АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Теоретические сведения. Точность работы любой системы управления наиболее полно характеризуется мгновенным значением ошибки слежения, равной разности между требуемым и действительным значениями регулируемой переменной $e(t) = g(t) - y(t)$. Однако в большинстве задач управления реальными объектами задающие и возмущающие воздействия заранее точно неизвестны и, следовательно, определить *заранее* величину $e(t)$ для всех моментов времени не представляется возможным. Поэтому точностные свойства системы, как правило, оцениваются при типовых входных воздействиях — постоянном, линейно или квадратично нарастающем. Для характеристики точностных свойств системы управления используется понятие *установившейся ошибки слежения,* а также *предельного значения установившейся ошибки слежения.* Установившаяся ошибка $e_y(t)$ представляет собой функцию времени, удовлетворяющую условию

$$\lim_{t\to\infty}(e(t) - e_y(t)) = 0 \qquad (7.1)$$

для любых начальных условий $e(0)$ и заданного входного воздействия $g(t)$. Другими словами, она характеризует ошибку слежения, установившуюся после завершения переходного процесса. Предельное значение установившейся ошибки ε определяется выражением

$$\varepsilon = \lim_{t\to\infty} e(t) \qquad (7.2)$$

(при условии, что предел (7.2) существует).

Величина предельного значения установившейся ошибки при типовом задающем воздействии может быть достаточно просто рассчитана по передаточной функции системы. Пусть образы Лапласа ошибки слежения $E(s) = L\{e(t)\}$ и сигнала задания $G(s) = L\{g(t)\}$ связаны соотношением

$$E(s) = \Phi_e(s) G(s), \qquad (7.3)$$

где $\Phi_e(s)$ — известная *передаточная функция замкнутой системы по ошибке слежения* (относительно задающего воздействия). Например, для систем с единичной отрицательной обратной связью (см. рисунок 7.1) имеем

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1 + W(s)},$$

где $W(s)$ — *передаточная функция разомкнутой системы*, включающая в себя передаточные функции регулятора и объекта управления. Тогда, в соответствии с теоремой о предельном переходе во временной области, имеем

$$\varepsilon = \lim\nolimits_{s\to o} s\Phi(s)G(s).$$

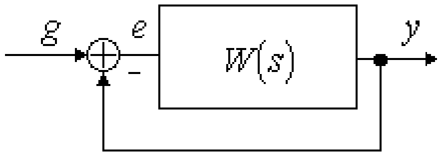

Рисунок 7.1 – Система с единичной отрицательной обратной связью

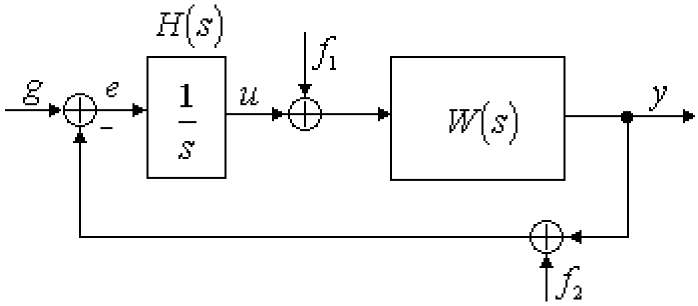

Рисунок 7.2 – Возмущённая система управления (f_1— возмущение по управлению, f_2— ошибка измерительного устройства).

Образы Лапласа типовых задающих воздействий приведены в таблице 7.1.

Для приближенной оценки установившейся ошибки слежения $e_y(t)$ при произвольном (но достаточно гладком) входном воздействии $g(t)$ можно воспользоваться следующей методикой. Разложим $\Phi_e(s)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $s = 0$

$$\Phi_e(s) = c_0 + c_1 s + \frac{c_2}{2!} s^2 + \frac{c_3}{3!} s^3 + \ldots, \tag{7.4}$$

где $c_i = \left[\dfrac{d^i}{ds^i} \Phi_e(s) \right]_{s=0}$, $i = 0,1,2,\ldots$. Тогда, подставляя (7.4) в (7.3) и переходя во временную область, получаем выражение установившейся ошибки при произвольном входном воздействии

$$e_\text{у}(t) = c_0 g(t) + c_1 \frac{d}{dt} g(t) + \frac{c_2}{2!} \frac{d^2}{dt^2} g(t) + \frac{c_3}{3!} \frac{d^3}{dt^3} g(t) + \ldots, \tag{7.5}$$

где постоянные c_i носят название *коэффициентов ошибок.* Если $g(t)$ изменяется достаточно медленно, то для приближенной оценки $e_\text{у}(t)$ можно использовать конечное число членов ряда (7.5).

