***Лекция №3***

***Системы счисления. Коды чисел. Формы представления чисел в ЭВМ.***

План лекции:

1. Системы счисления
2. Правила перевода чисел из одной системы счисления в другую
3. Двоичная арифметика
4. Представление числовой информации в компьютере
5. Коды представления чисел

Системы счисления.

**Система счисления** – это способ представления чисел (или знаковая система) и соответствующие ему правила действий над ними и правила их записи с помощью символов некоторого алфавита, называемых цифрами.

Различают два вида систем счисления:

- позиционная

- не позиционная.

В позиционных системах счисления значение цифры зависит от ее положения в числе, а в непозиционной – не зависит.

Широко известны следующие непозиционные системы счисления:

- римская, которая дошла до наших дней. В ней существует следующая система цифр: I обозначает 1, V-5, X-10 и т.д. (пример XIV-14);

- греческая (ионийская). Применялась на ранних стадиях развития человечества. В таблице показано, что каждой цифре соответствовала буква алфавита. (45-µɛ, 632- χλβ).

Позиционные системы счисления появились так же достаточно давно и одна из первых известных позиционных систем это шестидесятеричная система счисления. Она использовалась в древнем Вавилоне. До сих пор ряд элементов встречается и в современных системах и числа, которые были использованы в этой системе счисления, применялись в астрономии для наблюдения за небом, далее использовались греческими астрономами, потом арабами в первую очередь для представления дробей. В средневековье астрономы часто называли шестидесятеричные дроби как астрономические. В средние века также использовалась двенадцатеричная система счисления. Считается, что двенадцатеричная система счисления возникла в древнем Шумере и предполагается, что она появилась исходя из количества фаланг на пальцах рук. Большим пальцем проходил счет этих 12 фаланг и т.о. составлялись числа. Некоторые народы Нигерии и Тибета до сих пор используют двенадцатеричную систему счисления. До наших дней дошли некоторые значения этой системы: унция –1/12 единицы веса, английский пенс – 1/12 шиллинга, дюйм – 1/12 фута, дюжина – 12 штук и т.д. Двенадцатеричная система счисления получила широкое распространение в 17 веке, и ее сторонником был знаменитый французский естествоиспытатель Бюффон. Вольтер в свое время в своей книге «Карл ХII» утверждает, что этот монарх готовил приказ о переходе на двенадцатеричную систему счисления. Во времена французской революции была утверждена революционная комиссия по весам и мерам, которая длительное время рассматривала проект о переходе на двенадцатеричную систему счисления. Однако, усилиями ученых того времени (Лагранжа и др.) удалось отстоять позиции десятеричной системы счисления, которая сейчас повсеместно используется для счета. В 1944г. в США было организованно двенадцатеричное общество. Это общество до сих пор агитирует за переход на двенадцатеричную систему счисления, как более удобную для счета. Но, по всей видимости, это вряд ли когда-то случится, потому что очень велики затраты для перехода на эту систему счисления.

Среди позиционных систем счисления наиболее широко известны:

* десятичная
* двоичная
* восьмеричная
* шестнадцатеричная

Последние 3 используются, как правило, в вычислительной технике для решения информационных задач. Рассмотрим на таблице (рис1)



Рис 1

каков алфавит цифр в позиционных системах счисления. Видно, что у десятичной системы счисления основание 10 цифр (от 0 до 9); у двоичной основание 2 цифры (0,1); у восьмеричной – 8 (от 0 до 7)и у шестнадцатеричной – 16 (от 0 до 15), при этом цифры от 10 до 15 принято обозначать буквами A,B,C,D,E,F соответственно.

В общем виде в q – ичной системе запись числа Аq, которое содержит n целых разрядов числа и m дробных разрядов числа производится следующим образом (развернутая форма числа):

Aq=an-1qn-1+...+a0q0+a-1q-1+a-mq-m

или в сокращенном виде:

A= an-1 an-2 a0a-1...a-m.

Примеры достаточно хорошо известны и изучались в школе:

357,0110=3\*102+5\*101+7\*100+0\*10-1+1\*10-2

1В16=1\*161+11\*160=1610+1110=3710

1011012=1\*25+0\*24+1\*23+1\*22+0\*21+1\*20=3210+010+810+410+

+010+110=4510

В информатике, как уже было сказано, очень часто используется двоичная, восьмеричная, шестнадцатеричная и десятичная системы счисления,

поэтому для дальнейшего понимания необходимо знать таблицу соответствий чисел в различных системах счисления (рис. 2).



