



TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

MITTSCHRIFT ZUR VORLESUNG UND TUTORIUM

Differentialgleichungen IIB

Stationäre nichtlineare partielle
Differentialgleichungen mit der Theorie
monotoner Operatoren

gelesen von Dr. Hans-Christian Kreusler im
Wintersemester 2019/2020

INHALTSVERZEICHNIS

ABBILDUNGSVERZEICHNIS	PAGE I
-----------------------	--------

1	NICHTLINEARE VARIATIONSPROBLEME	PAGE 1
---	---------------------------------	--------

1.1	Schwache Konvergenz	2
1.2	Ein Zoo an Stetigkeits- und Monotoniebegriffen	8
1.3	Existenzsätze	16

2	PSEUDOMONOTONE OPERATOREN	PAGE 32
---	---------------------------	---------

3	MONOTONE POTENZIALOPERATOREN	PAGE 40
---	------------------------------	---------

3.1	Die GÂTEAUX- und FRÉCHET-Ableitung	40
3.2	Potenzialoperatoren	44

4	DAS STATIONÄRE NAVIER-STOKES PROBLEM	PAGE 51
---	--------------------------------------	---------

5	YOUNG-MAßE	PAGE 59
---	------------	---------

5.1	YOUNG-Maße	60
5.2	Anwendungen: Maßwertige Lösungen	69

INDEX	PAGE 74
-------	---------

Mitschrift von Viktor Glombik.

Zuletzt am 16. Dezember 2021 geändert.

Abbildungsverzeichnis

1	Die Funktionen $(u_n)_{n=1}^4$ aus Beispiel 1.1.6.	3
2	Die Funktionen $(u_i)_{i=1}^4$ aus Beispiel 1.1.7.	3
3	Die Funktionen $(u_i)_{i=1}^5$ aus Beispiel 1.1.10.	5
4	Visualisierung von gleichmäßiger Konvexität	7
5	Die Zusammenhänge der Monotonie- und Stetigkeitsbegriffe. .	8
6	Zusammenhänge der Montoniebegriffe untereinander.	11
7	Die Funktionen u_1 und u_2 aus Beispiel 1.2.12.	13
8	Die Funktion $f(x) := \min(u^2, 1)$	14
9	Die Funktionen Φ und Φ' für $d = 1$	40
10	Die nebenstehende G- aber nicht F-differenzierbare Funktion.	42
11	Schaubild zum Beweis von Lemma 3.2.9.	47
12	Die Funktionen $\left(n^{\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}\right)_{n=1}^4$	60
13	Die Funktionen $(\sin(2\pi nx))_{n=1}^3$	60
14	Die Funktionen u_1 und u_2 aus Beispiel 5.1.4.	60
15	Die Funktionen $u_n(x)$ aus Beispiel 5.1.5 für $n \in \{1, 2, 3\}$. . .	61
16	Die Abbildungen φ und Φ	71

Nichtlineare Variationsprobleme

Motivation (Beweisstruktur für dieses Semester).

18.10.2019

Wir können das Lemma von LAX-MILGRAM (lineare beschränkte stark positive Operatoren $A: V \rightarrow V^*$ sind bijektiv, wobei V ein separabler BANACH-Raum ist) auch so beweisen:

- ① Sei $(V_h)_h$ ein GALERKIN-Schema in V .
- ② Wir lösen das diskrete Ersatzproblem:

GALERKIN-Schema

finde $u_h \in V_h$ sodass $\langle Au_h, v_h \rangle = \langle f, v_h \rangle$ für alle $v_h \in V_h$ gilt.

Da A stark positiv ist, existiert genau eine Lösung (Im Endlichdimensionalen betrachten wir im Wesentlichen eine positiv definite und somit invertierbare Matrix).

- ③ Durch Testen mit der Lösung ($u_h = v_h$) erhalten wir eine a-priori Abschätzung: es existiert ein $\mu > 0$ mit

$$\mu \|u_h\|^2 \leq \langle Au_h, u_h \rangle = \langle f, u_h \rangle \leq \|f\|_* \|u_h\|$$

und somit $\|u_h\| \leq \frac{1}{\mu} \|f\|_*$ für alle h . Insbesondere ist $(u_h)_h \subset V$ beschränkt, also existiert eine schwach konvergente Teilfolge $(u_{h'})_{h'} \rightharpoonup u \in V$.

- ④ Ist u eine Lösung, d.h. gilt $Au = f$ in V^* ? Wir müssen also einen Konvergenzbegriff finden, indem $Au_h \rightarrow Au$ gilt. (Vorgriff: Nach Lemma 1.2.4 ⑧ ist A schwach-schwach-stetig und somit folgt $Au_{h'} \rightarrow Au$. Wende dann das Teilfolgenprinzip an.)

Zur Erinnerung:

SATZ 1.0.1: HAHN-BANACH

Sei Y ein Unterraum des normierten Vektorraums X und $f \in Y^*$. Dann existiert ein $g \in X^*$ mit $g|_Y = f$ und $\|g\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$.

Korollar 1.0.1 (HAHN-BANACH)

- Für alle $x \in X$ gilt $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in X^*, \|f\|_* \leq 1\}$.
- Für $x \neq y \in X$ existiert ein $f \in X^*$ mit $f(x) \neq f(y)$.
- Zu $x \in X \setminus \{0\}$ existiert ein $f \in X^*$ mit $f(x) = \|x\|$ und $\|f\|_* = 1$.
- Ist M ein nicht dicht liegender Unterraum von X , so existiert ein $f \in X^* \setminus \{0\}$ mit $f|_M = 0$.

DEFINITION 1.0.2 (REFLEXIV, SEPARABEL)

Ein normierter Raum ist separabel, wenn er eine dichte, abzählbare Teilmenge enthält. Ein normierter Raum ist reflexiv, wenn die kanonische Einbettung $\iota: X \rightarrow X^{**}$, $x \mapsto j_x$ (mit $j_x(f) = f(x)$) surjektiv ist.

separabel
reflexiv

1.1 Schwache Konvergenz

Sei nun X ein reeller BANACH-Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ ist **stark- bzw. normkonvergent** gegen ein $x \in X$, wenn $\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ gilt.

stark- bzw. normkonvergent

DEFINITION 1.1.1 (SCHWACHE (*-)KONVERGENZ)

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ **konvergiert schwach** gegen $x \in X$ und wir schreiben $x_n \rightharpoonup x$ in X , wenn $\langle f, x_n - x \rangle \rightarrow 0$ für jedes $f \in X^*$ gilt.

konvergiert schwach

Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X^*$ **konvergiert schwach*** gegen $f \in X^*$ und wir schreiben $f_n \xrightarrow{*} f$, wenn $\langle f_n - f, x \rangle \rightarrow 0$ für alle $x \in X$ gilt.

konvergiert schwach*

Bemerkung 1.1.2 Aus dem ersten Korollar des Satzes von HAHN-BANACH folgt, dass schwache^(*) Grenzwerte eindeutig sind.

Lemma 1.1.3

In X^* impliziert schwache schwache* Konvergenz.

Beweis. Für $x \in X$ sei $\hat{x}: X^* \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \langle f, x \rangle$. Dann gilt $\hat{x} \in X^{**}$. Konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X^*$ schwach gegen $f \in X^*$, also $\langle f_n - f, x \rangle \rightarrow 0$ für alle $x \in X^{**}$, so folgt

$$\langle f_n, x \rangle = \langle \hat{x}, f_n \rangle \rightarrow \langle \hat{x}, f \rangle = \langle f, x \rangle$$

und somit $f_n \rightarrow *f$. \square

Bemerkung 1.1.4 Wenn X reflexiv ist, können wir $\hat{x} \in X^{**}$ mit $x \in X$ ersetzen und somit fällt in X^* schwache und schwache* Konvergenz zusammen.

SATZ 1.1.1: KOMPAKTHEIT

Eine **beschränkte** Folge in einem **reflexiven** BANACH-Raum (Dualraum eines **separablen** normierten Raumes) besitzt eine **schwach^(*) konvergente Teilfolge**.

DEFINITION 1.1.5 (SCHWACHE ABGESCHLOSSENHEIT)

Eine Menge $M \subset X$ heißt **schwach abgeschlossen**, wenn jede für jede schwach konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ mit $x_n \rightharpoonup x$ gilt: $x \in M$.

schwach abgeschlossen

Schwach abgeschlossene Mengen sind abgeschlossen.

SATZ 1.1.2: MAZUR

Eine **konvexe** Menge $M \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn sie schwach abgeschlossen ist.

Der Beweis benutzt die geometrische Version des Satzes von HAHN-BANACH.

Beispiel 1.1.6 (Starke-, schwache- und Normkonvergenz)

Die Folge $(u_n(x) := \sin(nx))_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(0, \pi)$ (periodisch auf $[0, \pi]$ fortgesetzt) konvergiert **schwach aber nicht stark**: Es gilt $\|u_n\|_{0,2}^2 \leq \pi$ und für $1_{(a,b)} \in L^2(0, \pi)$

$$\langle 1_{(a,b)}, u_n \rangle = \int_a^b \sin(nx) dx = \frac{\cos(na) - \cos(nb)}{n} \leq \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Aufgrund der **Linearität des Integrals** gilt $\langle g, u_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ für einfache Funktionen $g \in L^2(0, \pi)$. Da die **einfachen Funktionen dicht** in $L^2(0, \pi)$ liegen, existiert für alle $f \in L^2(0, \pi)$ und alle $\varepsilon > 0$ eine einfache Funktion $f_\varepsilon \in L^2(0, \pi)$ sodass $\|f - f_\varepsilon\|_{0,2} < \frac{\varepsilon}{2\pi}$ gilt. Sei nun $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass $|\langle f_\varepsilon, u_n \rangle| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt. Dann folgt für alle $n \geq N_\varepsilon$

$$|\langle f, u_n \rangle| \stackrel{\Delta \neq}{\leq} |\langle f - f_\varepsilon, u_n \rangle| + |\langle f_\varepsilon, u_n \rangle| \leq \|f - f_\varepsilon\|_{0,2} \|u_n\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Da **aus starker schwache Konvergenz folgt** und **schwache Grenzwerte eindeutig** sind, kann nur $u \equiv 0$ ein starker Grenzwert sein. Jedoch gilt

$$\|u_n - u\|_{0,2}^2 = \int_0^\pi \sin^2(nx) dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(2nx)}{4n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \neq 0.$$

Da $u_n \rightharpoonup 0$ in $L^2(0, \pi)$ gilt, folgt $\langle f, u_n \rangle \rightarrow 0$ für alle $f \in L^\infty(0, \pi) \subset L^2(0, \pi)$ und somit $u_n \rightharpoonup 0$ in $L_1(0, \pi)$.

Analog zu oben kann der starke L^1 -Grenzwert nur 0 sein, jedoch gilt

$$\|u_n\|_{0,1} = \int_0^\pi |\sin(nx)| dx = n \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin(nx) dx = n \cdot \frac{2}{n} = 2 \neq 0.$$

Sei nun $v_n := 1 + u_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $f \in L^\infty(0, \pi)$

$$\langle f, v_n \rangle = \langle f, 1 \rangle + \langle f, u_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle f, 1 \rangle$$

und somit $v_n \rightarrow 1 =: v$ in $L^1(0, \pi)$. Ferner gilt

$$\|v_n\|_{0,1} = \|1\|_{0,1} + \left(\frac{1 - \cos(\pi n)}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|1\|_{0,1} = \pi,$$

aber keine starke Konvergenz:

$$\|v_n - v\|_{0,1} = \|u_n\|_{0,1} = 2 \neq 0. \quad \diamond$$

Beispiel 1.1.7 (schwache aber keine starke Konvergenz)

Sei $(u_n := n^{-\frac{1}{2}} 1_{(n, 2n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{R})$. Dann gilt $\|u_n\|_{0,2} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist keine CAUCHY-Folge: Für $m \in 2\mathbb{N}$ und $n = \frac{3m}{2}$ gilt

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|_{0,2}^2 &= \int_m^{\frac{3m}{2}} \frac{1}{m} dt + \int_{\frac{3m}{2}}^{2m} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} - \sqrt{\frac{2}{3m}} \right)^2 dt + \int_{2m}^{3m} \frac{2}{3m} dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 + \frac{2}{3} = 2 - \sqrt{\frac{2}{3}} \neq 0. \end{aligned}$$

Jedoch gilt $u_n \rightharpoonup u$ in L^2 : für $v \in L^2(\mathbb{R})$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} u_n v dx = \int_n^{2n} \frac{v(x)}{\sqrt{n}} dx \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \left(\int_n^{2n} |v|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0. \quad \diamond$$

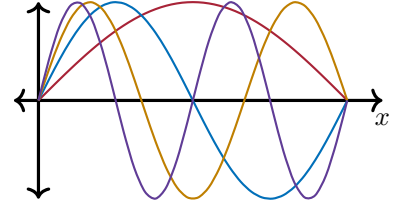


Abb. 1: Die Funktionen $(u_n)_{n=1}^4$ aus Beispiel 1.1.6.

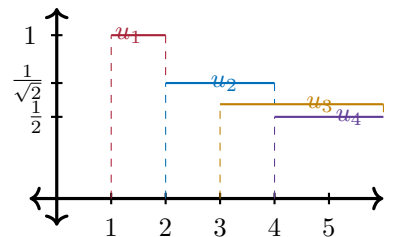


Abb. 2: Die Funktionen $(u_i)_{i=1}^4$ aus Beispiel 1.1.7.

Beispiel 1.1.8 (Periodische Oszillation)

Seien $X := L^p(0, 1)$ mit $p \in (1, \infty)$ und $\tilde{u}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die periodische Fortsetzung von

$$\bar{u}: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} a, & \text{wenn } x \in (0, \theta], \\ b, & \text{wenn } x \in (\theta, 1) \end{cases}$$

für $\theta \in (0, 1)$, $a, b \in \mathbb{R}$ und schließlich $u_n(x) := \tilde{u}(nx)$ für $x \in (0, 1)$ und $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\|u_n\|^p = \int_0^1 |\tilde{u}(nx)|^p dx = \frac{1}{n} \int_0^n |\bar{u}(y)|^p dy \leq \max(|a|, |b|)^p$$

Für $c, d \in (0, 1)$ mit $c < d$ gilt

$$\langle \mathbb{1}_{(c,d)}, u_n \rangle = \int_c^d u_n(x) dx = \frac{1}{n} \int_{cn}^{dn} \tilde{u}(y) dy \rightarrow (d-c)(\theta a + (1-\theta)b)$$

und $(d-c)(\theta a + (1-\theta)b) = \langle \mathbb{1}_{(c,d)}, \theta a + (1-\theta)b \rangle$. Da die Treppenfunktionen (als Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen) dicht in $(L^p(0, 1))^* \cong L^q(0, 1)$, wobei p und q HÖLDER-konjugiert sind, liegen, **konvergiert u_n schwach gegen seinen Mittelwert $\theta a + (1-\theta)b$** . \diamond

Das folgende Beispiel verallgemeinert in gewisser Weise Beispiel 1.1.8.

Beispiel 1.1.9 Sei $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ eine 1-periodische Funktion. Dann konvergiert die Folge $(f_n(x) := f(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ schwach gegen die Konstante $\bar{f} := \int_0^1 f(x) dx$.

Das sieht man so: da die charakteristischen Funktionen $\mathbb{1}_{[a,b]}$, $a, b \in \mathbb{Q}$ dicht in den charakteristischen Funktionen liegen, und deren lineare Hülle dicht in L^1 liegt und die duale Paarung linear ist, genügt es,

$$\langle f_n - f, \mathbb{1}_{[a,b]} \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{Q}$$

zu zeigen. Seien $a, b \in \mathbb{Q}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$m_1(n) := \lceil na \rceil \quad \text{und} \quad m_2(n) = \lfloor nb \rfloor$$

sowie die Reste $\in [0, 1)$.

$$r_1(n) := m_1(n) - na \quad \text{und} \quad r_2(n) := nb - m_2(n).$$

Gilt $r_1(n) = r_2(n) = 0$, so folgt aus der Periodizität von f

$$\frac{1}{n} \int_{na}^{nb} f(u) du = (b-a) \int_0^1 f(u) du. \quad (1)$$

und somit

$$\begin{aligned} \langle f_n - \bar{f}, \mathbb{1}_{[a,b]} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} (f_n(x) - \bar{f}) \mathbb{1}_{[a,b]}(x) dx = \int_a^b f(nx) dx - (b-a)\bar{f} \\ &= \frac{1}{n} \int_{na}^{nb} f(u) du - (b-a)\bar{f} \\ &\stackrel{(1)}{=} (b-a) \int_0^1 f(u) du - (b-a)\bar{f} = 0. \end{aligned}$$

Im anderen Fall gilt

$$\int_{na}^{nb} f(u) \, du = \int_{na}^{m_1(n)} f(u) \, du + \int_{m_1(n)}^{m_2(n)} f(u) \, du + \int_{m_2(n)}^{nb} f(u) \, du$$

Da $f \in L^\infty$ ist, gilt

$$\left| \frac{1}{n} \int_{na}^{m_1(n)} f(u) \, du \right| \leq \frac{1}{n} \|f\|_\infty \cdot (m_1(n) - na) \leq \frac{1}{n} \|f\|_\infty \rightarrow 0,$$

und analog $\left| \frac{1}{n} \int_{m_2(n)}^{nb} f(u) \, du \right| \rightarrow 0$. Aufgrund von

$$na - nb = m_2(n) - m_1(n) + (r_2(n) + r_1(n))$$

gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{na}^{nb} f(u) \, du &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_2(n) - m_1(n)}{n} \int_0^1 f(u) \, du \\ &= (b - a) \int_0^1 f(u) \, du. \end{aligned} \quad \diamond$$

Beispiel 1.1.10 (nicht schwach konvergente Folge)

Betrachte $X := L^1(0, 1)$ und $u_n(x) := 2n(1 - nx) \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}$. Dann gilt $\|u_n\|_X = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $f \equiv 1 \in L^\infty(0, 1) = (L^1(0, 1))^*$ gilt $\langle f, u_n \rangle = 1$, also kann nicht $u_n \rightarrow 0$ gelten. Für $\varphi \in C_0^\infty(0, 1) \subset L^\infty(0, 1)$ gilt

$$\langle \varphi, u_n \rangle = \int_0^1 \varphi u_n \, dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi u_n \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

da $\text{supp}(u_n) \cap \text{supp}(\varphi) = \emptyset$ ab einem hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ gilt. Da $C_0^\infty(0, 1)$ dicht liegt, müsste der schwache Grenzwert 0 sein, was einen Widerspruch darstellt. Somit konvergiert $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht schwach. \diamond

Abschließend geben wir einen großen Satz aus der Funktionalanalysis an.

SATZ 1.1.3: BANACH-STEINHAUS

Seien $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L(X, Y)$, wobei X ein BANACH-Raum und Y ein normierter Raum ist. Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **punktwise beschränkt**, d.h. zu jedem $x \in X$ existiert ein $M_x > 0$, sodass $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n x\| \leq M_x$ gilt, so ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sogar **beschränkt**: es existiert ein $M > 0$ mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| \leq M$.

Korollar 1.1.11

Schwach konvergente Folgen sind beschränkt.

Beweis. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schwach konvergent gegen $x \in X$. Dann ist die Folge $(\langle f, x_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ für alle $f \in X^*$ konvergent und somit beschränkt. Somit ist die Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X^{**}$ mit $A_n: X^* \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \langle f, x_n \rangle$ punktwise beschränkt. Nach dem Satz von BANACH-STEINHAUS gilt $\|A_n\| = \|x_n\| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da die **kanonische Einbettung eine Isometrie** ist. \square

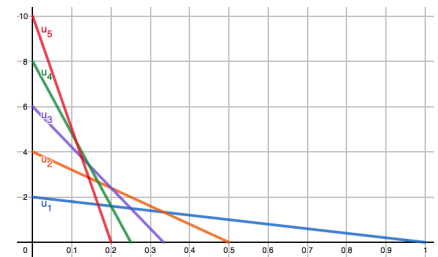


Abb. 3: Die Funktionen $(u_i)_{i=1}^5$ aus Beispiel 1.1.10.

Lemma 1.1.12 ($\|\cdot\|$ ist schwach folgenunterhalbstetig)

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ eine schwach gegen $x \in X$ konvergente Folge. Dann gilt

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

Die Ungleichung ist eine Gleichheit, wenn starke Konvergenz vorliegt, da die Norm stetig ist.

Beweis. Nach dem ersten Korollar des Satzes von HAHN-BANACH gilt

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_* = 1}} |\langle f, x \rangle| = \sup_{\|f\|_* = 1} \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle f, x_n \rangle| = \sup_{\|f\|_* = 1} \liminf_{n \rightarrow \infty} |\langle f, x_n \rangle| \\ &\leq \sup_{\|f\|_* = 1} \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f\|_* \|x_n\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|. \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung 1.1.13 Analog folgt die schwach*-Folgenunterhalbstetigkeit der Norm.

Lemma 1.1.14 (Schwach + Stark = Stark in der dualen Paarung)

Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^*$. Aus $x_n \rightarrow x$ in X und $f_n \xrightarrow{*} f$ in X^* folgt $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| &\stackrel{\Delta \neq}{\leq} |\langle f_n, x_n \rangle - \langle f_n, x \rangle| + |\langle f_n, x \rangle - \langle f, x \rangle| \\ &\leq \underbrace{\|f_n\|}_{< \infty (*)} \underbrace{\|x_n - x\|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} + \underbrace{|\langle f_n - f, x \rangle|}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f_n \rightarrow f} 0}, \end{aligned}$$

wobei $(*)$ folgt, weil $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schwach konvergent und somit beschränkt ist. \square

Bemerkung Ein analoges Resultat folgt für $x_n \rightarrow x$ in X und $f_n \rightarrow f$ in X^* . Aus $x_n \rightarrow x$ und $f_n \rightarrow f$ folgt im Allgemeinen jedoch nicht $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$, betrachte z.B. $x_n(\xi) := f_n(\xi) := \sin(n\xi)$ auf $X = X^* := L^2(0, \pi)$ und siehe Beispiel 1.1.6.

Lemma 1.1.15 (HILBERT-Raum hat RADON-RIESZ-EIGENSCHAFT)

Gilt in einem HILBERT-Raum $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ und $x_n \rightharpoonup x$, so folgt $x_n \rightarrow x$.

Beweis. Es gilt

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\langle x_n, x \rangle + \|x\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \|x\|^2 = 0. \quad \square$$

Man beachte, dass nach umgekehrten Dreiecksungleichung $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ stets $\|x_n - x\| \rightarrow 0 \implies \|x_n\| \rightarrow \|x\|$ gilt.

