que és un vector de `Estudiant`s, de mida `MAX_NEST` i que estarà ordenat per dni en tot moment
  - els mètodes `afegir_estudiant` i `llegir_cjt_estudiants` seràn més complexos (i costosos en temps) per a garantir que els continguts del vector `vest` estàn ordenats
  - afavoreix la cerca (perquè es pot fer dicotòmica)

Exemple: Implementació de `Cjt_estudiants`

Operacions privades

- Un mètode privat `ordenar_cjt_estudiants`
- Un mètode de classe (`static`) privat `cerca_dicot`, rep explícitament el vector d'Estudiant sobre el qual es fa la cerca

Invariant de la representació

- Propietats dels atributs que ens comprometem a mantenir en la implementació de les operacions
- Queda garantit si només es manipula la representació amb ops. constructores i modificadores
- Implícit com a Pre i Post a totes les operacions
- És bona *praxis* escriure'l junt amb la representació: molt bona documentació!

Invariant de la representació

Classe `Estudiant`

- dni >= 0
- si `(amb_nota)` llavors `(0 <= nota <= MAX_NOTA)`

o be (implementacio sense booleà)

- dni >= 0
- `(nota == -1)` o bé `(0 <= nota <= MAX_NOTA)`

Invariant de la representació

Classe `Cjt_estudiants`

- 0 <= nest <= vest.size() = MAX_NEST,
- tots els estudiants de vest[0..nest-1] tenen dnis diferents,
- vest[0..nest-1] està ordenat creixentment pels DNI dels estudiants

Implementació de classes

Cjt_estudiants.hh

```
class Cjt_estudiants {
   ...
private:
    vector<Estudiant> vest;
    int nest;
    static const int MAX_NEST = 20;

    /*
     Invariant de la representacio:
     * 0 <= nest <= vest.size() = MAX_NEST,
     * tots els estudiants en vest[0..nest-1] tenen DNI
       diferents, i
     * vest[0..nest-1] esta ordenat creixentment pels DNI
       dels estudiants
    */
```

Implementació de classes

Cjt_estudiants.hh

```
class Cjt_estudiants {
    ...
private:
    ...
void ordenar_cjt_estudiants();
/* Pre: cert */
/* Post: els Estudiants del conjunt estan ordenats
         creixentment pels seus DNI */

static int cerca_dicot(const vector<Estudiant> &vest,
                       int left, int right, int x);
/* Pre: vest[left..right] està ordenat creixentment
        per DNI, 0 <= left, right < vest.size() */
/* Post: si a vest[left..right] hi ha un element
         amb DNI = x, el resultat és una posicio que
         el conté; si no, el resultat es -1 */
};
```

Implementació de classes

Cjt_estudiants.cc

```
#include "Cjt_estudiants.hh"
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;

Cjt_estudiants::Cjt_estudiants() {
    nest = 0;
    vest = vector<Estudiant>(MAX_NEST);
}
```

Implementació de classes

Cjt_estudiants.cc

```
void Cjt_estudiants::afegir_estudiant(const Estudiant &est) {
    int dni = est.consultar_DNI();
    int i = nest - 1;
    while (i >= 0 and dni < vest[i].consultar_DNI()) {
        vest[i + 1] = vest[i];
        --i;
    }
    vest[i + 1] = est;
    ++nest;
```

Implementació de classes

Cjt_estudiants.cc

```
void Cjt_estudiants::modificar_estudiant(const Estudiant &est) {
    // per la Pre, segur que trobem el DNI d'est com a DNI
    // d'algun element de vest[0..nest-1]; apliquem-hi la cerca
    // dicotomica
    int i = cerca_dicot(vest, 0, nest-1, est.consultar_DNI());
    // i es la posicio amb el DNI d'est
    vest[i] = est;
}

void Cjt_estudiants::modificar_iessim(int i, const Estudiant &est) {
    vest[i-1] = est;
```

Implementació de classes

Cjt_estudiants.cc

```
int Cjt_estudiants::mida() const {
    return nest;
}

int Cjt_estudiants::mida_maxima() {
    return MAX_NEST;
}

bool Cjt_estudiants::existeix_estudiant(int dni) const {
    int i = cerca_dicot(vest, 0, nest-1, dni);
    return (i != -1);
```

Implementació de classes

Cjt_estudiants.cc

```
Estudiant Cjt_estudiants::consultar_estudiant(int dni) const {
    int i = cerca_dicot(vest, 0, nest-1, dni);
    return vest[i];
}

Estudiant Cjt_estudiants::consultar_iessim(int i) const {
    return vest[i-1];
```

Implementació de classes

Cjt_estudiants.cc

```
void Cjt_estudiants::llegir() {
    cin >> nest;
    for (int i = 0; i < nest; ++i) vest[i].llegir();
    ordenar_cjt_estudiants();
    // noteu que l'apliquem sobre el objecte implÃcit
}

void Cjt_estudiants::escriure() const {
    for (int i = 0; i < nest; ++i) vest[i].escriure();
```

Implementació de classes

Cjt_estudiants.cc

```
// observem que no hi ha referencia a nest
int Cjt_estudiants::cerca_dicot(const vector<Estudiant> &vest,
                                int left, int right, int x) {
    int i; bool found = false;
    while (left <= right and not found) {
        i = (left + right)/2;
        if (x < vest[i].consultar_DNI()) right = i - 1;
        else if (x > vest[i].consultar_DNI()) left = i + 1;
        else found = true;
    }
    // si l'element buscat existeix, i es la posicio que volem
    if (found) return i;
    else return -1;
```

Implementació de classes

```
// ordena el vector d'estudiants per dni creiexentment,
// usant el metode de seleccio
// Es un exemple. Milloraria usant algorismes d'ordenacio
// mes rapids.
void Cjt_estudiants::ordenar_cjt_estudiants() {
   for (int i = 0; i < nest - 1; ++i) {
          int min_dni = vest[i].consultar_DNI();
          int pos_min = i;
          for (int j = i+1; j < nest; ++j)
                 if (min_dni > vest[j].consultar_DNI()) {
                        pos_min = j;
                        min_dni = vest[j].consultar_DNI();
                 }
          Estudiant etemp = vest[i];
          vest[i] = vest[pos_min];
          vest[pos_min] = etemp;
   }
```

Observacions

Algunes especificacions poden incloure *anotacions sobre eficiència*, que restringeixen el ventall d'implementacions vàlides

- Especificació #1 de `Cjt_estudiants`,
  - `afegir_estudiant`: "tarda temps proporcional a la mida del conjunt"
  - `existeix_estudiant`: "tarda temps logarítmic en la mida del conjunt"
- Especificació #2:
  - `afegir_estudiant`: "tarda temps constant"
  - `existeix_estudiant`: "tarda temps lineal en la mida del conjunt"

Part I

Disseny Modular

Ampliacions de tipus de dades

Ampliar un TAD: afegir noves funcionalitats
Mecanismes d'ampliació en OO

1. *Modificar la classe* existent per afegir nous mètodes
2. *Enriquiment* = definir les noves operacions *fora de la classe*
3. *Herència* amb mecanismes del llenguatge (no a PRO2)

Solució 1: Modificar la classe

1. Afegir les capçaleres dels nous mètodes en el fitxer `.hh`
2. Implementar els nous mètodes en el fitxer `.cc`

Pro : Sovint més eficient

Con : Cal tenir accés *i entendre* la implementació original

Solució 1: Modificar la classe

1. Afegir les capçaleres dels nous mètodes en el fitxer `.hh`
2. Implementar els nous mètodes en el fitxer `.cc`

Pro : Sovint més eficient

Con : Cal tenir accés *i entendre* la implementació original

Addicionalment, pot modificar-se la representació del tipus (per poder soportar eficientment els nous mètodes) i això pot significar modificar el codi de les operacions ja existents

Solució 2: Definir operacions *fora de la classe*

- No es modifica ni l'especificació ni la implementació de la classe original
- En un mòdul funcional nou (.hh i .cc), o en la classe que les usa
- Accions i funcions convencionals, no són mètodes

Solució 2: Definir operacions *fora de la classe*

Avantatges:

- No cal tenir permís per modificar classe original
- No engreixa la classe original amb mètodes d'ús puntual
- No cal canviar el codi de les ops si canviés la implementació (només s'usen els mètodes públics)

Inconvenients:

- Possible ineficiència
- Incongruència amb el disseny OO

Com triar entre Solució 1 i Solució 2?

Solució 1:

- Si són ops. essencials al significat del tipus, generals i potencialment útils en moltes situacions (reusables)
- Quan solucioni problemes d'eficiència de la Solució 2

Solució 2:

- Quan només s'apliquen a un problema particular i no sembla que es pugui reutilitzar en altres contextes
- Quan cal evitar que la classe original creixi desmesuradament; potser s'ha de plantejar un redisseny de les classes i introduir-ne noves classes

Exemple: Ampliació de `Cjt_estudiants`

Volem afegir a `Cjt_estudiants` operacions per a:

- donat el DNI d'un estudiant *que sabem que és al conjunt*, esborrar-lo del conjunt
- sabent que el conjunt no és buit, obtenir l'estudiant de nota màxima

Solució 1: Modificar la classe

```
class Cjt_estudiants {
public:
...
void esborrar_estudiant(int dni);
/* Pre: el conjunt conté un estudiant amb DNI = dni */
/* Post: el conjunt conté els mateixos estudiants que
   l'original menys l'estudiant amb DNI donat */
...
Estudiant estudiant_nota_max() const;
/* Pre: el conjunt conté almenys un estudiant amb nota */
/* Post: el resultat és l'estudiant del conjunt amb
   nota màxima; si en té més d'un, és el de dni més petit */

};
```

Solució 1: Modificar la classe. Nou .hh

```
...
private:
     vector<Estudiant> vest;
     int nest;
     static const int MAX_NEST = 60;
     int imax;  /* Aquest atribut és nou */

     /* Invariant de la representacio:
     ...
     imax val -1 si cap estudiant té nota, i altrament
     conté l'index més petit en vest d'un estudiant amb
     nota màxima */
```

Solució 1: Modificar la classe

- Creadores: `imax` s'inicialitza a -1
- Segueix sent -1 mentre cap estudiant del conjunt té nota
- `afegir_estudiant`: s'actualitza `imax`, si cal
- Idem amb `modificar_estudiant` i `modificar_iessim`
- `estudiant_nota_max()`: retorna `vest[imax]`
- `estudiant_nota_max`: temps constant=independent del nombre d'estudiants
- l'actualització d'`imax` en `afegir_estudiant` només requereix temps constant
- `modificar_estudiant` i `modificar_iessim` podem necessitar un recorregut del vector sencer per a actualitzar `imax`

Solució 1: Modificar la classe

```
/* Pre: el conjunt conté un estudiant amb DNI = dni */
/* Post: el conjunt conté els mateixos estudiants
   que l'original menys l'estudiant amb DNI dni */
void Cjt_estudiants::esborrar_estudiant(int dni) {
        // la pre garanteix que trobarem un estudiant
        // amb DNI dni
    int i = cerca_dicot(vest,0,nest-1,dni);

    for (int j = i; j < nest-1; ++j) vest[j] = vest[j+1];
    --nest;
    if (i == imax) recalcular_posicio_imax();
    else if (imax > i) --imax;
```

Solució 2: Definir mètodes *fora de la classe*

Nou fitxer `E_Cjt_estudiants.hh`

```
#include "Estudiant.hh"
#include "Cjt_estudiants.hh"

void esborrar_estudiant(Cjt_estudiants &Cest, int dni);
/* Pre: Cest conté un estudiant amb DNI = dni */
/* Post: Cest conté els mateixos estudiants que el seu
         valor original menys l'estudiant amb DNI dni */

Estudiant estudiant_nota_max(const Cjt_estudiants& Cest);
/* Pre: Cest conté almenys un estudiant amb nota */
/* Post: el resultat és l'estudiant de Cest amb nota màxima;
         si en té més d'un, és el de dni més petit */
```

Solució 2: Definir mètodes *fora de la classe*

```
#include "E_Cjt_estudiants.hh"

/* Pre: Cest conté un estudiant a Cest amb DNI = dni */
/* Post: Cest conté els mateixos estudiants que el seu
         valor original menys l'estudiant amb DNI = dni */
void esborrar_estudiant(Cjt_estudiants &Cest, int dni) {
    Cjt_estudiants Cestaux;
    int i = 1;
    while (dni != Cest.consultar_iessim(i).consultar_DNI()) {
        Cestaux.afegir_estudiant(Cest.consultar_iessim(i));
        ++i;
    }
    // per la pre, segur que trobarem a Cest un estudiant
    // amb DNI = dni; en aquest punt del programa, aquest
    // estudiant és Cest.consultar_iessim(i);
    // ara hem d'afegir els elements següents a Cestaux
    for (int j = i+1; j <= Cest.mida(); ++j)
        Cestaux.afegir_estudiant(Cest.consultar_iessim(j));
    Cest = Cestaux;
}
```

Solució 2: Definir mètodes *fora de la classe*

```
/* Pre: Cest conté almenys un estudiant amb nota */
/* Post: el resultat és l'estudiant de Cest amb nota màxima;
   si en té més d'un, és el de dni més petit */
Estudiant estudiant_nota_max(const Cjt_estudiants &Cest) {
    int i = 1;
    while (not Cest.consultar_iessim(i).te_nota()) ++i;
    int imax = i; ++i;
    // per la pre, segur que trobarem a Cest un estudiant
    // amb nota; imax n'és el primer; comprovem la resta
    while (i <= Cest.mida()){
        if (Cest.consultar_iessim(i).te_nota())
            if (Cest.consultar_iessim(imax).consultar_nota() <
                    Cest.consultar_iessim(i).consultar_nota())
                imax = i;
        ++i;
    }
    return Cest.consultar_iessim(imax);
}
```

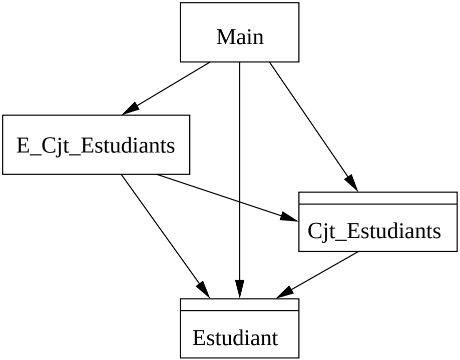
Solució 2: Definir mètodes *fora de la classe*

Observació:

- `estudiant_nota_max()` temps lineal (no constant)
- `esborrar_estudiant` lineal com abans, però més lenta

Diagrama modular

Un hipotètic programa principal que usa les dues operacions de `E_Cjt_estudiants`



Part I

Disseny Modular

Biblioteques

Col.leccions de mòduls que amplien el llenguatge

La *Standard C++ Library* ofereix una gran varietat de mòduls funcionals i de dades com ara `iostream`, `string`, `cmath`,...

Standard Template Library (STL)

- La STL és un subconjunt de la biblioteca estàndar de C++. Inclou mòduls funcionals i de dades *genèrics*
- *Template* = plantilla
- Classes i funcions genèriques : classes i funcions amb tipus com a paràmetres Exemples:
  - Programació 1: `vector<T>`
  - Programació 2: `queue<T>`, `stack<T>`, `list<T>`

Templates

Una funció genèrica

```
template <typename T>
T minim(const vector<T>& v)
/* Pre: v és un vector no buit de T's; hi ha un ordre '<'
        total predefinit sobre els elements de tipus T */
/* Post: retorna l'element més petit de v */
{
   T mn = v[0];
   for (int i = 1; i < v.size(); ++i)
      if (v[i] < mn) mn = v[i];
   return mn;
}
```

Templates

Ús d'una funció genèrica

```
vector<int> v(100);
int m = minim(v);
//      ↑↑↑ crida a minim amb T=int
vector<string> words;
string smallest = minim(words);
//       ↑↑↑ crida a minim amb T=string
vector<Estudiant> vest;
Estudiant mest = minim(vest);
// falla perquè '<' no està definit
// per a T=Estudiant!
```

Part II

Estructures Lineals

Estructures lineals: Generalitats

Una estructura lineal C és un conjunt d'elements d'un cert tipus `T`

$$C = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

en el que es defineix una relació de successió

- Per tot i, $1 \leq i < n$, a_{i+1} és el successor de a_i. L'últim element a_n no té successor.
- Per tot i, $1 < i \leq n$, a_{i-1} és el predecessor de a_i. El primer element a_1 no té predecessor.

Si $n = 0$ la estructura està buida

Estructures lineals: Generalitats

- Piles (*stack*)
- Cues (*queue*)
- Llistes (*list*)

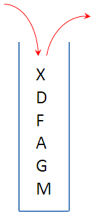
Part II

Estructures Lineals

La classe `stack`

Ofereix tres operacions bàsiques:

- Afegir un nou element al final (*empilar*)
- Treure l'últim element (*desempilar*)
- Examinar l'últim element (*cim*)



LIFO - *Last In, First Out*: el darrer que ha entrat serà el primer en sortir, i és l'únic accessible

Especificació de stack

La classe stack

```
template <class T> class stack {
public:
// Constructores

/* Pre: cert */
/* Post: crea una pila buida  */
stack();

// Destructora
~stack();
```

Especificació de stack

La classe stack

```
// Modificadores

/* Pre: la pila és [a1,...,an], n ≥ 0 */
/* Post: s'afegit l'element x com a últim de la pila, es
         a dir, la pila és ara [a1,...,an,x] */
void push(const T& x);

/* Pre:  la pila és [a1,...,an] i no està buida (n > 0) */
/* Post: s'ha eliminat el darrer element de la pila original,
         es a dir, la pila ara és [a1,...,an-1] */
void pop();
```

Especificació de stack

La classe stack

```
// Consultores

/* Pre: la pila és [a_1,...,a_n] i no està buida (n > 0) */
/* Post: Retorna a_n */
T top() const;

/* Pre: cert */
/* Post: Retorna cert si i només si la pila està buida */
bool empty() const;

private:
   ...
};
```

Part II

Estructures Lineals

La classe `queue`

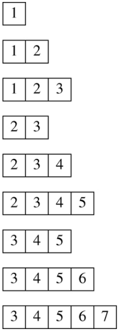
Ofereix tres operacions bàsiques:

- Afegir un nou element al final (*encuar*)
- Treure el primer element (*desencuar*)
- Examinar el primer element (*front*)

FIFO - *First In, First Out*: el primer que ha entrat serà el primer en sortir i és l'únic accessible

Exemple d’evolució d’una cua

```
queue<int> c;
c.push(1); c.push(2); c.push(3);
c.pop();
c.push(4); c.push(5);
c.pop();
c.push(6); c.push(7);
```



Especificació de la classe queue

La classe queue

```
template <class T> class queue {
public:
// Constructores

/* Pre: cert */
/* Post: crea una cua buida  */
queue();

// Destructora
~queue();
```

Especificació de queue

La classe queue

```
// Modificadores

/* Pre: la cua és [a1,...,an], n ≥ 0 */
/* Post: s'afegit l'element x com a últim de la cua, es
         a dir, la cua és ara [a1,...,an,x] */
void push(const T& x);

/* Pre:  la cua és [a1,...,an] i no està buida (n > 0) */
/* Post: s'ha eliminat el primer element de la cua original,
         es a dir, la cua ara és [a2,...,an] */
void pop();
```

Especificació de queue

La classe queue

```
// Consultores

/* Pre: la cua és [a1,...,an] i no està buida (n > 0) */
/* Post: Retorna a1 */
T front() const;

/* Pre: cert */
/* Post: Retorna cert si i només si la cua està buida */
bool empty() const;

private:
   ...
};
```

Part II

Estructures Lineals

- Fusió ordenada

Part II

Estructures Lineals

Llistes

Les llistes ens ofereixen operacions per a fer:

- Recorreguts seqüencials de tots els elements
- Inserció d'un element nou a qualsevol punt de la seqüència
- Eliminació d'un element qualsevol
- Concatenació

Iteradors

- El mecanisme que permet fer això amb les `list` de la STL són els iteradors
- Un *iterador* és un objecte que designa (marca, apunta, referencia) un element d'una llista o un altre contenidor
- Operacions sobre iteradors:
  - Avançar al següent element: `++it`
  - Retrocedir a l'anterior: `--it`
  - Comparar iteradors: `it1==it2`, `it1!=it2`
  - Accedir a l'objecte designat: `*it`

Iteradors

- Llistes i iteradors “treballen” coordinadament
- Operacions de llistes amb iteradors:
  - $L.\texttt{insert}(it, x)$: insereix a la llista L un nou element x com a predecessor de l’element apuntat per it
  - $itsuc = L.\texttt{erase}(it)$: elimina de la llista L l’element apuntat per it; retorna un iterador al successor de l’element esborrat

Iteradors

- Llistes i iteradors “treballen” coordinadament
- Operacions que ens tornen iteradors:
  - L.`begin()`: torna un iterador apuntant al primer element de la llista L
  - L.`end()`: torna un iterador apuntant “fora”—a un element fictici successor de l’últim—de la llista L
  - Si L és buida, aleshores `L.begin() == L.end()`

Exemple d'evolució d'una llista

	l.begin() l.end()
	[8 6 1 5]
it = l.begin();	[8 6 1 5]
++it;	[8 6 1 5]
l.insert(it,5);	[8 5 6 1 5]
++it;	[8 5 6 1 5]

	[8 5 6 1 5]
it = l.erase(it);	[8 5 6 5]
--it;	[8 5 6 5]
*it = *it + 3;	[8 5 9 5]

Iteradors

```
list<Estudiant> l;
list<string> lp;

list<Estudiant>::iterator it = l.begin();
list<Estudiant>::iterator it2 = l.end();
list<string>::iterator it3 = lp.begin();

it = it3; // error!! són de tipus diferents
```

Cada tipus d'iterador es defineix com a subclasse de la classe "contenidora"

Iteradors: Recorreguts

Esquema freqüent:

```
list<T> L;
list<T>::iterator it = L.begin();
while (it != L.end() and not condició sobre *it)) {
   accedir a *it
   ++it;
}
```

Iteradors constants

- Iteradors constants (`const_iterator`): prohibeixen modificar l'objecte referenciat per l'iterador
- S'han d'utilitzar per a recòrrer una llista rebuda per referència constant

```
list<Estudiant>::const_iterator it, it2;
it = it2;  // OK, it no és constant
++it;      // OK
v = *it;   // OK
*it = v+3; // error!!!
```

Iteradors constants

```
void imprimir_llista(const list<Estudiant>& L) {
  for(list<Estudiant>::const_iterator it = L.begin();
      it != L.end(); ++it)
    (*it).escriure();
}
// en comptes de (*it).escriure() podem posar
// it -> escriure();
```

Part II

Estructures Lineals

Especificació de la classe `list`

```
template <class T> class list {
public:
// Subclasses de la classe llista
     class iterator { ... };
     class const_iterator { ... };

// Constructores

/* Pre: cert */
/* Post: El resultat es una llista sense cap element */
list();

// Destructora
~list();
```

Especificació de la classe genèrica `Llista`

```
// Modificadores
/* Pre: cert */
/* Post: La llista implícita queda buida */
void clear();

/* Pre: it referencia algun element existent a_i a la llista o
        és igual a end(), la llista és [a_1,...,a_n] */
/* Post: L'element s'ha inserit davant de l'element referenciat
per it, la llista és ara [a_1,...,x,a_i,...], torna
un iterador a l'element que s'acaba d'afegir */
iterator insert(iterator it, const T& x);
```

Especificació de la classe genèrica `Llista`

```
/* Pre: it referencia algun element a_i existent a la
        llista [a_1,...,a_n], n > 0 */
/* Post: S'ha eliminat l'element referenciat per it, la llista
         és ara [a_1,...,a_-1,a_{i+1}...,a_n] i torna
         un iterador al sucessor de l'element eliminat */
iterator erase(iterator it);

/* Pre: l = [y_1,...,y_m], l i la llista implícita són
        objectes diferents, i it referencia algún element x_i de
        la llista implícita [x_1,...,x_n] */
/* Post: La llista implícita és ara
        [x_1,...,x_{i-1},y_1,...,y_m,x_i,...,x_n] i l és buida */
void splice(iterator it, list& l);
```

Especificació de la classe genèrica `Llista`

```
// Consultores

/* Pre: cert */
/* Post: torna cert si i només si la llista és buida */
bool empty() const;

/* Pre: cert */
/* Post: torna el nombre d'elements de la llista*/
int size() const;
```

Especificació de la classe genèrica `Llista`

```
     ...
// tornen iteradors al primer element de la llista
 const_iterator begin() const;
 iterator begin();
// tornen iteradors a l'element fictici succesor de l'últim
// de la llista
 const_iterator end() const;
 iterator end();
 private:
     ...
```

Especificació de la classe genèrica `Llista`

La inserció d'elements nous als extrems de la llista i l'esborrat dels extrems de la llista es pot fer sense iteradors:

```
l.push_back(x); // = l.insert(l.end(), x);
l.push_front(x); // = l.insert(l.begin(), x);

l.pop_front();  // = l.erase(l.begin());
l.pop_back(); // = it = l.end(); l.erase(--it);
```

Part II

Estructures Lineals

Sumar tots els elements d’una llista d’enters

```
/* Pre: cert */
/* Post: El resultat és la suma dels elements de l */
int suma(const list<int>& l) {
    int s = 0;
    for (list<int>::const_iterator it = l.begin();
                                   it != l.end();
                                   ++it) {
        s += *it;
    }
    return s;
}
```

Cerca senzilla en una llista d'enters

```
/* Pre: cert */
/* Post: El resultat indica si x és o no a l */
bool pertany(const list<int>& l, int x) {
    list<int>::const_iterator it = l.begin();
    while (it != l.end() and (*it != x))
      ++it;
    return it != l.end();
}
```

Exercici: cerca en una llista d’estudiants

```
/* Pre: cert */
/* Post: El resultat ens indica si hi ha algun estudiant
   amb dni x a l o no */
bool pertany(const list<Estudiant>& l, int x);
```

Modificar una llista sumant un valor `k` a tots els elements

```
/* Pre: l = [x1, ..., xn] */
/* Post: l = [x1 + k, x2 + k, ..., xn + k] */
void suma_k(list<int>& l, int k) {
    list<int>::iterator it = l.begin();
    while (it != l.end()) {
        *it += k;
        ++it;
    }
}
```

Una alternativa

En comptes de fer

```
*it += k;
++it;
```

podriem eliminar l'element i tornar a afegir-ho

```
int aux = (*it) + k;
it = l.erase(it); // it apunta al successor
l.insert(it,aux);
```

però és molt menys eficient (implica creació+destrucció d'objectes!)

Dir si una llista és capicua

[4,8,5,8,4], [7], [4,8,8,4] són capicues

```
/* Pre: cert */
/* Post: El resultat diu si l es capicua */
bool capicua(const list<int>& l);
```

Dir si una llista és capicua

```
bool capicua(const list<int>& l) {
   list<int>::const_iterator it1 = l.begin();
   list<int>::const_iterator it2 = l.end();
   for (int i = 0; i < l.size()/2; ++i) {
       --it2;
       if (*it1 != *it2) return false;
       ++it1;
   }
   return true;
}
```

Dir si una llista és capicua

- Exercici: Penseu com fer-ho sense usar `l.size()`.
- Cada element s'ha de consultar un cop com a molt.
- Recordeu que no es pot comparar `it1 < it2`

Inserint elements ordenadament

Exemple:
Donada una llista l d'strings en ordre alfabètic no decreixent i un nou string s, inserir s a la llista l, mantentint l'ordre.

```
// Pre: l = L
// Post: l conté els elements d'L i s, i està en ordre
// no decreixent
void inserir_ordenadament(list<string>& l, string s);
```

Inserint elements ordenadament

```
void inserir_ordenadament(list<string>& l, string s) {
  list<string>::iterator it = ...;
     ...
  // it == l.end() ó *it és un string ≥ s
  // per tant s s'ha d'inserir com a predecessor
  // de l'element apuntat per it
  l.insert(it, s);
}
```

Inserint elements ordenadament

```
void inserir_ordenadament(list<string>& l, string s) {
  list<string>::iterator it = l.begin();
  while (it != l.end() and *it < s) ++it;
  // it == l.end() ó *it és un string ≥ s
  // per tant s s'ha d'inserir com a predecessor
  // de l'element apuntat per it
  l.insert(it, x);
}
```

Implementant `Cjt_Estudiant` amb llistes

`Cjt_Estudiant.hh`

```
class Cjt_Estudiants {
public:
   ...
private:
// lest està ordenada per DNI creixent, emmgatzema
// els estudiants del conjunt
   list<Estudiant> lest;

// Pre: cert
// Post: torna un iterador a un estudiant amb DNI = dni
// si hi ha algún estudiant amb aquest DNI, altrament
// l'iterador apunta al primer estudiant amb DNI > dni o
// l'iterador és l.end() si no hi ha cap estudiant amb DNI
// més gran que dni
   static list<Estudiant>::const_iterator
     cerca_estudiant(const list<Estudiant>& l, int dni);
}
```

Implementant `Cjt_Estudiant` amb llistes

`Cjt_Estudiant.cc`

```
void Cjt_estudiants::afegir_estudiant(const Estudiant& est) {
  int dni = est.consultar_DNI();
  list<Estudiant>::iterator it = cerca_estudiant(lest, dni);
  // it == lest.end() o it -> consultar_DNI() > dni
  // l'estudiant 'est' segur que no està en el conjunt
  lest.insert(it, est);
}

void Cjt_estudiants::modificar_estudiant(const Estudiant& est) {
  int dni = est.consultar_DNI();
  list<Estudiant>::iterator it = cerca_estudiant(lest, dni);
  // it -> consultar_DNI() == dni) {
  // l'estudiant est segur que està en el conjunt
  *it = est;
}
```

Implementant `Cjt_Estudiant` amb llistes

`Cjt_Estudiant.cc`

```
int Cjt_Estudiant::mida() const {
  return lest.size();
}

bool Cjt_Estudiant::existeix_estudiant(int dni) const {
  list<Estudiant>::const_iterator it =
        cerca_estudiant(lest,dni);
  return it != lest.end() and it -> consultar_DNI() == dni;
}
```

Implementant `Cjt_Estudiant` amb llistes

`Cjt_Estudiant.cc`

```
Estudiant Cjt_Estudiant::consultar_estudiant(int dni) const {
  list<Estudiant>::const_iterator it =
       cerca_estudiant(lest,dni);
  return *it;
}
```

Implementant `Cjt_Estudiant` amb llistes

`Cjt_Estudiant.cc`

```
void Cjt_Estudiant::escriure() const {
  list<Estudiant>::const_iterator it = lest.begin();
  bool first = true;
  while (it != lest.end()) {
    if (first) first = false; else cout << " ";
    cout << it -> escriure();
       // invoca el mètode Estudiant::escriure()
       // sobre l'estudiant al qual apunta it
  }
}
```

Implementant `Cjt_Estudiant` amb llistes

La implementació dels mètodes `consultar_iessim` i `modificar_iessim` no és complicada, però fa palès que les llistes (`list`) no són el més apropiat, ja que no tenim accés directe. Més sobre aquest punt i les diferències entre llistes i vectors més endavant—resteu a l'espera.

