Синтез модального регулятора

Рассмотрим задачу синтеза пропорционального регулятора состояния для объекта управления следующего вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1}$$
$$y(t) = Cx(t), \tag{2}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $y \in \mathbb{R}$ — выход системы, $u \in \mathbb{R}$ — сигнал управления, $A_{n\times n}$ — матрица состояния, $B_{n\times 1}$ — матрица входов, $C_{1\times n}$ — матрица выхода.

Пропорциональный регулятор состояния (модальный регулятор) — регулятор состояния, описываемый алгебраическим уравнением

$$u(t) = -Kx(t), \tag{3}$$

где $K = \begin{bmatrix} k_n & k_{n-1} & \dots & k_2 & k_1 \end{bmatrix}$ — матрица-строка коэффициентов обратной связи.

Подставив (3) в (1), можно получить, что матрица замкнутой системы равна

$$F = A - BK.$$

Алгоритм синтеза модального регулятора

1. Проверить свойство полной управляемости объекта управления.

2. Перейти к канонической управляемой форме описания.

3. По заданным показателям качества (время переходного процесса, перерегулирование и др.) найти желаемый характеристический полином замкнутой системы.

4. На его основе сформировать желаемую матрицу замкнутой системы.

5. Рассчитать коэффициенты матрицы $K_y = \begin{bmatrix} k_{yn} & k_{yn-1} & \dots & k_{y1} \end{bmatrix}$ для канонической управляемой формы: $k_{yi} = a_i^* - a_{yi}$.

6. Найти матрицу стационарных обратных связей K для исходного представления системы

   $$K = K_y P,$$

   где $P = U_y U^{-1}$, U, U_y — матрицы управляемости исходной и канонической моделей объекта управления соответственно.

7. Произвести проверку характеристического полинома замкнутой системы на соответствие желаемому. На основе моделирования убедиться в выполнении требований к показателям качества замкнутой системы.

Примечание: если желаемый характеристический полином замкнутой системы дан, то пункт три надо пропустить.

Пример

Для объекта управления вида (1)-(2) с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

требуется найти матрицу стационарных обратных связей K, обеспечивающую следующие показатели качества: $t_п = 1$с, $\sigma \leq 1\%$.

Шаг 1. Проверка управляемости объекта управления

Найдем матрицу управляемости системы

$$U = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 13 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы управляемости $rankU = 2$ совпадает с размерностью системы, а значит система полностью управляема.

Шаг 2. Переход к канонической управляемой форме

Найдем характеристический полином исходной системы

$$a(s) = \det(sI - A) = \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} s-5 & -8 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 - 5s - 8. \tag{4}$$

Знание характеристического полинома (4) достаточно для формирования матрицы системы в канонической управляемой форме A_y

$$A_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Матрицы входов для канонической управляемой формы системы второго порядка всегда имеет вид

$$B_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Шаг 3. Определение желаемого характеристического полинома замкнутой системы

В данном примере желаемый полином замкнутой системы требуется определить по желаемым показателям качества замкнутой системы. Воспользуемся методом стандартных полиномов (необходимые сведения приведены в приложении).

1. Порядок объекта управления равен двум, значит требуется полином второго порядка
2. Условию $\sigma \leq 1\%$ удовлетворяет полином Ньютона, тогда в общем виде получим
$$a^*(s) = s^2 + 2\omega_0 s + \omega_0^2.$$
3. Из $t_п = 1$с найдем значение ω_0. Для нормированного полинома Ньютона $t_{п1} = 4.8$с, значит
$$\omega_0 = \frac{t_{п1}}{t_п} = \frac{4.8}{1} = 4.8.$$

Получили желаемый полином замкнутой системы

$$a^*(s) = s^2 + 9.6s + 23.04. \tag{5}$$

Шаг 4. Формирование желаемой матрицы замкнутой системы

На основе желаемого характеристического полинома (5) сформируем желаемую матрицу замкнутой системы в канонической управляемой форме

$$F^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -23.04 & -9.6 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Шаг 5. Нахождение матрицы K_y для канонической управляемой формы

Матрица замкнутой системы в канонической управляемой форме

$$F_y = A_y - B_y K_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 - k_{y1} & 5 - k_{y2} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Приравнивая желаемую матрицу замкнутой системы (6) и полученную выше (7), получим

$$\begin{aligned} -23.04 &= 8 - k_{y1}, \\ -9.6 &= 5 - k_{y2}. \end{aligned}$$

Откуда

$$K_y = \begin{bmatrix} k_{y1} & k_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31.04 & 14.6 \end{bmatrix}.$$

Шаг 6. Переход к исходной форме описания объекта

Матрица перехода от канонической управляемой к исходной форме описания может быть найдена как

$$P = U_y U^{-1},$$

где U, U_y — матрицы управляемости исходной и канонической управляемой формы системы соответственно.