DEFINITION 1.1.16 (GLEICHMÄSSIG KONVEX (CLARKSON, 1936))

Ein BANACH-Raum X heißt **gleichmäßig konvex** wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|x - y\| \geq \varepsilon \implies \frac{\|x + y\|}{2} \leq 1 - \delta \quad \forall \|x\|, \|y\| \leq 1.$$

Der BANACH-Raum $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ besitzt diese Eigenschaft nicht: Es gilt $e_1 - e_{n+1} \rightarrow e_1$ und auch $\|e_1 - e_{n+1}\| \rightarrow \|e_1\| = 1$, jedoch $\|(e_1 - e_{n+1}) + e_1\|_\infty = 1$.

gleichmäßig konvex

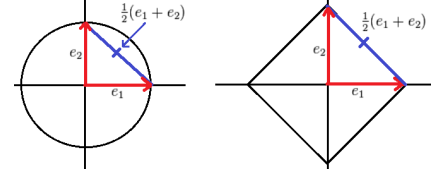


Abb. 4: Gleichmäßige Konvexität sagt aus, dass zwei Vektoren der Einheitskugel einander nahe sein müssen, wenn deren Mittelpunkt nahe am Rand liegt. Im der Abbildung sind die „Einheitskugeln“ der euklidischen- und der Summennorm eingezeichnet und man sieht, dass gleichmäßige Konvexität nicht von äquivalenten Normen erhalten wird. [Quelle: Wikipedia]

In Abb. 4 kann man sehen, dass der Einheitsball in einem gleichmäßig konvexen Raum rund sein muss, in dem Sinne, dass er keine gerade Linien enthält.

Beispiel 1.1.17 (gleichmäßig konvexer Raum)

Alle L^p -Räume (Satz von CLARKSON-McSHANE) die SOBOLEV-Räume $\mathcal{W}^{m,p}$ für $p \in (1, \infty)$ und alle Innenprodukt-Räume (Parallelogrammgleichung) sind gleichmäßig konvex. Gleichmäßig konvexe Räume sind reflexiv (Satz von MILMAN-PETTIS). \diamond

Lemma 1.1.18 (RADON-RIESZ-Eigenschaft)

Gleichmäßig konvexe Räume besitzen die RADON-RIESZ-Eigenschaft.

Beweis. (Musterlösung von Lukas) Sei o.B.d.A. $x \neq 0$ sowie $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze $y := \frac{x}{\|x\|}$ und $y_n := \frac{x_n}{\|x_n\|}$. Dann gilt $y_n \rightharpoonup y$ und $\frac{y_n + y}{2} \rightharpoonup y$. Außerdem folgt

$$1 = \|y\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{y_n + y}{2} \right\| \quad (2)$$

wegen der Schwachfolgenunterhalbstetigkeit der Norm. Angenommen, es gilt $\|y_n - y\| \not\rightarrow 0$, dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass $\|y_n - y\| \geq \varepsilon$ für alle $n > N_\varepsilon$. Aufgrund der gleichmäßigen Konvexität existiert ein $\delta > 0$, sodass $\left\| \frac{y_n + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta$ gilt, was ein Widerspruch zu (2) ist. \square

Lemma 1.1.19 (Tut)

Sei der BANACH-Raum V gleichmäßig konvex. Dann gilt für $\varepsilon > 0$ und $x, y \in V$ mit $\|x\|, \|y\| \leq 1$, $\|x - y\| \geq \varepsilon$ und $\left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta$ ($\delta > 0$) sowie $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, dass $\|tx + (1 - t)y\| \leq 1 - \delta$ für alle $t \in [\alpha, \alpha^{-1}]$ gilt.

Beweis. TODO \square

DEFINITION 1.1.20 (STRIKT KONVEXER RAUM)

Ein normierter Raum X ist strikt konvex, wenn $\|x + y\| < 2$ (oder äquivalent: $\|\alpha x + (1 - \alpha)y\| < 1$ für alle $\alpha \in (0, 1)$) aus $x \neq y$ und $\|x\| = \|y\| = 1$ folgt.

strikt konvex

Gleichmäßig konvexe Räume sind strikt konvex.

Lemma 1.1.21 (schwach^(*) Teilfolgenprinzip)

Sei X ein reflexiver (separabler) BANACH-Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X^{(*)}$ beschränkt. Enthält jede schwach^(*)-konvergente Teilfolge eine gegen x schwach^(*)-konvergente Teilfolge, so gilt $x_n \xrightarrow{(*)} x$.

Beweis. TODO, HW \square

- 8 Eine lineare Abbildung zwischen BANACH-Räumen ist genau dann stetig, wenn sie schwach-schwach-stetig ist.

Beweis. ① Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ beschränkt. Weil V reflexiv ist, existiert eine schwach konvergente Teilfolge $(u_{n'})_{n' \in \mathbb{N}} \rightharpoonup u \in V$. Aufgrund der verstärkten Stetigkeit folgt $Au_{n'} \rightarrow Au$.

② und ③ sind klar.

④ Seien $u, v, w \in V$ und $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$ konvergent gegen ein t . Dann folgt $u + t_nv \rightarrow u + tv$ und mit der Demistetigkeit $A(u + t_nv) \rightarrow A(u + tv)$ in V^* . Nach Lemma 1.1.3 folgt insbesondere $A(u + t_nv) \xrightarrow{*} A(u + tv)$ in V^* , und daher $\langle A(u + t_nv), w \rangle \rightarrow \langle A(u + tv), w \rangle$.

⑤ Angenommen A sei nicht lokal beschränkt. Dann existiert eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ mit $v_n \rightarrow v \in V$ und $\|Av_n\|_* \rightarrow \infty$. Aus der Demistetigkeit folgt $Av_n \rightarrow Av$ in V^* und somit ist insbesondere $(Av_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V^*$ beschränkt, was einen Widerspruch darstellt.

⑥ Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ mit $u_n \rightharpoonup u \in V$. Wir zeigen $Au_n \rightarrow Au$. Da $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und A kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(u_{n'})_{n' \in \mathbb{N}}$ und ein $a \in V^*$, sodass $Au_{n'} \rightarrow a$. Zu $A \in L(V, V^*)$ existiert der duale Operator $A^* \in L(V^{**}, V^*)$. Dann folgt für alle $w \in V$

$$0 \rightarrow \langle A^*w, u_n - u \rangle = \langle A(u_n - u), w \rangle = \langle Au_n - Au, w \rangle,$$

also $Au_n \xrightarrow{*} Au$. Mit der Eindeutigkeit schwacher Grenzwerte folgt $a = Au$. Angenommen, es gäbe eine Teilfolge $(Au_{n'})_{n' \in \mathbb{N}}$ von $(Au_n)_{n \in \mathbb{N}}$, welche nicht schwach konvergiert. Dann wäre diese Folge unbeschränkt, es ließe sich jedoch eine schwach konvergente Teilfolge finden.

⑦ Für $A \in L(V, V^*)$ ist die Aussage klar. Seien A L -LIPSCHITZ-stetig, $u, v, w \in V$ und $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$ konvergent gegen $t \in [0, 1]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\langle A(u + t_nv) - A(u + tv), w \rangle| &\leq \|A(u + t_nv) - A(u + tv)\|_* \|w\| \\ &\leq L \|u + t_nv - u - tv\| \|w\| \\ &= L \underbrace{|t_n - t|}_{\rightarrow 0} \|v\| \|w\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

⑧ " \implies ": Sei $A: X \rightarrow Y$ ein linearer Operator zwischen BANACH-Räumen. Dann impliziert $x_n \rightharpoonup x$ in X , dass $Ax_n \rightharpoonup Ax$ in Y gilt: für $\varphi \in Y^*$ gilt $\langle \varphi, Ax_n - Ax \rangle = \langle A^*(\varphi), x_n - x \rangle \rightarrow 0$, da $A^*(\varphi) \in X^*$ ist.

" \impliedby ": Angenommen, $A: X \rightarrow Y$ sei linear und schwach-schwach-stetig aber unbeschränkt. Dann existiert eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, sodass $\|Ty_n\| \geq n\|y_n\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Definiere $x_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{y_n}{\|y_n\|}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\|x_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ und somit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ und insbesondere $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ in X . Aufgrund der schwach-schwach-Stetigkeit von A gilt $Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, also ist $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt.

Die Identität $\ell_1 \rightarrow \ell_\infty$ ist verstärkt stetig (ℓ_1 hat die SCHUR-Eigenschaft) aber nicht kompakt, da das Bild der ℓ_1 -Einheitskugel die Einheitsvektoren enthält, welche keine konvergente Teilfolge besitzen.

Wir brauchen hier keine Reflexivität von V , da die kanonische Einbettung nach dem Satz von HAHN-BANACH immer injektiv ist.

Jedoch gilt

$$\|Tx_n\| = \frac{\|Ty_n\|}{\sqrt{n}\|y_n\|} \geq \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

was einen Widerspruch darstellt. \square

Gegenbeispiel 1.2.5 (Kompakt \implies verstärkt stetig)

Betrachte den Operator $A: V \rightarrow V$, $v \mapsto g\|v\|^2$ für $V := L^2(0, 1)$ und festes $g \in V$.

Offensichtlich ist A stetig. Das Bild von A ist eindimensional mit der Basis $\{g\}$. Somit ist A kompakt. Die Folge $(v_n := \sin(nx))_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{R})$ konvergiert nach Beispiel 1.1.6 schwach aber nicht stark gegen Null. Wäre A verstärkt stetig, müsste $g\|v_n\|^2 \rightarrow g\|0\|^2$ gelten, da aber $g \neq 0$ gilt, würde das $\|v_n\| \rightarrow \|0\|$ implizieren. Nach Lemma 1.1.15 folgt daraus $v_n \rightarrow 0$, was einen Widerspruch darstellt. \diamond

Bemerkung 1.2.6 (Motivation zu den Monotoniebegriffen)

In \mathbb{R} folgt die Bijektivität von f aus der strenger Monotonie (impliziert Injektivität), Stetigkeit von f und $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$.

DEFINITION 1.2.7 (MONOTONIEEIGENSCHAFTEN)

Sei $(V, |\cdot|)$ reell und reflexiv. Eine Abbildung $A: V \rightarrow V^*$ heißt

- **monoton**, wenn $\langle Av - Aw, v - w \rangle \geq 0$ für alle $v, w \in V$ gilt. monoton
- **strikt monoton**, wenn $\langle Av - Aw, v - w \rangle > 0$ für alle verschiedenen $v, w \in V$ gilt. strikt monoton
- **stark monoton**, wenn ein $\mu > 0$ existiert, sodass $\langle Av - Aw, v - w \rangle \geq \mu|v - w|^2$ für alle $v, w \in V$ gilt. stark monoton
- **gleichmäßig monoton**, wenn eine strikt monoton wachsende Funktion $\rho: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $\rho(0) = 0$ existiert, sodass $\langle Av - Aw, v - w \rangle \geq \rho(|v - w|)$ für alle $v, w \in V$ gilt. gleichmäßig monoton
- **d-monoton**, wenn eine strikt monoton wachsende Funktion $\alpha: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ existiert, sodass

$$\langle Av - Aw, v - w \rangle \geq (\alpha(|v|) - \alpha(|w|))(|v| - |w|)$$

für alle $v, w \in V$ gilt.

- **koerzitiv**, wenn eine Funktion $\gamma: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\gamma(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \infty$ existiert, sodass $\langle Av, v \rangle \geq \gamma(|v|)|v|$ für alle $v \in V$ gilt. koerzitiv

Lemma 1.2.8 (Monotoniebegriffe)

Sei $(V, |\cdot|)$ ein reeller BANACH-Raum. Für einen Operator $A: V \rightarrow V^*$ gelten die folgenden Implikationen.

- ① Gleichmäßige Monotonie impliziert strikte Monotonie.
- ② Starke Monotonie impliziert gleichmäßige Monotonie.
- ③ Starke Monotonie impliziert d-Monotonie.
- ④ Starke Monotonie impliziert Koerzitivität.

- ⑤ Monotonie impliziert lokale Beschränktheit.
- ⑥ Lineare monotone Operatoren sind stetig.
- ⑦ Auf reflexiven Räumen implizieren Monotonie und Radialstetigkeit Demistetigkeit.
- ⑧ d -Monotonie impliziert Monotonie.
- ⑨ Gleichmäßige Monotonie impliziert Koerzitivität.
- ⑩ Ist V strikt konvex, so impliziert d -Monotonie strikte Monotonie.

Beweis. ① und ② sind klar.

- ③ Es existiert ein $\mu > 0$ sodass für alle $u, v \in V$

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq \mu |v - w|^2 \stackrel{\Delta \neq^{-1}}{\geq} \mu (|v| - |w|)^2$$

gilt. Somit erfüllt $\alpha := \mu \text{id}$ die Voraussetzungen der d -Monotonie.

- ④ Für die Koerzitivität wähle man $w = 0$ und erhält für alle $v \in V$ und ein $\mu > 0$

$$\begin{aligned} \langle Av, v \rangle &= \langle Av - A(0), v \rangle + \langle A(0), v \rangle \geq \mu \|v\|^2 - \|A(0)\|_* \|v\| \\ &= \underbrace{(\mu \|v\| - \|A(0)\|_*)}_{=: \gamma(\|v\|)} \|v\|. \end{aligned}$$

- ⑤ Angenommen, A wäre nicht lokal beschränkt. Dann existiert eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ und ein $u \in V$ mit $u_n \rightarrow u$ aber $\|Au_n\|_* \rightarrow \infty$. Sei $\alpha_n := 1 + \|Au_n\|_* \|u_n - u\| \geq 1$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\frac{1}{\alpha_n} \leq 1$ und für $v \in V$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_n} \langle Au_n, v \rangle &\leq \frac{1}{\alpha_n} (\langle Au_n, v \rangle + \langle Au_n - A(u+v), u_n - (u+v) \rangle) \\ &= \frac{1}{\alpha_n} (\langle Au_n, u_n - u \rangle - \langle A(u+v), u_n - (u+v) \rangle) \\ &\leq \frac{1}{\alpha_n} (\|Au_n\|_* \|u_n - u\| + \|A(u+v)\|_* \|u_n - u - v\|) \\ &\leq 1 + \frac{1}{\alpha_n} \|A(u+v)\|_* \|u_n - (u+v)\| \\ &\leq 1 + \frac{C}{\alpha_n} \|A(u+v)\|_*. \end{aligned}$$

Somit ist $\frac{1}{\alpha_n} \langle Au_n, v \rangle$ für alle $v \in V$ beschränkt. Nach dem Satz von **BANACH-STEINHAUS** existiert ein $M > 0$, sodass $\frac{1}{\alpha_n} \|Au_n\|_* \leq M$. Umstellen ergibt

$$\|Au_n\|_* \leq M(1 + \|Au_n\|_* \|u_n - u\|).$$

Umstellen ergibt

$$\|Au_n\|_* \leq \frac{M}{1 - M \|u_n - u\|} \leq M,$$

wobei die Ungleichung erhalten bleibt, weil wegen $u_n \rightarrow u$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $M \|u_n - u\| < 1$ für alle $n > N$ gilt.

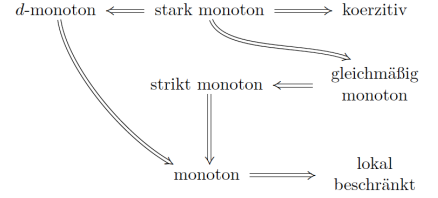


Abb. 6: Zusammenhänge der Monotoniebegriffe untereinander.

- ⑥ Aus ⑤ folgt, dass A lokal beschränkt ist. Seien $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ konvergent gegen u und

$$v_n := \begin{cases} \frac{u_n - u}{\|u_n - u\|^{\frac{1}{2}}}, & \text{für } u_n \neq u, \\ 0, & \text{für } u_n = u. \end{cases}$$

Da $v_n \rightarrow 0$ gilt (und $A0 = 0$ gilt und A lokal beschränkt ist), existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $M > 0$, sodass $\|Av_n\|_* \leq M$ für alle $n > N$ gilt. Nun folgt für alle $n > N$

$$\begin{aligned} \|Au_n - Au\|_* &= \|A(u_n - u)\|_* = \|Av_n\|_* \|u_n - u\|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M \|u_n - u\|^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

- ⑦ Sei $u_n \rightarrow u$. Wir zeigen $Au_n \rightarrow Au$ in V^* , d.h. $\langle Au_n - Au, v \rangle \rightarrow 0$ für alle $v \in V$, da wegen der Reflexivität von V schwach- und schwach*-Konvergenz in V^* zusammenfallen. Da A monoton ist, ist A lokalbeschränkt (Lemma 1.2.4 ⑤). Deswegen ist $(Au_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V^*$ beschränkt, also existiert wegen der Reflexivität von V eine Teilfolge $u'_{n'}$ und ein $b \in V^*$, sodass $Au_{n'} \rightarrow b$ in V^* gilt.

Wir zeigen nun $b = Au$ mit **MINTY'S TRICK**: für beliebige $v \in V$ gilt

MINTY'S TRICK

$$\begin{aligned} \langle b, u \rangle &\leftarrow \underbrace{\langle Au_{n'}, u_{n'} \rangle}_{\rightarrow} \underbrace{\langle u_{n'}, u \rangle}_{\rightarrow u} \geq \langle Au_{n'}, u_{n'} \rangle - \underbrace{\langle Au_{n'} - Av, u_{n'} - v \rangle}_{\geq 0} \\ &= \langle Av, u_{n'} - v \rangle + \langle Au_{n'}, v \rangle \\ &\rightarrow \langle Av, u - v \rangle + \langle b, v \rangle. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$\langle b, u - v \rangle \geq \langle Av, u - v \rangle \quad \forall v \in V.$$

Für $t > 0$ und $w \in V$ setze $v = u + tw$. Dann gilt

$$\begin{aligned} -t \langle b, w \rangle &\geq -t \langle A(u + tw), w \rangle \\ \implies \langle b, w \rangle &\leq \langle A(u + tw), w \rangle \xrightarrow[t \searrow 0]{\text{radialst.}} \langle Au, w \rangle \end{aligned}$$

Analog erhalten wir $\langle b, w \rangle \geq \langle Au, w \rangle$ für $t < 0$ und somit $\langle b, w \rangle = \langle Au, w \rangle$ für alle $w \in V$ und somit $b = Au$.

- ⑧ Folgt direkt aus der Monotonie von α .

- ⑨ **TODO, HA**

- ⑩ **TODO, HA**

□

Vgl. Bemerkung 1.2.2: Hier steht zwar, dass man negatives t einsetzt, um die umgekehrte Ungleichung zu erhalten, aber man kann genauso gut das gleiche t nehmen und dafür $-w$ statt w einsetzen und die Definition für $t \in [0, 1]$ behalten.

Beispiel 1.2.9 (MINTY'S TRICK)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $A: L^1(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$ ein monotoner und radialstetiger Operator. Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ eine schwach konvergente Folge mit Grenzwert u , sodass $(Au_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in L^∞ gegen w schwach* konvergiert und $\langle Au_n, u_n \rangle \rightarrow \langle w, u \rangle$ gilt. Dann folgt

$w = Au$ mit **MINTY's Trick**: Für $b \in L^1(\Omega)$ gilt

MINTY's Trick

$$\begin{aligned} \langle w, u \rangle &\rightarrow \langle Au_n, Au_n \rangle \stackrel{(\text{Mon})}{\geq} \langle Au_n, Au_n \rangle - \langle Au_n - Ab, u_n - b \rangle \\ &= \langle Ab, u_n - b \rangle + \langle Au_n, b \rangle \\ &\rightarrow \langle Ab, u - b \rangle + \langle w, b \rangle. \end{aligned}$$

Also gilt $\langle Ab, u - b \rangle \leq \langle w, u - b \rangle$ für alle $b \in L^1(\Omega)$.

Für $t > 0$, $v \in L^1(\Omega)$ und $b := u + tv$ gilt

$$-t \langle w, v \rangle \geq -t \langle A(u + tv), v \rangle$$

und wegen der Radialstetigkeit von A gilt

$$\langle w, v \rangle \leq \langle A(u + tv), v \rangle \xrightarrow[\text{radialst.}]{t \searrow 0} \langle Au, v \rangle.$$

und für $t < 0$ folgt analog $\langle w, v \rangle \geq \langle Au, v \rangle$ und somit $w = Au$. \diamond

DEFINITION 1.2.10 (DUALITÄTSABBILDUNG)

Sei X ein reflexiver Raum mit strikt konvexen Dualraum. Für jedes $x \in X$ existiert genau ein $Jx \in X^*$ mit $\langle Jx, x \rangle = \|x\|^2 = \|Jx\|_*^2$. Die Abbildung $J: X \rightarrow X^*$ heißt **Dualitätsabbildung**.

Dualitätsabbildung

Lemma 1.2.11

Die Dualitätsabbildung ist **demistetig**, **monoton** und **koerzitiv**. Ist X ein HILBERT-Raum, ist J sogar stark monoton.

Beweis. ① Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ konvergent gegen $u \in V$. Da J monoton ist, genügt es nach Lemma 1.2.8 ⑦ zu zeigen, dass J radialstetig ist.

TODO Inspiration: https://www-m6.ma.tum.de/foswiki/pub/M6/Lehrstuhl/IrenaHofmann/CEV_Blatt06.pdf.

② Für $x, y \in V$ gilt

$$\begin{aligned} \langle Jx - Jy, x - y \rangle &= \langle Jx, x \rangle - \langle Jx, y \rangle - \langle Jy, x \rangle + \langle Jy, y \rangle \\ &\geq \langle Jx, x \rangle - \|Jx\|_* \|y\| - \|Jy\|_* \|x\| + \langle Jy, y \rangle \\ &= \|x\|^2 - 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

③ Es gilt $\langle Jx, x \rangle = \|x\|^2 = \gamma(\|x\|)\|x\|$ für $\gamma \equiv \text{id}$.

④ Nach Beispiel 3.1.9 gilt in einem HILBERT-Raum $\langle Ju, v \rangle = \langle u, v \rangle$ und somit $\langle Ju - Jv, u - v \rangle = \|u - v\|^2$. \square

Ist $X = L^p(\Omega)$ für eine beschränkte, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $p \in (1, \infty)$, so ist fast überall $J(u)(x) = |u(x)|^{p-2} u(x) \|u\|_p^{2-p}$.

