КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Цель упражнения ознакомление с методами взаимного перехода между моделями вход-выход и вход-состояние-выход, а также с каноническими формами представления моделей вход-состояние-выход.

Теоретические сведения. Математическая модель одной и той же линейной динамической системы может быть представлена в различных формах: в форме скалярного дифференциального уравнения n-го порядка (модель вход-выход) или в форме системы из n дифференциальных уравнений 1-го порядка (модель вход-состояние-выход). Следовательно, между различными формами представления математических моделей существует определенная взаимосвязь, т.е. модель вход-состояние-выход может быть преобразована к модели вход-выход и наоборот. При этом модели будут эквивалентными в том смысле, что они определяют одно и то же преобразование входного сигнала u в выходной y.

Модель вход-выход динамической системы описывается уравнением (подробнее — см. упражнение 1)

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \ldots + b_1 u^{(1)} + b_0 u \ , \qquad (2.1)$$

где y и u — выходная и входная переменные, соответственно. При $m < n$, модель вход-состояние-выход имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Причем координаты вектора состояния x и коэффициенты матриц A, B и C зависят от выбора базиса в пространстве состояний. Преобразование вектора состояния, связанное с заменой базиса, задается выражениями

$$x = M\hat{x}, \qquad \hat{x} = M^{-1}x, \qquad (2.3)$$

где $\hat{x}$ —вектор состояния в "новом" базисе, M — неособая $n \times n$ матрица *преобразования координат*. Преобразование (2.3) обеспечивает переход от модели (2.2) к подобной модели

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u, \\ y = \hat{C}\hat{x}. \end{cases} \qquad (2.4)$$

Матрицы подобных моделей связаны соотношениями:

$$\hat{A} = M^{-1}AM, \qquad \hat{B} = M^{-1}B, \qquad \hat{C} = CM\,.$$

Если известно, что модели (2.2) и (2.4) являются различными формами описания одной и тойже динамической системы, то матрица преобразования координат M может быть найдена из выражения

$$M = N_y \hat{N}_y^{-1},$$

где $N_y = [b \vdots Ab \vdots \ldots \vdots A^{n-1}b]$ — *матрица управляемости* модели (2.2), $\hat{N}_y = [\hat{b} \vdots \hat{A}\hat{b} \vdots \ldots \vdots \hat{A}^{n-1}\hat{b}]$—матрица управляемости модели (2.4).

Переход от модели вход-состояние-выход (2.2) к модели вход-выход (2.1) является однозначным и определяется соотношением

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B,$$

где $W(s)$ — передаточная функция системы. Очевидно, что по известной передаточной функции может быть легко записано дифференциальное уравнение (2.1).

Переход от модели вход-выход (2.1) к модели вход-состояние-выход (2.2) является неоднозначным, что связано с возможностью достаточно произвольного назначения вектора состояния. На практике наиболее часто используются следующие две, так называемые, канонические формы представления моделей вход-состояние-выход: *каноническая наблюдаемая форма* и *каноническая управляемая форма*. Удобство канонических форм состоит в возможности непосредственного определения параметров матриц A, B и C на основе коэффициентов a_i и b_j дифференциального уравнения (2.1) без каких-либо дополнительных вычислений. Кроме того, использование канонических форм позволяет упростить решение целого ряда прикладных задач анализа и синтеза систем управления.

Переход от модели вход-выход к модели вход-состояние-выход удобнее всего совершать через схему моделирования. При этом в качестве переменных состояния выбираются выходы интеграторов, а уравнения состояния записываются в соответствии со структурой схемы моделирования.