Part II

Estructures Lineals

Splice: Insert a l'engròs!

- Si `l1 = [1,2,3,4,5,6]`, `it` apunta al 4, i `l2 = [10,20,30]` llavors

  ```
  l1.splice(it,l2),
  ```

  queda

Splice: Insert a l'engrós!

- Si `l1 = [1,2,3,4,5,6]`, `it` apunta al 4, i `l2 = [10,20,30]` llavors

  `l1.splice(it,l2)`,

  queda
  `l1 = [1,2,3,10,20,30,4,5,6]`, `it` apunta a 4, `l2` buida

Splice: Insert a l'engrós!

- Si `l1 = [1,2,3,4,5,6]`, `it` apunta al 4, i `l2 = [10,20,30]` llavors

  `l1.splice(it,l2),`

  queda
  `l1 = [1,2,3,10,20,30,4,5,6]`, `it` apunta a 4, `l2` buida
- Per concatenar dues llistes farem:
  `l1.splice(l1.end(),l2)`
- La STL de C++ té variants més complexes de `splice` que fan altres tipus de "transferència" de continguts entre llistes
- El cost de `splice` és constant, no depèn de les longituds de les llistes

Part II

Estructures Lineals

Vectors vs. llistes

- Recorregut seqüencial: Temps lineal en els dos casos, constant per element

Vectors vs. llistes

- Recorregut seqüencial: Temps lineal en els dos casos, constant per element
- Accés directe a i-èssim: Constant en vectors, temps i en llistes

Vectors vs. llistes

- Recorregut seqüencial: Temps lineal en els dos casos, constant per element
- Accés directe a i-èssim: Constant en vectors, temps i en llistes
- Inserir un element

Vectors vs. llistes

- Recorregut seqüencial: Temps lineal en els dos casos, constant per element
- Accés directe a i-èssim: Constant en vectors, temps i en llistes
- Inserir un element
    - Constant en llistes

Vectors vs. llistes

- Recorregut seqüencial: Temps lineal en els dos casos, constant per element
- Accés directe a i-èssim: Constant en vectors, temps i en llistes
- Inserir un element
  - Constant en llistes
  - En vectors, afegir al final és constant en mitjana (`push_back()`)

Vectors vs. llistes

- Recorregut seqüencial: Temps lineal en els dos casos, constant per element
- Accés directe a i-èssim: Constant en vectors, temps i en llistes
- Inserir un element
    - Constant en llistes
    - En vectors, afegir al final és constant en mitjana (`push_back()`)
    - En vectors, inserir pel mig és costós

Vectors vs. llistes

- Esborrar un element: constant en llistes, costós en vectors (excepte l'últim `pop_back()`)

Vectors vs. llistes

- Esborrar un element: constant en llistes, costós en vectors (excepte l'últim `pop_back()`)
- Splice: constant en llistes, costós en vectors

Accés directe?

Accés directe per posició en llistes. Si cal . . .

```
// pre: 0 <= i < l.size()
// post: retorna l'i-essim element de l
template <typename T>
T get(const list<T>& l, int i) {
    list<T>::const_iterator it = l.begin();
    for (int j = 0; j < i; ++j) ++it;
    return *it;
}
```

Accés directe

Cost lineal

```
list<double>::iterator it = l.begin();
double sum = 0;
while (it != l.end()) {
  sum += *it; ++it;
}
```

Cost quadràtic

```
double sum = 0;
for (int i = 0; i < l.size(); ++i)
   sum += get(l,i);
```

Part II

Estructures Lineals

Fusió ordenada de llistes

Suposem que tenim una llista l ordenada (per DNI) d'Estudiants, i una altra llista també ordenada per DNI d'elements del tipus

```
struct Actualitzacio {
  char op; // 'a' = alta, 'b' = baixa
           // 'm' = modificació
  Estudiant est;
};
```

En aquesta segona llista es detalla: estudiants que s'han de donar d'alta (assumim que efectivament NO estàn a la llista l); estudiants que s'han de donar de baixa (i estàn a la llista l o s'han afegit) i estudiants als quals se'ls ha de modificar o agregar nota (ja hi eren a la llista l o s'han afegit).

Fusió ordenada de llistes

```
// Pre: ...
// Post: ...
void actualitza_llista_Estudiants(list<Estudiant>& l,
                                  const list<Actualitzacio>& lact);
```

Una solució eficient d'aquest problema ha d'aprofitar que les dues llistes estàn ordenades alfabèticament!

Fusió ordenada de llistes

Per exemple (substituint DNIs per noms per fer més entenedor l'exemple) si

$$l = [\langle \text{ALICE}, 3.5\rangle, \langle \text{BOB}, 4.1\rangle, \langle \text{CHARLIE}, 7.4\rangle, \langle \text{DAISY}, 6.8\rangle, \\ \langle \text{HELEN}, 9.1\rangle, \langle \text{JOHN}, 3.7\rangle, \langle \text{MARY}, 5.3\rangle]$$

i la llista d'actualitzacions és

$$lact = [\langle \text{'a'}, \langle \text{ALBERT}, NP\rangle\rangle, \langle \text{'b'}, \langle \text{BOB}, \ldots\rangle\rangle, \langle \text{'m'}, \langle \text{HELEN}, 10\rangle\rangle, \\ \langle \text{'b'}, \langle \text{JOHN}, \ldots\rangle\rangle, \langle \text{'a'}, \langle \text{JOHN}, 4\rangle\rangle, \\ \langle \text{'m'}, \langle \text{JOHN}, 4.2\rangle\rangle, \langle \text{'m'}, \langle \text{JOHN}, 4.1\rangle\rangle, \langle \text{'a'}, \langle \text{PETER}, 5.5\rangle\rangle]$$

el resultat d'actualitzar l seria

$$l = [\langle \text{ALBERT}, NP\rangle, \langle \text{ALICE}, 3.5\rangle, \langle \text{CHARLIE}, 7.4\rangle, \langle \text{DAISY}, 6.8\rangle, \\ \langle \text{HELEN}, 10\rangle, \langle \text{JOHN}, 4.1\rangle, \langle \text{MARY}, 5.3\rangle, \langle \text{PETER}, 5.5\rangle]$$

Fusió ordenada de llistes

```
void actualitza_llista_Estudiants(list<Estudiant>& l,
                      const list<Actualitzacio>& lact) {
  list<Estudiant>::iterator it = l.begin();
  list<Actualitzacio>::iterator itact = lact.begin();
  while (it != l.end() and itact != lact.end()) {
    if (it -> consultar_DNI() <
        itact -> est.consultar_DNI())
     // l'estudiant al que apunta it no està afectat
     // per cap actualització
        ++it;
    ...
  }
  // processar la resta d'actualitzacions
  // que pugui haver
  ...
}
```

Fusió ordenada de llistes

```
...
else if (it -> consultar_DNI() >
            itact -> est.consultar_DNI()) {
 // això ha de ser un 'alta' necessàriament
 it = l.insert(it, itact -> est);
 // it apunta a l'element que acabem d'afegir
 ++itact;
} else {
 // it -> consultar_DNI() == itact -> est.consultar_DNI()
 // això és necessàriament una 'baixa'
 // o una 'modificació'
 if (itact -> op == 'b')
   it = l.erase(it);
 else
   *it = itact -> est;
 ++itact;
}
```

Fusió ordenada de llistes

```
// si itact == lact.end() no queda cap
// actualització més per processar i no cal fer res més;
// altrament totes les actualitzacions
// pendents afecten estudiants amb DNI més gran
// que qualsevol que hagués a l, i it == l.end()
  while (itact != lact.end()) {
    if (itact -> op == 'a') 
     it = l.insert(l.end(), itact -> est);
     // it apunta a l'element que acabem d'afegir
     ++itact;
    } else {
     // si és una baixa o modificació ha d'afectar
     // a un element acabat d'afegir (i apuntat per it)
     if (itact -> op == 'b')
       l.erase(it);
     else
       *it = itact -> est;
     ++itact;
    }
  }
```

Fusió ordenada de llistes

Suposem que l té $n = 10000$ elements i que $lact$ conté $m = 1000$ actualitzacions. Si l'actualització de l la fessim amb

```
itact = lact.begin();
while (itact != lact.end()) {
  Estudiant e = itact -> est;
  char op = itact -> op;
  if (op == 'a')
     afegeix(l, est);
  else if (op == 'b')
     elimina(l, est);
  else
     modifica(l, est);
}
```

Fusió ordenada de llistes

o quelcom equivalent hauriem de fer unes $n \cdot m = 10^7$ (deu millions) d'operacions en el pitjor dels casos i de l'ordre de 5 millions d'operacions en promig, ja que operacions com `afegir`, `elimina` o `modifica` han de recòrrer la llista l (en promig la meitat).

Fusió ordenada de llistes

Però el nostre algorisme de “fusió ordenada” avança en cada pas/iteració en una de les dues llistes (o totes dues) i per tant el nombre d’operacions que farem serà de l’ordre d’$n + m = 11000$ operacions. La diferència és enorme! És pràcticament 1000 vegades més eficient!

Fusió ordenada de llistes

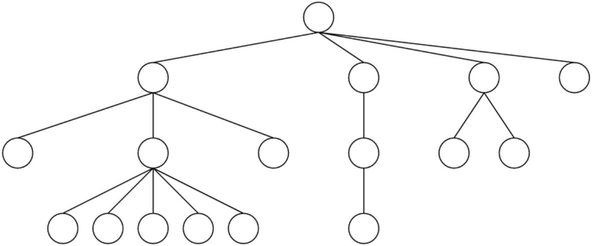
Les llistes ens han ajudat molt en aquest cas, doncs són molt flexibles i podem afegir i eliminar elements apuntats per iteradors molt eficientment. Un algorisme semblant treballant amb vectors hauria de produir un vector auxiliar l' amb el resultat de l'actualització i en acabar copiar l' sobre l. No podem fer altes o baixes eficientment directament sobre l.
Si treballem amb dades ordenades SEMPRE hem de pensar com podem treure profit i fer que els nostres algorismes siguin més eficients.

Part III

Arbres

Arbres generals: conceptes

- node o nus
- fill, pare
- descendent, ascendent
- germà
- arrel, fulla
- camí
- nivell; alçària



Arbres generals: conceptes

Definicions com a graf:

Def. 1: un arbre és un graf dirigit tal que o bé és buit, o bé té un node anomenat arrel tal que hi ha exactament un camí de l'arrel a qualsevol altre node

Arbres generals: conceptes

Definicions com a graf:

Def. 1: un arbre és un graf dirigit tal que o bé és buit, o bé té un node anomenat arrel tal que hi ha exactament un camí de l'arrel a qualsevol altre node

Def. 2: un arbre és un graf no dirigit, connex, amb un arc menys que nodes i un node distingit anomenat arrel

Arbres generals: conceptes

Definicions com a graf:

Def. 1: un arbre és un graf dirigit tal que o bé és buit, o bé té un node anomenat arrel tal que hi ha exactament un camí de l'arrel a qualsevol altre node

Def. 2: un arbre és un graf no dirigit, connex, amb un arc menys que nodes i un node distingit anomenat arrel

Les dues són poc útils algorísmicament

Arbres generals: conceptes

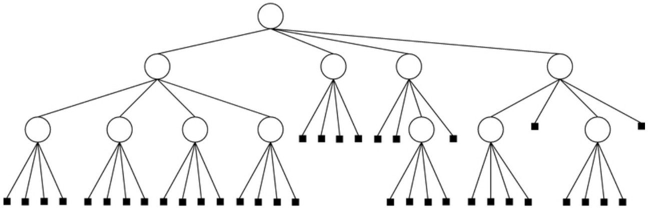
Un arbre o bé és l'arbre buit
o bé és un node anomenat arrel amb zero o més
arbres successors anomenats fills o subarbres

Arbres generals: conceptes

Un arbre o bé és l'arbre buit
o bé és un node anomenat arrel amb zero o més
arbres successors anomenats fills o subarbres

- Es presta a tractaments algorísmics recursius
- Tècnicament la definició correspón a arbres arrelats ordenats

Arbres N-aris



- Def.: Tots els subarbres no buits tenen exactament el mateix nombre de fills, N, que poden ser buits o no
- Exemple: Arbre 4-ari; quadrats negres = arbres buits
- Per claredat convé representar explícitament els arbres buits en els arbres N-aris; típicament els subarbres buits es representen mitjançant un quadrat (negre o blanc)

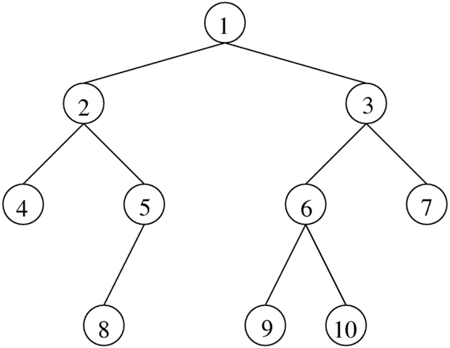
Part III

Arbres

Arbres binaris

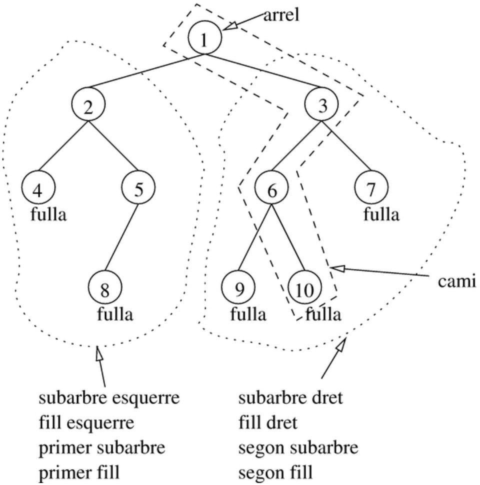
- Cas particular dels arbre N-aris amb $N = 2$
- Quan diem arbres sense detallar més, ens referim per defecte a arbres binaris
- Els dos fills d'un node són anomenats esquerre i dret

Exemple d’arbre binari



No hem dibuixat els subarbres buits amb quadrats negres com en l’exemple d’arbre 4-ari. La inclinació de cada aresta indica si el fill és dret o esquerre

Exemple d’arbre binari



Especificació dels arbres binaris

```
template <typename T> class BinTree {
public:
 BinTree();
 /* Pre: cert */
 /* Post: crea un arbre buit */

 BinTree(const T& x);
 /* Pre:  cert */
 /* Post: crea un arbre binari amb un sol node, l'arrel,
          que conté x, i els seus fills esquerre i dret
          són buits */

 BinTree (const T& x, const BinTree& left, const BinTree& right);
 /* Pre:  cert */
 /* Post: crea un arbre binari amb x a l'arrel,
          i left i right com com a fills esquerre
          i dret, respectivament */
```

Especificació dels arbres binaris

```
// Consultores:
bool empty() const;
/* Pre: cert */
/* Post: retorna cert si i només si
         l'arbre és buit */
BinTree left() const;
/* Pre: L'arbre implícit no és buit */
/* Post: retorna el fill esquerre de l'arbre implícit */

BinTree right() const;
/* Pre: L'arbre implícit no és buit */
/* Post: retorna el fill dret de l'arbre implícit */

const T& value() const;
/* Pre: L'arbre implícit no és buit */
/* Post: retorna el valor de l'arrel de l'arbre */
```

Especificació dels arbres binaris

- Cap modificadora! La única manera de modificar un arbre és construir l'arbre modificat i assignar-lo a l'original.
- Totes les operacions requereixen temps constant (excepte la *destructora*)
- Important per al temps constant: tot és `const`, no es fan còpies dels fills
- En l'assignació

```
a1 = a2;
```

  requereix temps constant excepte en el cas de que `a1` no "comparteixi" cap subarbre amb cap altre objecte; llavors el temps necessari és proporcional a la mida d'`a1` doncs cal destruir-lo

Part III

Arbres

Mida d’un arbre

```
/* Pre: cert */
/* Post: El resultat és el nombre de nodes d' a */
template <typename T>
int size(const BinTree<T>& a);
```

Mida d’un arbre

```
/* Pre: cert */
/* Post: El resultat és el nombre de nodes d'a */
template <typename T>
int size(const BinTree<T>& a) {
   if (a.empty()) return 0;
   else return 1 + size(a.left()) + size(a.right());
}
```

Alçària d'un arbre

Def.: L'alçària d'un arbre és la longitud del camí (nombre de nodes) més llarg de l'arrel a una fulla

Especificació:

```
/* Pre: cert */
/* Post: El resultat és l'alçària de l'arbre a*/
template <typename T>
int alcaria(const BinTree<T>& a);
```

Alçària d'un arbre

- $\text{alcaria}(\square) = 0$
- si a no buit, ...

  $\text{alcaria}(a) = 1 + \max(\text{alcaria}(a.\texttt{left}()), \text{alcaria}(a.\texttt{right}()))$

Demostració: per inducció!

Alçària d'un arbre

```
/* Pre: cert */
/* Post: El resultat és l'alçària de l'arbre a */
template <typename T>
int alcaria(const BinTree<T>& a) {
  if (a.empty())
    return 0;
  else
    return 1 + max(alcaria(a.left(),alcaria(a.right()));
}
```

Cerca d’un valor en un arbre

```
/* Pre: cert */
/* Post: El resultat indica si x és a l'arbre a o no */
template <typename T>
bool cerca(const BinTree<int>& a, const T& x);
```

Cerca d'un valor en un arbre

cerca(buit,x) = fals
cerca(a,x) = cert,   si arrel(a) = x
cerca(a,x) = cerca(a.left(),x) or cerca(a.right(),x),   si arrel(a) $\neq$ x

Cerca d'un valor en un arbre

```
/* Pre: cert */
/* Post: El resultat indica si x és a l'arbre a o no */
template <typename T>
bool cerca(const BinTree<T>& a, const T& x) {
    if (a.empty()) return false;
    else return (a.value() == x)
                or cerca(a.left(),x)
                or cerca(a.right(),x);
```

És imprescindible que l'operador d'igualtat estigui definit per elements del tipus `T`: si x y z són de tipus `T` llavors `x == y` ha d'estar definit! Nota: Eficient perquè `or` és condicional

Sumar un valor `k` a tots els nodes

```
/* Pre: cert */
/* Post: retorna un arbre amb la mateixa forma que a,
i en el qual cada node val k més el valor del node
corresponent en a */
BinTree suma(const BinTree<int>& a, int k);
```

Sumar un valor `k` a tots els nodes

```
/* Pre: cert */
/* Post: retorna un arbre amb la mateixa forma que a,
i en el qual cada node val k més el valor del node
corresponent en a */
BinTree suma(const BinTree<int> &a, int k) {
   if (a.empty())
      return BinTree<int>();
   else
      return BinTree<int>(a.value() + k,
                 suma(a.left(),k), suma(a.right(),k));
}
```

Sumar un valor `k` a tots els nodes

Fem-ho sobre el mateix arbre, com una acció:

```
/* Pre: a = A */
/* Post: deixa en a el resultat de sumar k a l'arbre A */
void suma(BinTree<int>& a, int k) {
  if (not a.empty()) { // si és buit no cal fer res
    BinTree<int> l = a.left();
    BinTree<int> r = a.right();
    suma(l, k);
    suma(r, k);
    a = BinTree<int>(a.value() + k, l, r);
  }
}
```

Part III

Arbres

Recorreguts d'arbres

Mètodes més habituals per visitar els nodes d'un arbre (per fer recorreguts o cerques):

- Recorreguts en profunditat

En tots els casos: recórrer l'arbre buit = no fer res

Recorreguts d’arbres

Mètodes més habituals per visitar els nodes d’un arbre (per fer recorreguts o cerques):

- Recorreguts en profunditat
  - En preordre

En tots els casos: recórrer l’arbre buit = no fer res

Recorreguts d’arbres

Mètodes més habituals per visitar els nodes d’un arbre (per fer recorreguts o cerques):

- Recorreguts en profunditat
  - En preordre
  - En inordre

En tots els casos: recórrer l’arbre buit = no fer res

Recorreguts d’arbres

Mètodes més habituals per visitar els nodes d’un arbre (per fer recorreguts o cerques):

- Recorreguts en profunditat
    - En preordre
    - En inordre
    - En postordre

En tots els casos: recórrer l’arbre buit = no fer res

Recorreguts d’arbres

Mètodes més habituals per visitar els nodes d’un arbre (per fer recorreguts o cerques):

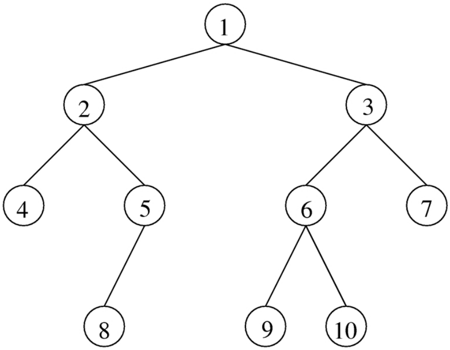
- Recorreguts en profunditat
  - En preordre
  - En inordre
  - En postordre
- Recorregut en amplada o per nivells

En tots els casos: recórrer l’arbre buit = no fer res

Recorreguts en profunditat: preordre

1. visitar l'arrel
2. recórrer fill esquerre (en preordre)
3. recórrer fill dret (en preordre)

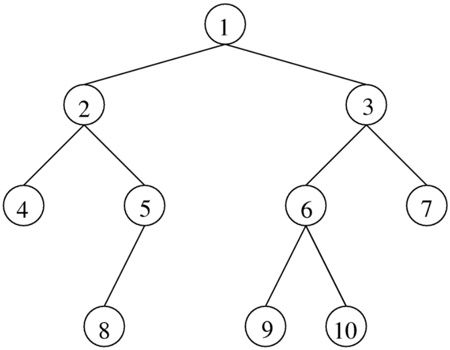
Exemple:
1, 2, 4, 5, 8, 3, 6, 9, 10 i 7



Recorreguts en profunditat: inordre

1. recórrer fill esquerre (en inordre)
2. visitar l'arrel
3. recórrer fill dret (en inordre)

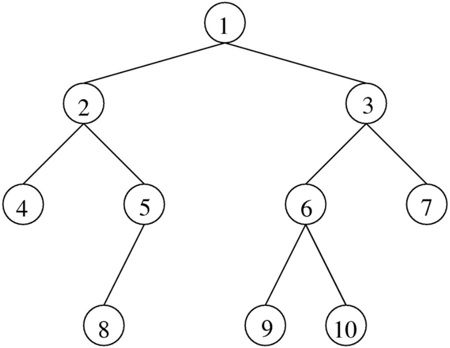
Exemple:
4, 2, 8, 5, 1, 9, 6, 10, 3, i 7



Recorreguts en profunditat: postordre

1. recórrer fill esquerre (en postordre)
2. recórrer fill dret (en postordre)
3. visitar l'arrel

Exemple:
4, 8, 5, 2, 9, 10, 6, 7, 3, i 1



Recorregut en preordre

```
/* Pre: cert */
/* Post: El resultat conté els nodes d'a en preordre */
template <typename T>
list<T> preorder(const BinTree<T>& a) {
    list<T> l;    // inicialment, buida
    if (not a.empty()) {
        l.push_back(a.value());
        l.splice(l.end(),preorder(a.left()));
        l.splice(l.end(),preorder(a.right()));
    }
    return l;
}
```

Exercici: Com canviem les instruccions del mig per obtenir els recorreguts en inordre i en postordre?

Recorregut en inordre

Manera alternativa: afegir a una llista donada
Obtenim el recorregut fent una crida inicial amb la llista buida

```
/* Pre: l = L */
/* Post: l conté L seguida dels nodes d'a en inordre */
template <typename T>
void inorder(const BinTree<T>& a, list<T>& l) {
    if (not a.empty()) {
        inorder(a.left(),l);
        l.push_back(a.value());
        inorder(a.right(),l);
    }
}

// Ús:
BinTree<int> a;
...
list<int> rec;
inorder(a,rec);
```

Recorregut en amplada o per nivells

Visita d'els nodes d'un arbre donat de manera que:

- tots els nodes del nivell i s'han visitat abans que els del nivell $i+1$
- dins de cada nivell, els nodes es visiten d'esquerra a dreta

Recorregut en amplada o per nivells

Es fa amb una cua

Repetir:

- agafar primer arbre de la cua;
- visitar la seva arrel;
- ficar els seus dos fills a la cua;

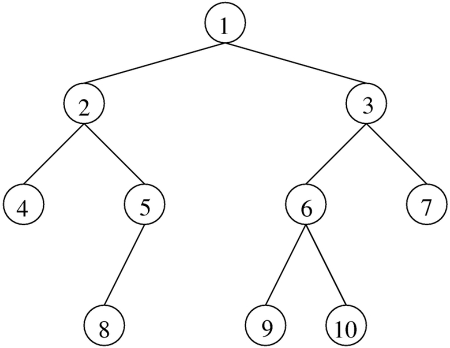
Recorregut en amplada o per nivells

Es fa amb una cua

Repetir:

- agafar primer arbre de la cua;
- visitar la seva arrel;
- ficar els seus dos fills a la cua;

Al llarg de tot l'algorisme, en cada iyeració la cua conté alguns nodes del nivell k seguits de nodes del nivel $k+1$ que són fills dels nodes de nivell k que ja han sigut visitats i no són a la cua. En cap moment la cua conté nodes de més de dos nivells consecutius i mai un node de nivell $k+1$ precedeix un altre de nivel k a



Recorregut en amplada

```
/* Pre: cert */
/* Post: El resultat conté el recorregut d'a en amplada */
template <typename T>
list<T> nivells(const BinTree<T>& a) {
    list<T> l;  // inicialment, buida
    if (not a.empty()) {
        queue< BinTree<T> > c;
        c.push(a);
        while (not c.empty()) {
           BinTree<T> aux = c.front();
           c.pop();
           l.push_back(aux.value());
           if (not aux.left().empty()) c.push(aux.left());
           if (not aux.right().empty()) c.push(aux.right());
        }
    }
    return l;
}
```

Part IV

Disseny Iteratiu: Verificació i Derivació

Correctesa d'un programa

Definició:
L' estat d'un programa en un punt determinat de la execució vé donat pel valor de totes les variables actives en aquell punt.

```
// Estat = ( x = 3, y = 7, ... )
++x;
// Estat = ( x = 4, y = 7, ... )
```

Correctesa d’un programa

Definició: Correcció d’un programa

Si l’estat inicial del programa o funció satisfà la Precondició, llavors el programa acaba en un nombre finit de pasos i l’estat final satisfà la Postcondició

Correctesa d'un programa

Definició: Correcció d'un programa

Si l'estat inicial del programa o funció satisfà la Precondició, llavors el programa acaba en un nombre finit de pasos i l'estat final satisfà la Postcondició

- Com sabem que un programa és correcte?
- Només podem fer un nombre finit (i petit) de proves
- Raonament genèric sobre els estats del programa

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
   p = p * x;
   y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

Demostració de correctesa?

Ho he provat i ...

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
   p = p * x;
   y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
   p = p * x;
   y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

Ho he provat i . . .
. . . amb 5 i 3 dona 125

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
   p = p * x;
   y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

Ho he provat i . . .

. . . amb 5 i 3 dona 125

. . . amb 0 i 100 dona 0

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
   p = p * x;
   y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

Ho he provat i . . .

. . . amb 5 i 3 dona 125

. . . amb 0 i 100 dona 0

. . . amb -4 i 2 dona 16

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
   p = p * x;
   y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

Ho he provat i . . .

. . . amb 5 i 3 dona 125

. . . amb 0 i 100 dona 0

. . . amb -4 i 2 dona 16

. . . amb 4 i -2 no cal provar (no es compleix la Pre)

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
   p = p * x;
   y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

Ho he provat i . . .

. . . amb 5 i 3 dona 125

. . . amb 0 i 100 dona 0

. . . amb -4 i 2 dona 16

. . . amb 4 i -2 no cal provar (no es compleix la Pre)

. . . per tant, és correcte!