Beispiel 1.2.12 (Stetig aber nicht schwach-schwach stetig)

Sei \bar{u} die periodische Fortsetzung von

$$u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2\mathbb{1}_{(0, \frac{1}{2})}(x) - 1$$

auf \mathbb{R} . Dann ist $(u_n(x) := \bar{u}(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ schwach konvergent gegen 0, da das

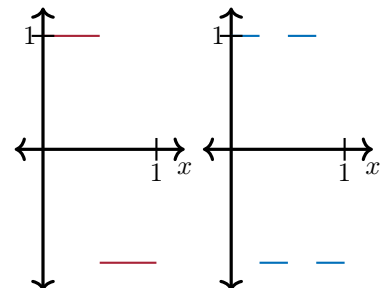


Abb. 7: Die Funktionen u_1 und u_2 aus Beispiel 1.2.12.

der Mittelwert der Funktion ist (vgl. Beispiel 1.1.9). Jedoch ist

$$B: L^p(0, 1) \rightarrow L^p(0, 1), \quad u \mapsto \min(u^2, 1)$$

stetig aber nicht schwach-schwach stetig: Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(0, 1)$ eine Folge, sodass $u_n \xrightarrow[L^p(0, 1)]{n \rightarrow \infty} 0$. Dann existiert eine Teilfolge $(u_{n'})_{n' \in \mathbb{N}}$, sodass $u_{n'}(x) \rightarrow u(x)$ fast überall in $(0, 1)$ gilt. Dann folgt $f(u_{n'}(x)) \rightarrow f(u(x))$ fast überall in $(0, 1)$ aufgrund der Stetigkeit von $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \min(x^2, 1)$. Da $|f(u_{n'}(x))| \leq 1$ für alle $x \in [0, 1]$ gilt, erhalten wir $Bu_n \rightarrow Bu$ in $L^p(0, 1)$ nach dem Satz von LEBESGUE. Jedoch ist B nicht schwach-schwach-stetig, da $Bu_n = 1$ und somit $Bu_n \rightarrow 1 \neq 0 = B(0) = Bu$ gilt. \diamond

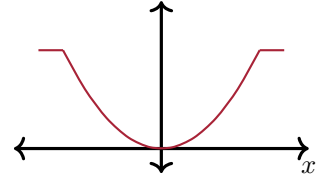


Abb. 8: Die Funktion $f(x) := \min(x^2, 1)$.

Lemma 1.2.13

Sei $\beta > 0$.

- ① Für $p > 2$ und $A: V \rightarrow V^*$ gelte

$$\|Au - Av\|_* \leq \beta \|u - v\|^{p-1}$$

für alle $u, v \in V$ gilt. Dann ist A konstant.

- ② Es existiert zu $p \in (1, 2)$ kein $A: V \rightarrow V^*$ sodass

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq \beta \|u - v\|^p \quad (3)$$

für alle $u, v \in V$ gilt.

Beweis. ① Seien $u, v \in V$. Wir wählen eine äquidistante Zerlegung der Strecke zwischen u und v : $(u_n := \frac{n}{N}(v - u))_{n \in \{0, \dots, N\}}$ für $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|Au - Av\|_* &= \|Au_0 - Au_N\|_* = \left\| \sum_{k=0}^{N-1} A_n - A_{n+1} \right\| \\ &\stackrel{\triangle}{\leq} \sum_{k=0}^{N-1} \|A_n - A_{n+1}\| \leq \beta \sum_{k=0}^{N-1} \|u_n - u_{n+1}\|^{p-1} \\ &= \beta \sum_{k=0}^{N-1} \left\| \frac{-(v - u)}{N} \right\|^{p-1} = \frac{\beta}{N^{p-2}} \|u - v\|^{p-1} \xrightarrow[p > 2]{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

- ② Seien $u, v \in V$ und

$$\left(u_n := u + \frac{n}{N}(v - u) \right)_{n \in \{0, \dots, N\}}$$

eine äquidistante Diskretisierung des Weges von u nach v . Aufgrund

der Teleskopsumme (T) und der dualen Paarung (L) gilt

$$\begin{aligned}
\langle Au - Av, u - v \rangle &= \langle Au_0 - Au_N, u_0 - u_N \rangle \\
&\stackrel{(T)}{=} \left\langle \sum_{i=0}^{N-1} Au_i - Au_{i+1}, \sum_{j=0}^{N-1} u_j - u_{j+1} \right\rangle \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \langle Au_i - Au_{i+1}, u_i - u_{i+1} \rangle \\
&= N \sum_{i=0}^{N-1} \langle Au_i - Au_{i+1}, u_i - u_{i+1} \rangle \\
&\stackrel{(3)}{\geq} N\mu \sum_{i=0}^{N-1} \|u_i - u_{i+1}\|^p = N\mu \sum_{i=0}^{N-1} \left\| \frac{u - v}{N} \right\|^p \\
&= N^{1-p}\mu \sum_{i=0}^{N-1} \|u - v\|^p \\
&= N^{2-p}\mu \|u - v\|^p \xrightarrow[2-p>0]{N \rightarrow \infty} \infty,
\end{aligned}$$

was ein Widerspruch zu der Wohldefiniertheit von A ist. □

1.3 Existenzsätze

Beispiel 1.3.1 (p -LAPLACE und French-Tower function)

Für $p \in (1, \infty)$ sei

$$g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, z \mapsto \begin{cases} |z|^{p-2}z, & \text{wenn } z \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

die **french-tower function**. Wir nennen $\Delta_p u := \nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \nabla \cdot g(\nabla u)$ den p -LAPLACE-Operator, die **nichtlineare Verallgemeinerung** des LAPLACE Operators (Gleichheit für $p = 2$). Die Abbildung g ist als Komposition stetiger Funktionen stetig und da

$$|g(z) - 0| = |z|^{p-1} \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0$$

gilt. Für $|z| < M$ gilt $|g(z)| < M^{p-1}$ also ist g **beschränkt** und auch **koerziv**, da

$$\langle g(z), z \rangle = |z|^{p-2} \cdot \langle z, z \rangle = |z|^{p-1} |z|$$

gilt. Wir wählen $\gamma(z) := z^{p-1} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \infty$. Außerdem ist g **monoton** und **strikt monoton**, da

$$\begin{aligned} \langle g(z) - g(y), z - y \rangle &= \langle |z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y, z - y \rangle \\ &= |z|^p - |y|^{p-2} \langle y, z \rangle - |z|^{p-2} \langle z, y \rangle + |y|^p \quad (4) \\ &\stackrel{\text{CS}}{\geq} (|z|^{p-1} - |y|^{p-1})(|z| - |y|) \geq 0 \end{aligned}$$

gilt.

Für $p \geq 2$ existiert ein $\mu > 0$, sodass

$$\langle g(z) - g(y), z - y \rangle \geq \mu |z - y|^p \quad \forall y, z \in \mathbb{R}^d.$$

Beweis. Die **LINQUIST Identität** ist

LINQUIST Identität

$$\langle g(z) - g(y), z - y \rangle = \frac{|z|^{p-2} + |y|^{p-2}}{2} |z - y|^2 + \frac{|z|^{p-2} - |y|^{p-2}}{2} (|z|^2 - |y|^2),$$

da die rechte Seite ist

$$\begin{aligned} &\frac{|z|^p}{2} - |z|^{p-2} \langle y, z \rangle + \frac{|z|^{p-2} |y|^2}{2} + \frac{|y|^{p-2} |z|^2}{2} - |y|^{p-2} \langle y, z \rangle + \frac{|y|^p}{2} \\ &+ \frac{|z|^p}{2} - \frac{|z|^{p-2} |y|^2}{2} - \frac{|y|^{p-2} |z|^2}{2} + \frac{|y|^p}{2} \end{aligned}$$

und die linke Seite (4). Durch Kürzen kann die Gleichheit gezeigt werden.

Für $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt somit

$$\langle g(z) - g(y), z - y \rangle \geq \frac{1}{2} (|z|^{p-2} + |y|^{p-2}) |y - z|^2,$$

da $(|z|^{p-2} - |y|^{p-2})(|z|^2 - |y|^2) \geq 0$, weil $|z|^{p-2} \geq |y|^{p-2}$ genau dann wenn $|z|^2 \geq |y|^2$. Wir zeigen die Existenz eines $\tau > 0$, sodass

$$|z|^{p-2} + |y|^{p-2} \geq \tau |z - y|^{p-2}$$

Zunächst sei $p \in (2, 3)$, da für $p = 2$ jedes τ der Bedingung genügt. Wir nutzen die Substitution $\rho = p - 2 \in (0, 1)$. Dann gilt $|y - z|^\rho \leq |y|^\rho + |z|^\rho$, also können wir $\tau = 1$ wählen.

Sei nun $p \geq 3$, d.h. $\rho \geq 1$. Dann gilt

$$|z - y|^\rho \leq (|z| + |y|)^\rho \leq 2^{\rho-1} (|z|^\rho + |y|^\rho),$$

denn $t \mapsto t^\rho$ ist konvex und somit gilt die JENSEN-Ungleichung $\left(\frac{x+y}{2}\right)^\rho \leq \frac{x^\rho + y^\rho}{2}$. Für $p \geq 3$ wählen wir also $\tau = 2^{3-p}$ und somit $\mu = 2^{4-p}$. Insbesondere ist g stark monoton für $p = 2$. \square

Für $p \geq 2$ ist g LIPSCHITZ-stetig auf jeder beschränkten Menge:

$$|g(z) - g(y)| \leq (p-1) \max(|y|, |z|)^{p-2} |z - y|. \quad (5)$$

\diamond

Wir formulieren nun den Hauptsatz über monotone Operatoren, welcher als nichtlineare Verallgemeinerung des Satz von LAX-MILGRAM gesehen werden kann.

SATZ 1.3.1: BROWDER-MINTY (1963)

Seien V ein reeller reflexiver separabler BANACH-Raum und $A: V \rightarrow V^*$ monoton, radialstetig und koerzitiv. Dann ist A surjektiv. Die Lösungsmenge ist konvex und abgeschlossen. Ist A sogar strikt monoton, so ist A bijektiv.

Auf Separabilität kann verzichtet werden, das würde den Beweis jedoch unnötig in die Länge ziehen.

Beweis. Die Surjektivität zeigen wir in allgemeinerer Form im Beweis des folgenden Satzes.

Konvexität der Lösungsmenge. Seien $u_1, u_2 \in V$ Lösungen von $Au = f$, $\theta \in (0, 1)$ und $u_\theta := \theta u_1 + (1 - \theta)u_2$. Für $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned} \langle f - Av, u_\theta - v \rangle &= \theta \langle f - Av, u_1 - v \rangle + (1 - \theta) \langle f - Av, u_2 - v \rangle \\ &= \theta \langle Au_1 - Av, u_1 - v \rangle + (1 - \theta) \langle Au_2 - Av, u_2 - v \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

da A monoton ist. Für $v := u_\theta \pm \lambda w$ mit $\lambda \in (0, 1]$ und $w \in V$ gilt

$$\mp \lambda \langle f - A(u_\theta \pm \lambda w), w \rangle \geq 0$$

und somit $\langle f - Au_\theta, w \rangle = 0$ für $\lambda \searrow 0$, da A radialstetig ist, also gilt $f = Au_\theta$.

Abgeschlossenheit der Lösungsmenge. Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ eine Folge von Lösungen mit schwachem Grenzwert $u \in V$. Für $v \in V$ gilt

$$\langle f - Av, u - v \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f - Av, u_n - v \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n - Av, u_n - v \rangle \geq 0,$$

da A monoton ist. Analog zu oben folgt mit der Radialstetigkeit und $v := u \pm \lambda w$, dass $f = Au$ gilt. Nach dem Satz von MAZUR ist die Lösungsmenge sogar stark abgeschlossen.

Bijektivität. Angenommen, $u_1 \neq u_2$ sind zwei Lösungen von $Au = f$. Dann gilt widersprüchlicherweise

$$0 < \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle = \langle f - f, u_1 - u_2 \rangle = 0. \quad \square$$

Lemma 1.3.2 (BROWDER-MINTY)

Seien die Voraussetzungen des Satzes von BROWDER-MINTY erfüllt. Dann gilt

- ① Ist A stark monoton, so ist A^{-1} LIPSCHITZ-stetig.
- ② Ist A stark monoton und LIPSCHITZ-stetig, so ist A^{-1} stark monoton.
- ③ Ist A strikt monoton, so ist A^{-1} strikt monoton, beschränkt und demistetig.

Beweis. ① Seien $x, y \in V^*$. Nach dem Satz von BROWDER-MINTY existieren $u, v \in V$ sodass $Au = x$ und $Av = y$, also $u = A^{-1}x$ und $v = A^{-1}y$ gilt. Da A stark monoton ist, existiert ein $\mu > 0$, sodass

$$\begin{aligned} \|A^{-1}x - A^{-1}y\| &= \|u - v\| \leq \frac{\langle Au - Av, u - v \rangle}{\mu \|u - v\|} \\ &\stackrel{\text{CS}}{\leq} \frac{\|Au - Av\| \|u - v\|}{\mu \|u - v\|} = \frac{1}{\mu} \|Au - Av\| \\ &= \frac{1}{\mu} \|x - y\| \end{aligned}$$

gilt. Somit ist A^{-1} LIPSCHITZ-stetig mit LIPSCHITZ-Konstante $\frac{1}{\mu}$.

- ② Seien $x, y \in V^*$ und $u, v \in V$ wie oben. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle A^{-1}x - A^{-1}y, x - y \rangle &= \langle u - v, Au - Av \rangle = \langle Au - Av, u - v \rangle \\ &\stackrel{(*)}{\geq} \mu \|u - v\|^2 = \mu \|A^{-1}x - A^{-1}y\|^2 \\ &\stackrel{(\ddagger)}{\geq} \frac{\mu}{L} \|AA^{-1}x - AA^{-1}y\|^2 = \frac{\mu}{L} \|x - y\|^2, \end{aligned}$$

wobei in $(*)$ die starke Monotonie von A und in (\ddagger) die LIPSCHITZ-Stetigkeit von A mit $\mu, L > 0$ ausnutzen.

- ③ Strikte Monotonie Für $f \neq g \in V^*$ existieren $u \neq v \in V$, sodass $Au = f$ und $Av = g$ gilt. Dann folgt

$$\langle A^{-1}f - A^{-1}g, f - g \rangle = \langle u - v, Au - Av \rangle = \langle Au - Av, u - v \rangle > 0.$$

Beschränktheit. Sei $F \subset V^*$ beschränkt. Dann existiert ein $M > 0$, sodass $\|f\|_* \leq M$ für alle $f \in F$ gilt. Aufgrund der Koerzivität von A existiert ein entsprechendes γ mit

$$\gamma(\|u\|)\|u\| \leq \langle Au, u \rangle = \langle f, u \rangle \leq \|f\|_* \|u\| \leq M \|u\|$$

für alle $u \in V$ und $f \in F$. Aufgrund der Bijektivität von A folgt $\gamma(\|u\|) = \gamma(\|A^{-1}f\|) \leq M$ für alle $f \in F$, also ist A^{-1} beschränkt, da γ strikt monoton wächst.

Demistetigkeit. Sei $(f_n = Au_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V^*$ konvergent gegen f in V^* . Da A^{-1} auch lokal beschränkt ist, ist die Menge $(u_n = A^{-1}f)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ beschränkt. Somit existiert eine Teilfolge $u_{n'} \subset V$ mit $u_{n'} \rightharpoonup u \in V$. Für $v \in V$ folgt mit Lemma 1.1.14

$$\begin{aligned} \langle f - Av, u - v \rangle &= \lim_{n' \rightarrow \infty} \langle f - Av, u_{n'} - v \rangle \\ &= \lim_{n' \rightarrow \infty} \langle Au_{n'} - Av, u_{n'} - v \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Mit **MINTY'S TRICK** folgt $Au = f$ und somit $u_{n'} = A^{-1}f_n \rightharpoonup A^{-1}f = u$. Der Teilfolgenprinzip liefert die schwache Konvergenz der gesamten Folge. \square

Beispiel 1.3.3 (1D p -LAPLACE-Operator-Gleichung)

Betrachte den **eindimensionalen** Operator $\Delta_p u(x) := (|u'(x)|^{p-2}u'(x))'$ für $p \in (1, \infty)$ und das zugehörige Randwertproblem mit **NEUMANN-Randbedingungen**

$$\begin{cases} -\Delta_p u(x) = f(x), & x \in (a, b), \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

dessen **schwache Formulierung** lautet: zu $f \in V^*$ finde ein $u \in V$, sodass

$$a(u, v) := \int_a^b |u'(x)|^{p-2} u'(x) v'(x) dx = \langle f, v \rangle$$

für alle $v \in V := \mathcal{W}_0^{1,p}(a, b)$ gilt. Definiere $A: V \rightarrow V^* = W^{-1,q}(a, b)$, wobei p und q HÖLDER-konjugiert sind, durch $\langle Au, v \rangle := a(u, v)$. Dann ist A wohldefiniert, da $v \mapsto a(u, v)$ für jedes $u \in V$ linear und beschränkt ist: mit $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$ und somit $q(p-1) = p$ folgt

$$|a(u, v)| \stackrel{(H)}{\leq} \left(\int_a^b (|u'|^{p-1})^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |v'|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = |u|_{1,p}^{p-1} |v|_{1,p}.$$

Es folgt $\|Au\|_{-1,q} \leq |u|_{1,p}^{p-1}$.

Strikte Monotonie. Für $u, v \in V$ gilt

$$\langle Au - Av, u - v \rangle = \int_a^b \underbrace{(|u'|^{p-2} \cdot u' - |v'|^{p-2} \cdot v') (u' - v')}_{>0 \text{ nach Beispiel 1.3.1}} dx > 0.$$

Koerzivität. Für $u \in V$ gilt

$$\langle Au, u \rangle = \int_a^b |u'|^p dx = |u|_{1,p}^p \stackrel{(PF)}{=} \|u\|_V^p = \underbrace{|u|_{1,p}^{p-1}}_{=: \gamma(|u|_{1,p})} \cdot |u|_{1,p}.$$

Radialstetigkeit. Sei $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$ konvergent gegen t . Dann folgt mit dem **Satz von LEBESGUE** (L)

$$\begin{aligned} \langle A(u + t_n v), v \rangle &= \int_a^b \underbrace{|u' + t_n v'|^{p-2} \cdot (u' + t_n v') \cdot v'}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{punktweise}} |u' + tv'|^{p-2} \cdot (u' + tv') \cdot v'} dx \\ &\stackrel{(L)}{\rightarrow} \int_a^b |u' + tv'|^{p-2} \cdot (u' + tv') \cdot v' dx = \langle A(u + tv), v \rangle. \end{aligned}$$

Zur integrierbaren Majorante bemerke man das t_n durch 1 beschränkt und $(|u'|^{p-2} + |v'|^{p-2}) \cdot (u' + v') \cdot v'$ integrierbar ist.

Mit dem Satz von BROWDER-MINTY folgt die eindeutige Lösbarkeit von (6).

Da $V \subset W^{1,p}(\Omega)$ als abgeschlossener Unterraum die Reflexivität von $W^{1,p}(\Omega)$ erbt, ist A sogar demi- und somit hemistetig nach Lemma 1.2.4. \diamond

Für $p \geq 2$ ist A sogar **beschränkt LIPSCHITZ-stetig**: für alle $u, v \in V$ gilt

$$\|Au - Av\|_* \leq C \max(\|u\|, \|v\|) \|u - v\|.$$

beschränkt LIPSCHITZ-stetig

Wir berücksichtigen nun auch eine mögliche **Störung der linken Seite**. Die Monotonie und Radialstetigkeit von A und die Koerzitivität der gesamten linken Seite behalten wir bei, wir schreiben links jedoch den Störterm B , von dem wir **verstärkte Stetigkeit** fordern.

SATZ 1.3.2: VERSTÄRKT STETIGE STÖRUNG

Seien V ein reeller reflexiver separabler BANACH-Raum, $A: V \rightarrow V^*$ **monoton** und **radialstetig** sowie $B: V \rightarrow V^*$ **verstärkt stetig**. Ist $A + B$ **koerzitiv**, so ist $A + B$ surjektiv. Die Lösungsmenge von $(A + B)u = f$ ist schwach abgeschlossen.

Dies ist eine Verallgemeinerung des Satzes von BROWDER-MINTY ($B \equiv 0$). Die Monotonie und Radialstetigkeit von A gibt Konvexität der Lösungsmenge (gut), jedoch hat B keine solche Eigenschaften. Selbst wenn A strikt monoton ist, kann B die Eindeutigkeit kaputt machen.

Für den Beweis von Satz benötigen wir das folgende

Lemma 1.3.4 (Korollar zum Fixpunktsatz von BROUWER)

Sei $h: \mathbb{R}^m \supset \overline{B}(0, R) \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und erfülle $\langle h(z), z \rangle \geq 0$ auf $\partial B(0, R)$, d.h. für alle $\|z\| = R$. Dann besitzt h eine Nullstelle.

Beweis. Angenommen, es gilt $h(z) \neq 0$ für alle $z \in \overline{B}(0, R)$. Dann ist die Abbildung

$$g: \overline{B}(0, R) \rightarrow \partial \overline{B}(0, R), \quad z \mapsto -R \frac{h(z)}{\|h(z)\|}.$$

wohldefiniert und stetig. Da $\overline{B}(0, R)$ **konvex, abgeschlossen und nichtleer** ist, existiert nach dem Fixpunktsatz von BROUWER ein Fixpunkt z^* von g , d.h. $g(z^*) = z^*$. Dann gilt jedoch

$$0 \leq \langle h(z^*), z^* \rangle = h(z^*)g(z^*) = -R \frac{\langle h(z^*), h(z^*) \rangle}{\|h(z^*)\|} = -R \|h(z^*)\| < 0.$$

□

Beweis. (von Satz 1.3.2) ① Da V separabel ist, existiert eine **GALERKIN-Basis** $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $V_m := \text{span}(\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\})$, wobei $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ dicht in V ist. Das **diskrete Ersatzproblem** ist: gegeben $m \in \mathbb{N}$ und $f \in V^*$ finde zu $u^{(m)} \in V_m$ sodass

$$\langle (A + B)u^{(m)}, v^{(m)} \rangle = \langle f, v^{(m)} \rangle \quad \forall v^{(m)} \in V_m.$$

Es genügt, mit den Basisfunktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ zu testen, sodass dieses Problem äquivalent ist zu

$$h(u^{(m)}) = 0,$$

wobei wir die Zuordnung $v^{(m)} \in V_m \leftrightarrow \mathbf{v}^{(m)} := [v_1^{(m)}, \dots, v_m^{(m)}] \in \mathbb{R}^m$ für $v^{(m)} = \sum_{j=1}^m v_j^{(m)} \varphi_j$ betrachten und

$$h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad h(\mathbf{u}^{(m)})_j = \langle (A + B)\mathbf{u}^{(m)} - f, \varphi_j \rangle.$$

- ② Nach Lemma 1.3.4 hat h eine Nullstelle: es gilt

$$\begin{aligned} \langle h(\mathbf{v}^{(m)}), \mathbf{v}^{(m)} \rangle_{\mathbb{R}^m} &= \sum_{j=1}^m (h(\mathbf{v}^{(m)}))_j v_j^{(m)} \\ &= \langle (A + B)v^{(m)} - f, v^{(m)} \rangle \\ &\geq \gamma(\|v^{(m)}\|) \|v^{(m)}\| - \|f\|_* \|v^{(m)}\| \end{aligned}$$

gilt, da $A + B$ koerzitiv ist, wobei $\gamma(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \infty$.

Gilt nun $\|v^{(m)}\| = R$ für hinreichend großes $R > 0$, dann folgt $\gamma(\|v^{(m)}\|) \geq \|f\|_*$.

