АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ НУЛЕЙ И ПОЛЮСОВ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

Теоретические сведения. Рассмотрим динамическую систему, которая описывается дифференциальным уравнением *n*-го порядка

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{y} + a_0 y = bg, \tag{8.1}$$

где y - выходная переменная , g - входная переменная, $a_0, \ldots, a_{n-1}, b$ - постоянные параметры. Здесь $y^{(k)}$ - *k*-ая производная функции $y(t)$ по времени t. Корни s_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ характеристического полинома системы (*полюса системы*)

$$a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0, \tag{8.2}$$

где s - комплексная переменная, определяют характер переходной функции $h(t)$ системы с установившимся значением $h_\infty(t) = k = b / a_n$, а следовательно, и такие динамические показатели, как время переходного процесса t_Π и перерегулирование σ.

Используя понятие *среднегеометрического корня*

$$\omega = \sqrt[n]{|s_1 s_2 \ldots s_n|} = \sqrt[n]{a_0}$$

характеристический полином (8.2) можно представить в виде

$$a(s) = s^n + \alpha_{n-1}\omega s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \omega^{n-1} s + \omega^n, \tag{8.3}$$

в котором коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ определяются выражением

$$\alpha_i = \frac{a_i}{\omega^{n-i}}.$$

Среднегеометрический корень ω может служить мерой быстроты протекания переходных процессов. Если в уравнении (8.3) увеличить ω, например, в 10 раз, то переходный процесс, оставаясь подобным самому себе, будет протекать в 10 раз быстрее. В связи с этим можно рассматривать полином (8.3) при $\omega = 1$ как некоторый *нормированный характеристический полином*, которому соответствует *нормированная переходная функция* $h^*(t)$ и *нормированное время переходного процесса* t_Π^*. Если качество переходного процесса с точки зрения перерегулирования является приемлемым, то требуемое время переходного процесса t_Π может быть обеспечено соответствующим выбором величины ω.

Для обеспечения требуемого значения перерегулирования необходимо задаться определенным распределением корней характеристического полинома, например, распределением Баттерворта или биномиальным распределением Ньютона.

Распределением Баттерворта называется такое размещение на комплексной плоскости 2*n* комплексных чисел s_i, при котором они располагаются в вершинах правильного 2*n*-угольника (см. рисунок 8.1). При этом все числа имеют знакоопределенную вещественную часть ($\operatorname{Re} s_i \neq 0$) и равные модули $\omega = |s_i|$. Значения таких комплексных чисел для заданного *n* однозначно определяется значением ω и находятся из выражения

$$s_i = \omega e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2i-1}{2n}\pi\right)},\ i = 1,2,\ldots,2n,$$

причём *n* чисел $s_1,\ldots,s_n$ имеют строго отрицательную вещественную часть, т.е. лежат в левой полуплоскости.

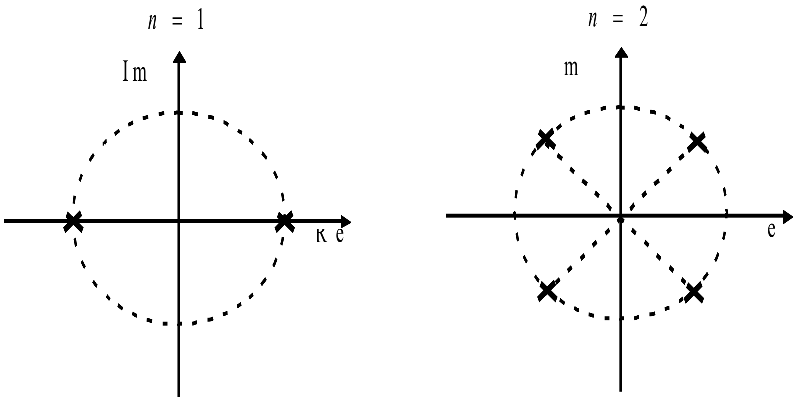

Рисунок 8.1. Распределение Баттерворта для различных значений порядка *n*

Полиномом Баттерворта называется алгебраический полином *n*-го порядка $a(s)$, *n* корней которого совпадают с *n* комплексными числами, подчиняющимися распределению Баттерворта и имеют отрицательную вещественную часть. Полином определяется формулой

$$a(s) = \prod_{i=1}^{n}\left(s - \omega e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2i-1}{2n}\pi\right)}\right) = s^n + \alpha_{n-1}\omega s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \omega^{n-1} s + \omega^n, \tag{8.4}$$

где $\alpha_i > 0$, а его коэффициенты находятся по формуле: $a_i = \alpha_i \omega^{n-i}$. Полиномы 1-6 -го порядка приведены в таблице 8.1.