Рис. 2

В таблице вы видите соответствующие значения цифр от 1 до 16. Можно заметить, что после того как исчерпывается основание системы счисления (в двоичной- 1 последняя цифра, в восьмеричной- 7, в шестнадцатеричной- 15(F)) следует цифра 10.

Рассмотрим правила перевода чисел из одной системы счисления в другую.

**Правило 1.** Перевод чисел в десятичную систему счисления:

для преобразования чисел, представленных в двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах в десятичную необходимо записать число в развернутой форме и вычислить его значение. Рассмотрим примеры:

257,318=2\*82+5\*81+7\*80+3\*8-1+1\*8-2=128+40+7+3/8+1/64=175,39062510

2С,816=2\*161+12\*160+8\*16-1=3210+1210+0,510=44,510

111011,012=1\*25+1\*24+1\*23+0\*22+1\*21+1\*20+0\*2-1+ +1\*2-2=32+16+8+2+1+1/4=59,2510

Безусловно, для того что бы переводить в системы счисления с основанием 2,8,16 необходимо знать степени соответствующих чисел:

20=1 80=1 160=1

21=2 81=8 161=16

22=4 82=64 162=256

23=8 83=512 163=4096

24=16 84=4096 164=65536

25=32 85=32768 165=1048576

26=64 86=262144

27=128

28=256

29=512

210=1024

**Правило 2**. Перевод десятичного числа в двоичное:

Для перевода десятичного числа в двоичную систему его необходимо последовательно делить на 2 до тех пор, пока не останется остаток, меньший или равный 1. Число в двоичной системе записывается как последовательность последнего результата деления и остатков деления в обратном порядке. Пример: пусть необходимо перевести в двоичную систему счисления число 25 из десятичной системы счисления. По правилу мы осуществляем последовательное деление числа 25 на 2. Итак, делим, мы видим первый результат 12 и 1 в остатке, 12 продолжаем делить на 2, получаем значение 6 и остаток 0; 6 делим на 2 получаем 3 и остаток 0; 3 делим на 2 получаем 1 и остаток 1. Последнее значение, которое мы получили это 1. По правилу мы останавливаем деление и записываем число в обратном порядке: 11001. Итак, 2510=110012.

**Правило 3**. Перевод десятичного числа в восьмеричное:

Для перевода десятичного числа в восьмеричную систему его необходимо последовательно делить на 8, до тех пор, пока не останется остаток, меньший или равный 7. Число в восьмеричной системе записывается как последовательность последнего результата деления и остатков от деления в обратном порядке. Пример: пусть необходимо перевести десятичное число 372 в восьмеричную систему счисления. Итак, делим 372 на 8, получаем 46 и 4 в остатке, делим 46 на 8,получаем 5 и 6 в остатке. Т.к. 5 меньше 7, то оканчиваем деление и записываем ответ – 564. Итак, 37210=5648.

**Правило 4**. Перевод десятичного числа в шестнадцатеричное:

Для перевода десятичного числа в шестнадцатеричную систему его необходимо последовательно делить на 16, до тех пор, пока не останется остаток, меньший или равный 15. Число в шестнадцатеричной системе записывается как последовательность последнего результата деления и остатков от деления в обратном порядке. Пример: пусть необходимо перевести десятичное число 879 в шестнадцатеричную систему счисления. Итак, делим 879 на 16, получаем 54 и в остатке 15 (F), делим 54 на 16, получаем 3 и в остатке 6. Т.к. 3 меньше 15, то прекращаем деление и записываем ответ- 36F. Итак, 87910=36F16.

**Правило 5**. Перевод десятичных дробей в двоичные:

1. Последовательно выполнять умножение исходной десятичной дроби и получаемых дробей на основание системы до тех пор, пока не получим нулевую дробную часть или не будет достигнута требуемая точность вычисления.
2. Получить искомую двоичную дробь, записав полученные целые части произведения в последовательности.

Пример: пусть необходимо перевести десятичную дробь 0,6875 в двоичную систему счисления. Итак, начинаем умножать 0,6875 на 2 и получаем 1,3750. Обращаем внимание на целую часть равную 1. Она понадобится нам в ответе, но в дальнейшем умножении она нам не понадобится – «отбрасываем» ее и продолжаем умножать на 2 получаем 0,750, далее 0,750 умножаем на 2 получаем 1,50, «отбрасываем» 1; за тем 0,50 умножаем на 2 получаем 1,0. В данном случае получилась не бесконечная дробь и мы можем зафиксировать результат- 1011. Итак, 0,687510=0,10112. Аналогичным образом дроби переводятся в любую другую систему счисления, только нужно умножать на соответствующее основание системы счисления.