Таблица 7.1

Образы Лапласа типовых задающих воздействий

Типовое воздействие	Постоянное $g(t) = A$	Линейно возрастающее $g(t) = Vt$	Квадратично возрастающее $g(t) = \dfrac{at^2}{2}$
Образ Лапласа $G(s)$	$\dfrac{A}{s}$	$\dfrac{V}{s^2}$	$\dfrac{a}{s^3}$

Замечание. Так как $\Phi_e(s)$ является дробно-рациональной функцией, то коэффициенты ошибок можно получить делением числителя $\Phi_e(s)$ на знаменатель и сравнением получающегося ряда с выражением (7.4).

В качестве универсальной характеристики точностных свойств систем управления используется понятие *порядка астатизма* (по отношению к входному воздействию). Система называется *системой* с *нулевым порядком астатизма*, если в выражении (7.5) $c_0 \neq 0$. Говорят, что система имеет *k-й порядок астатизма*, если в выражении (7.5) $c_i = 0$ для всех $0 \leq i < k$ и $c_k \neq 0$.

Для систем с единичной отрицательной обратной связью (см. рисунок 7.1) порядок астатизма может быть достаточно просто определен на основе анализа структурных свойств системы. Так, система на рисунке 7.1 обладает *нулевым порядком астатизма*

$$\lim_{s\to 0} W(s) = k < \infty,$$

где k — *общий коэффициент усиления разомкнутой системы.* Для системы с *нулевым порядком астатизма* при постоянном входном воздействии $g(t) = A$ имеем

$$\varepsilon = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+W(s)} \frac{A}{s} = \frac{A}{1+k}.$$

Последнее выражение означает, что постоянное входное воздействие отрабатывается с ненулевой установившейся ошибкой (с так называемой, *статической ошибкой*). При линейно нарастающем входном воздействии $g(t) = Vt$ имеем

$$\varepsilon = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+W(s)} \frac{V}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+k} \frac{V}{s} = \infty,$$

откуда следует, что линейно возрастающее задающее воздействие отрабатывается статической системой с неограниченно растущей ошибкой.

Система на рисунке 7.1 является *астатической*, если

$$\lim_{s\to 0} W(s) = \infty$$

и передаточная функция разомкнутой системы $W(s)$ может быть представлена в виде

$$W(s) = \frac{1}{s^r} W^*(s),$$

где $W^*(s)$ — передаточная функция статической системы (т.е. $\lim_{s\to 0} W^*(s) = k < \infty$). При этом число r соответствует порядку астатизма.

Для системы с первым порядком астатизма при постоянном входном воздействии $g(t) = A$ имеем

Таблица 7.2

Соответствие порядка астатизма предельному значению установившейся ошибки слежения

Порядок астатизма	Предельное значение установившейся ошибки ε при различных видах задающего воздействия		
	Постоянное $g(t)=A$	Линейно возрастающее $g(t)=Vt$	Квадратично возрастающее $g(t)=\frac{at^2}{2}$
0	$\frac{A}{1+k}$	∞	∞
1	0	$\frac{V}{k}$	∞
2	0	0	$\frac{a}{k}$

$$\varepsilon=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+W(s)}\frac{A}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+\frac{W^*(s)}{s}}A=\lim_{s\to 0}\frac{s}{s+k}A=0,$$

а при линейно нарастающем воздействии $g(t)=Vt$

$$\varepsilon=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+W(s)}\frac{V}{s^2}=\lim_{s\to 0}\frac{s}{s+k}\frac{V}{s}=\frac{V}{k}.$$

Таблица 7.2 демонстрирует соответствие между порядком астатизма и предельным значением установившейся ошибки слежения.