При *биномиальном распределении Ньютона n* комплексных чисел s_i принимаются равными и вещественными, т.е. $s_i = -\omega$. *Биномиальный полином Ньютона n*-го порядка задается в общем виде выражением

$$\alpha(s) = (s+\omega)^n = s^n + \alpha_{n-1}\omega s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \omega^{n-1} s + \omega^n, \tag{8.5}$$

где α_i-биномиальные коэффициенты. Полиномы 1-6-го порядков приведены в таблице 8.2.

Таблица 8.1 – Полиномы Баттерворта для различного порядка системы n

n	полином Баттерворта
1	$s+\omega$
2	$s^2+1.414\omega s+\omega^2$
3	$s^3+2\omega s^2+2\omega^2 s+\omega^3$
4	$s^4+2.613\omega s^3+3.414\omega^2 s^2+2.613\omega^3 s+\omega^4$
5	$s^5+3.236\omega s^4+5.236\omega^2 s^3+5.236\omega^3 s^2+3.236\omega^4 s+\omega^5$
6	$s^6+3.86\omega s^5+7.46\omega^2 s^4+9.13\omega^3 s^3+7.46\omega^4 s^2+3.86\omega^5 s+\omega^6$

Таблица 8.2 – Биномиальные полиномы для различного порядка системы n

n	Биномиальный полином
1	$s+\omega$
2	$s^2+2\omega s+\omega^2$
3	$s^3+3\omega s^2+3\omega^2 s+\omega^3$
4	$s^4+4\omega s^3+6\omega^2 s^2+4\omega^3 s+\omega^4$
5	$s^5+5\omega s^4+10\omega^2 s^3+10\omega^3 s^2+5\omega^4 s+\omega^5$
6	$s^6+6\omega s^5+15\omega^2 s^4+20\omega^3 s^3+15\omega^4 s^2+6\omega^5 s+\omega^6$

Переходные характеристики системы (8.1) порядка $n=1,\ldots,6$ с характеристическим полиномом вида (8.4), построенные в нормированном виде ($\omega=1,\quad b=1$), приведены на рисунке 8.2, а с характеристическим полиномом (8.5) на рисунке 8.3. Динамические системы с рассмотренными характеристическими полиномами асимптотически устойчивы, что обусловлено выбором корней характеристического полинома и обладают высокими динамическими показателями. Перерегулирование для системы (8.1) с полиномом Баттерворта ограничено:

$$\sigma \le 15\%\,,$$

а с биномиальным распределением обеспечивается получение монотонного переходного процесса ($\sigma=0$).

Метод стандартных переходных функций используется для определения коэффициентов системы (8.1) по заданным показателям $\sigma, t_{\text{п}}, k$. При этом требование монотонности переходного процесса однозначно определяет выбор в качестве характеристического полинома биномиального полинома (8.5), а допущение перерегулирования не большего 15% - выбор полинома Баттерворта (8.4). Кроме того, при распределении корней характеристического полинома по Баттерворту, в сравнении с биномиальным распределением, требуемое время переходного процесса можно обеспечить при меньших по абсолютной величине значениях коэффициентов характеристического полинома.