Метод построения схемы моделирования в канонической наблюдаемой форме соответствует методу, рассмотренному в упражнении 1. При этом, в случае дифференциального уравнения n-го порядка, схема моделирования принимает вид, приведенный на рис.2.1. Нумеруя координаты вектора состояния в указанной на рисунке последовательности, легко получить следующие выражения для матриц системы вход-состояние-выход

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & & 0 & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}, \qquad C^T = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

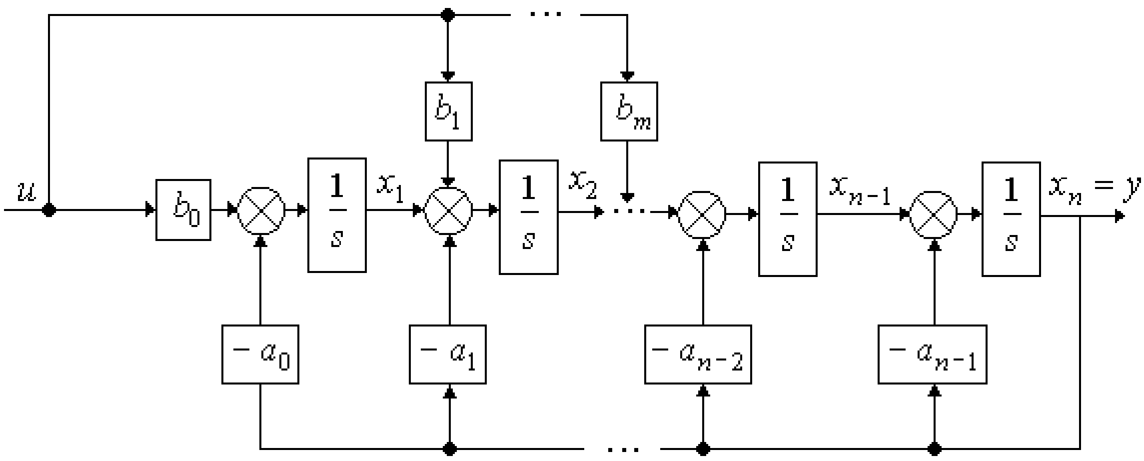

Рис.2.1. Схема моделирования в канонической наблюдаемой форме

При этом требуемые начальные условия координат вектора состояния $x(0)$ могут быть определены из системы алгебраических уравнений

$$y^{(i)}(0) = CA^{(i)}x(0), \qquad i = 0,1,2,\ldots,n-1\,. \tag{2.5}$$

В системе (2.5) слагаемые с начальными значениями входного сигнала и его производных отсутствуют, так как для начальных условий слева имеем $u(-0) = u^{(1)}(-0) = \ldots = 0$ (см. упражнение 1).

Для построения схемы моделирования в канонической управляемой форме, введем вспомогательную переменную $z(t)$, являющуюся решением дифференциального уравнения

$$z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \ldots + a_1 z^{(1)} + a_0 z = u\,.$$

Следовательно

$$z^{(n)} = -a_{n-1}z^{(n-1)} - \ldots - a_1 z^{(1)} - a_0 z + u\,. \tag{2.6}$$

Уравнение (2.6) позволяет определить структуру обратных связей схемы моделирования (см. рис.2.2). Для формирования прямых связей заметим, что в силу свойств линейных систем

$$y = b_m z^{(m)} + b_{m-1}z^{(m-1)} + \ldots + b_1 z^{(1)} + b_0 z\,.$$

Нумеруя координаты вектора состояния в указанной на рисунке последовательности, можно получить следующие выражения для матриц системы вход-состояние-выход