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
   p = p * x;
   y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

Ho he provat i . . .
. . . amb 5 i 3 dona 125
. . . amb 0 i 100 dona 0
. . . amb -4 i 2 dona 16
. . . amb 4 i -2 no cal provar (no es compleix la Pre)
. . . per tant, és correcte!

Nombre finit (petit) de casos
$\neq$
Tots els casos

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
   p = p * x;
   y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

Demostració de correctesa?

"Inicialitzem p a 1 (el producte de 0 factors).

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
   p = p * x;
   y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
   p = p * x;
   y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

"Inicialitzem p a 1 (el producte de 0 factors).
Llavors, anem multiplicant p per x i decrementant y en cada pas.

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
   p = p * x;
   y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

"Inicialitzem p a 1 (el producte de 0 factors).
Llavors, anem multiplicant p per x i decrementant y en cada pas.
Repetim fins que $y = 0$, i llavors ja hem acabat.

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
   p = p * x;
   y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

"Inicialitzem p a 1 (el producte de 0 factors).
Llavors, anem multiplicant p per x i decrementant y en cada pas.
Repetim fins que $y = 0$, i llavors ja hem acabat.
Ja es veu que a p tindrem X^Y."

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
   p = p * x;
   y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

“Inicialitzem p a 1 (el producte de 0 factors).
Llavors, anem multiplicant p per x i decrementant y en cada pas.
Repetim fins que $y = 0$, i llavors ja hem acabat.
Ja es veu que a p tindrem X^Y.”

Llegir el programa

$\neq$

Dir per què satisfa la seva espec

Com ho fem, doncs?

- Raonament genèric sobre tots els estats possibles
- L'eina principal és la inducció
- En programes recursius, aplicada directament
- En programes iteratius, amagada en els invariants

Part IV

Disseny Iteratiu: Verificació i Derivació

Com raonar sobre programes

- Recordem: estat d'un programa = valors de totes les variables

```
(x = 10, y = -5, b = true)
(x = 10, y = -15, b = false)
```

Com raonar sobre programes

- Recordem: estat d'un programa = valors de totes les variables

  `(x = 10, y = -5, b = true)`

  `(x = 10, y = -15, b = false)`

- Asserció: Descripció d'un conjunt d'estats

  `P(x,y,b)` = "`b == (x + y > 0)`"

Com raonar sobre programes

- Recordem: estat d'un programa = valors de totes les variables

  `(x = 10, y = -5, b = true)`

  `(x = 10, y = -15, b = false)`

- Asserció: Descripció d'un conjunt d'estats

  `P(x,y,b)` = "`b == (x + y > 0)`"

- El comentari "`// P`" o "`/* P */`" en un programa vol dir "en aquest punt l'estat delprograma compleix `P`"

Com raonar sobre programes

- Recordem: estat d'un programa = valors de totes les variables

  `(x = 10, y = -5, b = true)`

  `(x = 10, y = -15, b = false)`

- Asserció: Descripció d'un conjunt d'estats

  `P(x,y,b)` = "`b == (x + y > 0)`"

- El comentari "`// P`" o "`/* P */`" en un programa vol dir "en aquest punt l'estat delprograma compleix `P`"
- La Precondició (Pre) és l'asserció que l'estat inicial ha de satisfer
- La Postcondició (Post) és l'asserció que ha de ser certa per l'estat final; altrament el programa no satisfà l'especificació

Com raonar sobre programes

- **Mètode:** Anotarem el programa amb assercions que descriuen els estats en diferents punts, i argumentarem que cada anotació està ben feta

Com raonar sobre programes

- **Mètode:** Anotarem el programa amb assercions que descriuen els estats en diferents punts, i argumentarem que cada anotació està ben feta
- Un programa és correcte si és cert que

```
/* Pre */ programa /* Post */
```

Com raonar sobre programes

Donada una asserció P, $P(x \leftarrow E)$ és l'asserció resultant de reemplaçar simultàniament les aparicions d'x en l'asserció P per l'expressió E, e.g., $P =$ "$x \geq 5$",
$P(x \leftarrow y+3) =$ "$y + 3 \geq 5$"

- Assignació:

$$/*\ P(x \leftarrow E)\ */\ \texttt{x = E}\ /*\ P\ */$$

- Composició seqüèncial:
  Si $/*\ P_1\ */\ \texttt{S1}\ /*\ Q_1\ */$ és correcte, $/*\ P_2\ */\ \texttt{S2}$ $/*\ Q_2\ */$ és correcte i $Q_1 \Longrightarrow P_2$ llavors

$$/*\ P_1\ */\ \texttt{S1; S2}\ /*\ Q_2\ */$$

  és correcte.

Com raonar sobre programes

- Composició alternativa/condicional:
  Si `/*` $P \wedge B$ `*/ S1 /*` Q `*/` és correcte,
  i `/*` $P \wedge \neg B$ `*/ S2 /*` Q `*/` és correcte llavors

```
/* P */
if (B) S1
else S2
/* Q */
```

  és correcte.

Part IV

Disseny Iteratiu: Verificació i Derivació

Correctesa d'un bucle

Esquema bàsic

```
// Pre: P
inicialitzacions;
// Pre (del bucle): P'
while (B) {
  cos
}
// Post (del bucle): Q'
tractament final;
// Post: Q
```

L'invariant: Concepte i ús

- Invariant: Una asserció I que és certa després de qualsevol nombre d'iteracions (inclòs 0); per tant cal que $P' \implies I$
- A més, quan el bucle acaba, implica la Post: $I \wedge \neg B \implies Q'$

L'invariant: Concepte i ús

- Invariant: Una asserció I que és certa després de qualsevol nombre d'iteracions (inclòs 0); per tant cal que $P' \implies I$
- A més, quan el bucle acaba, implica la Post: $I \wedge \neg B \implies Q'$
- Que l'asserció I és un invariant es demostra per inducció sobre el nombre d'iteracions i: s'ha de cumplir

Esquema bàsic

```
// I ∧ B
cos del bucle
// I
```

L'invariant: Concepte i ús

- Invariant: Una asserció I que és certa després de qualsevol nombre d'iteracions (inclòs 0); per tant cal que $P' \implies I$
- A més, quan el bucle acaba, implica la Post: $I \wedge \neg B \implies Q'$
- Que l'asserció I és un invariant es demostra per inducció sobre el nombre d'iteracions i: s'ha de cumplir

Esquema bàsic

```
// I ∧ B
cos del bucle
// I
```

- Finalment, cal demostrar (potser usant l'invariant I) que el bucle segur que acaba
- Trobar i explicitar l'invariant d'un bucle és molt bona documentació d'un bucle: explica per què funciona!

Demostració d'acabament

- Funció de fita: Una funció f sobre les variables que diuen quantes iteracions queden com a molt
- Ha de tenir valor enter no negatiu: per a qualsevol estat del programa $f \geq 0$
- Cal que decreixi (al menys en 1) a cada iteració
- Si fem una iteració més, segur que $f > 0$

Passos

0 Inventar un invariant I i una funció de fita f

Demostrar que:

1 Les inicialitzacions del bucle estableixen l'invariant: $P' \implies I$

2 Si es compleix l'invariant i s'entra en el bucle, al final d'una iteració torna a complir-se l'invariant: `/*` $I \wedge B$ `*/ cos /*` I `*/`

3 L'invariant i la *negació* de la condició d'entrada al bucle impliquen la Postcondició: $I \wedge \neg B \implies Q'$

4 La funció de fita decreix a cada iteració: `/*` $I \wedge B \wedge f = F$ `*/ cos /*` $I \wedge f < F$ `*/`

5 Si entrem un cop més al bucle, la funció de fita és estrictament positiva: $I \wedge B \implies f > 0$

Exemple: Exponenciació

```
// Pre: x = X ∧ y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
   p = p * x;
   y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

- Invariant:

$$x = X \wedge y \geq 0 \wedge p \cdot X^y = X^Y$$

- Fita: y

Exemple: Exponenciació

```
// Pre: x = X ∧ y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
   if (y % 2 == 0) { x = x*x; y = y/2; }
   else { p = p * x; y = y - 1; }
}
// Post: p = X^Y
```

- Invariant:

$$y \geq 0 \land p \cdot x^y = X^Y$$

- Fita: y

Una mica de notació

- Donat un vector v de talla n i dos entergs i, j amb $0 \leq i, j < n$, $v[i..j]$ denota el subvector entre les components i i j; si $i > j$ llavors $v[i..j]$ és un subvector buit
- Donada una llista L i dos iteradors $it1$ i $it2$ tals que $it2$ apunta a un element posterior a l'apuntat por $it1$ (o $it2 == it1$) llavors $L[it1 : it2)$ denota la subllista de L el primer element de la qual és l'apuntat per $it1$ i l'últim element és el predecessor de l'element apuntat per $it2$
- $L[: it) \equiv L[L.\texttt{begin}(), it)$
- $L[it :) \equiv L[it, L.\texttt{end}())$
- $L[:) \equiv L$

Exemple: Suma d'un vector

```
// Pre: cert
double suma(const vector<double>& v) {
    int i = 0;
    double s = 0;
    while (i < v.size()) {
        s += v[i];
        ++i;
    }
    return s;
}
// Post: el resultat es la suma de tots els elements de v
```

- Invariant:

$$0 \leq i \leq v.\texttt{size}() \land s = \text{suma de } v[0..i-1]$$

- Fita: $v.\texttt{size}() - i$

Exemple: Cerca un element en una llista

```
// Pre: cert
bool pertany(const list<double>& l, double x) {
    list<double>::const_iterator it = l.begin();
    bool trobat = false;
    while (it != l.end() and not trobat) {
        if (*it == x) trobat = true;
        ++it;
    }
    return trobat;
}
// Post: el resultat indica si x apareix en l
```

Exemple: Cerca un element en una llista

```
// Pre: cert
bool pertany(const list<double>& l, double x) {
    list<double>::const_iterator it = l.begin();
    bool trobat = false;
    while (it != l.end() and not trobat) {
        if (*it == x) trobat = true;
        ++it;
    }
    return trobat;
}
// Post: el resultat indica si x apareix en l
```

- Invariant:

it apunta a un element de l o $it = l.\mathrm{end}()$, i
$trobat =$ "x pertany a $l[:it)$"

- Funció de fita: nombre d'elements de la subllista $l[it:)$

Exemple: variació de cerca lineal

```
// Pre: cert
// Post: retorna la posició en v d'un estudiant amb dni x,
// o bé -1 si cap estudiant de v té dni x
int posicio(int x, const vector<Estudiant>& v) {
   int i = 0;
   bool trobat = false;
   while (i < v.size() and not trobat) {
      if (v[i].consultar_dni() == x) trobat = true;
      else ++i;
   }
   if (trobat) return i;
   else return -1;
}
```

- Invariant:

$$0 \leq i \leq v.\mathtt{size}()) \wedge x \notin v[0..i-1]$$

  i a més

$$trobat \implies \text{“}i < v.\mathtt{size}() \wedge v[i].\mathtt{consultar\_dni}() = x\text{''}$$

- Funció de fita:

  $v.\mathtt{size}() - i - [\![trobat]\!]$, $[\![P]\!] = 1$ si P és cert, i $[\![P]\!] = 0$ si P és fals

Exemple: Suma d'una pila

Donada una pila d'enters, calcular-ne la suma dels elements:

```
// Pre: p = [a_1, ..., a_n]
int suma(stack<int>& p) {
    int s = 0;
    while (not p.empty()) {
        s += p.top();
        p.pop();
    }
    return s;
}
// Post: suma(p) = a_1 + ··· + a_n ∧ p = []
```

- Invariant: $\exists i : 0 \leq i \leq n : p = [a_1, \ldots, a_{n-i}] \land s = \sum_{k=n+1-i}^{n} a_k = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_{n-i+1} \quad (*)$
- Funció de fita: alçada de p

(*) Quan $i = n$ entendrem que $p = [a_1, \ldots, a_{n-i}] = []$; de manera semblant quan $i = 0$ llavors $s = 0$ (el rang de sumació és buit)

Exemple: Sumar k a una llista

Problema: donada una llista i un enter k, transformar-la en una altra resultant de sumar k a cada element de la llista original.

```
// Pre: l = [a_1,...,a_n]
void suma_k(list<int>& l, int k) {
    list<int>::iterator it;
    it = l.begin();
    while (it != l.end()) {
        *it += k;
        ++it;
    }
}
// Post: l = [a_1 + k,...,a_n + k]
```

- Invariant: $\exists i : 1 \leq i \leq n+1 : l[it :) = [a_i, \ldots, a_n] \wedge l[: it) = [a_1 + k, \ldots, a_{i-1} + k] \quad (*)$
- Funció de fita: nombre d'elements de $l[it :)$

(*) Quan $i = n + 1$ entendrem que $l = [a_i, \ldots, a_n] = []$; de manera semblant quan $i = 1$ llavors

$laux = [a_1 + k, \ldots, a_{i-1} + k] = []$

Exemple: Revessar una llista

```
// Pre: l = [a_1, ..., a_n]
void revessa(list<int>& l) {
    list<int> laux;
    while (not l.empty()) {
        laux.push_front(*(l.begin()));
        l.pop_front();
    }
    // laux = [a_n, ..., a_1]
    l = laux;
}
// Post: l = [a_n, ..., a_1]
```

- Invariant:

$$\exists i : 1 \leq i \leq n+1 : l = [a_i, \ldots, a_n] \wedge laux = [a_{i-1}, \ldots, a_1]$$

- Funció de fita: l.size()

Exercici: Directament sobre l, evitant la llista auxiliar

Exemple: cerca dicotòmica

```
// Pre: 0 ≤ esq = E ∧ D = dre < v.size() ∧ esq ≤ dre + 1
//      ∧ v està ordenat creixentment
// Post: x és a v[E..D] si i nomes si
//       0 ≤ esq < v.size() ∧ v[esq] = x
int posicio(double x, const vector<double>& v,
            int esq, int dre) {
   while (esq < dre) {
       int pos = (esq + dre)/2;
       if (v[pos] < x) esq = pos + 1;
       else dre = pos;
   }
   return esq;
}
```

- Invariant: $x \in v[E..D] \Leftrightarrow x \in v[esq..dre] \wedge \ldots$
- Fita: $dre - esq$. Millor encara: $f = \log_2(dre - esq + 1)$

Exemple: comptar nombre d'elements diferents

```
// Pre: cert
// Post: retorna el nombre d'elements diferents a v
int diferents(const vector<elem>& v) {
   int n = 0;
   int i = 0;
   while (i < v.size()) {
       int j = i-1;
       while (j >= 0 and v[j] != v[i]) --j;
       if (j < 0) ++n;
       ++i;
   }
   return n;
}
```

Exemple: comptar nombre d'elements diferents

```
// n = N ∧ i < v.size()
int j = i-1;
while (j >= 0 and v[j] != v[i]) --j;
if (j < 0) ++n;
// n = N  si  v[i] ∉ v[0..i − 1]∧
// n = N + 1  si  v[i] ∈ v[0..i − 1]
```

- Invariant (del bucle intern sobre j):

$$v[i] \notin v[j+1..i-1] \wedge j \geq -1$$

- Fita: $j + 1$

Exemple: comptar nombre d'elements diferents

```
// Pre: cert
// Post: diferents(v) = nombre d'elements diferents a v
int diferents(const vector<elem>& v) {
   int n = 0;
   int i = 0;
   while (i < v.size()) {
     int j = i-1; ...; if (j < 0) ++n;
     // n = nombre d'elements diferents a v[0..i]
     ++i;
   }
   return n;
}
```

- Invariant (del bucle extern sobre i):

  $0 \leq i \leq v.\mathtt{size}() \wedge n =$ nombre d'elements diferents a $v[0..i-1]$

- Fita: $v.\mathtt{size}() - i$

Exemple: comptar nombre d’elements diferents (2)

Amb una funció separada:

```
// Pre: [a..b] ⊆ [0..v.size() − 1]
// Post: retorna cert sii x ∈ v[a..b]
template <typename T>
bool apareix(const T& x, const vector<T>& v, int a, int b);

// Pre: cert
// Post: retorna el nombre d’elements diferents a v
int diferents(const vector<elem>& v) {
   int n = 0;
   int i = 0;
   while (i < v.size()) {
       if (not apareix(v[i],v,0,i-1)) ++n;
       ++i;
   }
   return n;
}
```

Exemple: comptar nombre d’elements diferents (2)

Invariant:

$0 \leq i \leq v.\texttt{size}() \wedge n =$ nombre d’elements diferents en $v[0..i-1]$

- Es fa servir l’especificació d’`apareix` per verificar
- Podem verificar independentment la correcció de `diferents` i d’`apareix` $\Rightarrow$ Modularitat!

Invariants “gràfics”

Sovint podem donar una representació gràfica esquemàtica d’un invariant (i en general d’una asserció), molt més intuitiva i senzilla d’entendre.
Exemple: Donat un vector v d’enters, escriu un procediment que reorganitzi els seus continguts de manera que els elements parells apareguin abans que els elements senars.

```
// Pre: cert
// Post: ???
void reorganitza_parells_senars(vector<int>& v);
```

Invariants “gràfics”

```
// Pre: v = V
// Post: ???
void reorganitza_parells_senars(vector<int>& v);
```

Invariants “gràfics”

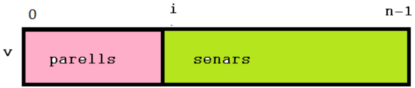
- Postcondició formal: v és una permutació de V, $n = v.\mathtt{size}() \geq 0$, existeix una posició i tal que totes les posicions precedents estàn ocupades per números parells

$$\exists i : 0 \leq i < n : \Big(\forall j : 0 \leq j < i : v[j] \bmod 2 = 0,$$

i tal que la posició i totes les que vénen al seu darrera estàn ocupades per números senars

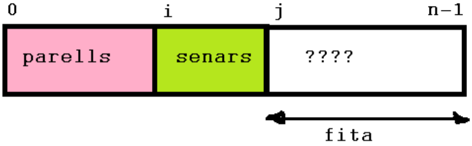
$$\forall j : i \leq j < n : v[j] \bmod 2 = 1\Big)$$

- Postcondició “gràfica”:



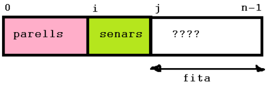
Invariants “gràfics”

```
// Pre: v = V
// Post: ???
void reorganitza_parells_senars(vector<int>& v);
```



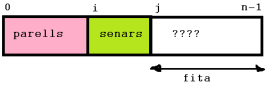
Invariants “gràfics”

```
// Pre: v = V
// Post: ...
void reorganitza_parells_senars(vector<int>& v) {
  int i = 0; int j = 0;
  while (j < v.size()) {
    if (v[j] % 2 == 0) {
      swap(v[i], v[j]); ++i;
    }
    ++j;
  }
}
```



Invariants “gràfics”

```
// Pre: v = V
// Post: ...
void reorganitza_parells_senars(vector<int>& v) {
  int i = 0;
  for (int j = 0; j < v.size(); ++j)
    if (v[j] % 2 == 0) {
      swap(v[i], v[j]); ++i;
    }
}
```



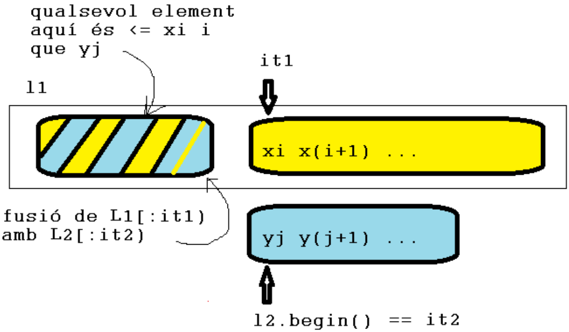
Invariants “gràfics”

```
// Pre: l1 = L1 = [x_1, ..., x_m] ∧ l2 = L2 = [y_1, ..., y_n]∧
//       x_1 ≤ x_2 ≤ ··· ≤ x_m ∧ y_1 ≤ y_2 ≤ ··· ≤ y_n
// Post: l1 = [z_1, ..., z_{m+n}] ∧ l2 = []
//        ∧{z_1, ..., z_{m+n}} = {x_1, ..., x_m} ∪ {y_1, ..., y_n}
//        ∧z_1 ≤ z_2 ≤ ··· ≤ z_{m+n}
template <typename T>
void fusionar(list<T>& l1, list<T>& l2);
```

N.B. Suposem que hi ha un ordre $\leq$ definit entre elements de tipus `T`

Invariants "gràfics"

- Fita: $\min(\text{mida de } l1[it1:), l2.\mathtt{size}())$
- Invariant:



Invariants “gràfics”

```
template <typename T>
void fusionar(list<T>& l1, list<T>& l2) {
  list<T>::iterator it1 = l1.begin();
  list<T>::iterator it2 = l2.begin();
  while (it1 != l1.end() and it2 != l2.end()) {
    if (*it1 <= *it2) ++it1;
    else {
      l1.insert(it1,*it2);
      it2 = l2.erase(it2);
    }
  }
  ...
}
```

Invariants “gràfics”

```
template <typename T>
void fusionar(list<T>& l1, list<T>& l2) {
  list<T>::iterator it1 = l1.begin();
  list<T>::iterator it2 = l2.begin();
  while (it1 != l1.end() and it2 != l2.end()) { ... }
  // it1 = l1.end() i l1[: it1) és la fusió de L1 amb L2[: it2)
  // o it2 = l2.end() i l1[: it1) és la fusió de L1[: it1) amb L2

  // it1 = l1.end() i l1 és la fusió de L1 amb L2[: it2)
  // o it2 = l2.end() i l1 és la fusió de L1 amb L2
  l1.splice(l1.end(), l2);
}
```

Part IV

Disseny Iteratiu: Verificació i Derivació

Disseny inductiu o derivació

Invertim el procés: de la “justificació” a l’algorisme

Donades Pre i Post, proposar:

- un invariant que les generalitzi les dues
- deduim les inicialitzacions que, amb la Pre, estableixin l’invariant
- un cos del bucle que mantingui l’invariant
- una condició del bucle que, negada, i junt amb l’invariant impliqui la Post

Exemple: Part entera de l'arrel quadrada

```
// Pre: x = X ≥ 0
   ????
// Post: a = ⌊√X⌋ (part entera per defecte
//       de l'arrel quadrada de X)
```

Exemple: Part entera de l'arrel quadrada

```
// Pre: x = X ≥ 0
   ????
// Post: a = ⌊√X⌋ (part entera per defecte
//       de l'arrel quadrada de X)
```

Post: $a^2 \leq X < (a+1)^2$

Invariant: $I = (x = X \geq 0) \wedge (a^2 \leq x < b^2) \wedge (0 \leq a < b)$

Exemple: Part entera de l'arrel quadrada

```
// Pre: x = X ≥ 0
   ????
// Post: a = ⌊√X⌋ (part entera per defecte
//       de l'arrel quadrada de X)
```

Post: $a^2 \leq X < (a+1)^2$

Invariant: $I = (x = X \geq 0) \wedge (a^2 \leq x < b^2) \wedge (0 \leq a < b)$

```
int a = ?;
int b = ?;
while (B) {
    int c = (a+b)/2;
    if (?) a = c;
    else b = c;
}
```

Exemple: Part entera de l'arrel quadrada

```
int a = ?;
int b = ?;
while (B) {
    int c = (a+b)/2;
    if (?) a = c;
    else b = c;
}
```

- $I \wedge b \leq a+1 \implies a^2 \leq x < b^2 = (a+1)^2$, és a dir, $a = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ si $b \leq a+1$ (ja que $a < b$ sempre tindrem $b = a+1$); per tant la condició del bucle ha de ser la negació: `b > a+1`
- Com $0 \leq x = X < (X+1)^2$, fent `a = 0;` i `b = x+1;` establim l'invariant
- Si entrem al bucle tindrem $a < c < b$, i si $x < c^2$ llavors fent `b = c;` es torna a satisfer l'invariant; de manera similar, si $c^2 \leq x$ llavors fer `a = c;` reestablirà l'invariant.

Exemple: Part entera de l'arrel quadrada

```
int a = 0;
int b = x+1;
while (b > a+1) {
    int c = (a+b)/2;
    if (c * c <= x) a = c;
    else b = c;
}
```

El nostre algorisme és el conegut mètode de la bisecció per a trobar arrels de funcions continues

Nombre de parelles ordenades

Donat un vector v, comptar quantes parelles $(v[i], v[i+1])$ conté tals que $v[i] < v[i+1]$.

```
int parelles_ordenades(const vector<int>& v);
```

Nombre de parelles ordenades

Invariant:

$$I = \Big(v.\texttt{size}() = 0 \land p = 0\Big) \lor \Big(1 \leq i \leq v.\texttt{size}() \land$$
$$p = \text{nombre de parelles ordenades en } v[0..i-1]\Big)$$

- La variable i recorre el vector
- La variable p compta les parelles ordenades vistes fins al moment durant el recorregut

Nombre de parelles ordenades

1. Com establim l'invariant al principi?

```
int p = 0;
int i = 1; // v[0..0] no conté cap parella
```

Nombre de parelles ordenades

2. Quan acabem? I acabem satisfent la Post? La darrera parella que cal comprovar és $(v[n-2], v[n-1])$, amb $n = v.size()$. Si la nostra condició de sortida és $i = n$, hem provat totes les parelles $(v[j-1], v[j])$ amb $j < n$, inclós el cas $j = n - 1$, que és la $(v[n-2], v[n-1])$ i ja hem acabat Podem posar de condició del bucle $i < v.\mathtt{size}()$, que cobreix bé els casos $n = 0$ i $n = 1$, i que implica sortir quan $i = v.\mathtt{size}()$

Nombre de parelles ordenades

3. Com avancem mantenim l'invariant?
   Volem avançar fent $i = i + 1$. Posem que ho fem com a darrera instrucció del cos del bucle.
   Per tant just abans d'incrementar s'hauria de complir que hem provat totes les parelles $(v[j-1], v[j])$ amb $j \leq i$.
   La que falta doncs és la parella amb $j = i$, que és $(v[i-1], v[i])$

```
 // I ∧ i < v.size()
if (v[i-1] < v[i]) p = p + 1;
i = i + 1;
// I
```

Nombre de parelles ordenades

```
int parelles_ordenades(const vector<int>& v) {
   int p = 0;
   for (int i = 1; i < v.size(); ++i)
     // Inv: (v.size() = 0 i p = 0) ó
     //      (p = nombre de parelles ordenades en v[0..i-1]
     //       i 1 ≤ i ≤ v.size())
     // Fita: 0 si v.size() = 0, v.size() - i altrament
     if (v[i-1] < v[i]) ++p;
   return p;
}
```

Ordenació

1. Ordenar un vector v: Deixar-lo de manera que "per a tot i, $0 \leq i < v.size() - 1$, $v[i] \leq v[i+1]$
2. Invariant:

   "$v[0..j]$ està ordenat" ...

   Fixem-nos que quan $j = v.size() - 1$ ja tenim tot el vector ordenat.

Ordenació

1. Ordenar un vector v: Deixar-lo de manera que "per a tot i, $0 \leq i < v.size() - 1$, $v[i] \leq v[i+1]$
2. Invariant:

   "$v[0..j]$ està ordenat" ...

   Fixem-nos que quan $j = v.size() - 1$ ja tenim tot el vector ordenat.

   "i tots els elements de $v[0..j]$ són més petits o iguals que els de $v[j+1..v.size()-1]$"

Ordenació

"$v[0..j]$ està ordenat i tots els elements de $v[0..j]$ són més petits o iguals que els de $v[j+1..v.size()-1]$"

Si incrementem j:

- $v[0..j]$ segueix ordenat! Per què?
- Però no és cert que "$v[0..j]$ és més petit que $v[j+1..v.size()-1]$"
- Només és cert si $v[j+1]$ era un element mínim de $v[j+1...v.size()-1]$
- Que hem de fer?
  - Buscar un valor mínim de $v[j+1...v.size()-1]$
  - Intercanviar-lo amb $v[j+1]$
  - Incrementant j es reestableix l'invaraint

Aquest és l'algorisme d'ordenació per selecció.

Exercici: Si no posem la segona part de l'invariant, deriveu la ordenació per inserció

Exemple: Prefix de suma màxima d'un vector

```
// Pre: v.size() > 0
// Post: el resultat és i tal que v[0] + ... + v[i] és màxima
//        i -1 ≤ i < v.size()
int psm(const vector<double>& v);
```

Exemple: Prefix de suma màxima d'un vector

```
// Post: el resultat és i tal que v[0] + ... + v[i] és màxima
//        i −1 ≤ i < v.size()
```

Què vol dir "és màxima"? Sigui $n = v.\mathtt{size}()$ i definim $S_i = \sum_{k=0}^{i} v[k]$. Per conveni, $S_{-1} = 0$. Llavors estem dient que el resultat és el valor i, $-1 \leq i < n$, tal que

$$S_i = \max\{S_k \mid -1 \leq k < n\}$$

Exemple: Prefix de suma màxima d'un vector

Això suggereix que la nostra solució faci un bucle sobre j amb l'invariant:

```
// Inv: $S_i = \max\{S_k \mid -1 \le k < j\} \wedge -1 \le i < j \le n$
```

Exemple: Prefix de suma màxima d'un vector

```
// Inv: −1 ≤ i < j ≤ v.size(),
//        v[0] + ··· + v[i] ≥ v[0] + ··· + v[k] per a tot k ∈ [−1..j − 1],
//        sum = v[0] + ... + v[j − 1],
//        sumi = v[0] + ... + v[i]
```

Exemple: Prefix de suma màxima d'un vector

```cpp
// Pre: v.size() > 0
int psm(const vector<double>& v) {
   int i = -1; int j = 0;
   double sum = 0; double sumi = 0;
   while (j < v.size()) {
       sum += v[j];
       if (sum > sumi) {
          sumi = sum;
          i = j;
       }
       ++j;
   }
   return i;
}
// Post: el resultat és i tal que v[0] + ... + v[i] és màxima
//        i -1 ≤ i < v.size()
```

Percentatge d'estudiants presentats (amb nota)

- Donat un conjunt d'estudiants (`Cjt_estudiants`) retornem el percentatge d'estudiants presentats (amb nota) del vector
- Especificació:

```
// Pre: C conté almenys un estudiant
// Post: el resultat es el percentatge de presentats de C
double presentats(const Cjt_estudiants& C);
```

Percentatge d'estudiants presentats (amb nota)

- Per saber el % de presentats calculem primer el nombre d'estudiants amb nota
- Tindrem una potscondició P' després del bucle: "$npres$ és el nombre d'estudiants presentants de C".
- Un cop tenim P', és immediat obtenir la postcondició de la funció `Post`
- Per obtenir P' recorrerem el conjunt C comptant els estudiants amb nota
- Invariant:

```
// Inv: 1 ≤ i ≤ C.mida() + 1
//      i npres = nombre d'estudiants amb nota entre
//      els primers i − 1 estudiants en ordre creixent
//      de DNI
```

Percentatge d'estudiants presentats (amb nota)

```
// Pre: C conté almenys un estudiant
double presentats(const Cjt_estudiants& C) {
  int npres = 0;
  // Inv: 1 ≤ i ≤ |C| + 1,
  //      npres = nombre d'estudiants amb nota entre
  //      els i − 1 primers
  for (int i = 1; i <= C.mida(); ++i) {
     if (C.consultar_iessim(i).te_nota())
        ++npres;
     // npres = nombre d'estudiants amb nota entre els
     // i primers
  }
  // P': npres és el nombre d'estudiants presentants de C
  return double(npres)/C.mida()*100;
}
// Post: el resultat és el percentatge d'estudiants
//       presentats de C
```

Arrodoniment de la nota

Donat un vector d'estudiants, modificar-lo arrodonint-ne les notes a la dècima més propera (es pot fer com a acció o com a funció).

