

Вступ до статистики: теорія імовірності

1. (2 бали) Ви хочете провести акцію. Кожен покупець здійснивши покупку у вас на суму 100 грн, може взяти участь в акції, де з імовірністю p його покупка може бути перекрита на 50 грн (Наприклад він витягує папірець з урни). З якою максимальною ймовірністю варто давати перемогти клієнтам, якщо в день проведення акції ми очікуємо, що завдяки акції до нас прийде на 1200 покупців, тоді як зазвичай - 1000. Вважаємо, що кожен покупець робить покупку на мінімум 100 грн, тобто всі клієнти беруть участь у акції. Прибуток - 20% від суми покупки.

Розв'язання:

Максимально можливе збільшення прибутку внаслідок проведення акції (якщо видатки на акцію нульові):

$$200 * 20\% * 100 = 4000$$

Видатки на акцію:

$$50 * p * 1200$$

Акцію слід проводити, якщо збільшення прибутку перевищуватиме видатки на неї:

$$50 * p * 1200 < 4000 \Rightarrow p < 0.067$$

Відповідно максимальна ймовірність, за якої варто давати клієнтам перемогти ≈ 0.067 , або 6.7%.

Відповідь: 0.067.

2. (2 бали) Є три телефонні будки: кожна з них бере монетку за з'єднання. Але 2 з них зламані. Один з них насправді дзвонить з імовірністю 50%, а інший ніколи не працює. Ви використали 2 монетки в одному автоматі і вам вдалось успішно додзвонитись двічі. Яка імовірність, що у вас будка, яка працює завжди?

Розв'язання:

Оскільки нам вдалося зателефонувати, то наша будка точно працює, тому третій варіант (що нам трапилася будка, яка ніколи не працює), не розглядаємо.

A – нам вдалося успішно додзвонитися двічі

H_1 - у нас будка, яка працює завжди

H_2 - у нас будка, яка працює з імовірністю 50%

$$\begin{aligned} P(H_1 | A) &= \frac{P(A \cap H_1)}{P(A)} = \frac{P(H_1)P(A | H_1)}{P(A | H_1)P(H_1) + P(A | H_2)P(H_2)} = \\ &= \frac{0.5 * (1 * 1)}{0.5 * (1 * 1) + 0.5 * (0.5 * 0.5)} = 0.8 = 80\% \end{aligned}$$

Відповідь: 80%.

3. (2 бали) Троє людей вибирають хто буде мити посуд витягуючи сірники. Є три сірники, один з них зламаний. Хто витягне зламаний сірник - буде мити посуд. Яким номером тягнути найбільш вигідно? Першим, другим чи третім?

Розв'язання:

A_1 - перший учасник витягнув зламаний сірник

A_2 - другий учасник витягнув зламаний сірник

A_3 - третій учасник витягнув зламаний сірник

$$P(A_1) = \frac{1}{3}$$

$$P(A_2) = P(A_2 | \text{не } A_1)P(\text{не } A_1) = \frac{1}{2} * \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(A_3) = P(A_3 | \text{не } A_1 \text{ і не } A_2) = 1 * \frac{2}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Відповідь: однаково вигідно тягнути будь-яким номером.

4. (2 бали) Парадокс Монті Голла.

Уявіть собі, що ви берете участь у грі, в якій ви знаходитесь перед трьома дверима. За одними з дверей автомобіль, а за двома іншими — по козі. У вас немає ніякої інформації про те, за якими дверима що знаходиться. Ведучий каже вам: *«Спочатку ви маєте обрати одні з дверей. Після цього я відкрию одні з дверей, які залишилися, за якими знаходиться коза. Потім я запропоную вам змінити свій початковий вибір і вибрати інші зачинені двері замість тих, що ви вибрали спочатку. Ви можете зробити як я раджу, або підтвердити свій початковий вибір. Після вашого остаточного рішення я відкрию двері, які ви вибрали, і ви виграєте те, що знаходиться за цими дверима.»*

Ви обираєте двері номер 1. Ведучий відчиняє двері номер 3 і показує, що за ними знаходиться коза. Після цього ведучий пропонує вам обрати двері номер 2. Яка імовірність виграти автомобіль, якщо ви послухаєте його та зміните вибір на номер 2?

Розв'язання:

При першому виборі ймовірність того, що авто буде за одними з дверей, є однаковою для всіх 3 дверей, і становить $\frac{1}{3}$. Але після того, як ведучий відкриває двері, ймовірність того, що авто за тими дверима, які було обрано першими, так само залишається $\frac{1}{3}$, але для тих дверей, які ведучий залишив закритими, становить $\frac{2}{3}$, тому раціонально буде змінити вибір.

Відповідь: $\frac{2}{3}$.

5. (2 бали) У компанії працює 31 людей, з них 12 веб-дизайнерів та 19 розробників. Підвищення цього півріччя планують дати трьом дизайнерам та чотирьом розробникам.

Розв'язання:

а. Яка імовірність отримати підвищення взагалі?

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \\ &= \frac{12}{31} * \frac{3}{12} + \frac{19}{31} * \frac{4}{19} = \frac{3+4}{31} \approx 22.58\% \end{aligned}$$

б. Яка імовірність отримати підвищення, якщо ти дизайнер?

$$P(A|H_2) = \frac{4}{19} \approx 21.05\%$$

с. Яка імовірність, що людина, яка отримала підвищення, є розробником?