Найдем U_y

$$U_y = \begin{bmatrix} B_y & A_y B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Теперь найдем U^{-1}

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 13 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & -13 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.0833 & 1.0833 \\ 0.0833 & -0.0833 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Тогда

$$P = U_y U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0833 & 1.0833 \\ 0.0833 & -0.0833 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0833 & -0.0833 \\ 0.3333 & 0.6667 \end{bmatrix}.$$

Матрица стационарных обратных связей K в этом случае будет равна

$$K = K_y P = \begin{bmatrix} 31.04 & 14.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0833 & -0.0833 \\ 0.3333 & 0.6667 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.4533 & 7.1467 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Шаг 7. Проверка

Сначала проверим, что характеристический полином замкнутой системы с матрицей обратных связей (9) равен желаемому (5). Для этого найдем матрицу замкнутой системы

$$F = A - BK = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.4533 & 7.1467 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7.4533 & 7.1467 \\ 7.4533 & 7.1467 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -2.4533 & 0.8533 \\ -6.4533 & -7.1467 \end{bmatrix}.$$

Теперь найдем характеристический полином замкнутой системы

$$d(s) = \det(sI - F) = \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2.4533 & 0.8533 \\ -6.4533 & -7.1467 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} s + 2.4533 & -0.8533 \\ 6.4533 & s + 7.1467 \end{vmatrix} \approx$$
$$\approx s^2 + 9.6s + 23.04.$$

Полученный полином с точностью до округления, произведенного в (8), совпадает с желаемым полиномом замкнутой системы (5). Значит, расчет матрицы K выполнен верно.

Далее проведем моделирование и убедимся, что полученная система удовлетворяет требуемым показателям качества. Ниже приведен график переходного процесса в замкнутой системе.

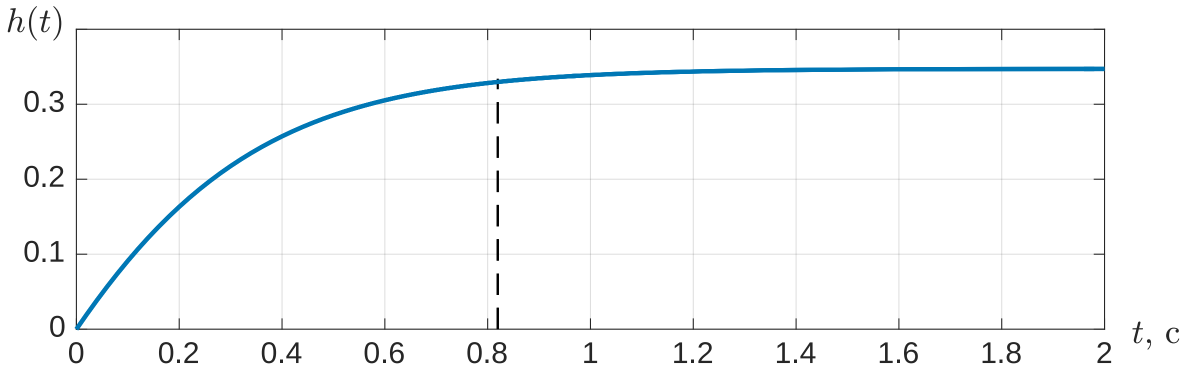

Рисунок — переходной процесс в замкнутой системе

По графику были определены показатели качества:

$$t_{\text{п}} = 0.82c, \quad \sigma = 0\%.$$

Откуда видно, что требования к показателям качества выполнены. Следовательно, синтез модального регулятора выполнен верно.

Приложение. Стандартные полиномы

Таблица 1: Таблица полиномов Баттерворта

n	Вид полинома
1	$s+\omega_0$
2	$s^2+1.41\omega_0 s+\omega_0^2$
3	$s^3+2\omega_0 s^2+2\omega_0^2 s+\omega_0^3$
4	$s^4+2.61\omega_0 s^3+3.41\omega_0^2 s^2+2.61\omega_0^3 s+\omega_0^4$
5	$s^5+3.24\omega_0 s^4+5.24\omega_0^2 s^3+5.24\omega_0^3 s^2+3.24\omega_0^4 s+\omega_0^5$

Таблица 2: Таблица показателей качества для системы с нормированным полиномом Баттерворта

n	1	2	3	4	5
$t_{\text{п}1}$, с	3.0	2.9	6.0	6.8	7.7
σ, %	0	4.5	8.0	11.0	13.5

Таблица 3: Таблица полиномов Ньютона

n	Вид полинома
1	$s+\omega_0$
2	$s^2+2\omega_0 s+\omega_0^2$
3	$s^3+3\omega_0 s^2+3\omega_0^2 s+\omega_0^3$
4	$s^4+4\omega_0 s^3+6\omega_0^2 s^2+4\omega_0^3 s+\omega_0^4$
5	$s^5+5\omega_0 s^4+10\omega_0^2 s^3+10\omega_0^3 s^2+5\omega_0^4 s+\omega_0^5$

Таблица 4: Таблица показателей качества для системы с нормированным полиномом Ньютона

n	1	2	3	4	5
$t_{\text{п}1}$, с	3.0	4.8	6.3	7.8	9.2
σ, %	0	0	0	0	0