```
// Pre: cert
// Post: vest té les notes dels estudiants arrodonides
// a la dècima més propera del seu valor inicial
void arrodonir_notes(vector<Estudiant>& vest);
```

Arrodoniment de la nota

Farem un recorregut pels elements del vector i suposem que disposem de la funció:

```
// Pre: cert
// Post: retorna el valor més proper a x amb un sol decimal
double arrodoniment(double x) {
  return 0.1*round(x*10);
}
```

Arrodoniment de la nota

Invariant: igual que la postcondició però aplicada només a la part tractada del vector

```
// Inv: vest[0..i-1] té les notes dels estudiants arrodonides
//      a la dècima més propera del seu valor inicial,
//      0 <= i <= vest.size()
```

- Quan $i = vest.\mathrm{size}()$, Inv $\Longrightarrow$ Post
- Si cada iteració incrementa i, per mantenir l'invariant abans hem d'arrodonir $vest[i]$

Arrodoniment de la nota

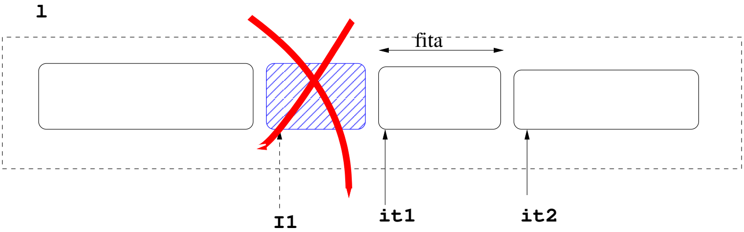
```
// Pre: cert
void arrodonir_notes(vector<Estudiant> &vest) {
  int n = vest.size();
  int i = 0;
  // Inv: ...
  while (i < n) {
    if (vest[i].te_nota()) {
      double aux = arrodoniment(vest[i].consultar_nota());
      vest[i].modificar_nota(aux);
    }
    ++i;
  }
}
// Post: vest té les notes dels estudiants arrodonides
// a la dècima més propera del seu valor inicial
```

Eliminació d’una subllista

```
// Pre: it1 = I1 i it2 = I2 apunten elements de la llista L i
// it2 apunta a un element igual o posterior a l'element
// apuntat per it1; l = L
// Post: La llista l conté tots els elements d'L, excepte
// els que hi havia entre l'element originalment apuntat per it1 i
// el predecessor de l'element originalment apuntat per it2, i.e.,
// l = L[: I1) · L[I2 :); '·' denota la concatenació
// de llistes
template <class T>
void elimina_subllista(list<T>& l,
     list<T>::iterator it1, list<T>::iterator it2);
```

Eliminació d'una subllista

Com a invariant proposem que la subllista entre el valor original I_1 d'$it1$ i el predecessor de l'element al qual apunta $it1$ ha sigut eliminada; quan $it1 = it2$ tindrem la postcondició:



Eliminació d'una subllista

Invariant "formal":

```
// Inv: it1 i it2 = I₂ apunten elements de la llista L i
//      it2 apunta a un element igual o posterior a l'element
//      apuntat per it1, l = L[: I₁) · L[it1 :)
```

- L'invariant és compleix des del primer moment
- Si $it1 = it2$, llavors l'invariant implica la postcondició
- Si l'invariant és cert i $it1 \neq it2$, llavors eliminant l'element apuntat per $it1$ i avançant $it1$ reestablim l'invariant
- La funció de fita és la talla de $L[it1 : it2)$; la precondició (i l'invariant) garanteixen que és ≥ 0, i amb cada iteració disminuirà en una unitat

Eliminació d'una subllista

```
// Pre: it1 = I1 i it2 = I2 apunten elements de la llista L i
// it2 apunta a un element igual posterior a l'element apuntat
// per it1; l = L
template <class T>
void elimina_subllista(list<T>& l,
          list<T>::iterator it1, list<T>::iterator it2) {

    while (it1 != it2)
      // Inv: it1 i it2 = I2 apunten elements de la
      //      llista L i it2 apunta a un element
      //      igual o posterior a l'element apuntat
      //      per it1, l = L[: I1) · L[it1 :)

      it1 = l.erase(it1);
}
// Post: La llista l conté tots els elements d'L, excepte
// els que hi havia entre I1 i el predecessor de I2, i.e.,
// l = L[: I1) · L[I2 :)
```

Part V

Disseny Recursiu

Alguns conceptes bàsics en disseny recursiu

1. Recursió és inducció. Comenceu amb una definició recursiva
2. Si no podeu fer recursió, proveu d'afegir més paràmetres (funció d'immersió)
3. Si es repeteixen càlculs, afegiu paràmetres per recordar-los (immersió d'eficiència)

Alçària d'una pila

Vam veure versions iterativa i recursiva:

```
int alcaria_iter(stack<int>& p) {
    int n = 0;
    while (not p.empty()) {
       ++n;
       p.pop();
    }
    return n;
}

int alcaria_rec(stack<int>& p) {
    if (p.empty()) return 0;
    else {
        p.pop();
        return 1 + alcaria_rec(p);
    }
}
```

D'on hem tret la versió recursiva??

L'alçaria de la pila $P = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ és n

D'on hem tret la versió recursiva??

L'alçaria de la pila $P = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ és n

Lema: això és equivalent a

- Si P és buida, alçària(P) $= 0$
- Altrament, alçària(P) $= 1 +$ alçària(desapilar(P))

D'on hem tret la versió recursiva??

En la definició recursiva, desapilar(P) és una funció abstracta que ens retorna la pila resultant de desapilar el cim de la pila P:

```
// Pre: p = P no és una pila buida
p.pop();
// Post: p = desapilar(P)
```

El mètode `pop` modifica la pila sobre la qual s'aplica i retorna `void`.

Exemple: factorial

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

```
/* Pre: n ≥ 0 */
/* Post: retorna n! */
int fact(int n) {
  int f = 1;
  // n = N ≥ 0
   while (n > 0) {
     // Inv: f = N!/n! ∧ n > 0
     // Fita: n
     f = f * n;
     --n;
   }
   return f;
}
```

Exemple: factorial

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

Exemple: factorial

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

Lema:

- $0! = 1$
- per a tot $n > 0$, $n! = n \cdot (n-1)!$

Exemple: factorial

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

Lema:

- $0! = 1$
- per a tot $n > 0$, $n! = n \cdot (n-1)!$

```
/* Pre: n ≥ 0 */
/* Post: retorna n! */
int fact(int n) {
    if (n == 0) return 1;
    else return n * fact(n-1);
}
```

Definicions recursives

Definició amb "…" suggereix solucions iteratives

Per aplicar recursivitat, necessitem una definició recursiva

Com trobar-la: considereu operacions que descomposen una dada en elements "més petits"

Definicions recursives

Definició amb "$\ldots$" suggereix solucions iteratives

Per aplicar recursivitat, necessitem una definició recursiva

Com trobar-la: considereu operacions que descomposen una dada en elements "més petits"

Exemple: descomposem una pila no buida $P = [a_1, \ldots, a_n]$ en cim$(P) = a_n$ (que podem obtenir amb `P.top()`) i desapilar$(P) = [a_1, \ldots, a_{n-1}]$ que obtindrem mitjançant `P.pop()`.

Definicions recursives

Definició amb "…" suggereix solucions iteratives

Per aplicar recursivitat, necessitem una definició recursiva

Com trobar-la: considereu operacions que descomposen una dada en elements "més petits"

Exemple: descomposem una pila no buida $P = [a_1, \ldots, a_n]$ en cim(P) $= a_n$ (que podem obtenir amb `P.top()`) i desapilar(P) $= [a_1, \ldots, a_{n-1}]$ que obtindrem mitjançant `P.pop()`.
Exemple: per el càlcul de x^y es pot fer la descomposició $x^y = x \cdot x^{y-1}$ o $x^y = (x^2)^{y/2}$ si y és parell.

Definicions recursives

Definició amb "..." suggereix solucions iteratives

Per aplicar recursivitat, necessitem una definició recursiva

Com trobar-la: considereu operacions que descomposen una dada en elements "més petits"

Exemple: descomposem una pila no buida $P = [a_1, \ldots, a_n]$ en cim$(P) = a_n$ (que podem obtenir amb `P.top()`) i desapilar$(P) = [a_1, \ldots, a_{n-1}]$ que obtindrem mitjançant `P.pop()`.
Exemple: per el càlcul de x^y es pot fer la descomposició $x^y = x \cdot x^{y-1}$ o $x^y = (x^2)^{y/2}$ si y és parell.

Sovint fem la transformació inconscientment. Si cal formalitzar-la, necessitem inducció

Suma dels elements d'una pila

Si $P = [a_1, \ldots, a_n]$, llavors $\text{suma}(P) = a_1 + \ldots + a_n$

Inductivament:

$$\text{suma}(P) = \begin{cases} 0 & \text{si } P \text{ és buida,} \\ \text{cim}(P) + \text{suma}(\text{desapilar}(P)) & \text{altrament.} \end{cases}$$

Cerca en una pila

Donada una pila p i un element x, dir si x apareix en p

Versió recursiva:

- si p és buida, x no apareix a p
- altrament, si P no és buida . . .

$$x \in p \Leftrightarrow x = \text{cim}(P) \vee x \in \text{desapilar}(p)$$

Cerca en una pila

```
template <class T>
bool cerca(stack<T>& p, const T& x) {
  if (p.empty())
    return false;
  else if (x == p.top()) return true;
  else {
    p.pop();
    return cerca(p, x);
  }
}
```

Igualtat de piles

Donades dues piles $p = [p_1, \ldots, p_n]$ i $q = [q_1, \ldots, q_m]$, dir si són iguals
$\implies m = n$ i per a cada posició i, $1 \leq i \leq n$, $p_i = q_i$.

Igualtat de piles

Donades dues piles $p = [p_1, \ldots, p_n]$ i $q = [q_1, \ldots, q_m]$, dir si són iguals
$\Longrightarrow$ $m = n$ i per a cada posició i, $1 \leq i \leq n$, $p_i = q_i$.

Versió recursiva:

- si p i q són buides, són iguals
- si p és buida i q no, o a l'inrevés, llavors són diferents
- si p i q no són buides, ...
  - si cim$(p) \neq$ cim(q) (`p.top() != q.top()`, les piles són diferents;
  - si cim$(p) =$ cim(q) llavors $p = q$ si i només si desapilar$(p) =$ desapilar(q)

Igualtat de piles

```
/* Pre: p = P, q = Q */
/* Post: Retorna cert si i només si P = Q */
bool piles_iguals(stack<int>& p, stack<int>& q) {
    if (p.empty() and q.empty()) return true;
    else if (p.empty() or q.empty()) return false;
    else if (p.top() != q.top()) return false;
    else {
        p.pop(); q.pop();
        return piles_iguals(p,q);
    }
}
```

Igualtat de piles (versió alternativa)

```
/* Pre: p = P, q = Q */
/* Post: Retorna cert si i només si P = Q */
bool piles_iguals(stack<int>& p, stack<int>& q) {
    if (p.empty() or q.empty())
        return p.empty() and q.empty();
    if (p.top() != q.top())
        return false;
    p.pop(); q.pop();
    return piles_iguals(p,q);
}
```

Igualtat de piles

- La versió iterativa queda com a exercici.
- Cal aplicar l'esquema de cerca seqüencial, **no** el de recorregut!. Podem concloure que $P \neq Q$ si trobem $p_i \neq q_i$ o no buidem simultàniament de les dues piles (una és buida i l'altra no)

Igualtat de piles

- La versió iterativa queda com a exercici.
- Cal aplicar l'esquema de cerca seqüencial, **no** el de recorregut!. Podem concloure que $P \neq Q$ si trobem $p_i \neq q_i$ o no buidem simultàniament de les dues piles (una és buida i l'altra no)
- Observació: és temptador comprovar abans que res si `alcaria(p) != alcaria(q)`
- Seria eficient (i convenient), però només si tenim una operació `p.size()` que no recorre la pila! Pero seria ineficient si hem de calcular el nombre d'elements de la pila recorrent (i destruint) la pila

Part V

Disseny Recursiu

Principis de disseny recursiu

Volem implementar recursivament una funció

```
// Pre: propietat satisfeta per x
// Post: la funció retorna un valor F(x)
tipus_sortida F(tipus_entrada x);
```

o un procediment

```
// Pre: propietat satisfeta per x = X
// Post: res compleix una certa propietat en termes d'X
void F(T1 x, T2& res);
```

Principis de disseny recursiu

N.B. `x` i `res` poden ser més d'un paràmetre; en el cas dels procediments podem tenir paràmetres de entrada/sortida:

```
// Pre: propietat satisfeta per x = X
// Post: x = X' compleix una certa propietat en termes
//       del seu valor original X
void F(T1& x)
```

Principis de disseny recursiu

Cal identificar:

- Un o més casos base: Valors de paràmetres en què podem satisfer la Post amb càlculs directes
- Un o més casos recursius: Valors de paràmetres en què podem satisfer la Post si tinguessim el resultat per a alguns paràmetres x' "més petits" que x

Estratègia

1. Triar una funció de "mida" $|x|$ dels paràmetres x tal que
   - $|x| \leq 0 \implies$ som en un cas base
   - les crides recursives es fan amb paràmetres x' amb $|x'| < |x|$
   - ha de ser sempre un enter: per tot x, $|x| \in \mathbb{Z}$

   Fonament: tota seqüència decreixent d'enters no negatius és finita
2. Transformar la definició rebuda del que volem calcular en una definició recursiva (si no ho és d'entrada)

Correctesa d'un algorisme recursiu

A demostrar: Amb tot valor x dels paràmetres que satisfaci Pre,

- l'algorisme acaba - nombre finit de crides recursives
- i acaba satisfent $Post(x)$

Acabament: nombre finit de crides recursives

Fonament:

Tota seqüència decreixent de nombres enters no negatius és finita

Acabament: nombre finit de crides recursives

Fonament:

Tota seqüència decreixent de nombres enters no negatius és finita

Formalització:

- Triem una funció de mida $|\cdot|$ dels paràmetres que sempre té valor enter
- Demostrem: Si $|x| \leq 0$ l'algorisme tracta x amb un cas base $\implies$ cap crida recursiva
- Demostrem: Cada crida recursiva fa decrèixer la mida dels paràmetres, i.e., si la funció $\mathtt{F}$ amb paràmetre x fa la crida recursiva $\mathtt{F}(x')$ llavors $|x'| < |x|$

N.B. Noteu la similitud entre les propietats de la funció de mida i les de la funció de fita d'una iteració

Correctesa d'un algorisme recursiu

- A demostrar: Si el paràmetre x satisfà la precondició llavors el resultat satisfà la postcondició (una funció d'x)
- Quan x és un cas base ($|x| \leq 0$, no hi ha recursió): es demostra directament aplicant les tècniques de les lliçons anteriors

Correctesa d'un algorisme recursiu

- Si x no és un cas base ($|x| > 0$), apliquem l'hipòtesi d'inducció:

  H.I. = "Si x' compleix la precondició ($\texttt{Pre}(x')$ és cert) i $|x'| < |x|$ llavors l'algorisme acaba en temps finit i es compleix la postcondició ($\texttt{Post}(x')$)"

Correctesa d'un algorisme recursiu

- Si x no és un cas base ($|x| > 0$), apliquem l'hipòtesi d'inducció:

  H.I. = "Si x' compleix la precondició ($\texttt{Pre}(x')$ és cert) i $|x'| < |x|$ llavors l'algorisme acaba en temps finit i es compleix la postcondició ($\texttt{Post}(x')$)"

- Hem de demostrar que qualsevol crida recursiva $\texttt{F}(x')$ quan x no és un cas base ($|x| > 0$) compleix: 1) $\texttt{Pre}(x')$; 2) $|x'| < |x|$. Podem aplicar llavors l'H.I.

Correctesa d'un algorisme recursiu

- Si x no és un cas base ($|x| > 0$), apliquem l'hipòtesi d'inducció:

  H.I. = "Si x' compleix la precondició ($\texttt{Pre}(x')$ és cert) i $|x'| < |x|$ llavors l'algorisme acaba en temps finit i es compleix la postcondició ($\texttt{Post}(x')$)"

- Hem de demostrar que qualsevol crida recursiva $\texttt{F}(x')$ quan x no és un cas base ($|x| > 0$) compleix: 1) $\texttt{Pre}(x')$; 2) $|x'| < |x|$. Podem aplicar llavors l'H.I.
- Aplicant l'H.I. deduïm que després d'una crida recursiva $\texttt{Post}(x')$; cal demostrar que l'estat al qual s'arriva just després o fent alguns càlculs addicionals satisfà $\texttt{Post}(x)$

Exemples

- Exponenciació ràpida
- Factorial
- Nombres binomials
- Ordenació per fusió (*Mergesort*) en un vector

- Revessar una llista
- Cercar un element en una cua
- Sumar k als elements d'un arbre

Factorial

```
/* Pre: n ≥ 0 */
/* Post: retorna n! */
int fact(int n) {
    if (n == 0) return 1;
    else return n * fact(n-1);
}
```

Recordem: $n! = 1$ si $n = 0$; $n! = n \cdot (n-1)!$ si $n > 0$

- Acabament: mida = $|n| = n$. Sempre enter, $|n| = 0$ és cas base, amb $|n| = n > 0$ es fa la crida `fact(n-1)`, $|n-1| = n-1 < |n| = n$

Factorial

```
/* Pre: n ≥ 0 */
/* Post: retorna n! */
int fact(int n) {
    if (n == 0) return 1;
    else return n * fact(n-1);
}
```

Recordem: $n! = 1$ si $n = 0$; $n! = n \cdot (n-1)!$ si $n > 0$

- Acabament: mida = $|n| = n$. Sempre enter, $|n| = 0$ és cas base, amb $|n| = n > 0$ es fa la crida `fact(n-1)`, $|n-1| = n-1 < |n| = n$
- Correcció: si $n = 0$ retornem 1 ($0! = 1$); si $n > 0$ es fa crida amb `fact(n-1)`, llavors $n-1 \geq 0$, $|n-1| < |n|$ i podem aplicar H.I.

Factorial

```
/* Pre: n ≥ 0 */
/* Post: retorna n! */
int fact(int n) {
    if (n == 0) return 1;
    else return n * fact(n-1);
}
```

Recordem: $n! = 1$ si $n = 0$; $n! = n \cdot (n-1)!$ si $n > 0$

- Acabament: mida = $|n| = n$. Sempre enter, $|n| = 0$ és cas base, amb $|n| = n > 0$ es fa la crida `fact(n-1)`, $|n-1| = n-1 < |n| = n$
- Correcció: si $n = 0$ retornem 1 ($0! = 1$); si $n > 0$ es fa crida amb `fact(n-1)`, llavors $n - 1 \geq 0$, $|n-1| < |n|$ i podem aplicar H.I.
- Correcció: H.I. $\Longrightarrow$ `fact(n-1)` $= (n-1)!$, per tant `fact(n)` retorna $n \cdot (n-1)! = n!$

Potència ràpida

```
// Pre: x > 0 ∧ y ≥ 0
// Post: retorna x^y
int potencia(int x, int y);
```

Observem que

$$x^y = \begin{cases} 1 & \text{si } y = 0 \\ x \cdot (x^2)^\lambda & \text{si } y = 2\lambda + 1 > 0 \text{ és senar} \\ (x^2)^\lambda & \text{si } y = 2\lambda \geq 0 \text{ és parell} \end{cases}$$

Potència ràpida

```
int potencia(int x, int y) {
    if (y == 0) return 1;
    else if (y%2 == 1) return x*potencia(x*x,y/2);
    else return potencia(x*x,y/2);
}
```

- Acabament: podem agafar $|y| = y$, però també $|y| = \lceil 1 + \log_2(y) \rceil$, ja que $\lceil 1 + \log_2(y/2) \rceil = \lceil \log_2(y) \rceil < \lceil 1 + \log_2(y) \rceil$. Sempre enter (per això fem servir $\lceil \cdot \rceil$). Si $|y| \leq 0$ estem en un cas base ($\log_2 y \leq -1 \implies y \leq 1/2 \implies y \leq 0$). Si $|y| > 0$ llavors no estem en un cas base, $y \geq 1$ i $|y/2| < |y|$.

Potència ràpida

```
int potencia(int x, int y) {
    if (y == 0) return 1;
    else if (y%2 == 1) return x*potencia(x*x,y/2);
    else return potencia(x*x,y/2);
}
```

- Correcció: si $y = 0$ llavors retornem $x^0 = 1$. Si $y > 0$, es fa la crida recursiva `potencia(x*x,y/2)`. Com $x > 0$, tenim $x^2 > 0$. I com $y > 0$, llavors $y/2 \geq 0$. A més $|y/2| < |y|$. Es pot aplicar H.I.
- Correcció: si $y = 2\lambda$ és parell, per H.I. `potencia(x*x,y/2)` retorna $(x^2)^\lambda = x^{2\lambda} = x^y$ i la funció retorna el resultat correcte. Si $y = 2\lambda + 1$ és senar, per H.I. `potencia(x*x,y/2)` retorna $(x^2)^\lambda = x^{2\lambda} = x^{y-1}$; llavors la funció retorna $x \cdot x^{y-1} = x^y$, el resultat correcte.

Potència ràpida

Exercici: Demostreu la correcció de la següent implementació alternativa:

```
int potencia(int x, int y) {
    if (y == 0) return 1;
    else {
      int p = potencia(x, y/2);
      if (y%2 == 0) return p * p;
      else return x * p * p;
    }
}
```

Nombres binomials

```
// Pre: n ≥ m ≥ 0
// Post: retorna (n m)
int binomial(int n, int m);
```

Recordem:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

és el nombre de subconjunts de $\{1, \ldots, n\}$ de mida m

Nombres binomials: Disseny

Hi ha diverses definicions recursives equivalents, que porten a solucions d'eficiència i elegància diferents
Triant $|(n,m)| = n$:

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ \frac{n\cdot(n-1)!}{m!\cdot(n-m)\cdot(n-1-m)!} = \frac{n}{n-m}\cdot\binom{n-1}{m} & \text{si } n > m \end{cases}$$

Nombres binomials

Triant $|(n,m)| = m$:

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ \frac{n!\cdot(n-m+1)}{m\cdot(m-1)!\cdot(n-m+1)\cdot(n-m)!} = \frac{n-m+1}{m}\binom{n}{m-1} & \text{si } m > 0 \end{cases}$$

Nombres binomials

Triant $|(n,m)| = m$:

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ \frac{n!\cdot(n-m+1)}{m\cdot(m-1)!\cdot(n-m+1)\cdot(n-m)!} = \frac{n-m+1}{m}\binom{n}{m-1} & \text{si } m > 0 \end{cases}$$

O bé descomposem aixÃ:

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ \frac{n\cdot(n-1)!}{m\cdot(m-1)!\cdot((n-1)-(m-1))!} = \frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1} & \text{si } m > 0 \end{cases}$$

Nombres binomials

Triant $|(n,m)| = m$:

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ \frac{n!\cdot(n-m+1)}{m\cdot(m-1)!\cdot(n-m+1)\cdot(n-m)!} = \frac{n-m+1}{m}\binom{n}{m-1} & \text{si } m > 0 \end{cases}$$

O bé descomposem aixÃ:

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ \frac{n\cdot(n-1)!}{m\cdot(m-1)!\cdot((n-1)-(m-1))!} = \frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1} & \text{si } m > 0 \end{cases}$$

(O bé fem servir el triangle de Tartaglia:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

però la solució és més ineficient)

Nombres binomials

```
// Pre: n ≥ m ≥ 0
// Post: retorna (n over m)
int binomial (int n, int m) {
  if (m == 0) return 1;
  else return (binomial(n-1,m-1) * n) / m;
}
```

Observeu que $n \times \binom{n-1}{m-1}$ és sempre divisible entre m. Si hem de prendre cura dels overflows hauríem de fer primer la divisió de $\binom{n-1}{m-1}$ entre m i després fer el producte, però assegurant-nos abans que $\binom{n-1}{m-1} \geq m$.

Exercici: escriviu funcions recursives i raoneu la seva correctesa basant-se en les altres definicions recursives examinades.

Mergesort

```
// Pre: 0 ≤ e ≤ d < v.size() ∧ v = V
// Post: v[0..e − 1] = V[0..e − 1] ∧ v[d + 1..n − 1] = V[d + 1..n − 1]∧
//       v[e..d] ordenat creixentment i és una permutació de V[e..d]
template <class T>
void mergesort(vector<T>& v, int e, int d) {
    if (e < d) {
        int m = (e + d)/2;
        mergesort(v, e, m);
        mergesort(v, m + 1, d);
        fusiona(v, e, m, d);
    }
}

// Pre: 0 ≤ e ≤ m < d < v.size() ∧ v = V∧
///     v[e..m] i v[m + 1..d] estàn ordenats creixentment
// Post: v[0..e − 1] = V[0..e − 1] ∧ v[d + 1..n − 1] = V[d + 1..n − 1]∧
//       v[e..d] ordenat creixentment i és una permutació de V[e..d]
template <class T>
void fusiona(vector<T>& v, int e, int m, int d);
```

Mida = nombre d’elements a ordenar en el subvector - 1 = $|d - e|$.

Revessar una llista

```
// Pre: l = [a_1, ..., a_n] ∧ n ≥ 0
// Post:l = [a_n, a_{n-1}, ..., a_1]
template <class T>
void revessar(list<T>& l);
```

- Per a qualsevol estructura seqüencial $l = [a_1, \ldots, a_n]$ no buida definim head$(l) = [a_1]$, tail$(l) = [a_2, \ldots, a_n]$; donades dues seqüències l_1 i l_2 denotem $l_1 \cdot l_2$ la seqüència resultant de concatenar-les (head, tail i $\cdot$ són operacions abstractes).
- Per a tota llista $l \neq []$, $l =$ head$(l) \cdot$ tail(l).

Llavors podrem donar una definició de la funció abstracta revessar:

- revessar$([]) = []$
- Si $l \neq []$ llavors revessar$(l) =$ revessar(tail) $\cdot$ head(l)

Revessar una llista

```
// Pre: l = [a1,...,an] ∧ n ≥ 0
// Post:l = [an,an−1,...,a1]
template <class T>
void revessar(list<T>& l) {
    if (not l.empty()) {
        T x = *(l.begin());
        l.erase(l.begin()); // = l.pop_front();
        revessar(l);
        l.insert(l.end(),x); // = l.push_back(x);
    }
}
```

Mida: l.size()

Cerca d'un element en una cua

```
// Pre:  c = C
// Post: retorna cert si i només si x ∈ C
template <class T>
bool cerca(queue<T>& c, const T& x);
```

Definició no recursiva: cerca($e_1 \ldots e_n$,x) = ($\exists i$: $e_i = x$)

Definició recursiva, amb mida $c.\mathtt{size}()$:

- cerca($[], x$) $=$ **false**
- Si $c = [a_1, \ldots, a_n] \neq []$ llavors

$$\text{cerca}(c, x) = (x = \text{front}(c)) \vee \text{cerca}(\text{tail}(c), x)$$

Cerca d'un element en una cua