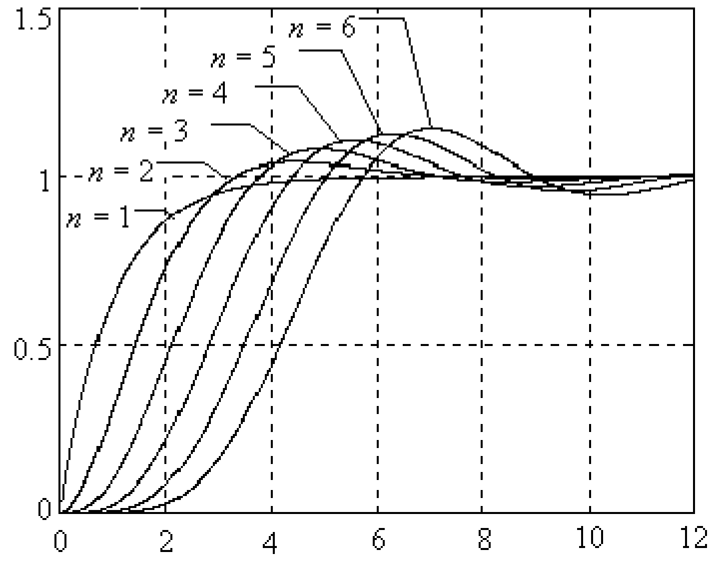

Рисунок 8.2 Нормированные переходные характеристики системы с характеристическим полиномом Баттерворта

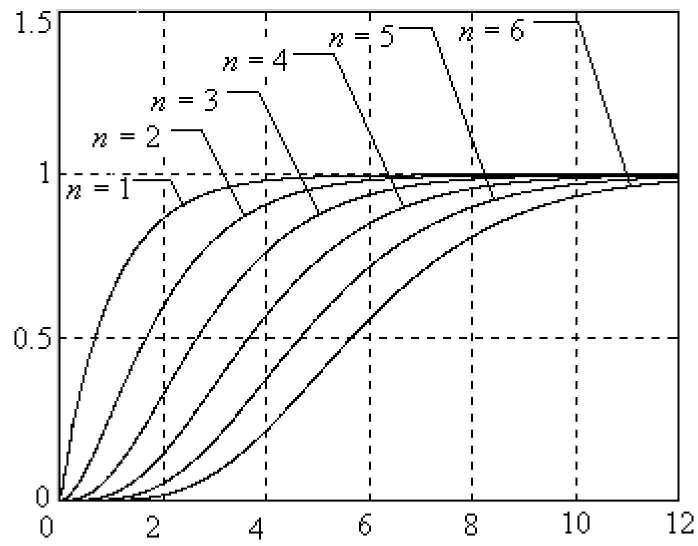

Рисунок 8.3 Нормированные переходные характеристики системы с биноминальным характеристическим полиномом

Коэффициенты системы a_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ находятся по заданному значению времени переходного процесса $t_П$ следующим образом:

a) по нормированным переходным функциям (рисунки 8.2, 8.3) определяется значение $t_П^*$;
b) среднегеометрический корень ω определяется по значениям $t_П$ и $t_П^*$, для чего используется формула $\omega = t_П^* / t_П$;
c) коэффициенты a_i искомого полинома определяются выражением $a_i = \alpha_i \omega^{n-i}$, где значения α_i находятся по таблице 8.1 или 8.2, в зависимости от выбранного типа распределения корней характеристического уравнения.

Коэффициент b определяется по заданной величине статического коэффициента k выражением $b = ka_0$.

В некоторых случаях, возникает задача оценки быстродействия системы без построения ее переходной характеристики. Для этого может использоваться понятие степени устойчивости. Под *степенью устойчивости* η понимается абсолютное значение вещественной части ближайшего к мнимой оси корня. Предполагая, что переходный процесс можно считать закончившимся тогда, когда затухнет составляющая, определяемая ближайшим к мнимой оси корнем, получим приближенную зависимость между степенью устойчивости и временем переходного процесса

$$t_{\Pi} \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0.05} \tag{8.6}$$

Формула (8.6) имеет приемлемую точность, когда абсолютное значение вещественной части ближайшего к мнимой оси корня не менее чем на порядок меньше абсолютных значений вещественных частей остальных корней.

В отличии от рассмотренной выше системы вида (8.1) характер переходного процесса в системе вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_m g^{(m)} + \ldots + b_0 g \tag{8.7}$$

определяется не только корнями характеристического полинома, т.е. полюсами системы, но и корнями полинома

$$b(s) = b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0,$$

которые называются *нулями системы*. При заданном полиноме $a(s)$ выбором коэффициентов полинома $b(s)$ можно, к примеру, уменьшить время переходного процесса, или обеспечить инвариантность системы к некоторым типам входных сигналов.