Auf V_m haben wir die von V induzierte Norm $\|\cdot\|$, auf \mathbb{R}^m können wir $\|\mathbf{v}^{(m)}\|_{\mathbb{R}^m} := \|v^{(m)}\|$ definieren.

Ferner ist h stetig: für $(\mathbf{v}_n^{(m)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ mit $\mathbf{v}_n^{(m)} \rightarrow \mathbf{v}^{(m)}$ gilt

$$\begin{aligned} \|h(\mathbf{v}_n^{(m)}) - h(\mathbf{v}^{(m)})\|_{\mathbb{R}^m} &= \left\| \left(\langle (A + B)v_n^{(m)} - (A + B)v^{(m)}, \varphi_j \rangle \right)_{j=1}^m \right\|_{\mathbb{R}^m} \\ &= \left\| \sum_{j=1}^m \langle (A + B)v_n^{(m)} - (A + B)v^{(m)}, \varphi_j \rangle \varphi_j \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \left| \langle (A + B)(v_n^{(m)} - v^{(m)}), \varphi_j \rangle \right| \|\varphi_j\| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

da B verstärkt stetig und A nach Lemma 1.2.8 ⑦ demistetig ist. Somit ist das diskrete Ersatzproblem lösbar.

- ③ Die Folge $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \subset V$ ist beschränkt: es existiert ein $R > 0$, sodass $\|u^{(m)}\| \leq R$ gilt. Sonst wäre

$$\gamma(\|u^{(m)}\|) \|u^{(m)}\| \leq \langle (A + B)u^{(m)}, u^{(m)} \rangle = \langle f, u^{(m)} \rangle \leq \|f\|_* \|u^{(m)}\|,$$

und somit $\gamma(\|u^{(m)}\|) \leq \|f\|_*$, was im Widerspruch zu $\gamma(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \infty$ steht. Da V reflexiv ist, existiert eine Teilfolge $(u^{(m')})_{m' \in \mathbb{N}}$ und ein $u \in V$, sodass $u^{(m')} \xrightarrow{m' \rightarrow \infty} u$ in V gilt.

- ④ Wir zeigen, dass $((A + B)u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \subset V^*$ beschränkt ist, da B beschränkt und A lokal beschränkt ist. Da A lokal beschränkt ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ und ein $M > 0$, sodass für alle $w \in V$ mit $\|w\| \leq \varepsilon$ auch $\|Aw\| \leq M$ gilt. Mit $\|u^{(m)}\| \leq R$ folgt

$$|\langle (A + B)u^{(m)}, u^{(m)} \rangle| = |\langle f, u^{(m)} \rangle| \leq R \cdot \|f\|_*. \quad (7)$$

Damit gilt

$$\|(A + B)u^{(m)}\|_* = \sup_{\substack{w \in V \\ \|w\| \leq \varepsilon}} \frac{\langle (A + B)u^{(m)}, w \rangle}{\varepsilon}$$

A-priori-Abschätzung

und für alle $w \in V$ mit $\|w\| \leq \varepsilon$

$$\begin{aligned}
\frac{\langle (A+B)u^{(m)}, w \rangle}{\varepsilon} &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left(\langle (A+B)u^{(m)}, w \rangle \right. \\
&\quad \left. + \langle Au^{(m)} - Aw, u^{(m)} - w \rangle \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \left(\langle Au^{(m)}, u^{(m)} \rangle - \langle Aw, u^{(m)} - w \rangle \right. \\
&\quad \left. + \langle Bu^{(m)}, w \rangle \right) \\
&\stackrel{(\tau)}{\leq} \frac{1}{\varepsilon} \left(\|f\|_* \cdot R + \|Aw\|_* \|u^{(m)} - w\| \right. \\
&\quad \left. + \|Bu^{(m)}\| \|w\| \right) \\
&\stackrel{\Delta \neq}{\leq} \frac{1}{\varepsilon} (\|f\|_* \cdot R + M(R + \varepsilon) + C\varepsilon).
\end{aligned}$$

Es folgt die Beschränktheit von $((A+B)u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \subset V^*$ und somit auch von $((A+B)u^{(m')})_{m' \in \mathbb{N}} \subset V^*$.

- ⑤ Somit existiert eine Teilfolge $(u^{(m'')})_{m'' \in \mathbb{N}}$ und ein $\tilde{f} \in V^*$, sodass $(A+B)u^{(m'')} \rightharpoonup \tilde{f}$ in V^* gilt.

Es ist $\tilde{f} = f$, denn

$$\langle (A+B)u^{(m'')}, v^{(n)} \rangle = \langle f, v^{(n)} \rangle$$

gilt für alle $v^{(n)} \in V_n \subset V_{m''}$, $n \leq m''$. Für festes $n \in \mathbb{N}$ und mit $m'' \rightarrow \infty$ folgt

$$\langle \tilde{f}, v^{(n)} \rangle = \langle f, v^{(n)} \rangle$$

für alle $v^{(n)} \in V_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit für alle $v \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \subset V$, welche dicht liegt. Es folgt $\tilde{f} = f$.

- ⑥ Mit $u^{(m'')} \rightharpoonup u$ in V und $(A+B)u^{(m'')} \rightharpoonup f$ in V^* bleibt zu zeigen, dass $(A+B)u = f$. Da B verstärkt stetig ist, folgt $Bu^{(m'')} \rightarrow Bu$ in V^* . Da A monoton ist, gilt für alle $w \in V$

$$\begin{aligned}
\langle f - Bu^{(m)}, u^{(m)} \rangle &= \langle Au^{(m)}, u^{(m)} \rangle \\
&\geq \langle Au^{(m)}, u^{(m)} \rangle - \langle Au^{(m)} - Aw, u^{(m)} - w \rangle \\
&= \langle Au^{(m)}, w \rangle + \langle Aw, u^{(m)} - w \rangle.
\end{aligned}$$

Für $m = m'' \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$\langle f - Bu, u \rangle \geq \langle f - Bu, w \rangle + \langle Aw, u - w \rangle$$

und damit

$$\langle f - Bu, u - w \rangle \geq \langle Aw, u - w \rangle.$$

Mit MINTY'S TRICK erhalten wir aufgrund der Radialstetigkeit von A die Gleichheit $f - Bu = Au$.

- ⑦ Die Lösungsmenge ist schwach abgeschlossen: seien $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ Lösungen zur rechten Seite $f \in V^*$, d.h. $(A+B)u_n = f$ mit $u_n \rightharpoonup u$ in V . Dann gilt $Bu_n \rightarrow Bu$ in V^* . Weiterhin ist für alle $v \in V$

wegen der **Monotonie von A**

$$\begin{aligned}
 \langle f - Av, u - v \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f - Av, u_n - v \rangle \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n + Bu_n - Av, u_n - v \rangle \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n - Av, u_n - v \rangle + \langle Bu_n, u_n - v \rangle \\
 &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Bu_n, u_n - v \rangle = \langle Bu, u - v \rangle.
 \end{aligned}$$

Wir erhalten $\langle f - Bu - Av, u - v \rangle$. Mit **MINTY's Trick** folgt wieder $Au = f - Bu$. \square

Lemma 1.3.5 (Starke Konvergenz der GALERKIN Lösungen)

Seien die Voraussetzungen des Satzes von BROWDER-MINTY erfüllt. Die Folge der GALERKIN Lösungen konvergiert stark gegen die Lösung u von $Au = f$, wenn

- ① $A: V \rightarrow V^*$ gleichmäßig monoton ist,
- ② A d -monoton und V gleichmäßig konvex ist.

Beweis. Sei $u_n \rightharpoonup u$ in V und $Au_n \xrightarrow{*} Au$ in V^* .

- Dann gilt

$$\begin{aligned}
 0 \leq \rho(\|u_n - u\|) &\leq \langle Au_n - Au, u_n - u \rangle \\
 &= \underbrace{\langle Au_n, u_n \rangle}_{\rightarrow \langle f, u_n \rangle} - \underbrace{\langle Au_n, u \rangle}_{\rightarrow \langle f, u \rangle} - \underbrace{\langle Au, u_n - u \rangle}_{\rightarrow 0} \\
 &\rightarrow \langle f - Au, u \rangle = 0.
 \end{aligned}$$

- Analog gilt $(\alpha(\|u_n\|) - \alpha(\|u\|))(\|u_n\| - \|u\|) \rightarrow 0$ und somit $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$. Weil gleichmäßig konvexe Räume die RADON-RIESZ-Eigenschaft besitzen, folgt $u_n \rightarrow u$ in V . \square

Beispiel 1.3.6 Für $p \in [2, \infty)$ und ein beschränktes Gebiet Ω mit glattem Rand betrachte

$$\begin{cases} |u|^{p-2}u - \Delta_p u = f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

mit **homogenen NEUMANN Randbedingungen**.

Wir multiplizieren die Gleichung mit $v \in V := W^{1,p}(\Omega)$, integrieren und erhalten

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} f v \, dx &= \int_{\Omega} |u|^{p-2} u v \, dx - \int_{\Omega} \nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) v \, dx \\
 &= \int_{\Omega} |u|^{p-2} u v + (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} v |\nabla u|^{p-2} \underbrace{\nabla u \cdot \nu}_{=0} \, dS \\
 &= \int_{\Omega} |u|^{p-2} u v \, dx + \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \nabla v \, dx,
 \end{aligned}$$

wobei wir die **GREENSchen Formel** und die Randbedingung verwenden.

Wir haben eine **mehrdimensionale Form der Regel der partiellen Integration** verwendet. Wir schieben also eine Ableitung (in Form der Divergenz bzw. des Gradienten) auf die Testfunktion. Dann kommen natürlich noch Randterme hinzu, d.h. wir müssen über $\partial\Omega$ integrieren. Im Wesentlichen ist das der **Satz von GAUSS**, d.h. das ν ist dann die **äußere Normale** von

Wir definieren die Operatoren $A, B: V \rightarrow V^*$ mit

$$\langle Au, v \rangle := \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \nabla v \, dx \quad \text{und} \quad \langle Bu, v \rangle := \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv \, dx.$$

Diese Operatoren sind wohldefiniert: Mit der HÖLDER-Ungleichung gilt

$$|\langle Au, v \rangle| \stackrel{(H)}{\leq} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^{(p-1)q} \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|\nabla u\|_{0,p}^{p-1} \|v\|_V,$$

wobei $q := \frac{p}{p-1}$. Analog folgt $|\langle Bu, v \rangle| \leq \|u\|_{0,p}^{p-1} \|v\|_V$.

Aus Beispiel 1.3.3 wissen wir, dass A strikt monoton und radialstetig ist. Zunächst ist $A + B$ **koerzitiv**, da

$$\langle (A + B)u, u \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^p + |u|^p \, dx = \|u\|_V^p = \|u\|_V^{p-1} \|u\|_V$$

gilt. Ferner ist B **verstärkt stetig**: für $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ mit $u_n \rightharpoonup u \in V$ existiert eine Teilfolge $(u_{n'})_{n' \in \mathbb{N}}$ von $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $u_{n'} \xrightarrow{n' \rightarrow \infty} u$ in $L^p(\Omega)$, da nach dem Satz von RELICH-KONDRACHOV $V \xhookrightarrow{c} L^p(\Omega)$ gilt. Mit (5) folgt

$$\begin{aligned} |\langle Bu_{n'} - Bu, v \rangle| &\stackrel{\Delta \neq}{\leq} \int_{\Omega} ||u_{n'}|^{p-2} u_{n'} - |u|^{p-2} u| |v| \, dx \\ &\stackrel{(5)}{\leq} (p-1) \int_{\Omega} \max(|u_{n'}|, |u|)^{p-2} |u_{n'} - u| |v| \, dx \\ &\leq (p-1) \int_{\Omega} (|u_{n'}| + |u|)^{p-2} |u_{n'} - u| |v| \, dx \\ &\stackrel{(H)}{\leq} (p-1) (\|u_{n'}\|_p + \|u\|_p)^{p-2} \|u_{n'} - u\|_p \|v\|_V, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Hölder-Ungleichung mit den Exponenten $\frac{p}{p-2}$, p und p benutzt haben. Da $(u_{n'})_{n' \in \mathbb{N}}$ (stark) in $L^p(\Omega)$ konvergiert und somit beschränkt ist, existiert eine Konstante $c > 0$, welche nur von u und p abhängt, sodass

$$\|Bu_{n'} - Bu\|_* = \sup_{v \neq 0} \frac{|\langle Bu_{n'} - Bu, v \rangle|}{\|v\|_V} \leq c \|u_{n'} - u\|_{0,p} \xrightarrow{n' \rightarrow \infty} 0.$$

Es folgt $Bu_{n'} \rightarrow Bu$ in V^* . Da wir diese Argument für eine beliebige Teilfolgen anwenden können, folgt die Aussage mit dem Teilfolgenprinzip.

Hier ist A sogar strikt monoton, aber die Lösung ist trotzdem nicht eindeutig. \diamond

15.11.2019

Beispiel 1.3.7 (NAVIER-STOKES (eindimensional))

Betrachte für $\varepsilon > 0$ (später: Viskosität) das gewöhnliche nichtlineare Randwertproblem

$$\begin{cases} -\varepsilon u''(x) + u(x)u'(x) = f(x), & x \in (a, b), \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

dessen variationelle Lösung lautet: Sei $V := \mathcal{H}_0^1(a, b)$ und definiere $A, B: V \rightarrow V^*$ durch

$$\langle Au, v \rangle := \varepsilon \int_a^b u'v' \, dx \quad \text{und} \quad \langle Bu, v \rangle := \int_a^b uu'v \, dx$$

sowie $\langle f, v \rangle := \int_a^b f v \, dx$ (gleicher Name für Funktion und zugehöriges Funktional) für $u, v \in V$.

In DGL IIA zeigten wir, dass A (bis auf den Faktor $\varepsilon > 0$ ist das die schwache Formulierung des LAPLACE-Operators) wohldefiniert, stark positiv und beschränkt ist. Nach unseren neuen Begriffen ist er somit **stark monoton**, **radialstetig** (weil stetig) und **koerzitiv** (früher: **stark positiv**).

Wohldefiniertheit von B . Für $u, v \in V$ gilt

$$\begin{aligned} \langle Bu, v \rangle &= \int_a^b uu'v \, dx = \frac{1}{2} \int_a^b (u^2)'v \, dx \stackrel{\text{PI}}{=} -\frac{1}{2} \int_a^b u^2 v' \, dx \\ &\stackrel{\text{CS}}{\leq} \frac{1}{2} \left(\int_a^b u^4 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (v')^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \|u\|_{0,4}^2 |v|_{1,2} \end{aligned}$$

und somit $\|Bu\|_* \leq \frac{1}{2} \|u\|_{0,4}^2$. Da $\mathcal{H}_0^1 \hookrightarrow \mathcal{C}([a, b]) \hookrightarrow L^4(a, b)$ gilt, folgt

$$\|Bu\|_* \leq \frac{C}{2} |u|_{1,2}^2, \quad C := (b-a)^{\frac{3}{2}}. \quad (9)$$

Das sieht man so:

$$|\langle Bu, v \rangle| \leq \frac{\sqrt{b-a}}{2} \|u\|_{\mathcal{C}([a,b])}^2 |v|_{1,2} \leq \frac{\sqrt{b-a}}{2} (b-a) \|u\|_{1,2}^2 |v|_{1,2}$$

Koerzitivität von $A + B$. Für $u \in V$ gilt

$$\langle Bu, u \rangle = \int_a^b u^2 u' \, dx = \frac{1}{3} \int_a^b \frac{d}{dx} u^3(x) \, dx = \frac{u^3(b) - u^3(a)}{3} \stackrel{\text{(RB)}}{=} 0.$$

Somit folgt $\langle (A + B)u, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \varepsilon \|u\|^2$ und mit $\gamma(\|u\|) := \varepsilon \|u\|$ folgt die Behauptung.

Verstärkte Stetigkeit von B . Das folgende Verfahren funktioniert nur, da der **Störterm von niedrigerer Ordnung** ist und wir nach den **SOLLEV'schen Einbettungssätzen Regularität „übrig haben“**, die wir in **Kompaktheit „unwandeln“** können. Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schwach konvergent gegen $u \in V$. Wir wollen $Bu_n \rightarrow Bu$ in V^* zeigen. Für $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned} |\langle Bu_n - Bu, v \rangle| &\leq \int_a^b |u_n \cdot u'_n - u \cdot u'| |v| \, dx = \frac{1}{2} \int_a^b |(u_n^2)' - (u^2)'| |v| \, dx \\ &\stackrel{\text{PI}}{\leq} \frac{1}{2} \int_a^b |u_n^2 - u^2| |v'| \, dx = \frac{1}{2} \int_a^b |u_n - u| |u_n + u| |v'| \, dx \\ &\stackrel{\text{H}}{\leq} \frac{1}{2} \|u_n - u\|_{0,4} \|u_n + u\|_{0,4} |v|_{1,2}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\|Bu_n - Bu\|_* \stackrel{\Delta \neq}{\leq} \frac{1}{2} \|u_n - u\|_{0,4} (\|u_n\|_{0,4} + \|u\|_{0,4}).$$

Es gilt $\mathcal{H}_0^1 \stackrel{c}{\hookrightarrow} \mathcal{C}([a, b]) \hookrightarrow L^4(a, b)$. Da $u_n \rightharpoonup u$ in $\mathcal{H}_0^1(a, b)$ gilt, ist $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{H}_0^1 beschränkt und wegen der Einbettung auch in $L^4(a, b)$. Es folgt

$$\|Bu_n - Bu\|_* \leq C \|u_n - u\|_{0,4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

da aus $u_n \rightharpoonup u$ in $\mathcal{H}_0^1(a, b)$ und $\mathcal{H}_0^1(a, b) \stackrel{c}{\hookrightarrow} L^4(a, b)$ (id ist linear!) $u_n \rightarrow u$ in $L^4(a, b)$ folgt.

Mit dem Satz von BROWDER-MINTY folgt die Lösbarkeit von (8).

Eindeutigkeit. Seien $u_1, u_2 \in V$ Lösungen von (8). Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \|u_1 - u_2\|^2 &= \langle A(u_1 - u_2), u_1 - u_2 \rangle \stackrel{L}{=} \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle \\
 &= \langle f - Bu_1 - (f - Bu_2), u_1 - u_2 \rangle \\
 &= \langle Bu_2 - Bu_1, u_2 - u_1 \rangle \\
 &\stackrel{PI}{=} -\frac{1}{2} \int_a^b (u_2^2 - u_1^2)(u_1 - u_2)' dx \\
 &\stackrel{H}{\leq} \frac{1}{2} (\|u_1\|_{0,4} + \|u_2\|_{0,4}) \|u_2 - u_1\|_{0,4} \|u_1 - u_2\|_{1,2} \\
 &\stackrel{PF}{\leq} \frac{C}{2} |u_1 - u_2|_{1,2}^2 (|u_1|_{1,2} + |u_2|_{1,2}).
 \end{aligned}$$

Für $i \in \{1, 2\}$ gilt

$$\varepsilon \|u_i\|^2 = \langle Au_i, u_i \rangle = \langle f - Bu_i, u_i \rangle = \langle f, u_i \rangle \leq \|f\|_* \|u_i\| \quad (10)$$

($\langle Bu_i, u_i \rangle = 0$!) und somit $|u_i|_{1,2} = \|u_i\| \leq \frac{\|f\|_*}{\varepsilon}$. Aus der obigen Ungleichungskette folgt somit

$$\varepsilon \|u_1 - u_2\|^2 \leq \frac{(b-a)^{\frac{3}{2}}}{2\varepsilon} \|f\|_* \cdot 2 \|u_1 - u_2\|^2 \quad (11)$$

und somit $\|u_1 - u_2\|^2 = 0$ wenn die Daten ε^{-2} , $(b-a)$ und $\|f\|_*$ klein sind, also deren Produkt kleiner als 1. \diamond

Beispiel 1.3.8 Betrachte das homogene DIRICHLET-Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) + g(u(x)) = f(x), & x \in (a, b), \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, sodass $\inf_{s \in \mathbb{R}} g(s) \cdot s > -\infty$ gilt (für Koerzivität). Ferner existieren Konstanten $c, r > 0$, sodass $|g(s)| \leq c(1 + |s|^r)$ gilt (Wachstumsbedingung, die Wohldefiniert gibt). Für die variationelle Formulierung wähle $V := \mathcal{H}_0^1$ und $A, B : V \rightarrow V^*$ definiert durch

$$\langle Au, v \rangle := \int_a^b u'v' dx \quad \text{und} \quad \langle Bu, v \rangle := \int_a^b g(u)v dx$$

für $u, v \in V$.

Wohldefiniertheit von B . Für $u, v \in V$ gilt

$$\begin{aligned}
 \langle Bu, v \rangle &= \int_a^b g(u)v dx \leq C \int_a^b (1 + |u|^r)v dx \\
 &\stackrel{CS}{\leq} C \left(\int_a^b (1 + |u|^r)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{0,2} \\
 &\leq 2C \left(\int_a^b (1 + |u|^{2r}) dx \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{0,2} \\
 &\stackrel{PF}{\leq} \hat{C}(\sqrt{b-a} + \|u\|_{0,2}^r) |v|_{1,2} \stackrel{\mathcal{H}_0^1 \hookrightarrow L^{2r}}{\leq} \bar{C}(1 + |u|_{1,2}^r) |v|_{1,2}
 \end{aligned}$$

und somit $\|Bu\|_* \leq \bar{C}(1 + |u|_{1,2}^r)$.

Koerzitivität von $A + B$. Für $u \in V$ gilt

$$\langle Bu, u \rangle = \int_a^b g(u(x))u(x) dx \geq (b-a) \inf_{s \in \mathbb{R}} g(s) \cdot s > -\infty.$$

Da $\langle Au, u \rangle = \|u\|^2$ gilt, folgt hieraus die Koerzitivität.

Verstärkte Stetigkeit von B . Sei $u_n \rightarrow u$ in $\mathcal{H}_0^1(a, b)$. Wir zeigen $\|Bu - Bu_n\|_* \rightarrow 0$. Für $v \in \mathcal{H}_0^1(a, b)$ gilt

$$\begin{aligned} \langle Bu - Bu_n, v \rangle &= \int_a^b (g(u(x)) - g(u_n(x)))v(x) dx \\ &\leq \|g(u) - g(u_n)\|_\infty \underbrace{\|v\|_{0,1}}_{<|v|_{1,2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

denn: da g stetig ist und $\mathcal{H}_0^1(a, b) \xrightarrow{c} \mathcal{C}([a, b])$ gilt, folgt zunächst $u_n \rightarrow u$ gleichmäßig und somit $g(u_n) \rightarrow g(u)$ gleichmäßig. \diamond

SATZ 1.3.3: F. MURAT (198?)