```
// Pre:  c = C
// Post: retorna cert si i només si x ∈ C
template <class T>
bool cerca(queue<T>& c, const T& x) {
    if (c.empty()) return false;
    else if (c.front() == x) return true;
    else {
        c.pop();
        return cerca(c, x);
    }
}
```

Mida: c.size()

Sumar k als elements d'un arbre

```
/* Pre: cert */
/* Post: retorna un arbre binari amb la mateixa forma que a,
         però ón el valor de
         cada node és la suma del valor del node
         corresponent d'a més k */
BinTree<int> suma(const BinTree<int>& a, int k);
```

Definició no recursiva: la donada ("tots els nodes de l'arbre")
Definició recursiva: amb mida

$|a|$ = nombre de nodes de l'arbre:

- suma($\Box, k$) $= \Box$
- suma(plantar(x, a_1, a_2), k) $=$
  plantar($x + k$, suma(a_1, k), suma(a_2, k))

Sumar k als elements d'un arbre

```
/* Pre: a = A */
/* Post: a té la mateixa forma que A, el valor de
         cada node d'a és la suma del valor del node
         corresponent d'A més k */
BinTree<int> suma(const BinTree<int>& a, int k)
  if (a.empty())
    return BinTree<int>();
  else
    return BinTree<int>(a.value()+k, suma(a.left(), k),
                                     suma(a.right(),k));
}
```

- Acabament: si $|a| = 0$ l'arbre és buit i estem en un cas base; amb $|a| > 0$ tenim un cas recursiu, i les crides a `suma` són amb a.`left`() i a.`right`(); els dos subarbres tenen mida inferior a la d'a

Sumar k als elements d'un arbre

```
/* Pre: a = A */
/* Post: a té la mateixa forma que A, el valor de
         cada node d'a és la suma del valor del node
         corresponent d'A més k */
BinTree<int> suma(const BinTree<int>& a, int k)
    if (a.empty()) return BinTree<int>();
    return BinTree<int>(a.value()+k, suma(a.left(), k),
                                     suma(a.right(),k));
}
```

- Correcció: si $|a| = 0$ la solució retorna un arbre buit. Si $|a| > 0$ la precondició de les dos crides recursives es compleix i els paràmetres són de mida inferior: $|a.\text{left}()| < |a|$, $|a.\text{right}()| < |a|$. L'H.I. es pot aplicar.
- Correcció: directament de la definició (i aplicació de l'H.I.), la funció retorna el resultat correcte.

Part V

Disseny Recursiu

Cerca d'un Estudiant en un vector d'Estudiants

```
// Pre: x és un DNI vàlid
// Post: retorna cert si i només si v conté al menys un
//       estudiant amb DNI = x
bool cerca(const vector<Estudiant> &v, int x);
```

Cerca d'un Estudiant en un vector d'Estudiants

```
// Pre: x és un DNI vàlid
// Post: retorna cert si i només si v conté al menys un
//       estudiant amb DNI = x
bool cerca(const vector<Estudiant> &v, int x);
```

Problema: Què fem decrèixer? No podem fer més petit el vector!

Creem una còpia del vector de mida $v.\mathtt{size}() - 1$? Molt ineficient!

Cerca d'un Estudiant en un vector d'Estudiants

Plantegem:

```
// Pre: x és un DNI vàlid i 0 ≤ j < v.size()
// Post: retorna cert si i només si v[0..j] conté al menys un
//       estudiant amb DNI = x
bool i_cerca(const vector<Estudiant>& v, int x, int j);
```

Cerca d'un Estudiant en un vector d'Estudiants

Plantegem:

```
// Pre: x és un DNI vàlid i 0 ≤ j < v.size()
// Post: retorna cert si i només si v[0..j] conté al menys un
//       estudiant amb DNI = x
bool i_cerca(const vector<Estudiant>& v, int x, int j);
```

Buscar en tot el vector és

```
// Pre: x és un DNI vàlid i v no és buit
// Post: retorna cert si i només si v conté al menys un
//       estudiant amb DNI = x
bool cerca(const vector<Estudiant> &v, int x) {
  return i_cerca(v, x, v.size()-1);
}
```

Cerca d'un Estudiant en un vector d'Estudiants

Plantegem:

```
// Pre: x és un DNI vàlid i 0 ≤ j < v.size()
// Post: retorna cert si i només si v[0..j] conté al menys un
//       estudiant amb DNI = x
bool i_cerca(const vector<Estudiant>& v, int x, int j);
```

Buscar en tot el vector és

```
// Pre: x és un DNI vàlid i v no és buit
// Post: retorna cert si i només si v conté al menys un
//       estudiant amb DNI = x
bool cerca(const vector<Estudiant> &v, int x) {
  return i_cerca(v, x, v.size()-1);
}
```

i ara podem fer créixer o decrèixer j!

Cerca d'un Estudiant en un vector d'Estudiants

```
// Pre: x és un DNI vàlid i 0 ≤ j < v.size()
// Post: retorna cert si i només si v[0..j] conté al menys un
//       estudiant amb DNI = x
bool i_cerca(const vector<Estudiant>& v, int x, int j) {
  if (j == 0)
     return v[0].consultar_DNI() == x;
  else if (v[j].consultar_DNI() == x)
     return true;
  else
     return i_cerca(v,x,j-1);
}
```

Cerca d'un Estudiant en un vector d'Estudiants

```
// Pre: x és un DNI vàlid i 0 ≤ j < v.size()
// Post: retorna cert si i només si v[0..j] conté al menys un
//        estudiant amb DNI = x
bool i_cerca(const vector<Estudiant>& v, int x, int j) {
  if (j == 0)
     return v[0].consultar_DNI() == x;
  else if (v[j].consultar_DNI() == x)
     return true;
  else
     return i_cerca(v,x,j-1);
}
```

Correctesa: Inducció sobre j:
Si $v[j]$ conté un estudiant amb DNI $= x$ llavors $v[0..j]$ conté un estudiant amb DNI $= x$. En cas contrari, si $\mathrm{cerca}(v, x, j-1)$ retorna cert llavors $v[0..j-1]$, i pert tant $v[0..j]$ conté un estudiant amb DNI $= x$.

Cerca d'un Estudiant en un vector d'Estudiants

```
// Pre: x és un DNI vàlid i 0 ≤ j < v.size()
// Post: retorna cert si i només si v[0..j] conté al menys un
//       estudiant amb DNI = x
bool i_cerca(const vector<Estudiant>& v, int x, int j) {
  if (j == 0)
     return v[0].consultar_DNI() == x;
  else if (v[j].consultar_DNI() == x)
     return true;
  else
     return i_cerca(v,x,j-1);
}
```

Cerca d'un Estudiant en un vector d'Estudiants

```
// Pre: x és un DNI vàlid i 0 ≤ j < v.size()
// Post: retorna cert si i només si v[0..j] conté al menys un
//        estudiant amb DNI = x
bool i_cerca(const vector<Estudiant>& v, int x, int j) {
  if (j == 0)
     return v[0].consultar_DNI() == x;
  else if (v[j].consultar_DNI() == x)
     return true;
  else
     return i_cerca(v,x,j-1);
}
```

Correctesa: Inducció sobre j:
Però si cerca$(v, x, j-1)$ retorna fals, llavors $v[0..j-1]$ no conté un estudiant amb DNI $= x$ i $v[0..j]$ tampoc.

Cerca d’un Estudiant en un vector d’Estudiants

Alternativa: posar “$-1 \leq j$” en la Pre ($v[0..-1]$ denota un subvector buit)

```
// Pre: x és un DNI vàlid i −1 ≤ j < v.size()
// Post: retorna cert si i només si v[0..j] conté al menys un
//       estudiant amb DNI = x
bool i_cerca(const vector<Estudiant>& v, int x, int j) {
  if (j < 0) return false;
  if (v[j].consultar_DNI() == x) return true;
  return i_cerca(v,x,j-1);
}
```

Motiu: codi més compacte, funciona inclÃºs si el vector $v.\mathtt{size}() = 0$.

Funció d'immersió: funció auxiliar

La funció original crida la funció d'immersió

- Fixant els paràmetres addicionals
- Ignorant alguns dels resultats retornats

Canvis en l'especificació: Immersions

Canvis en els paràmetres impliquen canvis en l'especificació:

- Afebliment de la post: la crida recursiva només fa una part de la feina
- Enfortiment de la pre: la crida recursiva rep feta una part de la feina, ella la completa

La primera sol ser més natural. La segona té l'avantatge que dóna solucions més fàcils de transformar a iteratives (si calgués)

Suma dels elements d’un vector: afebliment de la Post

```
// Pre: cert
// Post: retorna la suma de v */
int suma(const vector<int>& v);
```

Suma dels elements d'un vector: afebliment de la Post

```
// Pre: cert
// Post: retorna la suma de v */
int suma(const vector<int>& v);
```

Funció d'immersió

```
// Pre: −1 ≤ i < v.size()
// Post: retorna la suma de v[0..i]
int i_suma(const vector<int>& v, int i);
```

Suma dels elements d'un vector: afebliment de la Post

```
// Pre: cert
// Post: retorna la suma de v */
int suma(const vector<int>& v);
```

Funció d'immersió

```
// Pre: −1 ≤ i < v.size()
// Post: retorna la suma de v[0..i]
int i_suma(const vector<int>& v, int i);
```

Crida inicial

```
// Pre: cert
// Post: retorna la suma de v */
int suma(const vector<int>& v) {
  return i_suma(v, v.size()-1);
}
```

Implementació de la funció d'immersió

```
// Pre: −1 ≤ i < v.size()
// Post: retorna la suma de v[0..i]
int i_suma(const vector<int>& v, int i) {
  if (i < 0)
     return 0;
  else
     return i_suma(v, i-1) + v[i];
}
```

Immersió alternativa

Funció d'inmersió

```
// Pre: 0 ≤ i ≤ v.size()
// Post: retorna la suma de v[i..v.size() − 1]
int i_suma(const vector<int>& v, int i);
```

Immersió alternativa

Funció d'inmersió

```
// Pre: 0 ≤ i ≤ v.size()
// Post: retorna la suma de v[i..v.size() − 1]
int i_suma(const vector<int>& v, int i);
```

Crida inicial

```
// Pre: cert
// Post: retorna la suma de v */
int suma(const vector<int>& v) {
  return i_suma(v, 0);
}
```

Implementació de la funció d'immersió

```
// Pre: 0 ≤ i ≤ v.size()
// Post: retorna la suma de v[i..v.size() − 1]
int i_suma(const vector<int>& v, int i) {
  if (i == v.size())
     return 0;
  else
     return v[i]+i_suma(v, i+1);
}
```

Cerca en un vector ordenat

```
// Pre: v.size() > 0 i v està ordenat creixentment
// Post: Retorna una posicio on és troba l'element x dins
//       el vector v, si x ∈ v. Si x ∉ v, retorna -1.
template <class T>
int cerca(const vector<T>& v, const T& x);
```

Afebliment de la post

Afebliments de la Post possibles:

- canviar v per $v[0..i]$
- o canviar v per $v[j..v.size() - 1]$
- …o les dues coses: canviar v per $v[i..j]$!

```
// Pre: 0 ≤ i ≤ v.size(), −1 ≤ j < v.size(), i ≤ j + 1
//      i v està ordenat creixentment
// Post: Retorna una posicio on és troba l'element x dins
//       el subvector v[i..j], si x ∈ v[i..j]. Si x ∉ v[i..j],
//       retorna -1.
template <class T>
int i_cerca(const vector<T>& v, const T& x, int i, int j);
```

Afebliment de la post

Afebliments de la Post possibles:

- canviar v per $v[0..i]$
- o canviar v per $v[j..v.size() - 1]$
- ... o les dues coses: canviar v per $v[i..j]$!

```
// Pre: 0 ≤ i ≤ v.size(), −1 ≤ j < v.size(), i ≤ j + 1
//      i v està ordenat creixentment
// Post: Retorna una posicio on és troba l'element x dins
//       el subvector v[i..j], si x ∈ v[i..j]. Si x ∉ v[i..j],
//       retorna -1.
template <class T>
int i_cerca(const vector<T>& v, const T& x, int i, int j);
```

- En les dues primeres alternatives d'afebliment de la Post $\Longrightarrow$ cerca seqüencial
- Amb la tercera podem fer cerca dicotòmica

Immersions

No oblideu de:

- Dir quina immersió fareu, quin paràmetre afegir
- Donar la capçalera de la nova funció d'immersió
- Especificar-la! (paper dels nous paràmetres / resultats)
- Donar la crida inicial des de la funció original

Part V

Disseny Recursiu

Suma dels elements d'un vector

```
// Pre: cert
// Post: retorna la suma dels elements de v
int suma(const vector<int>& v);
```

Suma dels elements d'un vector

```
// Pre: cert
// Post: retorna la suma dels elements de v
int suma(const vector<int>& v);
```

Enfortiment de la Pre:

```
// Pre:  0 ≤ i ≤ v.size(), i
//       sum és la suma dels elements de v[0..i − 1]
// Post: retorna la suma dels elements de v
int i_suma(const vector<int>& v, int i, int sum);
```

Per enfortiment de la Pre

```
// Pre:  0 ≤ i ≤ v.size(), i
//       sum és la suma dels elements de v[0..i−1]
// Post: retorna la suma dels elements de v
int i_suma(const vector<int>& v, int i, int sum);
```

Per enfortiment de la Pre

```
// Pre:  0 ≤ i ≤ v.size(), i
//       sum és la suma dels elements de v[0..i − 1]
// Post: retorna la suma dels elements de v
int i_suma(const vector<int>& v, int i, int sum);
```

Crida inicial per calcular tota la suma del vector:

```
// Pre: cert
// Post: retorna la suma dels elements de v
int suma(const vector<int>& v) {
  return i_suma(v, 0, 0);
}
```

Implementació de la funció d'immersió

```
// Pre:   0 ≤ i ≤ v.size(), i
//        sum és la suma dels elements de v[0..i − 1]
// Post: retorna la suma dels elements de v
int i_suma(const vector<int>& v, int i, int sum) {
  if (i == v.size())
     return sum;
  else
     return i_suma(v, i+1, sum+v[i]);
}
```

Part V

Disseny Recursiu

Recursivitat lineal final

- Algorisme recursiu lineal: algorisme recursiu que a cada crida recursiva genera solament una crida recursiva

Recursivitat lineal final

- Algorisme recursiu lineal: algorisme recursiu que a cada crida recursiva genera solament una crida recursiva
- Funció recursiva lineal final (*tail recursion*):

Recursivitat lineal final

- Algorisme recursiu lineal: algorisme recursiu que a cada crida recursiva genera solament una crida recursiva
- Funció recursiva lineal final (*tail recursion*):
  - La darrera instrucció que s'executa (cas recursiu) és la crida recursiva

Recursivitat lineal final

- Algorisme recursiu lineal: algorisme recursiu que a cada crida recursiva genera solament una crida recursiva
- Funció recursiva lineal final (*tail recursion*):
  - La darrera instrucció que s'executa (cas recursiu) és la crida recursiva
  - El resultat de la funció (cas recursiu) és el resultat que s'ha obtingut de la crida recursiva, sense cap modificació

Recursivitat lineal final

- Algorisme recursiu lineal: algorisme recursiu que a cada crida recursiva genera solament una crida recursiva
- Funció recursiva lineal final (*tail recursion*):
  - La darrera instrucció que s'executa (cas recursiu) és la crida recursiva
  - El resultat de la funció (cas recursiu) és el resultat que s'ha obtingut de la crida recursiva, sense cap modificació
- Motivació: mètode simple per transformar un algorisme recursiu lineal final en un algorisme iteratiu

Exemple: factorial

```
// Pre: n ≥ 0
// Post: retorna n!
int fact(int n) {
   if (n <= 1) return 1;
   else return n * fact(n - 1);
}
```

Recursivitat lineal però no final: és fa el producte després de la crida recursiva

Exemple: factorial

Enfortiment de la Pre:

```
// Pre: n ≥ i ≥ 0 ∧ p = i!
// Post: retorna n!
int i_fact(int n, int i, int p) {
  if (i == n)
     return p;
  else
     return i_fact(n, i + 1, p * (i + 1));
}
```

- Recursivitat lineal final
- Crida inicial: `fact(n)` $\equiv$ `i_fact(n,0,1)`

Exemple: factorial

1. Transformem paràmetres en variables locals
2. La Pre és l'invariant del bucle
3. La crida inicial dóna com inicialitzar les variables

```
// Pre: n ≥ 0
int i_fact(int n) {
   int i = 0; int p = 1;  // <-- paràmetres crida inicial
   while (i != n) {    // negació del cas base
       // Inv: n ≥ i ≥ 0 ∧ p = i!
       p = p * (i+1);    // <-- paràmetres de
       i = i + 1;        //     la crida recursiva
   }
   return p;           // resultat del cas base
}
```

Transformació recursivitat lineal final a iteració, II

Funció recursiva lineal final:

```
// Pre: P(x,y)
T2 func_rec(T1 x, T3 y) {
  T2 s;
  if (cas_base(x,y))
    s = sol_directa(x,y);
  else
    s = func_rec(new_x(x,y),
                 new_y(x,y));
  return s;
}
// Post: Q(x,y,func_rec(x,y))

// Pre: P'(x)
T2 func(T1 x) {
  // P'(x) ⟹ P(x,y0)
  return func_rec(x, y0);
  // ∀z : Q(x,y0,z) ⟹ Q'(x,z)
}
// Post: Q'(x,func(x))
```

Iteració equivalent:

```
// Pre: P'(x)
T2 func_iter(T1 x) {
  T2 s;
  T3 y;
  y = y0;
  // Inv: P(x,y)
  while (not cas_base(x,y)) {
     yn = new_y(x,y);
     xn = new_x(x,y);
     x = xn; y = yn;
  }
  s = sol_directa(x,y);
  return s;
}
// Post: Q'(x,func_iter(x))
```

Suma d'un vector d'enters

Implementació recursiva final:

```
/* Pre: 0 ≤ i ≤ v.size() i sum és la suma dels
        elements de v[0..i − 1] */
int i_suma(const vector<int>& v, int i, int sum) {
    if (i == v.size()) return sum;
    else return i_suma(v, i + 1, sum + v[i]);
}
/* Post: retorna la suma de tots els elements
   del vector v */
```

Llamada inicial: $\mathtt{suma}(v) \equiv \mathtt{i\_suma}(v, 0, 0)$

Transformació a iteratiu

```
/* Pre: cert */
int suma_iter(const vector<int>& v) {
  int i = 0; int sum = 0;

  // Inv: 0 ≤ i ≤ v.size() i sum és
  //      la suma dels elements de v[0..i − 1]
  while (i != v.size()) {
    sum += v[i]; // sum + v[i]
    ++i;         // i+1
  }
  return sum;
}
/* Post: el valor retornat es la suma de tots els elements
   del vector v */
```

Part VI

Millores de Eficiència

Eficiència per eliminació de càlculs repetits

Iteració:

- Afegim variables locals que recorden càlculs ja efectuats per a la propera iteració

Eficiència per eliminació de càlculs repetits

Iteració:

- Afegim variables locals que recorden càlculs ja efectuats per a la propera iteració
- No apareixen en la Pre ni la Post. L'especificació no canvia

Eficiència per eliminació de càlculs repetits

Iteració:

- Afegim variables locals que recorden càlculs ja efectuats per a la propera iteració
- No apareixen en la Pre ni la Post. L'especificació no canvia
- Però apareixen a l'invariant. Cal dir què valen a cada iteració

Eficiència per eliminació de càlculs repetits

Recursió:

- Les variables locals no serveixen. Es creen noves a cada crida

Eficiència per eliminació de càlculs repetits

Recursió:

- Les variables locals no serveixen. Es creen noves a cada crida
- Funció d'immersió d'eficiència, recursiva: Nous paràmetres d'entrada o de sortida

Eficiència per eliminació de càlculs repetits

Recursió:

- Les variables locals no serveixen. Es creen noves a cada crida
- Funció d'immersió d'eficiència, recursiva: Nous paràmetres d'entrada o de sortida
- S'han d'afegir a la Pre/Post!

Eficiència per eliminació de càlculs repetits

Recursió:

- Les variables locals no serveixen. Es creen noves a cada crida
- Funció d'immersió d'eficiència, recursiva: Nous paràmetres d'entrada o de sortida
- S'han d'afegir a la Pre/Post!
- La funció desitjada no és recursiva, crida a la d'immersió

Part VI

Millores de Eficiència

Concepte d’immersió d’eficiència

- Font freqüent d’ineficiència: Repetir càlculs ja fets
- En programes iteratius: Guardar variables temporals que guarden resultats d’una iteració a la següent
- En programes recursius, una variable temporal és local *a cada crida recursiva*. No guarda resultats d’una crida a l’altra
- Immersió d’eficiència: Introducció de paràmetres o resultats addicionals per transmetre valors ja calculats en/a altres crides
- Pot haver de fer-se *a més* una immersió/generalització per tal de possibilitar la solució recursiva.

Exemple: suma dels k anteriors

```
// Pre: v.size() > k ≥ 0
// Post: retorna cert sii hi ha algun i entre k i
//    v.size() − 1 tal que v[i] = v[i − k] + ... + v[i − 1]
bool kanteriors(const vector<double>& v, int k);
```

Exemple: suma dels k anteriors

```
bool kanteriors(const vector<double>& v, int k) {
    int i = k;
    while (i < v.size()) {
        // Inv: no hi ha cap j < i tal que
        //        v[j] = v[j − k] + ... + v[j − 1]
        if (v[i] == suma(v,i-k,i-1)) return true;
        ++i;
    }
    return false;
}
```

`suma(v,i-k,i-1)` té cost proporcional a k $\rightarrow$ cost total proporcional $(n - k) \cdot k$

Exemple: suma dels k anteriors

Millora: propagar la suma dels k anteriors

```
bool kanteriors(const vector<double>& v, int k) {
    double sum = 0;
    for (int j = 0; j < k; ++j) sum += v[j];
    int i = k;
    while (i < v.size()) {
        // Inv: no hi ha cap j < i tal que
        //        v[j] = v[j − k] + ... + v[j − 1]
        //        i  sum = v[i − k] + ... + v[i − 1]
        if (v[i] == sum) return true;
        sum = sum - v[i-k] + v[i];
        ++i;
    }
    return false;
}
```

cost total proporcional a n, independent de k!

Exemple: suma de k elements anteriors

```
// Pre: v.size() > k ≥ 0
// Post: retorna cert sii hi ha algun i entre k i
//     v.size() − 1 tal que v[i] = v[i − k] + ... + v[i − 1]
bool kanteriors(const vector<double>& v, int k);
```

Primer, cal immersió d'especificació:

```
// Pre: v.size() ≥ m ≥ k ≥ 0
// Post: retorna cert sii hi ha algun i entre m i
//     v.size() − 1 tal que v[i] = v[i − k] + ... + v[i − 1]
bool i_kanteriors(const vector<double>& v, int k, int m);
```

Exemple: suma de k elements anteriors

```
bool i_kanteriors(const vector<double>& v, int k, int m) {
    if (m == v.size()) return false;
    else if (v[m] == suma(v,m-k,m-1)) return true;
    else return i_kanteriors(v,k,m+1);
}
```

Exemple: suma de k elements anteriors

```
bool i_kanteriors(const vector<double>& v, int k, int m) {
    if (m == v.size()) return false;
    else if (v[m] == suma(v,m-k,m-1)) return true;
    else return i_kanteriors(v,k,m+1);
}
```

Problema: fem k sumes a cada crida $\rightarrow$ cost total $(n-k) \cdot k$

Exemple: suma de k elements anteriors

Immersió d'eficiència:

```
// Pre: v.size() ≥ m ≥ k ≥ 0 i
//       sum = v[m − 1] + ... + v[m − k]
// Post: retorna cert sii hi ha algun i entre m i v.size() − 1
//       tal que v[i] = v[i − k] + ... + v[i − 1]
bool ie_kanteriors(const vector<double>& v,
                   int k, int m, double sum);
```

Exemple: suma de k elements anteriors

```
// Pre: v.size() ≥ m ≥ k ≥ 0 i
//       sum = v[m − 1] + ... + v[m − k]
// Post: retorna cert sii hi ha algun i entre m i v.size() − 1
//       tal que v[i] = v[i − k] + ... + v[i − 1]
bool ie_kanteriors(const vector<double>& v,
                   int k, int m, double sum) {
    if (m == v.size()) return false;
    else if (v[m] == sum) return true;
    else return ie_kanteriors(v,k,m+1,sum+v[m]-v[m-k]);
}
// Post: retorna cert sii hi ha algun i entre m i v.size() − 1
//       tal que v[i] = v[i − k] + ... + v[i − 1]
```

Crida inicial:

```
bool kanteriors(const vector<double>& v, int k) {
     return ie_kanteriors(v,k,k,suma(v,0,k-1));
}
```

Exemple: suma de k elements anteriors

Immersió d'eficiència alternativa: afegim la suma com a resultat, en comptes de com a paràmetre d'entrada

```
// Pre: v.size() ≥ m ≥ k ≥ 0
// Post: retorna cert sii hi ha algun i entre m i v.size() − 1
//       tal que v[i] = v[i − k] + ... + v[i − 1], i a més
//       sum = v[m − k] + · · · + v[m − 1]
bool ie_kanteriors(const vector<double>& v,
                   int k, int m, double& sum);
```

Exercici: la implementació i la crida inicial.
Pista: cas base: $m = v.\texttt{size}()$

Exemple: element frontissa

Diem que en un vector un element és frontissa si és igual que la diferència entre els que el segueixen i els que el precedeixen

Exemples:
[1,3,11,6,5,4]
[2,1,1]
[1,2,1,0,4]

Exemple: element frontissa

```
// Pre: cert
// Post: retorna el nombre d'elements frontissa de v
int frontisses(const vector<double>& v);
```

Exemple: element frontissa

```
int frontisses(const vector<double>& v) {
   int i = 0;
   int nf = 0;
   while (i < v.size()) {
     // Inv: 0 ≤ i ≤ v.size()
     // i nf = nombre d'elements frontissa a v[0..i − 1]
      if (v[i] == suma(v,i+1,v.size()-1) - suma(v,0,i-1)) ++nf;
      ++i;
   }
   return nf;
}
```

Exemple: element frontissa

```
int frontisses(const vector<double>& v) {
   int i = 0;
   int nf = 0;
   while (i < v.size()) {
     // Inv: 0 ≤ i ≤ v.size()
     // i nf = nombre d'elements frontissa a v[0..i − 1]
      if (v[i] == suma(v,i+1,v.size()-1) - suma(v,0,i-1)) ++nf;
      ++i;
   }
   return nf;
}
```

Com que `suma(v,a,b)` té cost proporcional a $b - a$, el cost d'aquesta funció és proporcional a $(v.\mathtt{size}())^2$ - quadràtic!

Exemple: elements frontissa

Millora: reaprofitar sumes fetes

```
int frontisses(const vector<double>& v) {
  double sumapost = suma(v,1,v.size()-1);
  double sumaant = 0;
  int i = 0; int nf = 0;
  while (i < v.size()) {
    // Inv: 0 ≤ i ≤ v.size() i
    //      nf = nombre de frontisses a v[0..i − 1]
    //      i sumaant és la suma de v[0..i − 1],
    //      i sumapost és la suma de v[i + 1..v.size() − 1]
    if (v[i] == sumapost-sumaant) ++nf;
    sumaant += v[i];
    if (i < v.size()-1) sumapost -= v[i+1];
    ++i;
  }
  return nf;
}
```

Exemple: elements frontissa

Millora: reaprofitar sumes fetes

```
int frontisses(const vector<double>& v) {
  double sumapost = suma(v,1,v.size()-1);
  double sumaant = 0;
  int i = 0; int nf = 0;
  while (i < v.size()) {
    // Inv: 0 ≤ i ≤ v.size() i
    //      nf = nombre de frontisses a v[0..i-1]
    //      i sumaant és la suma de v[0..i-1],
    //      i sumapost és la suma de v[i+1..v.size()-1]
    if (v[i] == sumapost-sumaant) ++nf;
    sumaant += v[i];
    if (i < v.size()-1) sumapost -= v[i+1];
    ++i;
  }
  return nf;
}
```

Cost lineal - de l'ordre de v.size()

Exemple: elements frontissa

Millora: reaprofitar sumes fetes

```
int frontisses(const vector<double>& v) {
  double sumapost = suma(v,1,v.size()-1);
  double sumaant = 0;
  int i = 0; int nf = 0;
  while (i < v.size()) {
    // Inv: 0 ≤ i ≤ v.size() i
    //      nf = nombre de frontisses a v[0..i − 1]
    //      i sumaant és la suma de v[0..i − 1],
    //      i sumapost és la suma de v[i + 1..v.size() − 1]
    if (v[i] == sumapost-sumaant) ++nf;
    sumaant += v[i];
    if (i < v.size()-1) sumapost -= v[i+1];
    ++i;
  }
  return nf;
}
```

Cost lineal - de l'ordre de $v.\mathtt{size}()$

Lleugera millora: mantenir directament $sumapost - sumaant$

Exemple: elements frontissa

```
// Pre: cert
// Post: retorna el nombre d'elements frontissa en v
int frontisses(const vector<double>& v);
```

Exemple: elements frontissa

```
// Pre: cert
// Post: retorna el nombre d'elements frontissa en v
int frontisses(const vector<double>& v);
```

Primer, cal immersió d'especificació:

```
// Pre: 0 ≤ i ≤ v.size()
// Post: retorna el nombre d'elements frontissa en v[0..i − 1]
int i_frontisses(const vector<double>& v, int i);
```

Exemple: elements frontissa