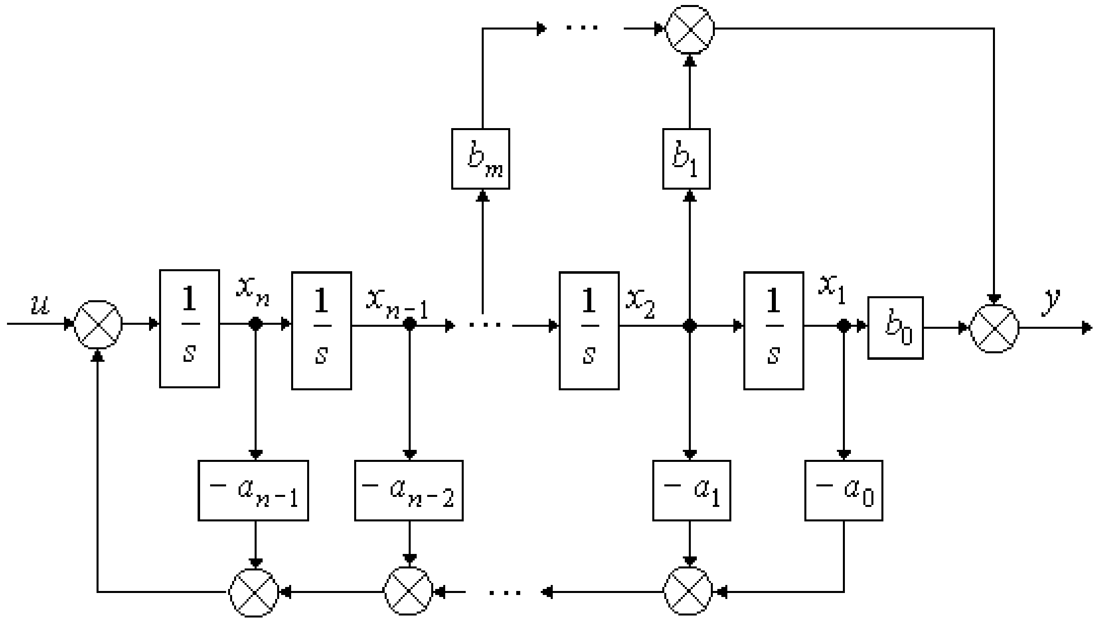

Рис.2.2. Схема моделирования в канонической управляемой форме

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \qquad C^T = \begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Требуемые начальные условия координат вектора состояния $x(0)$ рассчитывают-ся из системы алгебраических уравнений (2.5).

При выполнении упражнения пакет Xcos позволит проверить правильность преобразования. Для этого, используя блоки "CLR" и "CLSS" пакета Xcos, надо осуществить моделирование моделей вход-выход, вход-состояние-выход в канонической управляемой форме и вход-состояние-выход в канонической наблюдаемой форме при ступенчатом единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях и сравнить графики переходных процессов. Схема моделирования приведена на рис.2.3, где блок с именем "CLR" задает модель вход-выход в форме передаточной функции, блоки "CLSS"— модели вход-состояние-выход в канонической управляемой форме и в канонической наблюдаемой форме.

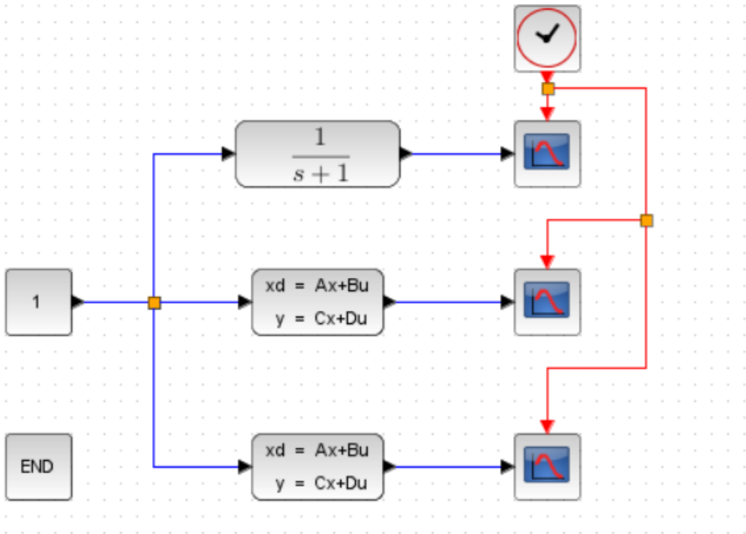

Рис. 2.3 Схема эксперимента