**Правило 6** (правило триад). Перевод чисел из двоичной в восьмеричную и обратно:

1. Чтобы перевести число из двоичной в восьмеричную систему, его нужно разбить на триады (тройки цифр), начиная с младшего разряда, в случае необходимости дополнив старшую триаду нулями и каждую триаду заменить соответствующей восьмеричной цифрой.
2. Для перевода восьмеричного числа в двоичное необходимо каждую цифру заменить эквивалентной двоичной триадой.

Таблица перевода с помощью триад

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Двоичные триады | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |
| Восьмеричные триады | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

Примеры:1001012=001 001 0102=1128

2738=010 111 0112=101110112

**Правило 7** (правило тетрад). Перевод из двоичной в шестнадцатеричную систему и обратно:

1. Что бы перевести число из двоичной в шестнадцатеричную систему, его нужно разбить на тетрады (четверки цифр), начиная с младшего разряда, в случае необходимости дополнив старшую тетраду нулями и каждую тетраду заменить соответствующей шестнадцатеричной цифрой.
2. Для перевода шестнадцатеричного числа в двоичное необходимо каждую цифру заменить эквивалентной двоичной тетрадой.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Двоичные тетрады | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0100 | 0101 | 0110 | 0111 |
| Шестнадцатеричные тетрад | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Двоичные тетрады | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 |
| Шестнадцатеричные тетрад | 8 | 9 | A | B | C | D | E | F |

Пример:

10010102=0100 10102=4А16

2В316=0010 1011 00112=10101100112

**Правило 8**. Перевод чисел из восьмеричной в шестнадцатеричную и обратно:

при переходе из восьмеричной в шестнадцатеричную системы и обратно, необходим промежуточный перевод чисел в двоичную систему счисления.

Пример. Число FEA16 перевести в восьмеричную систему счисления.

FEA16=1111 1110 10102=111 111 101 0102=77528

Число 66358 перевести в шестнадцатеричную систему счисления.

66358=110 110 011 1012=1101 1001 11012=D9D16

Безусловно, при выполнении определенных действий очень важно знать основные правила, которые используются в той или иной системе счисления для сложения, умножении, вычитания и деления чисел. Эти правила объединяются в общем разделе, который носит название –двоичная арифметика.

Рассмотрим основные задачи, встречающиеся в двоичной арифметике. Здесь необходимо учитывать и использовать следующие правила:

* Переполнение разряда наступает тогда, когда значение числа в нем становится равным или большим основания. Мы привыкли складывать числа в десятичной системе счисления, если мы складываем 9 и 8, то получаем 17. Это число говорит о том, что произошло переполнение и десятки пошли в старшие разряды. Точно так же это переполнение будет и в других системах счисления, только надо помнить про основание (в данном случае– 10).
* Сложение многоразрядных чисел происходит с учетом возможных переносов из младших разрядов в старшие. По аналогии с десятичной системой счисления-при сложении в столбик, если существует перенос, то он переносится на старшие разряды до тех пор пока не закончится сложение. То же самое и во всех других системах счисления.
* Вычитание многоразрядных чисел происходит с учетом возможных заемов в старших разрядах. Допустим, вычтем в десятичной системе 9 из 10 в столбик. Т.к. первое число – «ноль», из него мы вычесть «9» не можем и занимаем из старшего разряда «1». Получается «1», а десятки ушли, т.к. сделан заем. Аналогично и в других системах счисления.
* Умножение многоразрядных чисел происходит с последовательным умножением множимого на очередную цифру множителя.
* Перенос в следующий разряд при сложении и заем из старшего разряда при вычитании определяется величиной основания системы счисления.
* Для проведения арифметических операций над числами, представленными в различных системах счисления, необходимо предварительно перевести их в одну систему.

**Сложение в двоичной системе счисления.**

В основе сложения двоичной системы счисления лежит таблица сложения одноразрядных двоичных чисел.

0+0=00

0+1=01

1+0=01

1+1=10

Пример.

Сложим числа 1102 и 112 . Начинаем складывать с правых-младших разрядов, складываем 0 и 1 получаем 01, далее 1+1 по правилу это 10, т.е. мы записываем 0, а 1 пойдет на сумму в старший разряд, далее опять будет 1+1=10. Итак, 1102+ 112=10012.