Аналогичным образом может быть введено понятие *порядка астатизма по возмущающему воздействию*. Особо отметим, что порядок астатизма по задающему воздействию, в общем случае, не соответствует порядку астатизма по возмущению. В качестве примера рассмотрим задачу стабилизации ($g(t)\equiv 0$) системы, представленной на рисунке 7.2, где $H(s)=1/s$ — передаточная функция регулятора, $W(s)$ — передаточная функция объекта управления ($\lim_{s\to 0}W(s)=k$), $f_1(t)$ — возмущение по управлению, $f_2(t)$ — ошибка измерительного устройства, рассматриваемая в качестве возмущения по выходу. Очевидно, что замкнутая система по задающему воздействию обладает порядком астатизма, равным единице.

На основе анализа структурной схемы системы можно записать

$$e=g-y=-y=-W(s)\left(f_1-\frac{1}{s}\left(f_2+y\right)\right)=-W(s)\left(f_1-\frac{1}{s}\left(f_2-e\right)\right)$$

или

$$(1+\frac{1}{s}W(s))e=-W(s)f_1+\frac{1}{s}W(s)f_2.$$

После элементарных преобразований окончательно получаем

$$e = -\frac{W(s)}{1+\frac{1}{s}W(s)} f_1 + \frac{\frac{1}{s}W(s)}{1+\frac{1}{s}W(s)} f_2 = -\frac{sW(s)}{s+W(s)} f_1 + \frac{W(s)}{s+W(s)} f_2 .$$

Пусть возмущения $f_1(t) = F_1$ и $f_2(t) = F_2$ являются постоянными. Тогда

$$\varepsilon = \lim_{s\to 0}\left[-s\frac{sW(s)}{s+W(s)}\frac{F_1}{s} + s\frac{W(s)}{s+W(s)}\frac{F_2}{s}\right] = F_2 .$$

Таким образом, возмущение f_2 дает статическую ошибку (величина которой не зависит от параметров системы управления), а влияние возмущения f_1 полностью компенсировано. В общем случае, факт наличия или отсутствия установившейся ошибки должен быть определен для каждого действующего на систему возмущения на основе анализа соответствующих передаточных функций от возмущения к ошибке, вне зависимости от порядка астатизма системы по задающему воздействию.

Порядок выполнения упражнения.

1. *Исследование системы с астатизмом нулевого порядка.* Структура системы представлена на рисунке 7.3, где передаточная функция регулятора $H(s) = k$.

1.1. Исследование режима стабилизации: $g(t) = A$. Получить переходные процессы для трех различных значений коэффициента k и определить предельное значение установившейся ошибки ε . Значения коэффициента k (здесь и во всех последующих пунктах): 1, 5, 10.

1.2. Исследование режима движения с постоянной скоростью: $g(t) = Vt$. Получить переходные процессы для различных значений коэффициента k . Интервал наблюдения — 30 секунд.

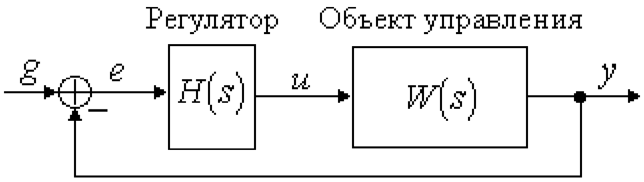

Рисунок 7.3 – Структурная схема моделируемой системы

2. *Исследование системы с астатизмом первого порядка.* Структура системы представлена на рисунке 7.3, где $H(s) = k / s$.

2.1. Исследование режима стабилизации: $g(t) = A$. Получить переходные процессы для различных значений коэффициента k и определить предельное значение установившейся ошибки ε .

2.2. Исследование режима движения с постоянной скоростью: $g(t) = Vt$. Получить переходные процессы для различных значений коэффициента k и определить предельное значение установившейся ошибки ε . Интервал наблюдения — 30 секунд.

2.3. Исследование режима движения с постоянным ускорением: $g(t) = at^2 / 2$. Получить переходные процессы для различных значений коэффициента k . Интервал наблюдения — 30 секунд.