Betrachte für ein beschränktes Gebiet Ω das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\nabla \cdot a(x, \nabla u_\varepsilon(x)) = f_\varepsilon(x), & x \in \Omega, \\ u_\varepsilon(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

wobei $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine CARATHEODORY-Bedingung erfüllt (messbar im ersten, stetig im zweiten Argument) und gilt

- ① $\exists \mu, \lambda > 0, p > 1 : a(x, z) \cdot z \geq \mu|z|^p - \lambda \quad \forall x \in \Omega, z \in \mathbb{R}^d.$
- ② $(a(x, y) - a(x, z))(y - z) > 0 \quad \forall x \in \Omega, \forall y, z \in \mathbb{R}^d$
- ③ $|a(x, z)| \leq C(1 + |z|^{p-1}), x \in \Omega, z \in \mathbb{R}^d.$

Dann gilt

- i Mit $\langle Au_\varepsilon, v \rangle := \int_\Omega a(x, \nabla u_\varepsilon(x)) \cdot \nabla v(x) dx = \langle f_\varepsilon, v \rangle, v \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ ist eindeutig lösbar für $f_\varepsilon \in W^{-1,q}(\Omega)$.
- ii Sei $f_\varepsilon \rightarrow f$ in $W^{-1,q}(\Omega)$. Dann folgt $u_\varepsilon \rightarrow u$ in $W_0^{1,p}$, wobei u das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\nabla \cdot a(x, \nabla u(x)) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

löst.

22.11.2019

Beweis. Für i zeigen wir, dass die Voraussetzungen des Satzes von BROWDER-MINTY erfüllt sind. Monotonie folgt sofort aus ②. Sei $t_n \rightarrow t$. Weil a im zweiten Argument stetig ist (CARATHEODORY), folgt mit dem Satz von LEBESGUE

$$\begin{aligned} \langle A(u + t_n v), v \rangle &= \int_\Omega a(x, \nabla u(x) + t_n \nabla v(x)) \nabla v(x) dx \\ &\xrightarrow[\text{LEBESGUE}]{n \rightarrow \infty} \int_\Omega a(x, \nabla u(x) + t \nabla v(x)) \nabla v(x) dx = \langle A(u + tv), v \rangle. \end{aligned}$$

- ① Sei $u_\varepsilon \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ die variationelle Lösung zur rechten Seite $f_\varepsilon \in W^{-1,q}(\Omega)$, d.h. $\langle Au_\varepsilon, \nu \rangle = \langle f_\varepsilon, \nu \rangle$ gilt für alle $\nu \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Man erhält eine **a-priori Abschätzung** für die Lösung u_ε durch **Testen mit der Lösung** ($\nu = u_\varepsilon$): für $x \in \Omega$ gilt

$$\begin{aligned} \mu |u_\varepsilon|_{1,p}^p - \lambda |\Omega| &= \mu \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon(x)|^p dx - \lambda |\Omega| \\ &\stackrel{\textcircled{1}}{\leq} \langle Au_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle = \langle f_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle \stackrel{\text{CS}}{\leq} \|f_\varepsilon\|_{-1,q} |u_\varepsilon|_{1,p} \end{aligned}$$

und somit

$$\mu |u_\varepsilon|_{1,p}^{p-1} \leq \|f_\varepsilon\|_{-1,q} + \frac{\lambda |\Omega|}{|u_\varepsilon|_{1,p}}.$$

Also ist $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ beschränkt (für $|u_\varepsilon|_{1,p} \geq 1$ ist das klar, für $|u_\varepsilon|_{1,p} < 1$ ebenso).

II Für den HÖLDER-konjugierten Exponenten $q > 1$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |a(x, \nabla u_\varepsilon(x))|^q dx &\stackrel{\textcircled{3}}{\leq} C \int_{\Omega} (1 + |\nabla u_\varepsilon(x)|^{p-1})^q dx \\ &\stackrel{(*)}{=} C_1 \int_{\Omega} 1 + |\nabla u_\varepsilon(x)|^p dx \quad ((p-1)q = p) \\ &= C_1(|\Omega| + |u_\varepsilon|_{1,p}^p). \end{aligned}$$

Für $(*)$ benutzten wir die Abschätzung

$$(1 + |x|)^k \leq C_k(1 + |x|^k), \quad k \in [0, \infty), \quad C_k := 2^{k-1}, \quad (13)$$

welche direkt aus der Konvexität von $t \mapsto t^k$ mit der Ungleichung von JENSEN folgt.

Nach **1** ist also auch die Folge $(\sigma_\varepsilon := a(\cdot, \nabla u_\varepsilon(\cdot)))_{\varepsilon>0} \subset L^q$ beschränkt. Bis auf Teilfolgen gilt somit aufgrund der Reflexivität $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ in $\mathcal{W}_0^{1,p}$ und $\sigma_\varepsilon \rightharpoonup \sigma$ in L^q . **WIRD HIER STETIGKEIT VON a IM ZWEITEN ARGUMENT BENUTZT?**

Zunächst gilt für $\nu \in \mathcal{W}^{-1,q}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla \nu dx \leftarrow \int_{\Omega} \sigma_\varepsilon \cdot \nabla \nu dx = \langle f_\varepsilon, \nu \rangle \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \langle f, \nu \rangle$$

und somit $f = \int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla(\cdot) dx$.

III Wir **identifizieren die Grenzwerte** und zeigen dafür $\sigma = a(\cdot, \nabla u(\cdot))$.

Da $f_\varepsilon \rightarrow f$ stark konvergiert, gilt für alle $\omega \in \mathcal{W}_0^{1,p}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla u dx &= \langle f, u \rangle \leftarrow \langle f_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle = \langle Au_\varepsilon, u_\varepsilon \\ &= \int_{\Omega} (a(x, \nabla u_\varepsilon) - a(x, \nabla \omega)) (\nabla u_\varepsilon - \nabla \omega) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} a(x, \nabla \omega) (\nabla u_\varepsilon - \nabla \omega) + a(x, u_\varepsilon(x)) \cdot \nabla \omega dx \\ &\stackrel{\textcircled{2}}{\geq} 0 + \int_{\Omega} a(x, \nabla \omega) (\nabla u - \nabla \omega) + \sigma \nabla \omega dx, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Abschätzung $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ und etwas der Form $\mathcal{H}_0^1 \hookrightarrow L^2 = (L^2)^* \hookrightarrow \mathcal{H}_0^{-1}$ benutzt haben (und Stetigkeit?) ???

Also gilt

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot (\nabla u - \nabla w) \, dx \geq \int_{\Omega} a(x, \nabla w) (\nabla u - \nabla w) \, dx$$

für alle $w \in \mathcal{W}_0^{1,p}$. Für $w := u + t\nu$ und $t > 0$ folgt

$$\mp t \cdot \int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla \nu \, dx \geq \mp t \int_{\Omega} a(x, \nabla(u \pm t\nu)) \cdot \nabla \nu \, dx$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla \nu \, dx &\leq \int_{\Omega} a(x, \nabla(u + t\nu)) \cdot \nabla \nu \, dx \\ &\geq \int_{\Omega} a(x, \nabla(u - t\nu)) \cdot \nabla \nu \, dx. \end{aligned}$$

Aufgrund der CARATHEODORY-Bedingung konvergiert der rechte Integrand punktweise für $t \searrow 0$ fast überall gegen $a(x, \nabla u) \nabla \nu$ und somit mit dem Satz von LEBESGUE

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla \nu \, dx = \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \nabla \nu \, dx$$

für alle $\nu \in \mathcal{W}_0^{1,p}$.

Bis jetzt haben wir

$$\int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \nu \, dx \leftarrow \int_{\Omega} a(x, \nabla u_{\varepsilon}) \cdot \nabla \nu \, dx = \langle f_{\varepsilon}, \nu \rangle \rightarrow \langle f, \nu \rangle$$

für alle $\nu \in \mathcal{W}_0^{1,p}$. Somit löst u das Randwertproblem zur rechten Seite f . Bisher haben wir nur $u_{\varepsilon} \rightarrow u$ in $\mathcal{W}_0^{1,p}$. Da $\mathcal{W}_0^{1,p} \hookrightarrow L^p$ ist, folgt $u_{\varepsilon} \rightarrow u$ in L^p . Zu zeigen bleibt die **Konvergenz der Gradienten**: $\nabla u_{\varepsilon} \rightarrow \nabla u$ in L^p .

Dazu benutzen wir den unten stehenden Satz von VITALI. Betrachte

$$e_{\varepsilon}(x) := a(x, \nabla u_{\varepsilon}(x)) - a(x, \nabla u(x)) \cdot (\nabla u_{\varepsilon}(x) - \nabla u(x)) \geq 0.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} e_{\varepsilon}(x) \, dx = \langle f_{\varepsilon}, u_{\varepsilon} \rangle - \int_{\Omega} a(x, \nabla u(x)) (\nabla u_{\varepsilon}(x) - \nabla u(x)) \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} a(x, \nabla u_{\varepsilon}(x)) \nabla u(x) \, dx \\ &\xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \langle f, u \rangle - 0 - \int_{\Omega} a(x, \nabla u(x)) \cdot \nabla u(x) \, dx \\ &= \langle f, u \rangle - \langle f, u \rangle = 0, \end{aligned}$$

also $e_{\varepsilon} \rightarrow 0$ in $L^1(\Omega)$. Mit der **Umkehrung des Satz von LEBESGUE** gilt bis auf Teilfolgen

$$\exists g \in L^1 : |e_{\varepsilon}| \leq g \text{ f.ü.}, \quad e_{\varepsilon} \rightarrow 0 \text{ f.ü.}$$

Für $A \subset \Omega$ gilt

$$\begin{aligned} \mu \int_A |\nabla u_{\varepsilon}|^p \, dx - \lambda |A| &\leq \int_A a(x, \nabla u_{\varepsilon}) \cdot \nabla u_{\varepsilon} \, dx \\ &= \int_A e_{\varepsilon} + a(x, \nabla u) (\nabla u_{\varepsilon} - \nabla u) \\ &\quad + a(x, \nabla u_{\varepsilon}) \nabla u \, dx. \end{aligned}$$

Wir schätzen nun die Summanden im Integral einzeln ab. Es gilt $\int_A e_\varepsilon(x) dx \leq \int_A g(x) dx$. Für den zweiten Summand gilt

$$\begin{aligned} \int_A a(x, \nabla u_\varepsilon) \nabla u dx &\stackrel{(3)}{\leq} c \int_A (1 + |\nabla u_\varepsilon|^{p-1}) |\nabla u| dx \\ &\stackrel{(13)}{\leq} c_1 \left(\int_A 1 + |\nabla u_\varepsilon|^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_A |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c_2 (|A| + |u_\varepsilon|_{1,p})^{\frac{p}{q}} \left(\int_A |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Der erste Faktor in der letzten Zeile richtig?? wo kommt das p/q her???

Für den letzten Summand gilt

$$\begin{aligned} \int_A a(x, \nabla) (\nabla u_\varepsilon - \nabla u) dx &\stackrel{(3)}{\leq} c \int_A (1 + |\nabla u|^{p-1}) (|\nabla u_\varepsilon| + |\nabla u|) \\ &\stackrel{H}{\leq} c \left(\int_A 1 + |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad \cdot \left(\int_A |\nabla u_\varepsilon|^p + |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Somit ist $(\nabla u)_\varepsilon \subset L^p$ gleichgradig integrierbar. **WAS WENN $\|g\|_1$ GROß IST???**

Nun bleibt zu zeigen, dass die Gradienten punktweise fast überall konvergieren. Für alle geeigneten (dort, wo die punktweise konv. gilt??) $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} \mu |\nabla u_\varepsilon(x)|^p + \lambda &\leq a(x, \nabla u_\varepsilon(x)) \cdot \nabla u_\varepsilon(x) \\ &\leq (a(x, \nabla u_\varepsilon) - a(x, \nabla u)) (\nabla u_\varepsilon - \nabla u) \\ &\quad + a(x, \nabla u) (\nabla u_\varepsilon - \nabla u) + a(x, \nabla u_\varepsilon) \nabla u \\ &\stackrel{(3)}{\leq} e_\varepsilon(x) + c (1 + |\nabla u_\varepsilon|^{p-1}) |\nabla u| \\ &\quad + c (1 + |\nabla u|^{p-1}) |\nabla u_\varepsilon - \nabla u| \\ &\stackrel{Y}{\leq} e_\varepsilon(x) + C |\nabla u| + \frac{\mu}{4} |\nabla u_\varepsilon|^p + C |\nabla u|^p + \frac{\mu}{4} |\nabla u_\varepsilon|^p \\ &\quad + C (1 + |\nabla u|^{p-1})^q + C (1 + |\nabla u|^{p-1}) |\nabla u|, \end{aligned}$$

wobei wir bei (Y) die YOUNGSche Ungleichung $ab \leq \varepsilon a^p + cb^q$, $c := \frac{(p\varepsilon)^{1-q}}{q}$ mit $\varepsilon = \frac{\mu}{4}$ verwenden. Es folgt

$$\frac{\mu}{2} |\nabla u_\varepsilon(x)|^p \leq \lambda + e_\varepsilon(x) + C |\nabla u| + \bar{C} |\nabla u|^p + \hat{C}.$$

Somit ist $(\nabla u_\varepsilon(x))_{\varepsilon>0} \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, also gilt bis auf Teilfolgen $\nabla u_\varepsilon(x) \rightarrow \xi$. Wir zeigen $\nabla u(x) = \xi$.

Da

$$0 \leq \underbrace{(a(x, \nabla u_\varepsilon(x)) - a(x, \nabla u(x))) (\nabla u_\varepsilon(x) - \nabla u(x))}_{\rightarrow (a(x, \xi) - a(x, \nabla u(x))) (\xi - \nabla u(x))} = e_\varepsilon(x) \rightarrow 0$$

gilt, folgt die Aussage aus (2). \square

SATZ 1.3.4: KONVERGENZSATZ VON VITALI (1907)

Sei $g_n \rightarrow g$ (punktweise!) fast überall für $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$. Existiert zu jedem $\eta > 0$ ein $\delta > 0$ sodass $\int_A |g_n|^p dx < \eta$ für alle messbaren Menge A mit $|A| < \delta$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (gleichgradige Integrierbarkeit), folgt $g_n \rightarrow g$ in L^p .

Pseudomonotone Operatoren

In diesem Kapitel verallgemeinern wir den Satz von BROWDER-MINTY bzw. den Satz 1.3.2. Sei dafür wieder stets V ein reeller separabler reflexiver BANACH-Raum und $A: V \rightarrow V^*$ ein Operator.

TODO find M operator which is not pseudomonotone.

29.11.2019

DEFINITION 2.0.1 (PSEUDOMONOTONIE (BREZIS, 1968))

Ein Operator A heißt **pseudomonoton**, wenn aus $u_n \rightharpoonup u$ in V und $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0$ folgt, dass gilt:

$$\langle Au, u - w \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - w \rangle \quad \forall w \in V.$$

pseudomonoton

Erinnerung (Eigenschaften von limsup und liminf). Es gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \text{und} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} -a_n = -\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Gilt $b_n \rightarrow b$ so folgt $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + b$. \diamond

Lemma 2.0.2 (Äquivalente Charakterisierung)

Ein beschränkter Operator A ist genau dann pseudomonoton, wenn aus $u_n \rightharpoonup u$ in V und $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0$ folgt, dass $Au_n \rightharpoonup Au$ und $\langle Au_n, u_n \rangle \rightarrow \langle Au, u \rangle$ gilt.

Beweis. " \implies ": Seien A pseudomonoton und $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ eine Folge mit $u_n \rightharpoonup u$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0$. Weil A pseudomonoton ist, gilt $\langle Au, u - w \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - w \rangle$ für alle $w \in V$. Mit $w = u$ folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle$$

und somit $\langle Au_n, u_n - u \rangle \rightarrow 0$ (weil $\liminf \leq \limsup$). Also gilt für alle $v \in V$

$$\begin{aligned} \langle Au, u - v \rangle &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - v \rangle \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} (\langle Au_n, u_n - u \rangle + \langle Au_n, u - v \rangle) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle + \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u - v \rangle \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u - v \rangle. \end{aligned}$$

Also gilt für alle $w \in V$ (mit $w := u - v$) $\langle Au, w \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, w \rangle$.

Die selbe Ungleichung mit $-w$ lautet

$$\begin{aligned} -\langle Au, w \rangle &= \langle Au, -w \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, -w \rangle \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} (-\langle Au_n, w \rangle) = -\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, w \rangle, \end{aligned}$$

und somit $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, w \rangle \leq \langle Au, w \rangle$. Insgesamt erhält man also $\langle Au, w \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, w \rangle$ für alle $w \in V$, also $Au_n \rightharpoonup Au$ in V^* .

Da auch $\langle Au_n, u \rangle \rightarrow \langle Au, u \rangle$ (Lemma 1.1.14) gilt, folgt $\langle Au_n, u_n \rangle \rightarrow \langle Au, u \rangle$.

" \Leftarrow ": Für $w \in V$ gilt

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - w \rangle &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n \rangle - \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, w \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n \rangle - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, w \rangle \\ &= \langle Au, u \rangle - \langle Au, w \rangle = \langle Au, u - w \rangle. \end{aligned}$$

Somit ist A pseudomonoton. \square

Beispiel 2.0.3 Seien A und $-A$ (pseudo- / strikt) monoton. Dann ist $A \equiv 0$ / nicht existent / konstant.

- Sind A und $-A$ monoton, so gilt für alle $u, v \in V$

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \leq 0 \leq \langle Au - Av, u - v \rangle$$

und somit $\langle Au - Av, u - v \rangle = 0$. Also muss A konstant sein.

- Sind A und $-A$ strikt monoton, gilt für alle $v \neq w \in V$

$$0 > \langle Av - Aw, v - w \rangle > 0,$$

also kann A nicht existieren.

- Sind A und $-A$ pseudomonoton, gilt für alle Folgen $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $u_n \rightarrow u$ in V mit $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0$

$$\langle Au, u - w \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - w \rangle \quad \forall w \in V.$$

sowie **TODO** \diamond

Lemma 2.0.4 (Eigenschaft (M))

Sei A pseudomonoton und gilt $u_n \rightarrow u$ in V sowie $Au_n \rightarrow b$ in V^* und $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n \rangle \leq \langle b, u \rangle$, so folgt $Au = b$.

Beweis. Sei $v_n \rightarrow v$ in V mit $Av_n \rightarrow b$ (\star) und

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Av_n, v_n \rangle \leq \langle b, v \rangle \quad (14)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \langle b, v \rangle &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Av_n, v_n \rangle = \limsup_{n \rightarrow \infty} (\langle Av_n, v_n - v \rangle + \langle Av_n, v \rangle) \\ &\stackrel{(\star)}{=} \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Av_n, v_n - v \rangle + \langle b, v \rangle \end{aligned}$$

und somit $\langle Av_n, v_n - v \rangle \leq 0$. Aufgrund der Pseudomonotonie von A gilt

$$\begin{aligned} \langle Av, v - w \rangle &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Av_n, v_n - w \rangle \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Av_n, v_n \rangle + \lim_{n \rightarrow \infty} -\langle Av_n, w \rangle \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Av_n, v_n \rangle - \langle b, w \rangle \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Av_n, v_n \rangle - \langle b, w \rangle \stackrel{(14)}{\leq} \langle b, v - w \rangle \end{aligned}$$

für alle $w \in V$. Sei nun $u \in V$. Mit $w := v \pm u \in V$ folgt

$$\langle b, u \rangle \leq \langle Av, u \rangle \leq \langle b, u \rangle \implies \langle Av, u \rangle = \langle b, u \rangle,$$

also $Av = b$. □

Gegenbeispiel 2.0.5 (3 für Eigenschaft (M))

Betrachte $V := \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a + b \neq 0$ und $A_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $i \in \{1, 2\}$ mit

$$A_1 x = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ a, & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad A_2 x = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ b, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Dann gilt $(A_1 + A_2)x = (a + b) \mathbb{1}_{x=0}(x)$

A_i sind pseudomonoton: **TODO**

Anderes Beispiel $A_1 = -\text{id}$ und $B : \ell_2 \rightarrow \ell_2$, $u \mapsto \|u\|u$. ◇

Lemma 2.0.6 (Eigenschaften pseudomonotoner Operatoren)

- ① Monotonie und Radialstetigkeit impliziert Pseudomonotonie.
- ② Verstärkte Stetigkeit impliziert Pseudomonotonie.
- ③ Summen pseudomonotoner Operatoren sind pseudomonoton.
- ④ Pseudomonotonie und lokale Beschränktheit impliziert Demistetigkeit.

Beweis. ① Seien A monoton und radialstetig und $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ schwach konvergent gegen $u \in V$ mit $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n \rangle \leq 0$. Da A monoton ist, gilt

$$\begin{aligned} \langle Au_n, u_n - u \rangle &= \underbrace{\langle Au_n - Au, u_n - u \rangle}_{\geq 0} + \langle Au, u_n - u \rangle \\ &\geq \langle Au, u_n - u \rangle \xrightarrow[u_n \rightarrow u]{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Es folgt

$$0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle = 0. \quad (15)$$

Für $z := u + \theta(w - u)$ mit $\theta > 0$ und $w \in V$ folgt

$$\langle Au_n - Az, u_n - z \rangle \geq 0 \quad (16)$$

und somit

$$\begin{aligned} \langle Au_n, u_n - z \rangle &= \langle Au_n, u_n - u \rangle - \theta \langle Au_n, w - u \rangle \\ &\stackrel{(16)}{\geq} \langle Az, u_n - z \rangle = \langle Az, u_n - u \rangle - \theta \langle Az, w - u \rangle. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\langle Au_n, u_n - u \rangle - \theta \langle Au_n, w - u \rangle \geq \langle Az, u_n - u \rangle - \theta \langle Az, w - u \rangle. \quad (17)$$

Nach Grenzwertbildung haben wir

$$\begin{aligned}
\theta \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - w \rangle &\stackrel{(15)}{=} \theta \liminf_{n \rightarrow \infty} (\langle Au_n, u_n - w \rangle \\
&\quad - \langle Au_n, u_n - u \rangle) \\
&= \theta \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u - w \rangle \\
&\stackrel{(17)}{\geq} \limsup_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\langle Au_n, u - u_n \rangle}_{\rightarrow 0} \\
&\quad + \langle Az, u_n - u \rangle - \theta \langle Az, w - u \rangle \\
&\stackrel{??}{\geq} -\theta \langle Az, w - u \rangle.
\end{aligned}$$

Teilen durch θ erhalten wir für $\theta \searrow 0$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - w \rangle \geq \langle Az, u - w \rangle.$$

- ② Sei $u_n \rightharpoonup u$. Dann gilt für alle $w \in V$ nach Lemma 1.1.14

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle \underbrace{Au_n}_{\rightarrow Au}, \underbrace{u_n - w}_{\rightarrow u - w} \rangle = \langle Au, u - w \rangle.$$

- ③ Seien $A, B: V \rightarrow V^*$ pseudomonoton und $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schwach konvergent gegen $u \in V$ mit $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle (A + B)u_n, u_n - u \rangle \leq 0$. Wir unterscheiden in drei Fälle.