```
// Pre: 0 ≤ i ≤ v.size()
// Post: retorna el nombre d'elements frontissa en v[0..i − 1]
int i_frontisses(const vector<double>& v, int i) {
    if (i == 0) return 0;
    else {
      int nf = i_frontisses(v,i-1);
      if (v[i-1] == suma(v,i,v.size()-1)-suma(v,0,i-2)) ++nf;
      return nf;
    }
}
```

Exemple: elements frontissa

```
// Pre: 0 ≤ i ≤ v.size()
// Post: retorna el nombre d'elements frontissa en v[0..i − 1]
int i_frontisses(const vector<double>& v, int i) {
    if (i == 0) return 0;
    else {
      int nf = i_frontisses(v,i-1);
      if (v[i-1] == suma(v,i,v.size()-1)-suma(v,0,i-2)) ++nf;
      return nf;
    }
}
```

Problema: recàlcul de sumes - quadràtic

Exemple: elements frontissa

Immersió d'eficiència afegint paràmetres d'entrada:
Passem suma(posteriors), suma(anteriors) com a paràmetres

```
// Pre: 0 ≤ i ≤ v.size() i
//      sumaant = suma(v,0,i-1) i
//      sumapost = suma(v,i+1,v.size()-1)
// Post: retorna el nombre d'elements frontissa en v[0..i-1]
int ie_frontisses(const vector<double>& v, int i,
                  double sumaant, double sumapost);
```

Exemple: elements frontissa

Immersió d'eficiència afegint paràmetres d'entrada:
Passem suma(posteriors), suma(anteriors) com a paràmetres

```
// Pre: 0 ≤ i ≤ v.size() i
//      sumaant = suma(v,0,i-1) i
//      sumapost = suma(v,i+1,v.size()-1)
// Post: retorna el nombre d'elements frontissa en v[0..i-1]
int ie_frontisses(const vector<double>& v, int i,
                  double sumaant, double sumapost);
```

Crida inicial: `frontisses(v)` és

`ie_frontisses(v,v.size(),suma(v,0,v.size()-1),0)`

Implementació queda com a exercici
De l'ordre de N operacions - lineal

Exemple: elements frontissa

Alternativa, immersió d'eficiència afegint resultats

```
// Pre: 0 ≤ i ≤ v.size() = N
// Post: retorna el nombre d'elements frontissa en v[0..i − 1] i
//       sumaant = suma(v,0,i-1) i
//       sumapost = suma(v,i+1,v.size()-1)
int ie_frontisses(const vector<double>& v, int i,
                  double& sumaant, double& sumapost));
```

Exemple: elements frontissa

Alternativa, immersió d'eficiència afegint resultats

```
// Pre: 0 ≤ i ≤ v.size() = N
// Post: retorna el nombre d'elements frontissa en v[0..i − 1] i
//       sumaant = suma(v,0,i-1) i
//       sumapost = suma(v,i+1,v.size()-1)
int ie_frontisses(const vector<double>& v, int i,
                  double& sumaant, double& sumapost));
```

Crida inicial:

```
int frontisses(const vector<double>& v) {
     double sa,sp;
     return ie_frontisses(v,v.size(),sa,sp);
}
```

Exemple: elements frontissa

```
// Pre: 0 ≤ i ≤ v.size() = N
// Post: retorna el nombre d'elements frontissa en v[0..i − 1] i
//       sumaant = suma(v,0,i-1) i
//       sumapost = suma(v,i+1,v.size()-1)
int ie_frontisses(const vector<double>& v, int i,
                  double& sumaant, double& sumapost)) {
    if (i == 0) {
       sumaant = 0; sumapost = suma(v, 1, v.size()-1);
       return 0;
    } else {
       double sa, sp;
       int nf = ie_frontisses(v, i-1, sa, sp);
       if (v[i-1] == sp-sa) ++nf;
       sumaant = sa+v[i-1];
       if (i < v.size()) sumapost = sp-v[i];
       return nf;
    }
}
```

Arbre de mitjanes

Donat un arbre de doubles, construir-ne un altre de la mateixa forma que a cada node conté la mitjana dels valors del subarbre arrelat al node corresponent de l'original

```
// Pre: cert
// Post: retorna l'arbre de mitjanes d'a
BinTree<double> arbre_mitjanes(const BinTree<double>& a);
```

Arbre de mitjanes

Donat un arbre de doubles, construir-ne un altre de la mateixa forma que a cada node conté la mitjana dels valors del subarbre arrelat al node corresponent de l'original

```
// Pre: cert
// Post: retorna l'arbre de mitjanes d'a
BinTree<double> arbre_mitjanes(const BinTree<double>& a);
```

Dificultat: la mitjana d'un arbre NO es pot calcular a partir de l'arrel i les mitjanes dels dos subarbres

Arbre de mitjanes: Solució ineficient

```
BinTree<double> arbre_mitjanes(const BinTree<double>& a) {
   if (not a.empty()) {
       double x = a.value();
       BinTree<double> b1 = arbre_mitjanes(a.left());
       BinTree<double> b2 = arbre_mitjanes(a.right());
       double s1 = suma(a.left()); double s2 = suma(a.right());
       int n1 = talla(a.left()); int n2 = talla(a.right());
       return BinTree<double>((x+s1+s2)/(1+n1+n2),b1,b2);
   }
}
```

Ineficient: Tres recorreguts d'a (recursió, suma, mida)

Arbre de mitjanes

Immersió d'eficiència: un sol recorregut que retorni a més suma i mida

```
// Pre: b és buit
// Post: b és l'arbre de mitjanes d'A, s conté
// la suma dels nodes d'A, i n conté el nombre de nodes d'A
void ie_arbre_mitjanes(const BinTree<double>& a, BinTree<double>& b,
                       double& s, int& n);
```

Arbre de mitjanes

Immersió d'eficiència: un sol recorregut que retorni a més suma i mida

```
// Pre: b és buit
// Post: b és l'arbre de mitjanes d'A, s conté
// la suma dels nodes d'A, i n conté el nombre de nodes d'A
void ie_arbre_mitjanes(const BinTree<double>& a, BinTree<double>& b,
                      double& s, int& n);
```

Crida inicial:

```
BinTree<double> arbre_mitjanes(const BinTree<double>& a) {
  double s; int n;
  BinTree<double> b;
  ie_arbre_mitjanes(a,b,s,n);
  return b;
}
```

Arbre de mitjanes

```
void ie_arbre_mitjanes(const BinTree<double>& a, BinTree<double>& b,
                       double& s, int& n) {
   if (a.empty()) {
       s = 0; n = 0;
   } else {
       double s1, s2; int n1, n2;
       double x = a.value();
       BinTree<double> b1, b2;
       ie_arbre_mitjanes(a.left(),b1,s1,n1);
       ie_arbre_mitjanes(a.right(),b2,s2,n2);
       s = x + s1 + s2;
       n = 1 + n1 + n2;
       b = BinTree<double>(s/n,b1,b2);
   }
}
```

Cost lineal, un sol recorregut

Determinar si un arbre és equilibrat

Concepte important en estructures de dades avançades:
Un arbre és equilibrat si i només si

- els seus dos fills són equilibrats, i a més
- la diferència d'alçades dels subarbres fills no supera la unitat.

Determinar si un arbre és equilibrat

```
// Pre: cert
// Post: retorna cert si i només si a és un arbre equilibrat
bool equilibrat(const BinTree<int> &a);
```

Determinar si un arbre és equilibrat

```
// Pre: cert
// Post: retorna cert si i només si a és un arbre equilibrat
bool equilibrat(const BinTree<int> &a);
```

Suposem que ja tenim implementada la funció

```
  // Pre: cert
  // Post: retorna la longitud del camí més llarg de l'arrel
  //       a una fulla de l'arbre a
int alcaria(const BinTree<int> &a);
```

i que tarda temps proporcional a la mida de l'arbre

Implementació, II

```
bool equilibrat(BinTree<int> &a) {
  if (a.empty()) return true;
  else return abs(alcaria(a.left())-alcaria(a.right())) <= 1 and
              equilibrat(a.left()) and equilibrat(a.right());
}
```

Anàlisi de l'eficiència

- Quin és el cost de l'algorisme?
  - Analitzem l'arbre de crides…

Anàlisi de l'eficiència

- Quin és el cost de l'algorisme?
  - Analitzem l'arbre de crides…
  - Pensem en un arbre lineal (cap fill dret, fill només esquerre)

    …

Anàlisi de l'eficiència

- Quin és el cost de l'algorisme?
  - Analitzem l'arbre de crides…
  - Pensem en un arbre lineal (cap fill dret, fill només esquerre) …
  - $|a|^2/2$

Anàlisi de l'eficiència

- Quin és el cost de l'algorisme?
  - Analitzem l'arbre de crides…
  - Pensem en un arbre lineal (cap fill dret, fill només esquerre) …
  - $|a|^2$/2
  - (don't panic: A EDA practicarem això)

Anàlisi de l'eficiència

- Quin és el cost de l'algorisme?
  - Analitzem l'arbre de crides…
  - Pensem en un arbre lineal (cap fill dret, fill només esquerre) …
  - $|a|^2$/2
  - (don't panic: A EDA practicarem això)

- Com evitem repetir càlculs, recorrer cada arbre molts cops?

Solució: immersió d'eficiència

Retornar més informació per evitar repetir càlculs:

```
   // Pre: cert
   // Post: en el parell retornat
   //       - "first" indica si a es un arbre equilibrat
   //       - "second" conté l'alçaria de l'arbre si a és equilibrat
pair<bool, int> i_equilibrat(const BinTree<int>& a);
```

Solució: immersió d'eficiència

Retornar més informació per evitar repetir càlculs:

```
   // Pre: cert
   // Post: en el parell retornat
   //       - "first" indica si a es un arbre equilibrat
   //       - "second" conté l'alçaria de l'arbre si a és equilibrat
pair<bool, int> i_equilibrat(const BinTree<int>& a);
```

Crida inicial:

```
   // Pre: cert
   // Post: retorna cert ssi a és un arbre equilibrat
bool equilibrat2(const BinTree<int>& a) {
   pair<bool, int> e = i_equilibrat(a);
   return e.first;
}
```

Implementació de la funció d'immersió

```
   // Pre: cert
   // Post: en el parell retornat
   //   - "first" indica si a es un arbre equilibrat
   //   - "second" és l'alçaria de l'arbre, si a és equilibrat
pair<bool, int> i_equilibrat(const BinTree<int>& a) {
   if (a.empty()) return make_pair<true, 0>;
   else {
     pair<bool, int> e1 = i_equilibrat(a.left());
     if (e1.first) {
       pair<bool, int> e2 = i_equilibrat(a.right());
       bool eq = e2.first and (abs(e1.second - e2.second) <= 1);
                 // ja sabem que e1.first == true
       if (eq)
         return make_pair(true,1 + max(e1.second, e2.second));
       else
         return make_pair(false, -1); //l'alçaria és irrellevant

     } else { // e1.first == false
         return make_pair(false, -1);
     }
}
```

Part VI

Millores de Eficiència

Funció exponencial

Sèrie de Taylor de l'exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^i}{i!} + \ldots \qquad (1)$$

```
// Pre: x > 0 i n ≥ 0
// Post: el valor retornat es la suma dels n primers termes
//       de l'expansio en sèrie de Taylor de e^x, és a dir,
//       retorna \sum_{k=0}^{n-1} x^k/k!
double exponencial(double x, int n);
```

Implementació

```
double exponencial(double x, int n) {
   double e = 0;
   int i = 0;
   while (i < n) {
       e += potencia(x,i)/factorial(i);
       ++i;
   }
   return e;
}
```

L'invariant és:

$$0 \leq i \leq n \wedge e = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{x^k}{k!}$$

Implementació

Especificació de les dues funcions auxiliars:

```
// Pre: x > 0 i i ≥ 0
// Post: retorna x^i
double potencia(double x, int i);

// Pre: n ≥ 0
// Post: retorna n!
int factorial(int n);
```

Millora d'eficiència

Càlculs repetits tant al factorial com a la potència

Mantenir variable $p = \texttt{potencia}(x, i)$

Millora d'eficiència

Càlculs repetits tant al factorial com a la potència

Mantenir variable $p = \texttt{potencia}(x, i)$ = $x * \texttt{potencia}(x, i - 1)$

Mantenir variable $f = \texttt{factorial}(i)$

Millora d'eficiència

Càlculs repetits tant al factorial com a la potència

Mantenir variable $p = \texttt{potencia}(x, i) = x * \texttt{potencia}(x, i - 1)$

Mantenir variable $f = \texttt{factorial}(i) = i * \texttt{factorial}(i - 1)$

Millora d'eficiència

Càlculs repetits tant al factorial com a la potència

Mantenir variable $p = \texttt{potencia}(x, i)$ = $x * \texttt{potencia}(x, i-1)$

Mantenir variable $f = \texttt{factorial}(i)$ = $i * \texttt{factorial}(i-1)$

Problema: x^i i $i!$ creixen molt ràpid
però $x^i/i!$ decreix

Millora alternativa

Sigui t_i el terme i-essim de la sèrie de Taylor

$$t_i = \frac{x^i}{i!}$$

Millora alternativa

Sigui t_i el terme i-essim de la sèrie de Taylor

$$t_i = \frac{x^i}{i!} = \frac{x^{i-1} * x}{(i-1)! * i}$$

Millora alternativa

Sigui t_i el terme i-essim de la sèrie de Taylor

$$t_i = \frac{x^i}{i!} = \frac{x^{i-1} * x}{(i-1)! * i} = t_{i-1}\frac{x}{i}, \qquad i > 0$$

Millora alternativa

Sigui t_i el terme i-essim de la sèrie de Taylor

$$t_i = \frac{x^i}{i!} = \frac{x^{i-1} * x}{(i-1)! * i} = t_{i-1}\frac{x}{i}, \qquad i > 0$$

$$t_0 = x^0/0! = 1$$

Implementació

```
double exponencial(double x, int n) {
    double e = 0;
    double t = 1; // t = t_0 = x^0/0!
    int i = 0;
    // Inv: 0 ≤ i ≤ n, t = x^i/i!
    //       i  e = \sum_{k=0}^{i-1} x^k/k!
    while (i < n) {
        e += t;
        ++i;
        t = t*x/i;
    }
    return e;
}
```

Exercici: Funció cosinus

Sèrie de Taylor del cosinus

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \tag{2}$$

```
// Pre: n ≥ 0
// Post: e conté la suma dels n primers termes de
//       l'expansio en sèrie de Taylor de cos(x)
double cosinus(double x, int n);
```

Exemple: La successió de Fibonacci

$$F_n = \begin{cases} n & \text{si } n \leq 1, \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots$$

Implementació recursiva

```
// Pre: n ≥ 0
// Post: retorna F_n
int fibonacci(int n) {
    if (n <= 1) return n;
    else return fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2);
}
```

Implementació recursiva

```
// Pre: n ≥ 0
// Post: retorna F_n
int fibonacci(int n) {
    if (n <= 1) return n;
    else return fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2);
}
```

Quants cops cridem fibonacci(n-i) en executar fibonacci(n)?

Implementació recursiva

```
// Pre: n ≥ 0
// Post: retorna F_n
int fibonacci(int n) {
    if (n <= 1) return n;
    else return fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2);
}
```

Quants cops cridem fibonacci(n-i) en executar fibonacci(n)?
Resposta: F_i cops (intenteu demostrar-ho per inducció)

Cost temporal?

F_n creix com ϕ^n
($\phi = (1+\sqrt{5})/2$ = raó àuria = solució de $(\phi = 1 + 1/\phi)$ = $\simeq 1.618033\ldots$)

Càlcul molt lent

Truc

Suposem que tenim el parell $\langle F_{n-1}, F_{n-2} \rangle$. Llavors, el parell $\langle F_n, F_{n-1} \rangle$ és

$$\langle F_n, F_{n-1} \rangle = \langle F_{n-1} + F_{n-2}, F_{n-1} \rangle$$

Versió iterativa

```
// Pre: n ≥ 0
// Post: retorna F_n
int fibonacci(int n) {
   if (n <= 1) return n;
   else {
       int f1 = 1;
       int f2 = 0;
       int i = 2;
       // Inv: f1 = F_{i−1} ∧ f2 = F_{i−2} ∧ 2 ≤ i ≤ n + 1
       while (i <= n) {
           int temp = f1;
           f1 = f1 + f2;
           f2 = temp;
           ++i;
       }
       return f1;
   }
}
```

Detecció de la repetició de càlculs en programes recursius

```
#include <utility>

// Pre: n > 0
// Post: retorna ⟨F_n, F_{n-1}⟩
pair<int,int> i_fibonacci(int n);
```

Implementació funció d'immersió

```
// Pre: n > 0
// Post: retorna ⟨F_n, F_{n-1}⟩
pair<int,int> i_fibonacci(int n) {
   if (n == 1) return make_pair(1,0);
   } else {
       pair<int,int> p = i_fibonacci(n - 1);
       // HI: p.first i p.second contenen F_{n-1} i F_{n-2} resp.
       return make_pair(p.first + p.second, p.first);
   }
}
```

Crida a la funció d'immersió

```
// Pre: n ≥ 0
// Post: retorna F_n
int fibonacci(int n) {
    if (n == 0) return 0;
    else return i_fibonacci(int n).first;
}
```

Alternativa

Funcions que retornen més d'un valor

$\rightarrow$ paràmetres per referència

```
// Pre: n > 0
// Post: retorna f1 = F_n i f2 = F_{n-1}
void i_fibonacci(int n, int& f1, int& f2);
```

Part VII

Tipus Recursius de Dades

Apuntadors

En C++, per a cada tipus `T` hi ha un altre tipus “apuntador a `T`”

Apuntadors

En C++, per a cada tipus `T` hi ha un altre tipus “apuntador a `T`”

Una variable de tipus “apuntador a `T`” pot contenir

- una referència a una variable o objecte de tipus `T`,
- o un valor especial `nullptr`
- o res sensat, si no ha estat inicialitzada

Apuntadors

En C++, per a cada tipus `T` hi ha un altre tipus “apuntador a `T`”

Una variable de tipus “apuntador a `T`” pot contenir

- una referència a una variable o objecte de tipus `T`,
- o un valor especial `nullptr`
- o res sensat, si no ha estat inicialitzada

La referència pot estar implementada amb una adreça de memòria o d’altres maneres; és irrellevant a Programació 2

Operadors

1. `T* p`: Declaració de variable `p` com “apuntador a `T`”
2. `*p`: Objecte referenciat pel apuntador `p`
3. `->`: Composició de `*` i el selector `.` de `struct/class`
4. `&v`: Referència a `v`, de tipus “apuntador al tipus de `v`”
5. `new`, `delete`: Creació i destrucció de memòria dinàmica

Exemple

```
int x;
int* p;
p = &x;
x = 5;
cout << *p << endl;   // escriu 5
*p = 3;
cout << x << endl;    // escriu 3
```

Observacions

Error accedir a `*p` si `p` no referencia cap objecte

és a dir, si `p == nullptr` o si `p` no inicialitzat

Observacions

```
Estudiant x;
Estudiant* p;
```

- `x` sempre referenciarà el mateix objecte mentre viu
- `*p` pot anar referenciant diferents objectes quan canviem el valor de `p`

Observacions

```
Estudiant x;
Estudiant* p;
```

- `x` sempre referenciarà el mateix objecte mentre viu
- `*p` pot anar referenciant diferents objectes quan canviem el valor de `p`

- Quan fem `p = &x`, tenim un objecte amb dos noms, `*p` i `x`
- Això se'n diu aliasing. Molt útil però pot ser perillós

Exemple

```
int x = 1;
int y = 2;
int* p = &x;
int* q = &y;
cout << x << " " << y << endl; // escriu "1 2"
*q = *p;
cout << x << " " << y << endl; // escriu "1 1"
*q = 3;
cout << x << " " << y << endl; // escriu "1 3"
q = p;
*q = 4;
cout << x << " " << y << endl; // escriu "4 3"
// en aquest punt, pdem referir-nos a x de 3 maneres: x, *p i *q
```

Preguntes

Declarem

`int x; int* p; int* q;`

És sempre cert que...

- `*(&x) == x`?
- `&(*p) == p`?
- `p == q` implica `(*p) == (*q)`?
- `(*p) == (*q)` implica `p == q`?

Apuntadors i structs

És molt freqüent tenir un apuntador a un struct o un objecte d'una classe, i voler accedir a un camp de l'struct apuntat, invocar un mètode de l'objecte, etc.

Notació còmoda: `p->camp` equival a `(*p).camp`, `p->mètode(...)` equival a `(*p).mètode(...)`

Apuntadors i structs

És molt freqüent tenir un apuntador a un struct o un objecte d'una classe, i voler accedir a un camp de l'struct apuntat, invocar un mètode de l'objecte, etc.

Notació còmoda: `p->camp` equival a `(*p).camp`, `p->mètode(...)` equival a `(*p).mètode(...)`

Exemple

```
struct par {
  string nom;
  int edat;
};

par* ppar = ...;
++ppar -> edat;

Estudiant* pe = ...
...
if (pe->te_nota()) { cout << pe->consultar_DNI() << endl; }
```

Apuntadors i structs

És molt freqüent tenir un apuntador a un struct o un objecte d'una classe, i voler accedir a un camp de l'struct apuntat, invocar un mètode de l'objecte, etc.

Notació còmoda: `p->camp` equival a `(*p).camp`, `p->mètode(...)` equival a `(*p).mètode(...)`

Exemple

```
struct par {
  string nom;
  int edat;
};

par* ppar = ...;
++ppar -> edat;

Estudiant* pe = ...
...
if (pe->te_nota()) { cout << pe->consultar_DNI() << endl; }
```

Ho hem vist abans:

apuntador `this` al paràmetre implícit. (`*this`, `this->`)

Definint un apuntador

Quan declarem un apuntador `T* p`, està *indefinit*. El definim:

- Fent-lo apuntar a un objecte del tipus `T` ja existent:
  `p = q` o `p = &x;`

Definint un apuntador

Quan declarem un apuntador `T* p`, està *indefinit*. El definim:

- Fent-lo apuntar a un objecte del tipus `T` ja existent:
  `p = q` o `p = &x;`
- O donant-li el valor `nullptr`, per explicitar "no referencia res"

Definint un apuntador

Quan declarem un apuntador `T* p`, està *indefinit*. El definim:

- Fent-lo apuntar a un objecte del tipus `T` ja existent:
  `p = q` o `p = &x;`
- O donant-li el valor `nullptr`, per explicitar “no referencia res”
- Reservant memòria perquè apunti a un nou objecte:
  `p = new T;`

Definint un apuntador

Quan declarem un apuntador `T* p`, està *indefinit*. El definim:

- Fent-lo apuntar a un objecte del tipus `T` ja existent:
  `p = q` o `p = &x;`
- O donant-li el valor `nullptr`, per explicitar “no referencia res”
- Reservant memòria perquè apunti a un nou objecte:
  `p = new T;`
  - Aquest objecte no tindrà nom propi: només `*p`
  - Queda inaccessible! si modifiquem `p` i no hi ha cap altre apuntador que l'hi apunta

`new` and `delete`

Operacions de gestió de memòria dinàmica:

- `new T`: reserva memòria dinàmica per a un nou objecte, li aplica la creadora de `T` i retorna un apuntador a ell

- `delete p`: aplica la destructora del tipus a l'objecte apuntat per `p` i allibera la memòria que ocupa ("esborra" l'objecte)

`new` and `delete`

Operacions de gestió de memòria dinàmica:

- `new T`: reserva memòria dinàmica per a un nou objecte, li aplica la creadora de `T` i retorna un apuntador a ell
- `delete p`: aplica la destructora del tipus a l'objecte apuntat per `p` i allibera la memòria que ocupa (”esborra” l'objecte)
- Atenció: “delete p” NO esborra el punter `p`; esborra l'objecte apuntat per `p`
- el valor de `p` després de `delete p` és indefinit

Exemples

```
struct T {
   int camp1;
   bool camp2;
}
void f(...) {
  T x;                 // es crida la creadora de T
  x.camp1 = 20; x.camp2 = true;
  T* p = new T;        // p apunta a un objecte nou;
                       // crida la constructora de T
  p->camp1 = 30; p->camp2 = false;
  ...
  delete p;    // es crida destructora de T
               // i s'allibera *p; p indefinit
// i aquí es crida automàticament a la destructora de T
// de la variable local x
}
```

`new` and `delete`: Errors

- Deixar memòria sense alliberar (objectes dinàmics sense esborrar) $\rightarrow$ memory leaks

`new` and `delete`: Errors

- Deixar memòria sense alliberar (objectes dinàmics sense esborrar) $\rightarrow$ memory leaks
- Accedir a memòria ja alliberada (objectes esborrats). Vigileu amb l'aliasing $\rightarrow$ dangling references

`new` and `delete`: Errors

- Deixar memòria sense alliberar (objectes dinàmics sense esborrar) $\rightarrow$ memory leaks
- Accedir a memòria ja alliberada (objectes esborrats). Vigileu amb l'aliasing $\rightarrow$ dangling references
- `delete` de memòria no creada amb `new`

`new` and `delete`: Errors

- Deixar memòria sense alliberar (objectes dinàmics sense esborrar) $\rightarrow$ memory leaks
- Accedir a memòria ja alliberada (objectes esborrats). Vigileu amb l'aliasing $\rightarrow$ dangling references
- `delete` de memòria no creada amb `new`
- confondre "`p = nullptr`" amb "`delete p`"
  - els dos s'hauran d'usar, però en circumstàncies diferents

Exemples d'errors

```
void f(...) {
  T x; ...
  T* p = &x;
  T* q = new T;
  T* r = q;  // r i q apunten al mateix valor
  T* s = new T;
  ...
  delete p; // ERROR: *p no creat amb new
  delete q; // OK
  if ((q->camp1 == 0) {...} // ERROR: q indefinit
  if (q == nullptr) {...}  // PERILL: q indefinit
  r->camp1 = 3;    // ERROR: r indefinit, *r
                   // alliberat amb delete q
  // ERROR: no fem delete s i *s inaccessible: leak!
}
```

Vectors d'apuntadors

Els apuntadors permeten moure objectes més eficientment.

```
void moure(vector<Estudiant*>& v, vector<Estudiant*>& w) {
   for (int i = 0; i < v.size(); ++i) {
     w[i] = v[i];
     v[i] = nullptr;
   }

}
```

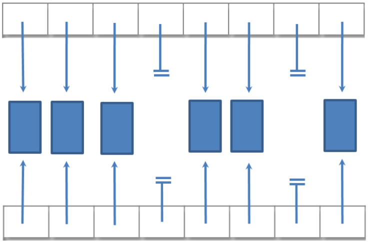
Vectors d'apuntadors

Els apuntadors permeten moure objectes més eficientment.

```
void moure(vector<Estudiant*>& v, vector<Estudiant*>& w) {
   for (int i = 0; i < v.size(); ++i) {
     w[i] = v[i];
     v[i] = nullptr;
   }

}
```

Si no posem `nullptr`s en `v` tenim:



Assignació, còpia, destrucció

Còpia:

- Assignació entre apuntadors a objectes no implica una còpia d'objectes
- Fonamental definir **constructora per còpia** per al corresponent tipus. Usarà `new`. La constructora per còpia per defecte crea un nou object a partir d'un altre, copiant atribut a atribut.
- També sovint es redefineix també l'operació =, per defecte fa assignació atribut a atribut de l'objecte origen a l'objecte destí.
  Copiar/assignar atributs que siguin punters → aliasing!

Assignació, còpia, destrucció

Esborrament:

- La destructora per defecte destruirà atributs que siguin punters però no els objectes als quals apuntin! $\rightarrow$ memory leaks
- Cal definir la destructora de la classe de manera que s'alliberi tots els objects creats a meòria dinàmica per a representar un object de la classe

Pas d'apuntadors com a paràmetres

Pas d'un objecte X que conté apuntadors com a paràmetre d'entrada:

- Pas per valor:
  - Fa servir la constructora per còpia, hem definirla si la constructora per còpia per defecte no serveix
  - Si l'objecte X té atributs que són punters, la constructora per còpia per defecte ens porta a una situació d'aliasing
- Pas per referència: passem X no es canviarà, però no es garanteix que no es modifiquin objectes apuntats per components de X

Part VII

Tipus Recursius de Dades

Tipus recursius de dades?

Els programes són dades més operacions (p.ex., accions o funcions)

Hem vist accions i funcions recursives:
casos directes + casos recursius

Té sentit parlar de tipus de dades recursius?

Tipus recursius de dades?

De fet, hem pensat en alguns tipus de manera recursiva:

- Piles: una pila o bé és buida o bé és push(una altra pila,valor)
- Cues, llistes: idem
- Arbres: un arbre, o bé és buit o bé és plantar(valor,arbre1,arbre2)

Tipus recursius de dades?

De fet, hem pensat en alguns tipus de manera recursiva:

- Piles: una pila o bé és buida o bé és push(una altra pila,valor)
- Cues, llistes: idem
- Arbres: un arbre, o bé és buit o bé és plantar(valor,arbre1,arbre2)

Només n'hem vist algunes implementacions amb vectors, no recursives

Tipus recursius de dades?

De fet, hem pensat en alguns tipus de manera recursiva:

- Piles: una pila o bé és buida o bé és push(una altra pila,valor)
- Cues, llistes: idem
- Arbres: un arbre, o bé és buit o bé és plantar(valor,arbre1,arbre2)

Només n’hem vist algunes implementacions amb vectors, no recursives

Una definició recursiva d’aquests tipus de dades podria donar:

- Correspondència natural amb definició recursiva
- No posar límits *a priori* en la mida

Tipus recursius de dades?

Implementació en C++??