**Вычитание в двоичной системе счисления.**

В основе лежит таблица вычитания однозначных двоичных чисел. При вычитании из меньшего числа (0) большего (1) производится заем из старшего разряда (в таблице заем обозначен как ):

0-0=0

0-1=1

1-0=01

1-1=0

Пример.

Вычтем числа 1102 и 112. Начинаем вычитать по разрядам: 0-1, очевидно, необходимо делать заем, получилось 1, берем вторые разряды – 1-1, т.к. мы брали из этого разряда заем, то получаем 0-1 и опять берем заем у высшего разряда, получаем 1, далее 1-0, но мы брали заем, поэтому 0-0=0. Итак, 1102 - 112=112.

**Умножение и деление в двоичной системе.**

В основе умножения и деления лежит таблица умножения однозначных чисел.

0\*0=0

0\*1=0

1\*0=0

1\*1=1

Пример.

Умножим числа 1102 и 112. Осуществляем поразрядное умножение: 1\*0=0,

1\*1=1 и 1\*1=1, вторые разряды: 1\*0=0, 1\*1=1 и 1\*1=1, складываем и получаем 100102. Итак, 1102 \* 112 = 100102

Пример.

Разделим110001,12 на 10012. Используются те же правила, что и при делении в десятичной системе счисления. Итак, берем 1 и получается, 110001,1 – 1001=1101. Запись вычитаемого числа под вычитаемым производится со старшего разряда. Далее мы начинаем переписывать разряды сверху (0 и 1), перед этим мы указали, что при делении 110 на наше число у нас нет целых чисел, т.е. это будет 0. Далее можно подставить 1, указываем значение, вычитаем из исходной суммы, получаем новое число, указываем, что пошла дробная часть и остаток получился=0, значит деление осуществлено. Итак, 110001,12 / 10012 = 101,12.

Представление числовой информации в компьютере.

В вычислительных машинах применяют две формы представления двоичных чисел:

1. **Естественная форма** или **форма с фиксированной запятой** (точкой)

2. **Нормальная форма** или **форма с плавающей запятой** (экспоненциальная форма).

Примеры чисел с фиксированной точкой:

0.0034; 3.14; 156.87. Число представляется в обычном виде, где вместо запятой используется точка. Каким образом эти числа хранятся в ячейках памяти ЭВМ? Обычно для представления ячеек памяти используется количество бит кратное 8, например, 16-тиразрядные числа, 32хразрядные, 64хразрядные и т.д. Для упрощения рассмотрим, как может быть представлено число с фиксированной точкой 16-тиразрядного числа. Первый левый разряд считается знаковым и если в этом разряде стоит 0, то это число положительное, если 1 то отрицательное. Далее выделяется определенное количество бит для целой и дробной частей. Обычно, это примерно одинаковое количество бит, зависящее от операционной системы, от платформ ЭВМ. В нашем примере для 15-тиразрядного числа выделяется 7 битов (7 разрядов) для хранения целой части числа и 8 битов для дробной части числа. Частным случаем числа с фиксированной точкой является целое число. Для записи такого числа используются все разряды, кроме знакового.

Числа с плавающей запятой.

Число А в любой системе счисления в экспоненциальной форме записывается следующим образом:

А=m\*qp

m – мантисса числа

q – основание системы счисления

p –порядок числа

В языках программирования обычно используют десятичную систему счисления, т.е. q =10. При этом вместо цифры 10 принято писать символ Е. Тогда число в экспоненциальной форме будет выглядеть так:

А=mЕр

где m-мантисса числа

p- порядок числа

От общего вида придем к конкретным примерам представления чисел с плавающей запятой:

01Е+3

314Е-2

156,87Е-1

Рассмотрим подробнее вторую цифру – это число Пи=3,14. Е-это степень числа 10, 10-2 –это 0,01. Умножив 314 на 0,01, получим 3,14.

В числах с плавающей точкой арифметические операции производятся отдельно над мантиссой и порядком, например, при умножении таких чисел их мантиссы перемножаются, а порядки складываются.

Такие числа позволяют хранить большие значения, если мы имеем степень, то мы можем увеличивать ее до определенных размеров, сколько нам позволяет разрядность ЭВМ и диапазон значений будет значительно выше, чем при хранении чисел с фиксированной точкой.

**Хранение чисел с плавающей точкой.**

Для представления чисел в машинном слове выделяют группы разрядов для изображения мантиссы, порядка, знака числа и знака порядка.

а) способ представления чисел в формате полуслова (16 двоичных разрядов). Первые два разряда 0 и 1 это знак мантиссы и знак порядка. Далее идет порядок (4 разряда- 2,3,4,5). Мантисса (10 разрядов-с 6 по 15).