- ① Gilt zusätzlich

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0 \quad \text{und} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Bu_n, u_n - u \rangle \leq 0,$$

so gilt wegen der Pseudomonotonie von A und B auch

$$\begin{aligned}
\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - w \rangle &\geq \langle Au, u - w \rangle \quad \text{und} \\
\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Bu_n, u_n - w \rangle &\geq \langle Bu, u - w \rangle
\end{aligned}$$

für alle $w \in V$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\langle (A + B)u, u - w \rangle &= \langle Au, u - w \rangle + \langle Bu, u - w \rangle \\
&\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - w \rangle \\
&\quad + \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Bu_n, u_n - w \rangle \\
&\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle (A + B)u_n, u_n - w \rangle.
\end{aligned}$$

- ② Gilt stattdessen zusätzlich

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0 \quad \text{und} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Bu_n, u_n - u \rangle > 0$$

(oder umgekehrt), folgt aus der Pseudomonotonie von A

$$\langle Au, u - w \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - w \rangle \quad \forall w \in V. \quad (18)$$

Aus der zweiten Bedingung folgt die Existenz einer Teilfolge $(u_{n'})_{n' \in \mathbb{N}} \subset (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eines $\beta \in (0, \infty]$, die

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \langle Bu_{n'}, u_{n'} - u \rangle = \beta.$$

Summa summarum folgt

$$\begin{aligned}
\limsup_{n' \rightarrow \infty} \langle Au_{n'}, u_{n'} - u \rangle &= \limsup_{n' \rightarrow \infty} (\langle (A + B)u_{n'}, u_{n'} - u \rangle \\
&\quad - \langle Bu_{n'}, u_{n'} - u \rangle) \\
&= \limsup_{n' \rightarrow \infty} \underbrace{\langle (A + B)u_{n'}, u_{n'} - u \rangle - b}_{\leq 0} \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Nun folgt mit $w = u$ in (18) der Widerspruch

$$0 \leq \liminf_{n' \rightarrow \infty} \langle Au_{n'}, u_{n'} - u \rangle \leq \limsup_{n' \rightarrow \infty} \langle Au_{n'}, u_{n'} - u \rangle < 0.$$

TEILFOLGENPRINZIP ANWENDEN?

③ Seien $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sowie

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle > 0 \quad \text{und} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Bu_n, u_n - u \rangle > 0.$$

Nun kann jedoch nicht

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle (A + B)u_n, u_n - u \rangle \leq 0$$

gelten, denn es existiert eine Teilfolge $(u_{n'})_{n' \in \mathbb{N}} \subset (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und ein $a >$ mit

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \langle Au_{n'}, u_{n'} - u \rangle = a.$$

Da weiterhin $u_{n'} \rightharpoonup u$ gilt, können wir

$$\limsup_{n' \rightarrow \infty} \langle Bu_{n'}, u_{n'} - u \rangle = b > 0$$

annehmen, sonst läge der zweite Fall vor. Es existiert nun eine Teilfolge $(u_{n''})_{n''}$, sodass

$$\lim_{n'' \rightarrow \infty} \langle Bu_{n''}, u_{n''} - u \rangle = b > 0.$$

Wir haben nun

$$\begin{aligned}
0 < a + b &= \lim_{n'' \rightarrow \infty} \langle Au_{n''}, u_{n''} - u \rangle + \lim_{n'' \rightarrow \infty} \langle Bu_{n''}, u_{n''} - u \rangle \\
&= \lim_{n'' \rightarrow \infty} \langle (A + B)u_{n''}, u_{n''} - u \rangle \leq 0,
\end{aligned}$$

was einen Widerspruch darstellt.

④ Sei $u_n \rightarrow u$ in V . Aufgrund der lokalen Beschränktheit von A ist $(Au_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt. Also existiert eine Teilfolge $u_{n'}$, sodass $Au_{n'} \rightharpoonup b$ in V gilt. Dann folgt $\limsup_{n' \rightarrow \infty} \langle Au_{n'}, u_{n'} \rangle = \langle b, u \rangle$. Da A pseudomonoton ist, besitzt er die Eigenschaft (M) und es folgt $Au = b$. Mit dem Teilfolgenprinzip folgt die Aussage. \square

Beispiel 2.0.7 (Beispiel eines pseudomonotonen Operators)

Seien $p \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $V := W_0^{1,p}(\Omega)$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine stetige beschränkte Funktion sowie

$$A : V \rightarrow V^*, \quad \langle Au, v \rangle := \int_{\Omega} \|\nabla u - h(u)\|^{p-2} (\nabla u - h(u)) \cdot \nabla v \, dx,$$

Als Hilfsmittel führen wir den Operator

$$\langle B(w, u), v \rangle = \int_{\Omega} \|\nabla u - h(w)\|^{p-2} (\nabla u - h(w)) \cdot \nabla v \, dx$$

ein. Wir zeigen nun in drei Schritten, dass A pseudomonoton ist. Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ sodass $u_n \rightarrow u$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0$ gilt.

① Zuerst zeigen wir

$$\langle B(u_n, u_n) - B(u_n, u_\lambda), u_n - u_\lambda \rangle \geq 0,$$

wobei $u_\lambda := u + \lambda(v - u)$, $\lambda \in [0, 1]$ und $v \in V$ sind.

Beweis. Einsetzen der Definition von B in die linke Seite der obigen Gleichung ergibt mit den Abkürzungen $C := \nabla u_n - h(u_n)$ und $D := \nabla u_\lambda - h(u_n)$

$$\int_{\Omega} (\|C\|^{p-2}(A) - \|D\|^{p-2}(B)) (C - D) \, dx \geq 0$$

schreiben können, und diese Ungleichung haben wir bereits in **TODO** gezeigt.

Nun zeigen wir

$$\begin{aligned} \lambda \langle Au_n, u - v \rangle &\geq -\langle Au_n, u_n - u \rangle + \langle B(u_n, u_\lambda), u_n - u \rangle \quad (19) \\ &\quad + \lambda \langle B(u_n, u_\lambda), u - v \rangle \end{aligned}$$

Da

$$(u_n - u) + \lambda(u - v) = u_n - u_\lambda = u_n - h(u_n) - (u_\lambda - h(u_n))$$

gilt, können wir (19) umschreiben als

$$\langle Au_n - B(u_n, u_\lambda), u_n - u_\lambda \rangle \geq 0,$$

da $Au_n = B(u_n, u_n)$ im schwachen Sinne gilt und somit (19) aus der ersten Aussage folgt. \square

② Nun zeigen wir $\langle B(u_n, v), u_n - u \rangle \rightarrow 0$ und $B(u_n, v) \xrightarrow{*} B(u, v)$ in V^* .

Beweis. Nach dem Einbettungssatz von SOBOLEV existiert eine stark in L^q konvergente Teilfolge $(u_{n'})_{n'}$ für $\frac{1}{p} - \frac{1}{d} < \frac{1}{q} - \frac{0}{d}$. Da h beschränkt ist, ist auch $(h(u'_{n'}))_{n'}$. Somit folgt

$$\langle \underbrace{B(u_n, v)}_{\rightarrow B(u, v)}, \underbrace{u_n - u}_{\rightarrow 0} \rangle \rightarrow 0.$$

Ähnlich folgt $B(u_n, v) \rightarrow B(u, v)$, schwach interpretiert, und das ist die zweite Aussage. \square

③ Wir zeigen $\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u - v \rangle \geq \langle Au, u - v \rangle$ und schließlich

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - v \rangle \geq \langle Au, u - v \rangle.$$

Beweis. Für $\lambda \in (0, 1]$ und $\ddagger := \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u - v \rangle$ gilt

$$\begin{aligned}
\ddagger &\stackrel{\textcircled{1}}{\geq} \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{\lambda} \langle Au_n, u_n - u \rangle \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \langle B(u_n, u_\lambda), u_n - u \rangle + \langle B(u_n, u_\lambda), u - v \rangle \\
&\stackrel{\textcircled{2}}{=} \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{\lambda} \langle Au_n, u_n - u \rangle + \langle B(u, u_\lambda), u - v \rangle \\
&\geq -\limsup \frac{1}{\lambda} \langle Au_n, u_n - u \rangle + \langle B(u, u_\lambda), u - v \rangle \\
&\geq \langle B(u, u_\lambda), u - v \rangle \\
&\xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \langle B(u, u), u - v \rangle = \langle Au, u - v \rangle.
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - v \rangle &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \\
&\quad + \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u - v \rangle \\
&\geq 0 + \langle Au, u - v \rangle = \langle Au, u - v \rangle. \quad \square
\end{aligned}$$

SATZ 2.0.1: BREZIS (1968)

Pseudomonotone lokal beschränkte koerzitive Operatoren sind surjektiv.

Wir geben einen Beweis, der sich am Beweis des Satzes von BROWDER-MINTY orientiert.

Beweis. $\textcircled{1}$ Wir zeigen, dass für alle $f \in V^*$ ein $u \in V$ existiert, sodass $Au = f$ gilt. Sei $(\varphi_k)_{k=1}^\infty$ ein GALERKIN-Schema für V und betrachten die endlichdimensionalen Probleme

$$(P_d) = \begin{cases} \text{Finde } u_d \in V_d : \\ \langle Au_d, v_d \rangle = \langle f, v_d \rangle \quad \forall v_d \in V_d, \end{cases}$$

wobei $V_d := \text{span}((\varphi_k)_{k=1}^d)$. Definiere

$$h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, [h(\bar{u})]_j := \langle Au - f, \varphi_j \rangle$$

Dann ist h stetig: Sei $\bar{u}_n \rightarrow \bar{u}$ eine Folge in \mathbb{R}^d . Mit

$$\bar{u}_n := \sum_{i=1}^d \bar{u}_{n,i} \varphi_i \quad \text{und} \quad \bar{u} := \sum_{i=1}^d \bar{u}_i \varphi_i$$

sehen wir $u_n \rightarrow u$ in V . Da A lokal beschränkt ist, existiert eine Teilfolge $u_{n'}$ von $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und ein $b \in V$, sodass $Au'_{n'} \rightarrow b$ gilt. Insbesondere gilt $\langle Au_{n'}, u_{n'} \rangle \rightarrow \langle b, u \rangle$ und aufgrund der Eigenschaft (M) $Au = b$.

Nach dem Teilfolgenprinzip konvergiert die gesamte Folge: $Au_n \rightarrow Au$ und somit

$$[h(\bar{u}_n)]_j = \langle A\bar{u}_n - f, \varphi_j \rangle \rightarrow \langle A\bar{u} - f, \varphi_j \rangle = [h(\bar{u})]_j$$

Also ist h stetig. Da A koerzitiv ist, existiert ein $R > 0$, sodass für alle $\|v_d\| = R$ gilt: $h(v_d) \bullet v_d \geq 0$. Nach einem Korollar des Fixpunktsatzes von BROWDER existiert eine Folge (u_d) von Lösungen zu (P_d) .

② Diese Folge ist beschränkt:

$$\gamma(\|u_d\|)\|u_d\| \leq \langle Au_d, u_d \rangle = \langle f, u_d \rangle \leq \|f\|_* \|u_d\|,$$

und somit $\|f\|_* \geq \gamma(\|u_d\|) \xrightarrow{\|u_d\| \rightarrow \infty} \infty$.

③ Da A lokal beschränkt ist, existiert eine Teilteilstolge $u_{d''} \rightharpoonup u$ in V , sodass $Au_{d''} \rightharpoonup b$ in V^* gilt. Da $\langle b, u \rangle = \lim \langle Au_{d''}, u_{d''} \rangle$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} \limsup_{d''} \langle Au_{d''}, u_{d''} \rangle - \langle b, u \rangle &= \limsup_{d''} (\langle Au_{d''}, u_{d''} \rangle - \langle Au_{d''}, u \rangle) \\ &= \limsup_{d''} (\langle f, u_{d''} \rangle - \langle Au_{d''}, u \rangle) \end{aligned}$$

und somit $\limsup_{d''} \langle Au_{d''}, u_{d''} \rangle \leq \langle b, u \rangle$. Nach der Eigenschaft (M) folgt $Au = b$. Da

$$\langle f, v_d \rangle = \langle Au_d, v_d \rangle \rightarrow \langle b, v_d \rangle = \langle Au, v_d \rangle$$

für alle $v_d \in V_d$ gilt, folgt nach einem Dichtheitsargument $Au = f = b$ in V^* : es gilt

$$\langle Au^{(m')}, v^{(k)} \rangle = \langle f, v^{(k)} \rangle \quad (20)$$

für alle $v^{(k)} \in V_k$ mit $k \leq m'$. Mit $m' \rightarrow \infty$ folgt

$$\langle b, v^{(k)} \rangle = \langle f, v^{(k)} \rangle$$

für alle $v^{(k)} \in \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j \subset V$, welcher **dicht** liegt. Nun gilt

$$\limsup_{m' \rightarrow \infty} \langle Au^{(m')}, u^{(m')} - u \rangle \stackrel{(20)}{=} \limsup_{m' \rightarrow \infty} (\langle f, u^{(m')} \rangle - \langle Au^{(m')}, u \rangle) = 0.$$

Für $w \in V$ gilt aufgrund der **Pseudomontonie** von A

$$\begin{aligned} \langle Au, u - w \rangle &\leq \liminf_{m' \rightarrow \infty} \langle Au^{(m')}, u^{(m')}, w \rangle \\ &= \liminf_{m' \rightarrow \infty} (\langle f, u^{(m')} \rangle - \langle Au^{(m')}, w \rangle) = \langle f, u \rangle - \langle f, w \rangle. \end{aligned}$$

Wählen wir $w := u \pm v$ für $v \in V$ erhalten wir $Au = f$. □

Monotone Potenzialoperatoren

3.1 Die GÂTEAUX- und FRÉCHET-Ableitung

Wir betrachten das Funktional $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto \frac{1}{p}|z|^p$ für $p > 1$. Dann gilt fast überall $\Phi' : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $z \mapsto |z|^{p-1} \frac{z}{|z|} = |z|^{p-2} z$ (vgl. **p-LAPLACE-Operator**). Dies motiviert die Klassifizierung von **Operatoren, die als Ableitung eines Funktionals darstellbar** sind.

DEFINITION 3.1.1 (GÂTEAUX-ABLEITUNG)

Seien X und Y normierte Räume und $F : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Existiert der Grenzwert

$$DF(x; y) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + hy) - F(x)}{h} = \frac{d}{dh} F(x + hy) \Big|_{h=0},$$

so heißt er **GÂTEAUX-Differential von F an der Stelle x in Richtung y** . Ist die Abbildung $y \mapsto DF(x; y)$ linear und beschränkt, so heißt F **GÂTEAUX-differenzierbar** in x . Die Abbildung $F'(x) \in L(X, Y)$ definiert durch $F'(x)y := DF(x; y)$ heißt **GÂTEAUX-Ableitung** von F in x .

Abb. 9: Die Funktionen Φ und Φ' für $d = 1$.

GÂTEAUX-Ableitung

Bemerkung 3.1.2 (Notation) Wir betrachten meist $Y = \mathbb{R}$ und somit $F'(x) \in X^*$. Wir schreiben $F'(x)y = \langle F'(x), y \rangle$.

DEFINITION 3.1.3 (FRÉCHET-ABLEITUNG)

Seien X und Y normierte Räume und $U \subset X$ offen. Die Abbildung $F : U \rightarrow Y$ heißt **FRÉCHET-differenzierbar** in $x \in X$, wenn ein $A \in L(X, Y)$ und ein $r : X \rightarrow Y$ existieren, sodass

$$F(x + h) = F(x) + Ah + r(h) \quad \text{und} \quad \frac{\|r(h)\|_Y}{\|h\|_X} \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0 \quad (21)$$

für alle $h \in X$ mit $x + h \in U$ gilt. Die Abbildung $A := F'(x)$ heißt **FRÉCHET-Ableitung von F im Punkt x** .

FRÉCHET-Ableitung

Wir schreiben von nun an G- bzw. F-differenzierbar.

Lemma 3.1.4 (F- und G-Ableitungen I)

F-differenzierbare Funktionen sind stetig und G-differenzierbar.

Beweis. Sei F wie oben und F-differenzierbar.

Stetigkeit. **TODO**

G-Differenzierbarkeit.

Für $h \in X$ gilt

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{F(x + \theta h) - F(x)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{A(\theta h) + r(\theta h)}{\theta} = A(h) + \underbrace{\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{r(\theta h)}{\theta}}_{=0 \text{ ???}}. \quad \square$$

Lemma 3.1.5 (G-Mittelwertsatz)

Seien $f : X \rightarrow Y$ G-differenzierbar in $x + th$ für feste $x, h \in X$ und $t \in [0, 1]$. Ist die Abbildung $t \mapsto f'(x + th)h$ stetig auf $[0, 1]$, so gilt

$$f(x + h) - f(x) = \int_0^1 f'(x + th)h \, dt.$$

Beweis. Mit dem Mittelwertsatz (M) auf \mathbb{R} gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 f'(x + th)h \, dt &= \int_0^1 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(x + th + \theta h) - f(x + th)}{\theta} \, dt \\ &\stackrel{\text{M}}{=} \lim_{\theta \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{1}{\theta} \int_0^1 f'(x + th + s\theta h)\theta h \, ds \, dt \\ &\stackrel{\text{T}}{=} \lim_{\theta \rightarrow 0} \int_0^1 \int_0^1 f'(x + th + s\theta h)h \, dt \, ds \\ &\stackrel{\text{M}}{=} \int_0^1 \lim_{\theta \rightarrow 0} f(x + s\theta h + h) - f(x + s\theta h) \, ds \\ &= \int_0^1 f(x + h) - f(x) \, ds = f(x + h) - f(x). \end{aligned}$$

WARUM DÜRFEN WIR DIE LIMITES VERTAUSCHEN??

Weil Stetige und somit beschränkte Integranden? \square

Lemma 3.1.6 (F- vs. G-Ableitungen II)

Seien F G-differenzierbar und $\Phi : U \rightarrow L(X, Y)$, $x \mapsto F'(x)$ stetig. Dann existiert die F-Ableitung in $x \in U$ und stimmt mit der G-Ableitung überein.

Beweis. TODO: Im wesentlichen das hier:

$$\begin{aligned} \|F(x + h) - F(x) - F'(x)h\|_Y &= \left\| \int_0^1 F'(x + th)h \, dt - F'(x)h \right\|_Y \\ &\quad \text{(MVT)} \\ &= \left\| \int_0^1 F'(x + th)h - F'(x)h \, dt \right\|_Y \\ &\leq \int_0^1 \|F'(x + th) - F'(x)\|_* \|h\|_X \, dt. \end{aligned}$$

Mit dem Satz von LEBESGUE und der Stetigkeit der Norm und $x \mapsto F'(x)$ erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \int_0^1 \|F'(x + th) - F'(x)\|_* \, dt &= \int_0^1 \left\| \lim_{\|h\| \rightarrow 0} F'(x + th) - F'(x) \right\|_* \, dt \\ &= \int_0^1 \|F'(x) - F'(x)\|_* \, dt = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 3.1.7 (F-Kettenregel)

Seien X, Y und Z BANACH-Räume, $U \subset X$, $V \subset Y$ offen, $g : U \rightarrow Y$ und $f : V \rightarrow Z$ F-differenzierbar und $g(U) \subset V$. Dann ist $f \circ g : U \rightarrow Z$ F-differenzierbar mit $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \circ g'(x)$.

Beispiel 3.1.8 Seien ein HILBERT-Raum \mathcal{H} und die Funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathcal{C}([0, 1]) &\rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \sin(u(1)), \\ g : \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \frac{1}{2}\|u\|^2, \\ h : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \mathbb{1}_{y=x^2 \neq 0}(x, y) \end{aligned}$$

gegeben.

Die Abbildung f ist F-differenzierbar: Mit TAYLOR (in $x(1) = 0$) folgt

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \sin(x(1) + h(1)) - \sin(x(1)) \\ &= \sin(h(1)) + x(1)(\cos(h(1)) - 1) + \mathcal{O}((x(1))^2) \end{aligned}$$

TODO: richtig getaylored?

Für $h \in \mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned} 2(g(x+h) - g(x)) &= \|x+h\|^2 - \|x\|^2 = \langle x+h, x+h \rangle - \langle x, x \rangle \\ &= 2\langle x, h \rangle + \|h\|^2 \end{aligned}$$

Also ist $g'(x)h := \langle x, h \rangle$ und $r(h) := \frac{1}{2}\|h\|^2$. Es gilt $\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$.

Die Abbildung h ist in allen Punkte $x \neq y^2 \neq 0$ G-differenzierbar. Sie ist in $(0, 0)$ G-differenzierbar:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(0 - \theta h_1, 0 - \theta h_2) - f(0, 0)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(-\theta h_1, -\theta h_2)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} 0 = 0,$$

da für jede lineare Annäherung an den eine Punkt auf der Parabel $y = x^2$ existiert eine Umgebung in der $y \neq x^2$ gilt.

Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y = x^2$ gilt mit dem obigen Argument

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(x - \theta h_1, y - \theta h_2) - f(x, y)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{0 - f(x, x^2)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} -\frac{1}{\theta} = -\infty. \quad \diamond$$

Somit ist h auf dieser Menge nicht F-differenzierbar.

Beispiel 3.1.9 (Dualitätsabbildung) Seien X reell, reflexiv und X^* strikt konvex. Dann ist die Dualitätsabbildung die G-Ableitung von $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}\|x\|^2$. Ist X^* sogar gleichmäßig konvex, so ist sie sogar die F-Ableitung von φ . \diamond

Dualitätsabbildung

Beispiel 3.1.10 Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}, & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist in $(0, 0)$ G- aber nicht F-differenzierbar.

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(0 + \theta h_1, 0 + \theta h_2) - f(0, 0)}{\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(\theta h_1, \theta h_2)}{\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta \cdot h_1^3 h_2}{\theta^2 \cdot h_1^4 + h_2^2} = \frac{0}{h_2^2} = 0. \end{aligned}$$

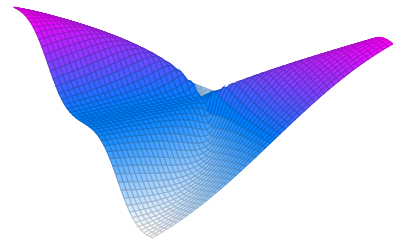


Abb. 10: Die nebenstehende G- aber nicht F-differenzierbare Funktion.

Für $(h, 0)$, $h \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(0 + \theta h, 0) - f(0, 0)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{0}{h^4 + 0} = 0.$$

Also ist f G-differenzierbar in $(0, 0)$. Die Abbildung f ist auch stetig in $(0, 0)$, die partielle Ableitungen existieren, sind aber nicht stetig.