```
class stack<T> {
private:
    bool es_buida;
    T valor;
    stack<T> resta_pila;
public:
    ...
};
```

Problema: En C++, quan es crea un objecte es crida recursivament a les creadores de totes les seves components. Procés infinit

Com es fa: la Pila

```
template <class T> class stack {
  private:
    // tipus privat nou
    struct node_pila {
        T info;
        node_pila* seg;  // <-- recursivitat
    };

    int altura;                 // guardada un sol cop
    node_pila* cim;  // primer d'una cadena de nodes

    ...  // especificació d'operacions privades

  public:
    ...  // especificació d'operacions públiques
};
```

Com es fa: la Pila

```
template <class T> class stack {
  private:
    // tipus privat nou
    struct node_pila {
        T info;
        node_pila* seg;  // <-- recursivitat
    };

    int altura;                // guardada un sol cop
    node_pila* cim;  // primer d'una cadena de nodes

    ...  // especificació d'operacions privades

  public:
    ...  // especificació d'operacions públiques
};
```

Els apuntadors `seg` no s'inicialitzen automàticament: no es creen objectes recursivament quan es crea un stack

Definició d’una estructura de dades recursiva I

Dos nivells:

- Superior: classe amb atributs
  - Informació global de l’estructura (que no volem que es repeteixi per a cada element)
  - Apuntadors a alguns elements distingits (el primer, l’últim, etc., segons el que calgui).
- Inferior: *struct* privada que defineix nodes enllaçats per apuntadors
  - informació d’un i només un element de l’estructura
  - apuntador a un o més nodes "següents"

Avantatges de les estructures de dades recursives

- Correspondència natural amb una definició recursiva abstracta

Avantatges de les estructures de dades recursives

- Correspondència natural amb una definició recursiva abstracta
- No cal fixar a priori un nombre màxim d'elements
- Es pot anar demanant memòria per als nous nodes a mesura que s'hi volen afegir elements

Avantatges de les estructures de dades recursives

- Correspondència natural amb una definició recursiva abstracta
- No cal fixar a priori un nombre màxim d'elements
- Es pot anar demanant memòria per als nous nodes a mesura que s'hi volen afegir elements
- Eficiència: modificant enllaços entre nodes podem:
  - inserir o esborrar elements - sense moure els altres
  - moure parts senceres de l'estructura - sense fer còpies

Part VII

Tipus Recursius de Dades

Implementació de piles

```
template <class T> class stack {
  private:
    // tipus privat nou
    struct node_pila {
        T info;
        node_pila* seg;  // nullptr indica final de cadena
    };

    int altura;               // guardada un sol cop
    node_pila* cim;  // element en el cim de la pila

    ...  // especificació d'operacions privades

  public:

    ...  // especificació d'operacions públiques
};
```

Mètodes públics: construcció/destrucció

```
stack() {
    altura = 0;
    cim = nullptr;
}

// Constructora per copia
stack(const stack& original) {
    altura = original.altura;
    cim = copia_node_pila(original.cim);
}
```

Mètodes públics: construcció/destrucció, modificació

```
~stack() {
    esborra_node_pila(cim);
}


void clear() {
    esborra_node_pila(cim);
    altura = 0;
    cim = nullptr;
}
```

Mètodes públics: consultors

```
T top() const {
// Pre: el p.i. és una pila no buida
// = en termes d'implementacio, cim != nullptr
    return cim -> info;
}

bool empty() const {
    return cim == nullptr;
}

int size() const {
    return altura;
}
```

Mètodes públics: modificadors

```
void push(const T& x) {
    node_pila* aux = new node_pila; // espai per al nou element
    aux -> info = x;
    aux -> seg = cim
    cim = aux;
    ++altura;
}
```

Mètodes públics: modificadors

```
void pop() {
  // Pre: el p.i. és una pila no buida
  // => cim != nullptr
    node_pila* aux = cim; // conserva l'accés a primer
    cim = cim -> seg; // avança
    delete aux; // allibera l'espai de l'antic cim
    --altura;
}
```

Mètodes privats I

```
static node_pila* copia_node_pila(node_pila* m) {
/* Pre: cert */
/* Post: si m és nullptr, el resultat és nullptr; en cas contrari,
         el resultat apunta al primer node d'una cadena
         de nodes que són còpia de la cadena que té
         el node apuntat per m com a primer */
    if (m == nullptr) return nullptr;
    else {
        node_pila* n = new node_pila;
        n -> info = m -> info;
        n -> seg = copia_node_pila(m -> seg);
        return n;
    }
}
```

Exercici: Versió iterativa

Mètodes privats II

```
static void esborra_node_pila(node_pila* m) {
/* Pre: cert */
/* Post: no fa res si m és nullptr, en cas contrari,
         allibera espai dels nodes de la cadena que
         té el node apuntat per m com a primer */
    if (m != nullptr) {
      esborra_node_pila(m -> seg);
      delete m;
    }
}
```

Exercici: Versió iterativa

Mètodes públics: redefinició operador assignació

```
stack<int> p1, p2, p3;
...
p1 = p2 = p3;
```

Mètodes públics: redefinició operador assignació

```
stack<int> p1, p2, p3;
...
p1 = p2 = p3;
```

L'assignació en C++ és un operador: una funció que retorna un valor, amb paràmetre implícit que queda modificat, i un paràmetre explícit no modificable

Mètodes públics: redefinició operador assignació

```
stack<int> p1, p2, p3;
...
p1 = p2 = p3;
```

L'assignació en C++ és un operador: una funció que retorna un valor, amb paràmetre implícit que queda modificat, i un paràmetre explícit no modificable

Return (*this): necessari per a encadenaments d'assignacions

```
stack& operator=(const stack& original) {
    if (this != &original) {
        node_pila* aux = copia_node_pila(original.cim);
        esborra_node_pila(cim);   // si no, leak!
        altura = original.altura;
        cim = aux;
    }
    return *this;
}
```

Implementació de cues

- Cal poder accedir tant tant al primer element (per consultar-lo o eliminar-lo) com a l'últim (per afegir un de nou)
- Atribut per la llargada (o mida) de la cua

Definició de la classe

```
template <class T> class queue {
  private:
    struct node_cua {
        T info;
        node_cua* seg;
    };
    int longitud;
    node_cua* primer;
    node_cua* ultim;
    ...  // especificació i implementació d'operacions privades
  public:
    ...  // especificació i implementació d'operacions públiques
};
```

Mètodes privats: copiar i esborrar cadenes I

```
static node_cua* copia_node_cua(node_cua* m, node_cua*& u) {
/* Pre: cert */
/* Post: si m és nullptr, el resultat i u són nullptr; en cas contrari
   el resultat apunta al primer node d'una cadena de nodes
   que són còpia de de la cadena que té el node apuntat per m
   com a primer, i u apunta a l'últim node */

    if (m == nullptr) { u = nullptr; return nullptr; }
    else {
        node_cua* n = new node_cua;
        n -> info = m -> info;
        n -> seg = copia_node_cua(m- > seg, u);
        if (n -> seg == nullptr) u = n;
        return n;
      }
}
```

Mètodes privats: copiar i esborrar cadenes II

```
// op privada
static void esborra_node_cua(node_cua* m) {
/* Pre: cert */
/* Post: no fa res si m és nullptr, en cas contrari, allibera
         els nodes de la cadena que té el node apuntat
         per m com a primer */

    if (m != nullptr) {
        esborra_node_cua(m ->seg);
        delete m;
    }
}
```

Mètodes privats: construccció/destrucció

```
queue() {
    longitud = 0;
    primer = ultim = nullptr;
}

queue(const queue& original) {
    longitud = original.longitud;
    primer = copia_node_cua(original.primer, ultim);
}

~queue() {
    esborra_node_cua(primer);
}
```

Mètodes públics: redefinició de l'operador d'assignació

```
queue& operator=(const queue& original) {
    if (this != &original) {
      node_cua* auxp, *auxu;
      auxp = copia_node_cua(original.primer, auxu);
      esborra_node_cua(primer); // si no, leak!
      longitud = original.longitud;
      primer = auxp;
      ultim = auxu;
    }
    return *this;
}
```

Mètodes públics: modificadors I

```
void clear() {
    esborra_node_cua(primer);
    longitud = 0;
    primer_node = nullptr;
    ultim_node = nullptr;
}

void push(const T& x) {
    node_cua* aux = new node_cua;
    aux -> info = x;
    aux -> seg = nullptr;
    if (primer == nullptr) primer = aux;
    else ultim -> seg = aux;
    ultim = aux;
    ++longitud;
}
```

Mètodes públics: modificadors I

```
void pop() {
// Pre: el p.i. és una cua no buida
// = en termes d'implementacio, primer != nullptr
    node_cua* aux = primer;
    if (primer == ultim) {
        primer = ultim = nullptr;
    } else primer = primer -> seg;
    delete aux;
    --longitud;
}
```

Mètodes públics: consultors

```
T front() const {
// Pre: el p.i. és una cua no buida
// = en termes d'implementacio, primer != nullptr
    return primer -> info;
}

bool empty() const {
    return longitud == 0;
}

int size() const {
    return longitud;
}
```

Exemple d'increment d'eficiència

```
// Pre: cert
// Post: retorna cert si la cua conté x
bool cerca(const T& x) const {
    node_cua* aux = primer;
    while (aux != nullptr) {
        if (aux -> info == x) return true;
        aux = aux -> seg;
    }
    return false;
}
```

la cua és const &, no és destruida, no hi ha còpies

... però s'ha de tenir accés a la representació!

Part VII

Tipus Recursius de Dades

Implementació de `Llista`

En aquest curs no implementarem els iteradors de manera general

Implementarem llistes amb punt d'interès

Funcionalitats similars, algunes restriccions

Novetat tipus llista: punt d'interès

Podem:

- Desplaçar endavant i enrere el punt d'interès
- Afegir i eliminar just al punt d'interès
- Consultar i modificar l'element al punt d'interès

Novetat tipus llista: punt d'interès

Podem:

- Desplaçar endavant i enrere el punt d'interès
- Afegir i eliminar just al punt d'interès
- Consultar i modificar l'element al punt d'interès

- Implementació: atribut (privat) de tipus apuntador a node
- Modularitat: punt d'interès part del tipus, no tipus apart
- Efecte lateral: queda modificat si es modifica en una funció que rep la llista per referència no const

Definició classe `Llista`, I

```
template <class T> class Llista {
  private:
    struct node_llista {
        T info;
        node_llista* seg;
        node_llista* ant;
    };
    int longitud;
    node_llista* primer;
    node_llista* ultim;
    node_llista* act;          // apuntador a punt d'interes
    ...  // especificació i implementació d'operacions privades
  public:
    ...  // especificació i implementació d'operacions públiques
};
```

Definició classe `Llista`, II

- Apuntadors per accés ràpid a següent, anterior, primer i darrer, i punt d'interès
- `act == nullptr` vol dir "punt d'interès sobre l'element fictici posterior a l'últim"
- Conveni llista buida: `longitud` zero i els tres apuntadors (`primer`, `ultim` i `act`) nuls
- Llista amb un element: `longitud` 1 i únic altre cas en què `primer` == `ultim`
- "cap a la dreta" == cap a l'últim; "cap a l'esquerra" == cap al primer; "a la dreta de tot" == sobre l'element fictici del final

Constructures i destructora

```
Llista() {
  longitud = 0;
  primer = nullptr;
  ultim = nullptr;
  act = nullptr;
}

Llista(const Llista& original) {
    longitud = original.longitud;
    primer = copia_node_llista(original.primer, original.act,
                                                ultim, act);
}

~Llista() {
    esborra_node_llista(primer);
}
```

Copiar cadena de nodes

```
static node_llista* copia_node_llista(
               node_llista* m, node_llista* oact,
               node_llista* &u, node_llista* &a);
/* Pre: cert */
/* Post: si m és nullptr, el resultat, u i a són nullptr;
   en cas contrari, el resultat apunta al primer node d'una
   cadena de nodes que són còpia de de la cadena que té el
   node apuntat per m com a primer, u apunta a l'últim node,
   i a és o bé nullptr si oact no apunta a cap node de la cadena
   que comença amb m, o bé apunta al node còpia del node apuntat
   per oact */
```

Copiar cadena de nodes

```
static node_llista* copia_node_llista(
               node_llista* m, node_llista* oact,
               node_llista*& u, node_llista*& a) {
    if (m == nullptr) { u = nullptr; a = nullptr; return nullptr; }
    else {
        node_llista* n = new node_llista;
        n -> info = m -> info;
        n -> ant = nullptr;
        n -> seg = copia_node_llista(m -> seg, oact, u, a);
        if (n -> seg != nullptr) n -> seg -> ant = n;
        if (n -> seg == nullptr) u = n;
        // else, u es el que hagi retornat la crida recursiva
        // es podria fer com a "else"
        if (m == oact) a = n;
        // else, a es el que hagi retornat la crida recursiva
        return n;
    }
}
```

Esborrar cadena de nodes

```
static void esborra_node_llista(node_llista* m) {
/* Pre: cert */
/* Post: no fa res si m és nullptr, en cas contrari,
         allibera espai dels nodes de la cadena que té
         el node apuntat per m com a primer */
    if (m != nullptr) {
        esborra_node_llista(m -> seg);
        delete m;
    }
}
```

Exercici: La versió iterativa

Redefinició de l'assignació

```
Llista& operator=(const Llista& original) {
    if (this != &original) {
      longitud = original.longitud;
      node_llista *ultim_aux, *act_aux;
      node_llista* primer_aux = copia_node_llista(original.primer,
                                 original.act, ultim_aux, act_aux);
      esborra_node_llista(primer);
      primer = primer_aux; ultim = ultim_aux; act = act_aux;
  }
  return *this;
}
```

Redefinició de l'assignació: una tècnica alternativa

```
// intercanvi de la llista implícita amb la llista aux
void Swap(LLista& aux) {
  swap(longitud, aux.longitud);
  swap(primer, aux.primer);
  swap(ultim, aux.ultim);
  swap(act, aux.act);
}

Llista& operator=(const Llista& original) {
  Llista aux = original; // amb la construcció per còpia
  Swap(aux);
  return *this;
}
```

Modificadores I

```
void l_buida() {
    esborra_node_llista(primer);
    longitud = 0;
    primer = nullptr;
    ultim = nullptr;
    act = nullptr;
}
```

Modificadores II

```
void afegir(const T& x) {
/* Pre: cert */
/* Post: la llista queda com originalment, però amb x
   afegit a l'esquerra del punt d'interès */
    node_llista* aux = new node_llista;
    aux -> info = x;
    aux -> seg = act;
    if (longitud == 0) { // la llista es buida
        aux -> ant = nullptr;
        primer = aux;
        ultim = aux;
    } else if (act == nullptr) {
        aux -> ant = ultim;
        ultim -> seg = aux;
        ultim = aux;
    }
    ...
```

Modificadores III

(continuació)

```
    else if (act == primer) {
        aux -> ant = nullptr;
        act -> ant = aux;
        primer = aux;
    } else {
        aux -> ant = act -> ant;
        act -> ant -> seg = aux;
        act -> ant = aux;
    }
    ++longitud;
}
```

Modificadores IV

```
void eliminar() {
/* Pre: la llista no és buida i el seu punt d'interès
        no és a la dreta de tot */
/* Post: la llista queda com originalment però sense l'element
         on estava el punt d'interès i amb el nou punt d'interès
         apuntant al successor de l'element esborrat */

    node_llista* aux = act; // conserva l'accés al node actual
    if (longitud == 1) {
        primer = nullptr;
        ultim = nullptr;
    } else if (act == primer) {
        primer = act -> seg;
        primer -> ant = nullptr;
    }
    ...
```

Modificadores V

(continuació)

```
    ...
    else if (act == ultim) {
        ultim = act -> ant;
        ultim -> seg = nullptr;
    }
    else {
        act -> ant -> seg = act -> seg;
        act -> seg -> ant = act -> ant;
    }
    act = act -> seg; // avança el punt d'interès
    delete aux; // allibera l'espai de l'element esborrat
    --longitud;
}
```

Modificadores VI

Interès: concatenació més eficient que la basada en `afegir`

```
void concat(Llista& l) {
/* Pre: l = L */
/* Post: la llista conté els seus elements originals seguits pels
         de L, l queda buida, i el punt d'interés passa a ser el
         primer element */
    if (l.longitud > 0) {  // l buida → no cal fer res
        if (longitud == 0) {
            primer = l.primer;
        } else {
            ultim -> seg = l.primer;
            l.primer -> ant = ultim;
        }
        ultim = l.ultim;
        longitud += l.longitud;
        l.primer = l.ultim = l.act = nullptr; l.longitud = 0;
    }
    act = primer;
}
```

Consultores

```
bool es_buida() const {
    return primer == nullptr;
}

int mida() const {
    return longitud;
}
```

Noves operacions per a consultar i modificar l'element actual

```
T actual() const { // equival a consultar *it
/* Pre: la llista no és buida i el seu punt d'interès
        no està sobre l'element fictici del final */
/* Post: el resultat és l'element apuntat pel punt d'interès */
    return act -> info;
}

void modifica_actual(const T &x) { // equival a fer *it = x
/* Pre: la llista no és buida i el seu punt d'interès no està
        a la dreta de tot*/
/* Post: la llista queda com originalment, però amb x reemplaçant
        l'element actual */
    act -> info = x;
}
```

Noves operacions per a moure el punt d'interès I

```
void inici() {    // equival a fer it = l.begin()
/* Pre: cert */
/* Post: el punt d'interès de la llista apunta al primer
   element de la llista, o a la dreta de tot si la llista és buida */
    act = primer;
}

void fi() {       // equival a fer it = l.end()
/* Pre: cert */
/* Post: el punt d'interès queda situat
    sobre l'element fictici del final */
    act = nullptr;
}
```

Noves operacions per a moure el punt d'interès II

```
void avanca() {  // equival a fer ++it
/* Pre: el punt d'interès no està a la dreta de tot */
/* Post: el punt d'interès apunta al successor de l'element al qual
         apuntava originalment, és a dir es mou cap a la dreta
         del seu al valor original */
    act = act -> seg;
}

void retrocedeix() {  // equival a fer --it
/* Pre: el punt d'interès no és el primer element de la llista */
/* Post: el punt d'interès apunta al predecessor de l'element al qual
         apuntava originalment, o apunta a l'últim element de la llist
         si estava apuntant a la dreta de tot; és a dir es mou cap a
         l'esquerra del seu al valor original */
    if (act == nullptr) act = ultim;
    else act = act -> ant;
}
```

Noves operacions per a moure el punt d'interès III

```
bool dreta_de_tot() const {  // equival a comparar it == l.end()
/* Pre: cert */
/* Post: retorna cert si i només si el punt d'interès
         és a la dreta de tot */
    return act == nullptr;
}

bool sobre_el_primer() const { // equival a comparar it == l.begin()
/* Pre: cert */
/* Post: si la llista no és buida, retorna cert si i només si
         el punt d'interès és damunt el primer element; si la llista
         és buida retorna cert si i només si
         punt d'interès si està a la dreta de tot */
    return act == primer;
}
```

Part VII

Tipus Recursius de Dades

Llistes doblement encadenades amb sentinella

Implementació de llistes amb sentinella:

- Node extra; no conté cap element real
- Objectiu: simplificar el codi d'algunes operacions com ara `afegir` i `eliminar`
- L'estructura mai té apuntadors amb valor `nullptr`. El sentinella fa el paper que tenien aquests

Llistes amb sentinella

Llista buida:

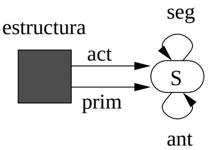
- següent i anterior del sentinella = sentinella

Llista no buida:

- següent del sentinella = primer de la llista
- anterior del sentinella = darrer de la llista
- sentinella = anterior del primer
- sentinella = següent del darrer

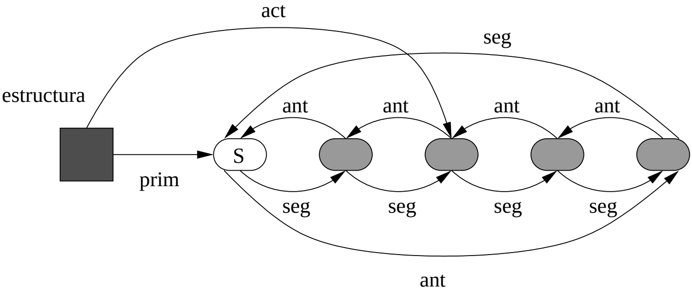
Llistes amb sentinella

Llista buida:



Esquema estructura interna llistes doblement encadenades amb sentinella

Llista no buida:



Un nou atribut privat

`sent` apunta sempre al node sentinella, que existeix fins i tot quan la llista és buida

```
template <class T> class Llista {
    private:
      struct node_llista {
          T info;
          node_llista* seg;
          node_llista* ant;
      };
      int longitud;
      node_llista* sent;
      node_llista* act;
      ...  // especificació i implementació d'operacions privades
    public:
      ...  // especificació i implementació d'operacions públiques
};
```

Implementació de privades i públiques $\longrightarrow$ apunts

Part VII

Tipus Recursius de Dades

Definició de la classe `Arbre`

No coincideix amb la classe `BinTree`
Principals operacions:

- `a.plantar(x,a1,a2)`: Demana que `a` sigui buit, i sigui objecte diferent d'`a1` i `a2`. Deixa `a1` i `a2` buits.
- `a.fills(a1,a2)`: Demana que `a1` i `a2` siguin buits, i tots tres objectes `a`, `a1` i `a2` han de ser objectes diferents.

Definició de la classe `Arbre`

No coincideix amb la classe `BinTree`
Principals operacions:

- `a.plantar(x,a1,a2)`: Demana que `a` sigui buit, i sigui objecte diferent d'`a1` i `a2`. Deixa `a1` i `a2` buits.
- `a.fills(a1,a2)`: Demana que `a1` i `a2` siguin buits, i tots tres objectes `a`, `a1` i `a2` han de ser objectes diferents.

Això fa que per recorrer un arbre s'hagi de "desmuntar". Sovint ineficient.
Inconvenient solucionat a `BinTree` amb *smart pointers* de C++, que no són part de l'assignatura.

Definició de la classe `Arbre`

- `struct` del node conté dos apuntadors a node
- Arbre buit = atribut `arrel` és nul

```
template <class T> class Arbre {
    private:
        struct node_arbre {
            T info;
            node_arbre* esq;
            node_arbre* dre;
        };
        node_arbre* arrel;
        ...  // especificació i implementació d'operacions privades
    public:
        ...  // especificació i implementació d'operacions públiques
};
```

Constructores i destructora

```
Arbre() {
/* Pre: cert */
/* Post: crea un arbre buit */
    arrel = nullptr;
}

Arbre(const Arbre& original) {
/* Pre: cert */
/* Post: crea un arbre que és una còpia d'original */
    arrel = copia_node_arbre(original.arrel);
}

~Arbre() {
    esborra_node_arbre(arrel);
}
```

Copiar jerarquies de nodes

```
static node_arbre* copia_node_arbre(node_arbre* m) {
/* Pre: cert */
/* Post: el resultat és nullptr si m és nullptr; si no, el resultat ap
        al node arrel d'una jerarquia de nodes que és una còpia de
        la jerarquia de nodes que té el node apuntat per m com a arrel
    if (m == nullptr) return nullptr;
    else {
        node_arbre* n = new node_arbre;
        n -> info = m -> info;
        n -> esq = copia_node_arbre(m -> esq);
        n -> dre = copia_node_arbre(m -> dre);
        return n;
    }
}
```

Notem l'operador = del tipus `T` usat com a una operació de còpia

Esborrar jerarquies de nodes

```
static void esborra_node_arbre(node_arbre* m) {
/* Pre: cert */
/* Post no fa res si m és nullptr; en cas contrari,
        allibera espai de tots els nodes de la jerarquia
        que té el node apuntat per m com a arrel */
    if (m != nullptr) {
        esborra_node_arbre(m -> esq);
        esborra_node_arbre(m -> dre);
        delete m;
    }
}
```

Operador d’assignació i modificadores I

```
Arbre& operator=(const Arbre& original) {
    if (this != &original) {
      node_arbre* aux = copia_node_arbre(original.arrel);
      esborra_node_arbre(arrel);
      arrel = aux;
    }
    return *this;
}

void a_buit() {
    esborra_node_arbre(arrel);
    arrel = nullptr;
}
```

Modificadores II

```
void plantar(const T &x, Arbre &a1, Arbre &a2) {
/* Pre: l'arbre implícit és buit, a1 = A1, a2 = A2,
   a1 i a2 són objectes diferents de l'arbre implícit */
/* Post: l'arbre implícit té x com a arrel, A1 com a fill esquerre
         i A2 com a fill dret; a1 i a2 són buits */
    node_arbre* aux = new node_arbre;
    aux -> info = x;
    aux -> esq = a1.arrel;
    if (a2.arrel != a1.arrel or a2.arrel == nullptr)
        aux -> dre = a2.arrel;
    else
      aux -> dre = copia_node_arbre(a2.arrel);
    arrel = aux;
    a1.arrel = nullptr;
    a2.arrel = nullptr;
}
```

Modificadores III

```
void fills(Arbre& fe, Arbre& fd) {
/* Pre: l'arbre no està buit,
        fe, fd són dos arbres buits i són objectes diferents */
/* Post: fe és el fill esquerre de l'arbre implícit original,
         fd és el fill dret de l'arbre implícit original,
         l'arbre implícit queda buit */
    fe.arrel = arrel -> esq;
    fd.arrel = arrel -> dre;
    delete arrel;
    arrel = nullptr;
}
```

Consultores

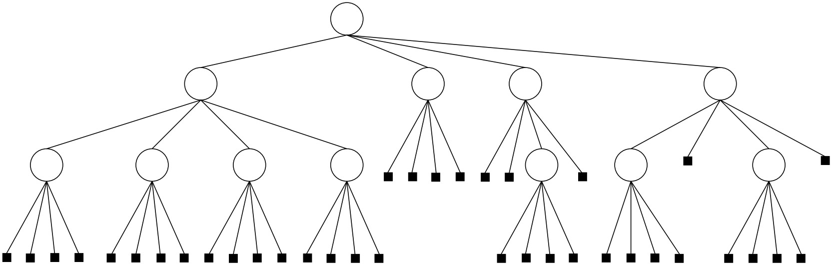
```
T arrel() const {
/* Pre: l'arbre no és buit */
/* Post: retorna el valor de l'arrel de l'arbre */
    return arrel -> info;
}

bool es_buit() const {
/* Pre: cert */
/* Post: retorna cert si i només si l'arbre és buit */
    return arrel == nullptr;
}
```

Part VII

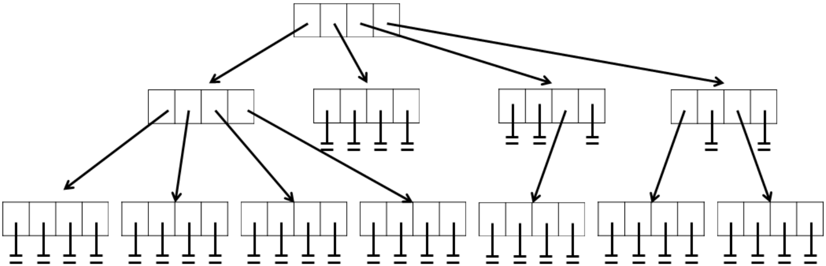
Tipus Recursius de Dades

Arbres N-aris



- Generalització dels arbres binaris
- N: nombre de fills (binaris: N=2)

Arbres N-aris: Implementació



un node conté vector anb N apuntadors a node, un per a cada fill

operació “consultar i-èssim” eficient: accés directe

Definició classe ArbreNari

```
template <class T> class ArbreNari {
  private:
    struct node_arbreNari {
        T info;
        vector<node_arbreNari*> child;
    };
    int N;   // nombre de fills de cada subarbre
    node_arbreNari* root;
    ...  // operacions privades
  public:
    ...  // operacions públiques
};
```

Copiar jerarquies de nodes

```
static node_arbreNari* copia_node_arbreNari(node_arbreNari* m) {
/* Pre: cert */
/* Post: el resultat és nullptr si m és nullptr; en cas contrari,
         el resultat apunta al node arrel d'una jerarquia de nodes
         que és una còpia de la jerarquia de nodes que té el node
         apuntat per m com a arrel */

    if (m == nullptr) return nullptr;
    else {
        node_arbreNari* n = new node_arbreNari;
        n -> info = m -> info;
        int N = m -> child.size();
        n -> child = vector<node_arbreNari*>(N);
        for (int i = 0; i < N; ++i)
            n -> child[i] = copia_node_arbreNari(m -> child[i]);
        return n;
    }
}
```

Conté recursió i iteració

Esborrar jerarquies de nodes

```
static void esborra_node_arbreNari(node_arbreNari* m) {
/* Pre: cert */
/* Post no fa res si m és nullptr; en cas contrari,
        allibera espai de tots els nodes de la jerarquia
        que té el node apuntat per m com a arrel */
    if (m != nullptr) {
        int N = m -> child.size();
        for (int i = 0; i < N; ++i)
            esborra_node_arbreNari(m -> child[i]);
        delete m;
    }
}
```

Constructores/destructora I

```
ArbreNari(int n) {
/* Pre: cert */
/* Post: l'arbre implícit és un arbre buit d'aritat n */
    N = n;
    root = nullptr;
}