A – працівник отримав підвищення

H_1 – цей працівник є розробником

H_2 – цей працівник є дизайнером

$$\begin{aligned} P(H_1|A) &= \frac{P(A \cap H_1)}{P(A)} = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)} = \\ &= \frac{\frac{19}{31} * \frac{4}{19}}{\frac{12}{31} * \frac{3}{12} + \frac{19}{31} * \frac{4}{19}} = \frac{\frac{19}{31} * \frac{4}{19}}{\frac{7}{31}} \approx 57.14\% \end{aligned}$$

Відповідь: а) 22.58%; б) 21.05%; с) 57.14%.

6. (2 бали) Щодня ворожі дрони залітають на територію України. Зграї диких гусей виявляють 5% від всієї кількості дронів, українські жінки з банками помідорів незалежно від гусей - 40%.

а. Яка імовірність, що дрон, який залетить на територію України буде помічений зграєю гусей, але НЕ помічений жінками?

б. Якщо дрон вже виявлений на території України, яка імовірність, що він був помічений зграєю гусей та НЕ помічений жінками?

Розв'язання:

$$P(G) = 0.05 = 5\% - \text{імовірність того, що дрона помітили гуси}$$

$P(W) = 0.4 = 40\%$ - імовірність того, що дрона виявили жінки

A - подія, що дрон виявлений

a) $P(G \text{ i } \text{не } W) = P(G)P(\text{не } W) = 5\% * (1 - 40\%) = 5\% * 60\% = 3\% = 0.03$

b)
$$P(G \text{ i } \text{не } W | A) = \frac{P(A | G \text{ i } \text{не } W)P(G \text{ i } \text{не } W)}{P(A)} = \frac{P(A \text{ i } G \text{ i } \text{не } W)}{P(A)} =$$

$$= 3\% / 43\% \approx 6.98\%$$

$$P(A) = P(G \text{ i } \text{не } W) + P(\text{не } G \text{ i } W) + P(G \text{ i } W) =$$
$$= 0.05 * 0.6 + 0.95 * 0.4 + 0.05 * 0.4 = 43\%$$

Відповідь: a) 3%; b) 6.98%.

7. (2 бали) У селі є 20 активістів, які намагаються підпалити ворожу техніку “Бандера-смузі”. Кожному з цих активістів це вдається з імовірністю 78% незалежно один від одного. З якою імовірністю:

Розв’язання:

a. Всім активістам вдасться підпалити ворожий танк?

$$0.78 * 0.78 * \dots * 0.78 = (0.78)^{20} \approx 0.00695$$

b. Нікому не вдасться підпалити ворожий танк?

$$(1 - 0.78) * (1 - 0.78) * \dots * (1 - 0.78) = (1 - 0.78)^{20} = 7.054295e - 14$$

c. Хоча б 1 з активістів вдасться підпалити танк?

$$1 - 7.054295e - 14 \approx 1$$

d. Хоча б 1 з активістів НЕ вдасться підпалити танк?

$$1 - 0.00695 = 0.99305$$

Відповідь: a) 0.00695 ; b) $7.054295e - 14$; c) ≈ 1 ; d) 0.99305 .

8. (2 бали) У вас у фейсбуці є 300 друзів. Яка імовірність, що хоча б в одного з них сьогодні день народження? Вважаємо, що рік не високосний.

P.S. Рекомендую розібратись з [цим парадоксом](#) (до задачі відношення не має)

Розв'язання:

$$P(\text{імовірність, що хоча б в одного з них сьогодні день народження}) = \\ = 1 - P(\text{імовірність, що ні в кого з них немає сьогодні дня народження})$$

Імовірність того, що в окремо взятого друга день народження **не** сьогодні, становить $\frac{364}{365}$, відповідно ймовірність того, що у всіх 300 друзів (у 1-го і у 2-го і у 3-го і т. п.) день народження не сьогодні обчислюється так:

$$\left(\frac{364}{365}\right)^{300} \approx 0.44$$

Тоді

$$P(\text{імовірність, що хоча б в одного з них сьогодні день народження}) = \\ \approx 1 - 0.44 \approx 0.56$$

Відповідь: 0.56.

9. (2 бали) Ви забули 4-значний PIN-код від банківської карти. Проте ви пам'ятаєте, що використали кожне число лише 1 раз.

а. Скільки можливих варіантів коду існує?

б. Ви згадали, що точно використовували цифру 1, проте не пам'ятаєте в якому саме місці. Скільки тепер є комбінацій?

P.S. Уявіть, якщо пароль має не 4 символи, а мінімум 8. Крім того, може включати букви малого та великого регістру та інші знаки. Навіть якщо шахрай робитиме перебір автоматично через комп'ютер, це займе дуже багато часу! Тому створюйте надійні паролі :)

Розв'язання:

Всього є 10 цифр. Тому, у варіанті а) на першому місці може стояти будь-яка з 10 цифр, на другому – будь-яка з тих 9, які залишилися, і т. п. Відповідно кількість можливих варіантів коду:

$$10 * 9 * 8 * 7 = 5040$$

Для варіанту b) враховуємо, що цифра 1 точно має бути на одній із 4 можливих позицій (оскільки цифра 1 точно є на одній з позицій, то для інших максимальне число цифр, які можна використати, буде вже 9, а не 10):

$$1*9*8*7 + 9*1*8*7 + 9*8*1*7 + 9*8*7*1 = 2016$$

Відповідь: а) 5040; б) 2016.