Somit ist f nicht F-differenzierbar in $(0, 0)$, was wir auch durch eine Annäherung auf der Parabel $h_1 = h_2^2$ sehen können:

$$\begin{aligned} \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0)}{\|h\|} &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(h_1, h_1^2)}{\|(h_1, h_1^2)\|} \\ &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{h_1}{2\sqrt{h_1^2 + h_1^4}}, \end{aligned}$$

wobei wir die euklidische Norm auf \mathbb{R}^2 gewählt haben. Jedoch existiert dieser Grenzwert nicht:

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{2\sqrt{x^2 + x^4}} &= \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \nearrow 0} \frac{x}{2\sqrt{x^2 + x^4}} &= \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{-2x\sqrt{1 + x^2}} = -\frac{1}{2}. \quad \diamond \end{aligned}$$

3.2 Potenzialoperatoren

DEFINITION 3.2.1 (POTENZIALOPERATOR, POTENZIAL)

Ein Operator $A: V \rightarrow V^*$ heißt **Potenzialoperator** (Gradient), wenn ein G -differenzierbares **Potenzial** $\Phi: V \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$\langle Au, v \rangle = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(u + hv) - \Phi(u)}{h}$$

für alle $u, v \in V$ gilt.

Potenzialoperator

13.12.19

Beispiel 3.2.2 (Potenzial des p -LAPLACE)

Betrachte $V := \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ für $p > 1$ und $A: V \rightarrow V^*$ definiert durch

$$\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

Dann ist A ein Potenzialoperator mit dem Potenzial

$$\Phi(u) := \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx + C = \frac{1}{p} \|u\|_{1,p}^p + C$$

für beliebige $C \in \mathbb{R}$, denn es gilt für alle $u, v \in V$

$$\begin{aligned} \langle \Phi'(u), v \rangle &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\Phi(u + hv) - \Phi(u)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{hp} \int_{\Omega} |\nabla(u + hv)|^p - |\nabla u|^p \, dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{hp} \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{d}{ds} |\nabla(u + shv)|^p \, ds \, dx \quad (\text{FTOC}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{hp} \int_{\Omega} \int_0^1 p |\nabla(u + shv)|^{p-2} \nabla(u + shv) \nabla v \, ds \, dx \\ &\stackrel{(L)}{=} \int_0^1 \int_{\Omega} |\nabla(u)|^{p-2} \nabla u \nabla v \, dx \, ds = \langle Au, v \rangle. \quad \diamond \\ &\stackrel{(F)}{=} \end{aligned}$$

Lemma 3.2.3 (Explizite Darstellung des Potenzials)

Sei $A: V \rightarrow V^*$ ein **radialstetiger** Potenzialoperator mit Potenzial Φ .

Dann gilt

$$\Phi(v) = \Phi(0) + \int_0^1 \langle A(tv), v \rangle \, dt.$$

Beweis. Für $v \in V$ gilt

$$\frac{d}{dt} \Phi(tv) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(tv + hv) - \Phi(tv)}{h} = \langle \Phi'(tv), v \rangle = \langle A(tv), v \rangle.$$

Da $t \mapsto \frac{d}{dt} \Phi(tv)$ aufgrund der Radialstetigkeit von A stetig ist, folgt mit dem Hauptsatz durch Integration über $[0, 1]$

$$\Phi(v) - \Phi(0) = \int_0^1 \langle A(tv), v \rangle \, dt. \quad \square$$

Beispiel 3.2.4 In der Situation von Beispiel 3.2.2 und $\Phi(0) = 0$ gilt nach dem obigen Lemma

$$\begin{aligned}\Phi(v) &= \int_0^1 \langle A(tv), v \rangle dt = \int_0^1 \int_{\Omega} |\nabla(tv(x))|^{p-2} \nabla(tv(x)) \nabla v(x) dx dt \\ &= \int_0^1 t^{p-1} dt \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^p dx = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^p dx. \quad \diamond\end{aligned}$$

Wir verallgemeinern nun die Aussage, dass die **Wegunabhängigkeit der Kurvenintegrale** die **Existenz eines Potenzials eines Vektorfelds** garantiert.

Lemma 3.2.5 (Wegunabhängigkeit $\implies \exists$ Potenzial)

Für einen **demistetigen** Operator $A: V \rightarrow V^*$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- ① A ist ein Potenzialoperator.
- ② Für alle $x, y \in V$ und alle Wege von y nach x , d.h. alle $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], V)$ mit $\gamma(0) = y$ und $\gamma(1) = x$ gilt

$$\int_0^1 \langle A(t\gamma), \gamma \rangle dt = \int_0^1 \langle A\gamma(t), \gamma'(t) \rangle dt.$$

- ③ Für alle $x, y \in V$ gilt

$$\int_0^1 \langle A(t\gamma), \gamma \rangle dt = \int_0^1 \langle A(y + t(x - y)), x - y \rangle dt.$$

Beweis. ① \implies ②: Sei $\Phi: V \rightarrow \mathbb{R}$ ein Potenzial von A . Dann gilt mit der Kettenregel (K) für $x, y \in V$ nach Lemma 3.2.3 (E)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \langle A(t\gamma), \gamma \rangle dt &\stackrel{(E)}{=} \Phi(x) - \Phi(y) = \Phi(\gamma(1)) - \Phi(\gamma(0)) \\ &= \int_0^1 (\Phi \circ \gamma)'(t) dt \stackrel{(K)}{=} \int_0^1 \Phi'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 \langle A\gamma(t), \gamma'(t) \rangle dt.\end{aligned}$$

② \implies ③: Folgt aus dem Spezialfall $\gamma(t) := y + t(x - y)$.

③ \implies ①: Wir zeigen, dass $\Phi(v) := \int_0^1 \langle A(tv), v \rangle dt$ ein Potenzial von A definiert. Für $v, w \in V$ gilt

$$\Phi(v + hw) - \Phi(v) = \int_0^1 \langle A(t(v + hw)), v + hw \rangle dt - \int_0^1 \langle A(tv), v \rangle dt =: (*)$$

Mit $x := v + hw$ und $y := v$ und $u(t) := y + t(x - y)$ folgt nach Voraussetzung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (*) \stackrel{(L)}{=} \int_0^1 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle A(v + thw), hw \rangle}{h} dt = \int_0^1 \langle Av, w \rangle dt = \langle Av, w \rangle,$$

wobei die Existenz der für den Satz von LEBESGUE (L) benötigten Majorante durch die Kompaktheit von $[0, 1]$ und der Radialstetigkeit und der daraus folgenden Stetigkeit des Integranden bezüglich t garantiert wird. **(TODO: REICHT ALSO NICHT RADIALSTETIGKEIT??)** \square

Konvexe Funktionale sind interessant, da ihre **lokalen Minima** **global** sind. Intuitiv erfüllen konvexe Funktionen auf $V = \mathbb{R}$ die drei Eigenschaften (i) Stetigkeit, (ii) Konvexität und (iii) an den Rändern wachsend, vom Minimum weg. Diese Eigenschaften wollen wir nun für allgemeine V verallgemeinern:

DEFINITION 3.2.6 (KONVEXITÄT, SCHWACHE KOERZIVITÄT)

Ein Funktional $\Phi: V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **konvex**, wenn

$$\Phi((1-\theta)v + \theta w) \leq (1-\theta)\Phi(v) + \theta\Phi(w) \quad \forall \theta \in (0,1) \quad \forall v, w \in V$$

gilt. Ferner heißt Φ **schwach koerzitiv**, wenn $\Phi(v) \xrightarrow{\|v\| \rightarrow \infty} \infty$ gilt.

konvex

schwach koerzitiv

Schwache Folgenunterhalbstetigkeit (SFUS) ist aus Lemma 1.1.12 bekannt.

Lemma 3.2.7 (Existenz von Minimierern auf Kugeln I)

Seien $\Phi: V \rightarrow \mathbb{R}$ **SFUS**, V **reflexiv**, $K \subset V$ **nichtleer**, **abgeschlossen**, **beschränkt** und **konvex**. Dann existiert ein Minimierer von Φ in K .

Beweis. Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ eine Folge mit $\Phi(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \inf_{v \in K} \Phi(v) =: d$. Da K beschränkt ist, ist es $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch. Aufgrund der Reflexivität von V existiert eine **schwach konvergente Teilfolge** $(u'_n)_{n' \in \mathbb{N}}$ mit $u'_n \rightarrow u \in V$. Nach dem **Satz von MAZUR** ist K sogar schwach abgeschlossen, also gilt $u \in K$. Es gilt $d \leq \Phi(u) \leq \liminf_{n' \rightarrow \infty} \Phi(u_{n'}) = d$ und somit $\Phi(u) = d \in \mathbb{R}$. \square

Der folgende Korollar ähnelt den Aussagen von Satz 1.3.1.

Korollar 3.2.8

Die Menge M aller Minimierer ist **schwach abgeschlossen**. Ist Φ **konvex**, so auch M .

Beweis. Sei $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ schwach konvergent gegen $v \in V$. Dann gilt

$$\Phi(v) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi(v_n) \stackrel{v_n \in M}{=} \min_{w \in K} \Phi(w) \leq \Phi(v).$$

Für alle $v, w \in M$ und $\theta \in (0,1)$ gilt

$$\Phi(\theta v + (1-\theta)w) \leq \theta\Phi(v) + (1-\theta)\Phi(w) \stackrel{v, w \in M}{=} \underbrace{(\theta + (1-\theta))}_{=1} \min_{u \in K} \Phi(u).$$

\square

Lemma 3.2.9 (Existenz von Minimierern auf Kugeln II)

Seien $\Phi: V \rightarrow \mathbb{R}$ **SFUS** und **schwach koerzitiv**, $K \subset V$ **nichtleer**, **abgeschlossen** und **konvex**. Dann existiert ein Minimierer von Φ in K .

Beweis. Sei $w \in K$. Aufgrund der schwachen Koerzitivität von Φ existiert ein $R > 0$, sodass für alle $z \in V$ mit $\|z\| > R$ die Ungleichung $\Phi(z) \geq \Phi(w)$ gilt. Wähle nun R gegebenenfalls noch größer, sodass $w \in K_R := \overline{B}_R(0) \cap K$ gilt. Die Menge K_R ist nichtleer, **abgeschlossen**, **konvex** und **beschränkt**. Nach Lemma 3.2.7 existiert ein $v^* \in K_R \subset K$ mit $\Phi(v^*) = \min_{v \in K_R} \Phi(v) \leq \Phi(w) \leq \Phi(z)$ für alle $z \in K \setminus K_R$. Es folgt $\Phi(v^*) \leq \inf_{z \in K \setminus K_R} \Phi(z)$. \square

Beispiel. Sei U ein endlichdimensionaler Unterraum, $v \in V$ und $\Phi_v(u) := \|u - v\|$. Den Minimierer $v^* \in K$ aus dem Lemma nennen wir **K -Bestapproximation** an u .

Lemma 3.2.10 (Φ konvex $\iff \Phi'$ monoton)

Es besitze $\Phi: V \rightarrow \mathbb{R}$ die G -Ableitung $A: V \rightarrow V^*$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- ① Das Funktional Φ ist konvex.
- ② Es gilt $\langle Av, v - w \rangle \geq \Phi(v) - \Phi(w)$ für alle $v, w \in V$.
- ③ Der Operator A ist monoton.
- ④ Die Abbildung $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \Phi(v + tw)$ ist für alle $v, w \in V$ konvex ("Konvexität entlang von Schnitten").

Beweis. ① \implies ②: Für $v, w \in V$ gilt

$$\begin{aligned}
 -\langle Av, w - v \rangle &\stackrel{3.2.1}{=} -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\Phi(v + h(w - v)) - \Phi(v)) \\
 &= -\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} (\Phi((1 - h)v + hw) - \Phi(v)) \\
 &\stackrel{①}{\geq} -\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} ((1 - h)\Phi(v) + h\Phi(w) - \Phi(v)) \\
 &= -\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \Phi(w) - \Phi(v) = \Phi(v) - \Phi(w).
 \end{aligned}$$

Wir betrachten nur den einseitigen Grenzwert, damit $h > 0$ ist und wir die Konvexität von Φ anwenden können.

② \implies ③: Für $v, w \in V$ gilt

$$\begin{aligned}
 \langle Av - Aw, v - w \rangle &= \langle Av, v - w \rangle + \langle Aw, w - v \rangle \\
 &\stackrel{②}{\geq} \Phi(v) - \Phi(w) + \Phi(w) - \Phi(v) = 0.
 \end{aligned}$$

③ \implies ④: Mit der Kettenregel folgt $\varphi'(t) = \langle \Phi'(v + tw), w \rangle$. Für $t > s$ gilt

$$\begin{aligned}
 \varphi'(t) - \varphi'(s) &= \langle A(v + tw) - A(v + sw), w \rangle \\
 &= \frac{1}{t - s} \langle A(v + tw) - A(v + sw), (v + tw) - (v + sw) \rangle \geq 0.
 \end{aligned}$$

Also ist φ' monoton wachsend, und somit konvex.

④ \implies ①: Seien $v, w \in V, \theta \in [0, 1]$ und $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \Phi(v + t(w - v))$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \Phi((1 - \theta)v + \theta w) &= \Phi(v + \theta(w - v)) = \varphi(\theta) = \varphi((1 - \theta) \cdot 0 + \theta \cdot 1) \\
 &\leq (1 - \theta)\varphi(0) + \theta\varphi(1) = (1 - \theta)\Phi(v) + \theta\Phi(w). \quad \square
 \end{aligned}$$

Lemma 3.2.11 (Potenzial eines monotonen Operators ist SFUS)

Jedes konvexe G -differenzierbare $\Phi: V \rightarrow \mathbb{R}$ ist SFUS.

Beweis. Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ eine Folge mit $u_n \rightharpoonup u \in V$. Nach dem vorherigen Lemma gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\Phi(u) - \Phi(u_n) \leq \langle \Phi'(u), u - u_n \rangle$$

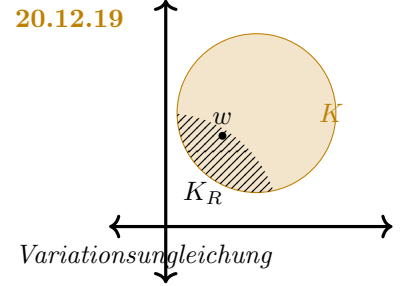


Abb. 11: Schaubild zum Beweis von Lemma 3.2.9.

und somit

$$\begin{aligned}\Phi(u) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n) + \langle \Phi'(u), u - u_n \rangle \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \Phi'(u), u - u_n \rangle = \liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n). \quad \square\end{aligned}$$

Lemma 3.2.12 (Minimierer sind Lösung der DGL)

Seien $A: V \rightarrow V^*$ ein Potenzialoperator mit Potenzial Φ und $f \in V^*$.

- ① Aus $\Phi(u) - \langle f, u \rangle = \min_{v \in V} \Phi(v) - \langle f, v \rangle$ folgt $Au = f$ in V^* .
- ② Ist A monoton, gilt die Umkehrung von ①.

Beweis. ① Da das Minimum von $\Phi_f(v) := \Phi(v) - \langle f, v \rangle$ in u angenommen wird, folgt $\Phi_f(u) \leq \Phi_f(u + hv)$ für alle $h \in \mathbb{R}$ und $v \in V$. Es folgt

$$\frac{1}{h} (\Phi_f(u + hw) - \Phi_f(u)) \stackrel{(\leq)}{\geq} 0$$

für $h \stackrel{(<)}{>} 0$ und somit

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\Phi(u + hw) - \langle f, u + hw \rangle - \Phi(u) + \langle f, u \rangle \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(u + hw) - \Phi(u)}{h} - \langle f, w \rangle = \langle Au - f, w \rangle.\end{aligned}$$

- ② Ist A monoton und $Au = f$, so folgt nach Lemma 3.2.10

$$\langle f, u - v \rangle = \langle Au, u - v \rangle \geq \Phi(u) - \Phi(v),$$

und somit $\Phi_f(u) \leq \Phi_f(v)$ für alle $v \in V$. \square

Lemma 3.2.13 (Demistetigkeit monotoner Operatoren)

Ein *monotoner* Operator $A: V \rightarrow V^*$ ist genau dann *demistetig*, wenn aus $\langle f - Aw, u - w \rangle \geq 0$ für alle $w \in V$ auch $Au = f \in V^*$ folgt.

Beweis. " \implies ": Seien A monoton und demistetig und $\langle f - Aw, u - w \rangle \geq 0$ für alle $w \in V$. Wir können **MINTY's Trick** anwenden, da V reflexiv ist, und somit aus der Demistetigkeit von A die Radialstetigkeit von A folgt.

" \impliedby ": Seien A monoton und die obigen Bedingung erfüllt. Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ konvergent gegen $u \in V$ in V . Da A monoton ist, ist A nach Lemma 1.2.8 ⑤ lokal beschränkt. Somit ist $(Au_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und es existiert eine schwach konvergente Teilfolge $(Au_{n'})_{n' \in \mathbb{N}} \subset V^*$ mit $Au_{n'} \rightarrow f \in V^*$. Nun gilt nach Lemma 1.1.14 und der Monotonie von A

$$\langle f - Aw, u - w \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n - Aw, u_n - w \rangle \geq 0$$

und somit $Au = f$. Es folgt $Au_{n'} \rightarrow Au$. Das Teilfolgenprinzip liefert die Aussage. \square

Korollar 3.2.14

Jeder monotone Potenzialoperator ist demistetig.

Beweis. Sei $f \in V^*$ und $\langle f - Aw, u - w \rangle \stackrel{(\star)}{\geq} 0$ für alle $w \in V$. Für $t > 0$, $v \in V$ und $\ddagger := t \langle f, u - v \rangle = \langle f, u - (u + t(v - u)) \rangle$ gilt

$$\begin{aligned} \ddagger &= \langle f, u - (u + t(v - u)) \rangle \\ &\stackrel{(\star)}{\geq} \langle A(u + t(v - u)), u - (u + t(v - u)) \rangle \\ &= \langle A(u + t(v - u)), (u + t(v - u)) - (u + t(v - u) + v - u) \rangle t \\ &\geq [\Phi(u + t(v - u)) - \Phi(u + t(v - u) + v - u)] \cdot t, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus Lemma 3.2.10 folgt.

Kürzen ergibt $\langle f, u - v \rangle \geq \Phi(u + t(v - u)) - \Phi(v + t(v - u))$. Nach Lemma 3.2.10 ist Φ „richtungsstetig“ also können den Grenzwert nehmen und erhalten

$$\langle f, u - v \rangle \geq \lim_{t \rightarrow 0} \Phi(u + t(v - u)) - \Phi(v + t(v - u)) = \Phi(u) - \Phi(v)$$

und somit

$$\Phi(u) - \langle f, u \rangle \leq \Phi(v) - \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V.$$

Aus dem Lemma 3.2.12 folgt $Au = f$ und somit aus dem vorherigen Lemma die Aussage. \square

SATZ 3.2.1: BROWDER-MINTY FÜR P-OPERATOREN

Jeder monotoner koerzitiver P-Operator $A: V \rightarrow V^*$ ist surjektiv.

Beweis. A ist radialstetig nach Korollar 3.2.14 und Lemma 1.2.4. Ferner hat A das Potenzial $\Phi(v) := \int_0^1 \langle A(tv), v \rangle dt$ nach Lemma 3.2.3 (Wie im Fall reellwertiger Funktionen ist ein Potenzial nur bis auf Konstanten eindeutig, d.h. wir können Φ immer so wählen, dass $\Phi(0) = 0$ gilt).

Da A monoton ist, ist Φ konvex nach Lemma 3.2.10. Somit ist $\Phi_f(v) := \Phi(v) - \langle f, v \rangle$ SFUS, da Φ es bereits nach Lemma 3.2.11 ist, und $\langle f, \cdot \rangle$ sogar stetig ist.

Nach Lemma 3.2.9 bleibt zu zeigen, dass Φ_f schwach koerzitiv ist. Dann existiert nämlich ein Minimierer $u \in V$ mit $\Phi_f(u) = \min_{v \in V} \Phi_f(v)$. Mit Lemma 3.2.12 folgt $Au = f$.

Für $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned} \Phi_f(v) &= \int_0^1 \langle A(tv), v \rangle dt - \langle f, v \rangle \\ &= \int_0^1 \underbrace{\langle A(tv) - A(0), tv - 0 \rangle}_{\geq 0} \underbrace{\frac{1}{t}}_{\geq 0} dt - \langle f - A(0), v - 0 \rangle \\ &\geq \int_{\frac{1}{2}}^1 \langle A(tv) - A(0), v \rangle dt - \langle f - A(0), v \rangle \\ &\stackrel{(\star)}{\geq} \frac{1}{2} \langle A\left(\frac{v}{2}\right) - A(0), v \rangle - \langle f - A(0), v \rangle \\ &= \left\langle A\left(\frac{v}{2}\right), \frac{1}{2}v \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2}A(0) - f, v \right\rangle \\ &\geq \gamma \left(\left\| \frac{v}{2} \right\| \right) \left\| \frac{v}{2} \right\| - \left\| \frac{1}{2}A(0) - f \right\|_* \|v\| \xrightarrow{\|v\| \rightarrow \infty} \infty, \end{aligned}$$

wobei wir in (\star) benutzen, dass die Funktion $t \mapsto \langle A(tv) - A(0), v \rangle$ monoton wächst: es gilt $\langle A(tv) - A(sv), (t-s)v \rangle \geq 0$ für $t > s$ wegen der Monotonie von A und somit $\langle A(tv) - A(sv), v \rangle \geq 0$, d.h. $\langle A(tv), v \rangle \geq \langle A(sv), v \rangle$. \square

Das stationäre NAVIER-STOKES Problem

10.01.20

Es bezeichne u ein **Geschwindigkeitsfeld eines Fluids**, welches **Massendichte** ρ hat. Die Bewegung des Fluids lässt sich durch die partielle Differentialgleichung

$$\rho_t - \nabla \cdot (\rho u) = 0$$

beschreiben. Bei konstanten Massendichte ergibt sich

$$\nabla u = 0.$$

Es wird also ein **divergenzfreies (solenoidales) Geschwindigkeitsfeld** gesucht. Die NAVIER-STOKES-Gleichung lautet dann

$$u_t - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \pi = f,$$

wobei π als **Druck** (pro Dichte) verstanden werden kann und $\nu > 0$ die **kinematische Viskosität**. Der Term $\nu \Delta u$ ist ein **Diffusionsterm** und $(u \cdot \nabla)u$ ein **Konvektionsterm**. Für nicht-NEWTONsche Fluide schreiben wir anstatt $-\nu \Delta u$ z.B. $-\nabla(|Du|^{p-2}Du)$, wobei $Du = \frac{1}{2}(\nabla \cdot u + \nabla \cdot u^T)$.