ArbreNari(const T& x, int n) {
/* Pre: cert */
/* Post: l'arbre implícit és un arbre amb arrel x i
         n fills buits */
    N = n;
    root = new node_arbreNari;
    root -> info = x;
    root -> child = vector<node_arbreNari*>(N, nullptr);
}
```

Constructores/destructora II

```
ArbreNari(const ArbreNari& original) {
/* Pre: cert */
/* Post: el resultat és una arbre còpia d'original */
    N = original.N;
    root = copia_node_arbreNari(original.root);
}

~ArbreNari() {
    esborra_node_arbreNari(root);
}
```

Modificadores I

```
/* Pre: l'arbre implícit té la mateixa aritat que original */
/* Post: l'arbre implícit és una còpia d'original */
ArbreNari& operator=(const ArbreNari& original) {
  if (this != &original) {
    node_ArbreNari* aux = copia_node_arbreNari(original.root);
    esborra_node_arbreNari(root);
    root = aux;
  }
  return *this;
}
```

```
void a_buit() {
/* Pre: cert */
/* Post: l'arbre implícit és un arbre buit de la mateixa aritat
         que tenia */
    esborra_node_arbreNari(root);
    root = nullptr;
}
```

Modificadores II

```
void plantar(const T& x, vector<ArbreNari>& v) {
/* Pre:  l'arbre implícit és buit, v = V, v.size() és l'aritat
         de l'arbre implícit, tots els components de v tenen la
         mateixa aritat que l'arbre implícit, i tots són objectes
         diferents entre sí i diferents de l'arbre implícit */
/* Post: l'arbre implícit té x com a arrel i els seus fills són iguals
         que els components de V; v conté arbres buits */
    root = new node_arbreNari;
    root -> info = x;
    root -> child = vector<node_arbreNari*>(N);
    for (int i = 0; i < N; ++i) {
        root -> child[i] = v[i].root;
        v[i].root = nullptr;
    }
}
```

Modificadores III

```
void fill(const ArbreNari& a, int i) {
/* Pre: l'arbre implícit és buit i de la mateixa aritat que a,
   a no és buit, i està entre 1 i el nombre de fills d'a */
/* Post: l'arbre implícit és una còpia del fill i-èssim d'a */
   root = copia_node_arbreNari(a.root -> child[i-1]);
}

void fills(vector<ArbreNari>& v) {
/* Pre:  l'arbre implícit és A, un arbre no buit,
         v és un vector buit */
/* Post: v conté els fills d'A i l'arbre implícit és buit */
    v = vector<ArbreNari>(N, ArbreNari(N));
    for (int i = 0; i < N; ++i)
        v[i].root = root -> child[i];
    delete root;
    root = nullptr;
}
```

Consultores

```
T arrel() const {
/* Pre: l'arbre implícit no és buit */
/* Post: el resultat és el valor a l'arrel de l'arbre implícit */
    return root -> info;
}

bool es_buit() const {
/* Pre: cert */
/* Post: el resultat indica si l'arbre implícit és un arbre buit */
    return root == nullptr;
}

int aritat() const {
/* Pre: cert */
/* Post: el resultat és l'aritat de l'arbre implícit */
    return N;
}
```

Eficiència de recorreguts arbres N-aris

Observació: `fills` ens permet recorreguts eficients

- *fills* té cost N, siguin els subarbres molt grans o molt petits
- No hi ha còpia d'arbres

Podria fer-se copiant cada fill amb `fill`, però és ineficient

Suma de tots elements d'un arbre

```
/* Pre: a = A */
/* Post: el resultat és la suma dels elements d'A */
int suma(ArbreNari<int>& a) {
    if (a.es_buit()) return 0;
    else {
        int s = a.arrel();
        int N = a.aritat();
        vector< ArbreNari<int> > v;
        a.fills(v);
        for (int i = 0; i < N; ++i) s += suma(v[i]);
        return s;
    }
}
```

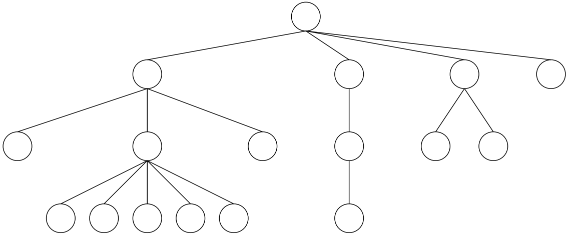
Sumar un valor k a cada node d'un arbre

```
/* Pre: a = A */
/* Post: a és com A però havent sumat k a tots els seus elements */
void suma_k(ArbreNari<int>& a, int k) {
    if (not a.es_buit()) {
        int s = a.arrel() + k;
        int N = a.aritat();
        vector<ArbreNari<int> > v;
        a.fills(v);
        for (int i = 0; i < N; ++i) suma_k(v[i], k);
        a.plantar(s, v);
    }
}
```

Part VII

Tipus Recursius de Dades

Arbres generals I



- Nombre indeterminat de fills, no necessàriament el mateix a cada subarbre
- Propietat important: Un arbre general
  - o és l'arbre buit
  - o té qualsevol nombre (fins i tot zero) de fills, cap dels quals és buit

Arbres generals II. Implementacions

1. vector d'apuntadors de mida = nombre de fills
   - "consultar i-èssim" eficient
   - "eliminar fill i-èssim" potser és ineficient
   - (que no existeix en arbres N-aris!)
   - és la implementació que descriurem

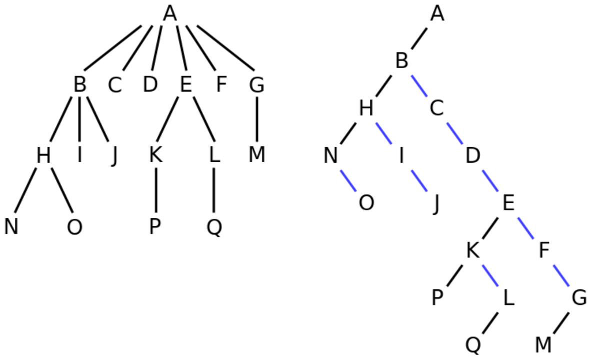
Arbres generals II. Implementacions

1. vector d'apuntadors de mida = nombre de fills
   - "consultar i-èssim" eficient
   - "eliminar fill i-èssim" potser és ineficient
   - (que no existeix en arbres N-aris!)
   - és la implementació que descriurem
2. *llista* d'apuntadors a fills
   - "consultar i-èssim" ineficient (accés seqüencial)
   - però ok per recorreguts seqüencials
   - "eliminar fill actual" eficient

Arbres generals II. Implementacions

1. vector d'apuntadors de mida = nombre de fills
   - "consultar i-èssim" eficient
   - "eliminar fill i-èssim" potser és ineficient
   - (que no existeix en arbres N-aris!)
   - és la implementació que descriurem
2. *llista* d'apuntadors a fills
   - "consultar i-èssim" ineficient (accés seqüencial)
   - però ok per recorreguts seqüencials
   - "eliminar fill actual" eficient
3. arbre binari "primer fill, germà dret"
   - reimplementació sobre arbres binaris

“primer fill, germà dret”: exemple



(font: http://en.wikipedia.org/wiki/Left-child_right-sibling_binary_tree)

Definició de la classe ArbreGen

```
template <class T> class ArbreGen
    private:
        struct node_arbreGen {
            T info;
            vector<node_arbreGen*> child;
        };
        node_arbreGen* root;
        ...  // operacions privades
    public:
        ...  // operacions públiques
};
```

Important: Ja no tenim un atribut amb el nombre de fills per a tot l'arbre; ni per a cada node. Es pot obtenir amb `child.size()`

Copiar i esborrar jerarquies de nodes

Idèntiques a les dels arbres N-aris (només canviar tipus dels nodes)

Constructores/destructores I

```
ArbreGen() {
/* Pre: cert */
/* Post: l'arbre implícit és un arbre general buit */
    root = nullptr;
}

ArbreGen(const T &x) {
/* Pre: cert */
/* Post: l'arbre implícit és un arbre general amb arrel x
         i 0 fills */
    root = new node_arbreGen;
    root -> info = x;
    // no cal fer arrel -> child = vector<node_arbreGen*>(0);
}
```

Constructores/destructores II

```
ArbreGen(const ArbreGen& original) {
/* Pre: cert */
/* Post: el resultat és una arbre còpia d'original */
    root = copia_node_arbreGen(original.root);
}

~ArbreGen() {
    esborra_node_arbreGen(root);
}
```

Modificadores I

```
ArbreGen& operator=(const ArbreGen& original) {
  if (this != &original) {
    node_ArbreGen* aux = copia_node_arbreGen(original.root);
    esborra_node_arbreGen(root);
    root = aux;
  }
  return *this;
}

void a_buit() {
/* Pre: cert */
/* Post: l'arbre implícit és un arbre general buit */
    esborra_node_arbreGen(root);
    root = nullptr;
}
```

Modificadores II

```
void plantar(const T &x) {
/* Pre: l'arbre implícit és buit */
/* Post: l'arbre implícit té x com a arrel i sense fills */
    root = new node_arbreGen;
       // inclou un root -> child = vector<node_arbreGen*>(0);
    root -> info = x;

}

void plantar(const T &x, vector<ArbreGen> &v) {
/* Pre:  l'arbre implícit és buit, v = V, cap component
         de v és un arbre buit */
/* Post: l'arbre implícit té x com a arrel i els elements de V
         com a fills; v conté només arbres buits */
    root = new node_arbreGen;
    root -> info = x;
    int n = v.size();
    root -> child = vector<node_arbreGen*>(n);
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        root -> child[i] = v[i].root;
        v[i].root = nullptr;
    }
}
```

Modificadores III

```
void afegir_fill(const ArbreGen& a) {
/* Pre: l'arbre implícit i a no són buits; a i l'arbre implícit
        són objectes diferents */
/* Post: l'arbre implícit té un fill més que a l'inici,
         i aquest nou fill és l'últim i còpia de l'arbre a */
   root -> child.push_back(copia_node_arbreGen(a.root));
}
```

Nota: aquí necessitem fer `push_back(...)`

Modificadores IV

```
void fill(const ArbreGen& a, int i) {
/* Pre: l'arbre implícit és buit, a no és buit, i està entre 1 i
   el nombre de fills d'a */
/* Post: l'arbre implícit és una còpia del fill i-èssim d'a */
    root = copia_node_arbreGen(a.root -> child[i-1]);
}

void fills(vector<ArbreGen> &v) {
/* Pre:  l'arbre implícit no és buit, li diem A, i no és cap
         dels components de v*/
/* Post: l'arbre implícit és buit, v passa a contenir els fills
         de l'arbre A */
    int n = root -> child.size();
    v = vector<ArbreGen>(n);
    for (int i = 0; i < n; ++i) v[i].root = root -> child[i];
    delete root; root = nullptr;
}
```

Consultores

```
T arrel() const {
/* Pre: l'arbre implícit no és buit */
/* Post: el resultat és el valor de l'arrel de l'arbre implícit */
    return root -> info;
}

bool es_buit() const {
/* Pre: cert */
/* Post: el resultat indica si l'arbre implícit és un arbre buit */
    return root == nullptr;
}

int nombre_fills() const {
/* Pre: l'arbre implícit no és buit */
/* Post: el resultat és el nombre de fills de l'arbre implícit */
    return root -> child.size();
}
```

Exemple: suma de tots els elements

```
int suma(ArbreGen<int>& a) {
/* Pre: a = A */
/* Post: el resultat és la suma dels elements d’A */
    int s;
    if (a.es_buit()) s = 0;
    else {
       s = a.arrel();
       vector<ArbreGen<int> > v;
       a.fills(v);
       int n = v.size();
       for (int i = 0; i < n; ++i) s += suma(v[i]);
    }
    return s;
}
```

Exemple: sumar k a cada element

```
void suma_k(ArbreGen<int>& a, int k) {
/* Pre: a = A */
/* Post: a és com A però havent sumat k a tots els seus elements */
    if (not a.es_buit()) {
        int s = a.arrel() + k;
        vector<ArbreGen<int> > v;
        a.fills(v);
        int n = v.size();
        // si n == 0, el bucle no fa res i es planta v que és
        // un vector buit d'ArbreGen. és a dir, la nova arrel conté
        // a.arrel() + k, i no tindrà cap fill, com originalment
        for (int i = 0; i < n; ++i) suma_k(v[i], k);
        a.plantar(s, v);
    }
}
```

Part VII

Tipus Recursius de Dades

Implementacions amb accés a la representació

- Avantatge: Eficiència. Assignació d'apuntadors vs. còpia d'estructures
- Inconvenient: Lligades a una representació. No modulars
- Exemple: `sort` com a mètode de la classe `list` a STL

Cerca d'un element en una pila

```
class Pila {
  ...
/* Pre: cert */
/* Post: retorna cert ssi x apareix a la pila implícita */
bool cerca(const T &x) const;
  ...
};
```

Cerca en una pila: versió iterativa

```
/* Pre: cert */
/* Post: retorna cert ssi x apareix a la pila implícita */
bool cerca(const T &x) const {
    node_pila* act = cim;
    /* Inv: cap node entre [cim, act) té info = x */
    while (act != nullptr) {
        if (act -> info == x) return true;
        act = act -> seguent;
    }
    return false;
}
```

Cerca en una pila: versió recursiva I

```
class Pila {
   ...
/* Pre: cert */
/* Post: retorna cert ssi x apareix a la pila implícita */
bool cerca(const T &x) const;
   ...
};
```

Problema: La recursió és (node $\rightarrow$ node), no (pila $\rightarrow$ pila)!

Cerca en una pila: versió recursiva I

```
class Pila {
  ...
/* Pre: cert */
/* Post: retorna cert ssi x apareix a la pila implícita */
bool cerca(const T &x) const;
  ...
};
```

Problema: La recursió és (node $\rightarrow$ node), no (pila $\rightarrow$ pila)!

Immersió: $\rightarrow$ operació auxiliar, recursiva, amb paràmetre `node_pila*`

la crida inicial fa el pas (pila $\rightarrow$ `node_pila*`)

Cerca en una pila: versió recursiva II

```
  /* Pre: cert */
  /* Post: retorna cert ssi x apareix a la pila implícita */
bool cerca(const T &x) const {
    return cerca_pila_node(cim, x);
}


/* Pre: cert */
/* Post: retorna cert ssi x apareix a la llista
         de nodes que comença a n */
static bool cerca_pila_node(node_pila* n, const T &x);
```

Atenció a l'`static`!

Cerca en una pila: versió recursiva III

```
/* Pre: cert */
/* Post: retorna cert ssi x apareix a la llista
         de nodes que comença a n */
static bool cerca_pila_node(node_pila* n, const T &x) {
    if (n == nullptr) return false;
    else if (n -> info == x) return true;
    else return cerca_pila_node(n -> seg, x);
}
```

Compte: precondició de l'operador −>

Sumar un valor a tots els elements d'un arbre binari

El plantegem com a nou mètode de la classe arbre binari

```
    ...
/* Pre: A és el valor inicial del 'arbre implícit */
/* Post: l'arbre implícit és l'arbre A però havent sumat k
         a tots els seus elements */
void inc_arbre(const T& k);
    ...
```

Sumar un valor a tots els elements d'un arbre binari

```
/* Pre: A és el valor inicial del arbre implícit */
/* Post: l'arbre implícit és l'arbre A però havent sumat k
         a tots els seus elements */
void inc_arbre(const T& k) {
    inc_node(a.arrel, k);
}


/* Pre: cert */
/* Post: el node apuntat per n i tots els seus descendents tenen
         al camp info la suma de k i el seu valor original */
static void inc_node(node_arbre* n, int k) {
    if (n != nullptr) {
        n -> info += k;
        inc_node(n -> esq, k);
        inc_node(n -> dre, k);
    }
}
```

Substitució de fulles per un arbre I

Substituir totes les fulles de l'arbre implícit que continguin el valor `x` per un altre arbre donat `as`

```
/* Pre: A es el valor inicial del p.i. */
/* Post: l'arbre és com A però havent substituït
       les fulles que contenien x per l'arbre as */
void subst(const T& x, const ArbreBin<T>& as);
```

Substitució de fulles per un arbre II

```
void subst(const T& x, const ArbreBin<T>& as) {
    arrel = subst_node(arrel, x, as);
}

/* Pre: n apunta a l'arrel d'un (sub)arbre A */
/* Post: retorna un apuntador a l'arrel del subarbre resultant
de substituir cada fulla del subarbre amb arrel apuntada per n
que contingui el valor x per una còpia de l'ArbreBin as */
static node_arbre* subst_node(node_arbre* n, const T& x,
                              const ArbreBin<T>& as);
```

Substitució de fulles per un arbre III

```
static node_arbre* subst_node(node_arbre* n, const T& x,
                               const ArbreBin<T>& as) {
    if (n == nullptr) return nullptr;

    // n != nullptr
    if (n -> info == x and
        n -> esq == nullptr and n -> dre == nullptr) {
      // n apunta a una fulla que conté el valor x
      delete n; // no cal fer esborra_node_arbre(n);
      n = copia_node_arbre(as.arrel);
    } else {
      n -> esq = subst_node(n -> esq, x, as);
      n -> dre = subst_node(n -> dre, x, as);
    }
    return n;
}
```

Atenció al retorn de l'apuntador a l'arrel de l'arbre resultant. L'alternativa és passar `n` per referència

Revessar una llista

```
/* Pre: cert */
/* Post:la llista conté els mateixos elements que a l'inici però
         amb l'ordre invertit; el seu punt d'interés apunta
         al mateix element que a l'inici */
void revessar();
```

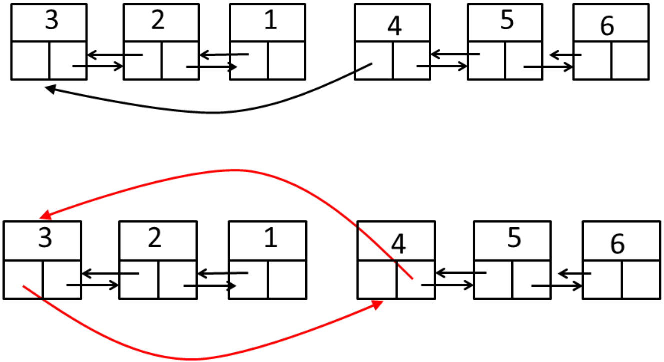
Revessar una llista

```
/* Pre: cert */
/* Post:la llista conté els mateixos elements que a l'inici però
         amb l'ordre invertit; el seu punt d'interés apunta
         al mateix element que a l'inici */
void revessar();
```

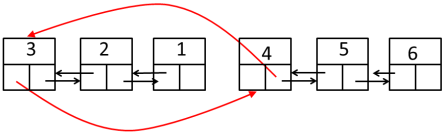
1. Solució amb ops. de la classe: `insert`, còpies de node ...
2. Solució tocant representació: assignacions d'apuntadors

Revessar una llista, v1

Simular “esborrar el primer de l1, afegir-lo primer a l2”

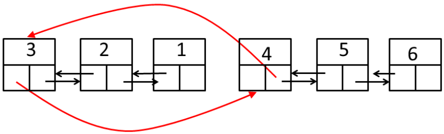


Revessar una llista, v1



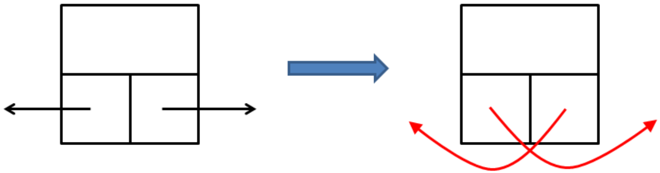

```
void revessar() {
    node_llista* n = primer;
    while (n != ultim) {
      /* Inv: per tots els nodes anteriors al que apunta n,
         els apuntadors a anterior i següent han estat
         intercanviats respecte a l'original */
         node_llista* suc = n -> seg;
         n -> seg = n -> ant;
         if (n != primer)
            n -> ant -> ant = n;
         n = suc;
    }
    ...  // continua
}
```

Revessar una llista, v1

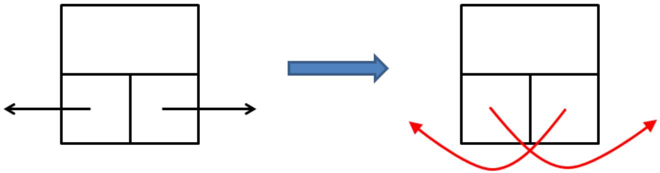



```
  ...
if (n != nullptr and n != primer) {
  // n == ultim != primer (i la llista
  // no és buida!)
      n -> seg = n->ant;
      n -> ant = nullptr;
      ultim = primer;
      primer = n;
  }
```

Revessar una llista

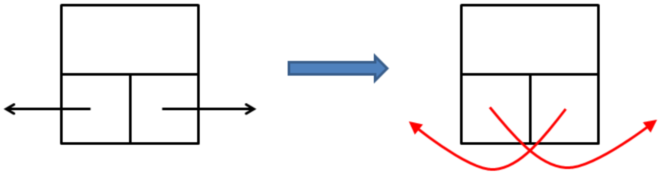


Revessar una llista



```
void revessar() {
    node_llista* n = primer;
    while (n != nullptr) {
      /* Inv: per als nodes anteriors al que apunta n,
         els apuntadors a anterior i seguent han estat
         intercanviats respecte a l'original */
        swap(n -> seg, n -> ant);
        n = n -> ant;
    }
    swap(primer, ultim);
}
```

Revessar una llista



```
void revessar() {
    node_llista* n = primer;
    while (n != nullptr) {
      /* Inv: per als nodes anteriors al que apunta n,
         els apuntadors a anterior i seguent han estat
         intercanviats respecte a l'original */
        swap(n -> seg, n -> ant);
        n = n -> ant;
    }
    swap(primer, ultim);
}
```

Exercici: versió recursiva

Part VII

Tipus Recursius de Dades

Part VII

Tipus Recursius de Dades

29. Apuntadors i memòria dinàmica
30. Tipus recursius de dades: Generalitats
31. Piles i cues
32. Implementació de llistes
33. Llistes doblement encadenades amb sentinella
34. Arbres binaris
35. Arbres N-aris
36. Arbres generals
37. Implementació de mètodes: accedint la representació
38. Estructures de dades noves
    - Cues ordenades
    - Multillistes

Cues ordenades

- Modificació de la classe `Cua`: propietat addicional de poder ser recorregudes en ordre creixent respecte al valor dels seus elements
- Dos tipus d'ordre: cronològic (com fins ara) + per valor (nou)
- Cal que hi hagi un operador $<$ definit en el tipus o classe dels elements
- Cal redefinir la implementació amb més apuntadors

Apuntadors:

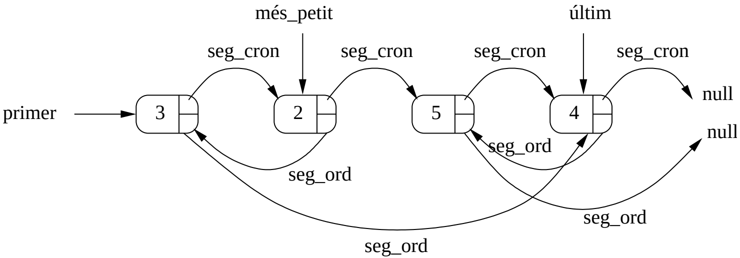
- `primer`, `ultim` i `seg` per gestionar l'ordre d'arribada a la cua (**ordre estàndar de cua, cronològic**).
- `mes_petit` i `seg_ord` per gestionar l'ordre creixent segons el valor dels elements.

Nova definició de la classe

```
template <class T> class CuaOrd {
  private:
    struct node_cuaOrd {
        T info;
        node_cuaOrd* seg_ord;
        node_cuaOrd* seg;
    };
    int longitud;
    node_cuaOrd* primer;
    node_cuaOrd* ultim;
    node_cuaOrd* mes_petit;
    ...  // especificació i implementació d'operacions privades
  public:
    ...  // especificació i implementació d'operacions públiques
};
```

Esquema de la implementació

Exemple:



Implementació cues ordenades

- Veurem només dues operacions públiques: `demanar_torn` (`push`) i `concatenar`
- Exercici: especificació i implementació d'altres operacions que caldria incloure

Demanar torn (push) I

```
void demanar_torn(const T& x) {
/* Pre: cert */
/* Post: la CuaOrd implícita conté x com a darrer
         element per ordre cronològic i on li pertoca
         en ordre creixent */
...
}
```

Demanar torn (push) II

```
void demanar_torn(const T& x) {
  node_cuaOrd*  n = new node_cuaOrd;
  n -> info = x;
  n -> seg = nullptr;
  if (primer == nullptr) {
    primer = ultim = n;
    mes_petit = n;
    n -> seg_ord = nullptr;
  } else {
    ...
  }
  ++longitud;
}
```

Demanar torn (push) III

```
} else {
 // la cua conté altres elements
 // (primer != nullptr => mes_petit != nullptr)
 // 1. el nou node és l'últim en ordre cronològic
 ultim -> seg = n;
 ultim = n;
 // 2. ara inserim el nou node ón pertoca en
 // ordre creixent
 mes_petit = inserta_ord(mes_petit, n);
}
```

Demanar torn (push) III

```
// Pre: la cadena que comença a p seguint els apuntadors seg_ord
// està en ordre creixent de valor, n != nullptr
// Post: retorna un apuntador al primer de la cadena resultant
// d'inserir el node apuntat per n en ordre creixent a la cadena
// que comença a p
static node_cuaOrd* inserta_ord(node_cuaOrd* p, node_cuaOrd* n) {
  if (p == nullptr) return n;
  if (n -> info < p -> info) {
     n -> seg_ord = p;
     return n;
  } else {
     p -> seg_ord = inserta_ord(p -> seg_ord, n)
     return p;
  }
}
```

Concatenar I

```
void concatenar(CuaOrd& c2) {
/* Pre: la cuaOrd implícita és C1, c2 = C2 */
/* Post: la cuaOrd implícita representa la concatenació de C1
i C2 en el ordre cronològic (és a dir, tot element de C2 vé
després de qualsevol element de C1 en ordre cronològic); la cuaOrd
implícita també representa la fusió de C1 i C2 en el ordre
creixent; finalment c2 queda buida */
```

Concatenar II

```
void concatenar(CuaOrd &c2) {
  if (c2.primer == nullptr) return;
  // només caldrà fer alguna cosa si c2 no és buida
  if (primer == nullptr) {
    // si el la cuaOrd implícita és buida, llavors
    // li transferim els continguts de c2
      primer = c2.primer;
      ultim = c2.ultim;
      mes_petit = c2.mes_petit;
  } else {  ...  }
  // la cuaOrd implícita augmenta la seva
  // longitud en tants elements com tenia c2
  longitud += c2.longitud;
  // i buidem la cuaOrd c2
  c2.primer = c2.ultim = c2.mes_petit = nullptr;
  c2.longitud = 0;
}
```

Concatenar III

```
{ // ni la cuaOrd ni c2 són buides
  // connectem la cuaOrd i c2
  // pero orde cronològic
  ultim -> seg = c2.primer; // amb el primer de c2
  ultim = c2.ultim_node;    // i actualitzem l'últim

  // ara fem la fusió dels nodes de les dues cues segon
  // l'ordre creixent;
  mes_petit = fusiona(mes_petit, c2.mes_petit);
}
```

Concatenar IV

```
static node_cuaOrd* fusiona(node_cuaOrd* n1, node_cuaOrd* n2) {
  if (n1 == nullptr) return n2;
  if (n2 == nullptr) return n1;
  // n1 != nullptr and n2 != nullptr
  if (n1 -> info <= n2 -> info) {
    n1 -> seg_ord = fusiona(n1 -> seg_ord, n2);
    return n1;
  } else {
    n2 -> seg_ord = fusiona(n1, n2 -> seg_ord);
    return n2;
  }
}
```

Part VII

Tipus Recursius de Dades

Multillistes: Motivació

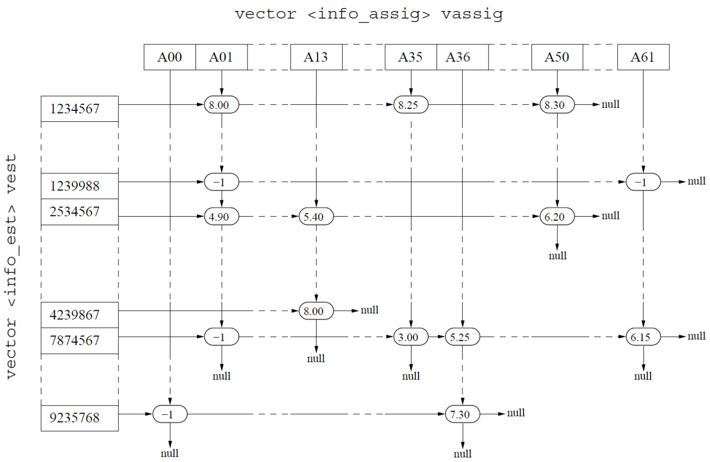
Volem guardar una taula molt gran però molt *esparsa*: molts elements nuls
Necessitem:

- Donat un índex de fila, recuperar tots els elements no nuls de la fila
- Donat un índex de columna, recuperar tots els elements no nuls de la columna

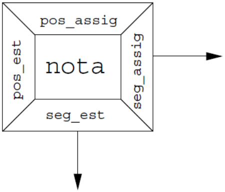
Exemple: Taula per guardar *cursos de la FIB*:

"l'estudiant X estava matriculat a Y i ha tret nota Z"

Multillistes: Esquema



Multillistes: Node



Implementació i detalls: → apunts