б) наиболее часто числа с плавающей точкой представляются в формате слова (32 разряда).

Видно, что увеличивается количество бит для представления порядка (7 разрядов) и для мантиссы (23 разряда). Мы можем хранить числа большего диапазона и большей точности.

**Коды представления чисел**. Как правило, в ЭВМ числа не хранятся в прямом виде, а хранятся в определенных кодах. Рассмотрим эти коды более подробно.

***Прямой код***.

Прямой код двоичного числа совпадает по изображению с записью самого числа. Значение знакового разряда для положительных чисел равно «0», а для отрицательных – «1».

Пример.

В случае, когда для записи кода выделен 1 байт (8бит),

для числа +1011 прямой код совпадает с двоичным значением этого числа

0 0001011.

для числа -1011 прямой код 1 0001011.

В прямом коде числа хранят редко, дело в том что в прямом коде операции сложения и вычитания, умножения и деления в ЭВМ выглядят более сложными.

***Обратный код.***

Обратный код для положительного числа совпадает с прямым кодом. Для отрицательного числа все цифры числа заменяются на противоположные (1 на 0, 0 на 1), а в знаковый разряд заносится единица.

Пример.

Для числа +1011 прямой код 0 0001011; обратный 0 0001011

Для числа -1011 прямой код 1 0001011; обратный 1 1110100.

***Дополнительный код.***

Дополнительный код положительного числа совпадает с прямым кодом. Для отрицательного числа дополнительный код образуется путем получения обратного кода и добавлением к младшему разряду единицы.

Пример.

для числа +1011

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Прямой код | Обратный код | Дополнительный код |
| 0 0001011 | 0 0001011 | 0 0001011 |

Пример.

для числа -1011

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Прямой код | Обратный код | Дополнительный код |
| 1 0001011 | 1 1110100 | 1 1110101 |

Особенности сложении чисел в обратном и дополнительном коде.

1. При сложении чисел в дополнительном коде возникающая единица переноса в знаковом разряде отбрасывается.
2. При сложении чисел в обратном коде возникающая единица переноса в знаковом разряде прибавляется к младшему разряду суммы кодов.
3. Если результат арифметических действий является кодом отрицательного числа, необходимо преобразовать его в прямой код. При этом обратный код преобразуется в прямой заменой цифр во всех разрядах, кроме знакового на противоположные.
4. Дополнительный код преобразуется в прямой так же, как и обратный, с последующим прибавлением единицы к младшему разряду.

Пример.

Сложить двоичные числа Х=110 и У-11 в обратном и дополнительном кодах.

Сложим числа, пользуясь правилами двоичной арифметики. Фактически получается 1102-112=112

Пример.

Сложим числа, используя обратный код.

|  |  |
| --- | --- |
| Прямой код | Сложение в обратном коде |
| Хпр=0 0000110  Упр=1 0000011 | 10 0000010  +1 |

Пример.

Сложим числа в дополнительном коде.

|  |  |
| --- | --- |
| Прямой код | Сложение в обратном коде |
| Хпр=0 0000110  Упр=1 0000011 | 10 0000011  отбрасывается |

Так как результат сложения является кодом положительного числа (знак 0), то (Х+У) обр=(Х+У) доп=(Х+У)пр.

Модифицированные обратный и дополнительные коды.

В модифицированном обратном и модифицированном дополнительном кодах под знак числа отводится не один, а два разряда: «00» соответствует знаку «+», «11»-знаку «-». Любая другая комбинация (01 или 10), получившаяся в знаковых разрядах служит признаком переполнения знаковой сетки. Сложение чисел в модифицированных кодах ничем не отличается от сложения в обычных, обратных и дополнительных кодах.

Пример.

Даны два числа: Х=101001 и У= - 11010. Сложить их в модифицированном дополнительном коде.

1. Переведем в модифицированный дополнительный код.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Обычная запись | Модифицированный обратный код | Модифицированный дополнительный код |
| Х=101001  У= - 11010 | Хобрм= 00,101001  Уобрм= 11,100101 | Хдопм= 00,101001  Удопм= 11,100110 |

*Запятой отделили знаковые разряды для удобства представления*.

1. Выполним операцию сложение:

Хдопм=00,101001

Удопм=11,100110

Осуществляем поразрядное сложение с помощью правил двоичной арифметики. При сложении в старший разряд пошел перенос единички и по правилам сложения этот перенос отбрасывается, т.о. получилось положительное число. Переполнения в знаковых разрядах нет, полученный результат верный Х+У=1111.