Diffusionsterm
Konvektionsterm

Im Eindimensionalen haben wir

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = \frac{\partial}{\partial t}u(x(t), t) + \underbrace{\frac{d}{dt}x(t)}_{u(x(t), t)} \frac{\partial}{\partial x}u(x(t), t)$$

Für $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ haben wir

$$\frac{\partial}{\partial t}u_1 - \nu \Delta u_1 + \left(u_1 \frac{\partial}{\partial x} + u_2 \frac{\partial}{\partial y} + u_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) u_1 + \frac{\partial}{\partial x} \pi = f_1.$$

Die **Entdimensionalisierung** im **stationären Problem** ($u_t = 0$) verwendet

$$\hat{x} := \frac{x}{L} \quad \text{und} \quad \hat{u} := \frac{u}{U}.$$

Daraus erhalten wir $\hat{\Delta} = L^2 \Delta$ und

$$\begin{aligned} -\frac{\nu}{LU} \hat{\Delta} \hat{u} &= -\frac{\nu}{LU} \frac{L^2}{U} \Delta u = -\frac{\nu L}{U^2} \nabla u, \\ (\hat{u} \cdot \hat{\nabla}) \hat{u} &= \frac{L^{2?}}{U^2} (u \cdot \nabla) u, \\ \hat{\nabla} \hat{\pi} &= \frac{L^{2?}}{U^2} \nabla \pi, \end{aligned}$$

wobei $\hat{\pi} = \frac{\pi}{U^2}$. Damit erhalten wir die Differentialgleichung

$$-\frac{\nu}{LU} \hat{\nabla} \hat{u} + (\hat{u} \cdot \hat{\nabla}) \hat{u} + \hat{\nabla} \hat{\pi} = \hat{f}$$

(mit $\hat{f} = \frac{L}{U^2} f$). Hier kann auch $\frac{1}{\text{Re}}$ verwendet werden, wobei $\text{Re} := \frac{LU}{\nu}$ die **REYNOLDS-Zahl** ist.

Im folgenden betrachten wir das umgeschriebene Problem

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \pi &= f & \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\ \nabla u &= 0 & \text{auf } \Omega, \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

In der schwachen Formulierung ergibt sich nach der Multiplikation mit einer Testfunktion $v \in H_0^1(\Omega)^d$ und anschließender Integration

$$\nu \int_{\Omega} (\nabla u) \cdot (\nabla v) \, dx + \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot v \, dx - \int_{\Omega} \pi (\nabla \cdot v) \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

und

$$\int_{\Omega} (\nabla u) q \, dx = 0$$

für $q \in L^2(\Omega)$. Um den **Druck zu eliminieren**, fordern wir $\nabla \cdot v = 0$. Wir definieren

$$\mathcal{V} := \{v \in C_0^\infty : \nabla \cdot v = 0\}, \quad V := \overline{\mathcal{V}}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}} \quad \text{und} \quad H := \overline{\mathcal{V}}^{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Lemma 4.0.1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein **beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet**. Dann gilt

$$\begin{aligned} V &= \{v \in H_0^1(\Omega)^d : \nabla \cdot v = 0\} \\ H &= \{v \in L^2(\Omega)^d : \nabla \cdot v = 0 \text{ und } \gamma_n v = 0\}, \end{aligned}$$

wobei $\nabla v = 0$ für $v \in L^2$ bedeutet, dass $\int_{\Omega} v \cdot (\nabla \varphi) \, dx = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt. Für glattes v ist $\gamma_n v := (v \cdot n)|_{\partial\Omega}$, wobei n den **äußeren Normalenvektor** bezeichnet.

Damit ist $V \subset H_0^1(\Omega)^d$ ein **abgeschlossener Unterraum**.

Die schwache Formulierung lautet

$$\text{Zu } f \in V^* \text{ finde ein } u \in V, \quad \text{sodass} \quad a(u, v) + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle \text{ gilt,}$$

wobei

$$a(v, w) := \nu \int_{\Omega} (\nabla v) \cdot (\nabla w) \, dx = \nu \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} w_i \, dx \quad (22)$$

$$b(u, v, w) := \langle (u \cdot \nabla) v, w \rangle_{L^2(\Omega)^d} = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} v_j w_j \, dx \quad (23)$$

Lemma 4.0.2

Der Operator $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ aus (22) ist wohldefiniert, linear, beschränkt, stark positiv und symmetrisch.

Bemerkung 4.0.3 Nach dem **Satz von LAX-MILGRAM** besitzt das stationäre inkompressible NAVIER-STOKES-Problem ($b(\cdot, \cdot, \cdot)$ wird vernachlässigt) genau ein „**Geschwindigkeitslösung**“.

Der STOKES-Operator $A: V \rightarrow V^*$ mit $\langle Av, w \rangle := a(v, w)$ existiert und ist ebenfalls linear, beschränkt, stark positiv und symmetrisch.

Lemma 4.0.4 (b auf $L^\alpha(\Omega)^d \times W^{1,\beta}(\Omega)^d \times L^\gamma(\Omega)^d$)

Der Operator $b: L^\alpha(\Omega)^d \times W^{1,\beta}(\Omega)^d \times L^\gamma(\Omega)^d \rightarrow \mathbb{R}$ aus (23) mit $\alpha, \beta, \gamma > 1$ und $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1$ ist **multilinear** und **beschränkt**:

$$|b(u, v, w)| \leq c \|u\|_{L^\alpha(\Omega)^d} \cdot \|\nabla v\|_{L^\beta(\Omega)^{d \times d}} \cdot \|w\|_{L^\gamma(\Omega)^d}.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
|b(u, v, w)| &\leq \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} |u_i| \left| \frac{\partial}{\partial x_i} v_j \right| |w_j| \, dx \\
&\leq \sum_{i,j=1}^d \left(\int_{\Omega} |u_i|^\alpha \, dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} v_j \right|^\beta \, dx \right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\int_{\Omega} |w_j|^\gamma \, dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\
&\leq \left(\sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} |u_i|^\alpha \, dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} v_j \right|^\beta \, dx \right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} |w_j|^\gamma \, dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\
&\leq c \|u\|_{L^\alpha(\Omega)^d} \cdot \|\nabla v\|_{L^\beta(\Omega)^{d \times d}} \cdot \|w\|_{L^\gamma(\Omega)^d}. \quad \square
\end{aligned}$$

Wir haben das folgende Lemma benutzt:

Lemma 4.0.5 (Verallgemeinerte HÖLDER-Ungleichung)

Seien $\alpha, \beta, \gamma \in (1, \infty)$ HÖLDER-konjugiert: $\alpha^{-1} + \beta^{-1} + \gamma^{-1} = 1$. Dann gilt $\|uvw\|_1 \leq \|u\|_\alpha \|v\|_\beta \|w\|_\gamma$ für alle $u \in L^\alpha(\Omega)$, $v \in L^\beta(\Omega)$ und $w \in L^\gamma(\Omega)$.

Beweis. TODO, Tut □

Lemma 4.0.6 (b auf $V \times V \times V$)

Der Operator $b: V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ aus (23) ist wohldefiniert, *beschränkt* und *bezüglich des zweiten und dritten Arguments schiefsymmetrisch*, d.h.

$$|b(u, v, w)| \leq c \|u\| \|v\| \|w\| \quad \forall u, v, w \in V,$$

wobei

$$\|v\| := \|v\|_V := \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} = \left(\sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} v_j \right|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

und $b(u, v, w) = -b(u, w, v)$ für alle $u, v, w \in V$.

Bemerkung 4.0.7 (Schiefsymmetrie) Aus der Schiefsymmetrie folgt $b(x, y, -y) = 0$, da $-b(x, y, y) = b(x, y, -y) = -b(x, -y, y) = b(x, y, y)$.

Beweis. Wir wenden das vorherige Lemma mit $\beta = 2$ und $\alpha = \gamma = 4$ (oder $\alpha = 3$, $\gamma = 6$ o.Ä.) an. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
b(u, v, w) &= \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} v_j w_j \, dx \\
&= \underbrace{\sum_{i,j=1}^d \int_{\partial\Omega} u_i w_j (v \cdot n) \, dx}_{=0, \text{ da } v=0 \text{ auf } \partial\Omega} - \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} v_j \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i w_j) \, dx \\
&= - \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} v_j \frac{\partial}{\partial x_i} u_i w_j \, dx - \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} v_j u_i \frac{\partial}{\partial x_i} w_j \, dx \\
&= 0 - b(u, w, v),
\end{aligned}$$

da $\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} u_i = \operatorname{div}(u) = 0$ gilt. □

Bemerkung 4.0.8 Die Abbildung $B: V \times V \rightarrow V^*$ mit $\langle B(u, v), w \rangle = b(u, v, w)$ ist **bilinear** und **beschränkt**. Wir haben dann $Au + B(u, u) = f$ in V^* .

Letztlich definiere $B: V \rightarrow V^*, u \rightarrow B(u, u)$.

SATZ 4.0.1: EXISTENZ EINER LÖSUNG

Zu $f \in V^*$ existiert ein $u \in V$ mit $Au + Bu = f$ in V^* .

Beweis. Wir wenden Satz 1.3.2 an und verifizieren dafür, dass ① der Operator B **verstärkt stetig** ist dass ② $A + B$ **koerzitiv** ist.

- ① Sei $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ eine Folge mit $v_n \rightarrow v$ in V . Wir zeigen $Bv_n = B(v_n, v_n) \rightarrow Bv = B(v, v)$ in V^* . Betrachte für $w \in V$

$$\begin{aligned} |\langle B(v_n, v_n) - B(v, v), w \rangle| &= |b(v_n, v_n, w) - b(v, v, w)| \\ &= \left| b(v_n, v_n, w) - b(v_n, v, w) \right. \\ &\quad \left. + b(v_n, v, w) - b(v, v, w) \right| \\ &= |b(v_n, v_n - v, w) + b(v_n - v, v, w)| \\ &\leq |b(v_n, w, v_n - v)| + |b(v_n - v, w, v)| \\ &\leq (c_1 + c_2) \|v_n\|_{L^4} \|w\| \|v_n - v\|_{L^4}. \end{aligned}$$

(IST DIE LETZTE ABSCHÄTZUNG LEMMA 4.0.4 MIT $\alpha = \gamma = 4$ UND $\beta = 2$? für $c_1, c_2 > 0$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \|Bv_n - Bv\|_{V^*} &= \sup_{w \in V \setminus \{0\}} \frac{|\langle Bv_n - Bv, w \rangle|}{\|w\|} \\ &\leq (c_1 + c_2) (\|v_n\|_{L^4} + \|v\|_{L^4}) \|v_n - v\|_{L^4} \\ &= \tilde{c} (\|v_n\| + \|v\|) \|v_n - v\|_{L^4} \end{aligned}$$

für ein $\tilde{c} > 0$. Aus $V \xhookrightarrow{c} L^4$ folgt $\|v_n - v\|_{L^4} \rightarrow 0$. Letztlich ist $\|v_n\|$ beschränkt und somit folgt $\|Bv_n - Bv\|_{V^*} \rightarrow 0$.

- ② Es ist

$$\langle Av + Bv, v \rangle = a(v, v) + \underbrace{b(v, v, v)}_{=0} = \nu \|v\|_V^2. \quad \square$$

SATZ 4.0.2: EINDEUTIGKEIT FÜR KLEINE DATEN

Für kleine Daten ($\text{Re} = \frac{1}{\nu}$, $\|f\|_{V^*} < \frac{\nu^2}{c_b}$) existiert höchstens eine Lösung.

Beweis. Seien $u_1, u_2 \in V$ zwei Lösungen. Dann gilt mit Bemerkung 4.0.7

$$\begin{aligned}
\nu \|u_1 - u_2\|^2 &= a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = a(u_1, u_1 - u_2) + a(u_2, u_1 - u_2) \\
&= \cancel{\langle f, u_1 \rangle} - b(u_1, u_1, u_1 - u_2) \\
&\quad - \cancel{\langle f, u_1 \rangle} + b(u_2, u_2, u_1 - u_2) \\
&= b(u_2, u_2, u_1 - u_2) - b(u_1, u_1, u_1 - u_2) \\
&= \underbrace{b(u_2, u_2 - u_1, u_1 - u_2)}_{=0} + b(u_2, u_1, u_1 - u_2) \\
&\quad - b(u_1, u_1, u_1 - u_2) \\
&= b(u_2, u_1, u_1 - u_2) - b(u_1, u_1, u_1 - u_2) \\
&= b(u_2 - u_1, u_1, u_1 - u_2) \leq c_b \|u_1\| \|u_1 - u_2\|^2,
\end{aligned}$$

wobei c_b die Konstante aus der Beschränktheit von $b: V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ist. Durch Testen mit der Lösung erhalten wir eine a-priori-Abschätzung für u_1 :

$$\nu \|u_1\|^2 = a(u_1, u_1) = \langle f, u_1 \rangle - \underbrace{b(u_1, u_1, u_1)}_{=0} \leq \|f\|_{V^*} \|u_1\|.$$

Damit erhalten wir

$$\nu \|u_1 - u_2\|^2 \leq c_b \frac{c_b}{\nu} \|f\|_{V^*} \|u_1 - u_2\|_2^2.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $\frac{c_b}{\nu^2} \|f\|_{V^*} < 1$. \square

Wir betrachten nun

$$-\nu \Delta u + \nabla \pi = f$$

mit $\nabla \cdot u = 0$ und wollen die schwache Formulierung auf $H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$ erhalten. Wir betrachten zu nächst die Menge aller Äquivalenzklassen $L^2(\Omega)/\mathbb{R} = \{[q] := q + C : q \in L^2(\Omega)\}$ mit der Norm $\|q\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} = \inf_{C \in \mathbb{R}} \|q + C\|_{L^2}$.

Es gilt

$$L^2(\Omega)/\mathbb{R} \cong L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q(x) \, dx = 0 \right\}$$

Die schwache Formulierung ist

$$\begin{cases} \nu \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} \pi \operatorname{div}(v) \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \\ - \int_{\Omega} \operatorname{div}(u) \cdot q \, dx = 0. \end{cases}$$

Wir definieren

$$c: H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v, q) \mapsto - \int_{\Omega} \operatorname{div}(v) \cdot q \, dx.$$

Dann ist c bilinear und beschränkt, denn

$$|c(v, q)| \stackrel{(H)}{\leq} \|\operatorname{div}(v)\|_{L^2} \|q\|_{L^2} \leq \|\nabla v\|_{L^2} \|q\|_{L^2} = \|\nabla v\|_{L^2} \|q\|_{L^2}.$$

Nun erhalten wir einen Operator $C: H_0^1(\Omega) \rightarrow (L_0^2(\Omega))^*$ mit $\langle Cv, q \rangle = c(v, q)$. Das STOKES-Problem wir dann zu

$$\begin{cases} Au + C^* \pi = f, \\ Cu = 0. \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} A & C^* \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei C^* den **dualen Operator** zu C bezeichnet. Für $f \in H^{-1}(\Omega)^d$ können wir die linke Seite als $\mathcal{A}(u, \pi)$ mit

$$\mathcal{A}: H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)^d \rightarrow (H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)^d)^*$$

schreiben und erhalten $\mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zwar ist $\mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$ für $f \in H^{-1}(\Omega)^d$ **eindeutig lösbar**, aber der Operator \mathcal{A} ist nicht stark positiv, sodass der Satz von **LAX-MILGRAM** **nicht angewandt werden kann**. Es ist

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{A} \begin{pmatrix} v \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ q \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} A & C^* \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ q \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} Av + C^*v \\ Cv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ q \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle Av, v \rangle + \langle C^*q, v \rangle + \langle Cv, q \rangle. \end{aligned}$$

Betrachte $v = 0$. Dann ist

$$\left\langle \mathcal{A} \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \not\geq C\|q\|^2 = C(\|v\|^2 + \|q\|^2),$$

und somit ist \mathcal{A} **nicht stark positiv**. Für Existenz und Eindeutigkeit genügt Folgendes: es gibt ein $\beta > 0$, sodass

$$\inf_{\substack{q \in L_0^2(\Omega) \\ q \neq 0}} \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega)^d \\ v \neq 0}} \frac{c(v, q)}{\|v\|_{H_0^1} \|q\|_{L_0^2}} \geq \beta > 0.$$

Beispiel 4.0.9 (NAVIER-STOKES für nicht-NEWTONsches Fluid)

Anstatt der linearen Relation $\tau = \mu Du$ für NEWTONsche Fluide nimmt der Spannungstensor die Gestalt

$$\tau = \mu_0 |Du|^{p-2} Du, \quad \text{wobei } Du = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$$

Das korrespondiert zu einer scherratenabhängigen Viskosität $\mu = \mu(D)$ und modelliert für $p < 2$ eine scherausdünnende (z.B. Blut oder Farbe) und für $p > 2$ scherverdickende (z.B. nasser Sand oder Stärkesuspension) Flüssigkeit.

Dieser Ansatz kann verallgemeinert werden: Sei $S : \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d} \rightarrow \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}$ für $d \in \{2, 3\}$ stetig. Ferner existieren Konstanten $c, c_0 > 0$, sodass

$$|S(A)| \leq c(1+|A|)^{p-1}, \quad (S(A)-S(B)) : (A-B) > 0, \quad S(A) : A \geq c_0 |A|^p$$

für alle verschiedenen $A, B \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}$ gilt Hierbei steht : für das FROBENIUS-Skalarprodukt $A : B := \sum_{i,j=1}^d a_{i,j} b_{i,j}$ und $|\cdot|$ für die induzierte Norm. \diamond

Aufgabe: Conclude the schwache Formulierung des stationären NAVIER-STOKES Problems für eine verallgemeinerte Klasse inkompressibler nicht-NEWTONschen Fluide

$$\begin{aligned} (u \cdot \nabla)u - \nabla S(Du) + \nabla \pi &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \nabla \cdot u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

Wie sehen die entsprechenden Operatoren und Räume aus?



Der nichtlineare Operator

$$A : V_p \rightarrow V_p^*, \quad \langle Av, w \rangle := \int_{\Omega} S(Dv) : Dw \, dx$$

ist strikt monoton, hemistetig, p -koerzitiv und beschränkt: es gibt Konstanten $c, c_0 > 0$ sodass

$$\langle Av, v \rangle \geq c_0 \|v\|_{V_p}^p, \quad \|Av\|_{V_p^*} \leq c(1 + \|v\|_{V_p})^{p-1} \quad \forall v \in V_p$$

In welchen Schritten muss man p beschränken, wenn man die Existenz von Lösungen des stationären NAVIER-STOKES Problem mit nicht-NEWTONschen Fluiden beweisen will?

Tipp: KORN'sche Ungleichung: $\|\nabla v\|_{0,p} \leq c \|Dv\|_{0,p}$.

**Wiedereinführung des Drucks**

Liegt die rechte Seite f in H^{-1} , können wir auf H^{-1} ein Funktional F mit

$$\langle F, w \rangle := \nu \int_{\Omega} \text{grad}(u) \text{grad}(w) \, dx + \int_{\Omega} (u - \nabla)uw - \langle f, w \rangle_{H^{-1} \times H_0^1}$$

definieren, wobei u die (eindeutige) schwache Lösung der stationären NAVIER-STOKES-Gleichung ist. Also fast wie in der schwachen Formulierung, nur dass diesmal der Definitionsbereich nicht V , sondern der größere Raum H_0^1 ist. Deswegen ist es auch entscheidend, dass f in H^{-1} und nicht nur in V^* liegt. Das wurde historisch tatsächlich von vielen bekannten Leuten falsch gemacht, es gibt da ein Paper von Jaques Simon in dem er das erklärt.

Weil u eine schwache Lösung ist, gilt $\langle F, v \rangle = 0$ für alle $v \in V$. Aus dem Satz von DE RHAM aus der Differentialgeometrie, den wir nicht beweisen, folgt, dass für alle $F \in H^{-1}$, die auf V verschwinden, eine Funktion p aus $L_0^2 \cong L^2/\mathbb{R}$ existiert, so dass $\text{grad}(p) = F$ im distributionellen Sinne gilt. Damit haben wir den Druck eindeutig (bis auf Konstante) bestimmt.

Motivation. Wir begannen die Vorlesung mit einem BANACH-Raum V und einem nicht-linearen Differentialoperator $A: V \rightarrow V^*$ und suchten die Lösung $u \in V$ für $Au = f$ in V^* . Wir stellten eine Folge approximativer Lösungen $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ mit $u_n \rightharpoonup u$ und $Au_n \rightarrow b$ auf. Die Herausforderung bestand darin, den Grenzwert zu identifizieren: $Au = b$.

Dies ist unter den richtigen Voraussetzungen möglich (z.B. Monotonie, Pseudomonotonie, etc.). In vielen Anwendungen sind die Annahmen jedoch unrealistisch, z.B. Vorwärts-Rückwärts-Wärmegleichung (vgl. z.B. André Eikmeier (2016), Evolutionsgleichungen mit nichtmonotonem Hauptteil) oder ERICKSEN-LESLIE-Gleichungen (vgl. Lukas Geuter (2018), Dissipative Lösungen der ERICKSEN-LESLIE-Gleichungen).

Ein konkretes Beispiel: Selbst in einem HILBERT-Raum gilt für eine schwach konvergente Folge $u_n \rightharpoonup u$ und eine nichtlineare Funktion f – auch wenn $f(u_n) \rightarrow v$ stark konvergiert – nicht $v = f(u)$. Betrachte als Beispiel eine Orthonormalbasis u_n mit $u_n \rightharpoonup 0$ (Satz von RIESZ, PARSEVAL Identität) und $f := \|\cdot\|$. Dann gilt $f(u_n) = 1 \neq 0 = f(0)$.

Wir wollen also schwache Grenzwerte in einem gewissen Sinne verallgemeinern, um mehr über den Grenzwert b herauszufinden. \diamond

5.1 YOUNG-MAßE

Im Folgenden betrachten wir stets $L^p(\Omega)$ für ein beschränktes Gebiet Ω und $p \in (1, \infty)$.

Wiederholung. Eine beschränkte Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ konvergiert genau dann schwach in $L^p(\Omega)$ gegen $u \in L^p(\Omega)$, wenn

$$\int_{\Omega} u_n v \, dx \rightarrow \int_{\Omega} u v \, dx \quad \forall v \in (L^p(\Omega))^* \cong L^q(\Omega), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

gilt.

Lemma 5.1.1 (Schwache Konvergenz und Mittelwerte)

Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ beschränkt. Dann gilt $u_n \rightharpoonup u$ genau dann wenn die Mittelwerte stark konvergieren, d.h.

$$\frac{1}{|D|} \int_D u_n \, dx \rightarrow \frac{1}{|D|} \int_D u \, dx$$

für alle messbaren $D \subset \Omega$ gilt.

Beweis. „ \implies “: Teste mit $v := \mathbf{1}_D$.

„ \impliedby “: Es gilt $\langle u_n - u, v \rangle \rightarrow 0$ für alle $v \in \text{span}(\{\mathbf{1}_D : D \subset \Omega \text{ messbar}\})$, welcher dicht liegt. \square

Wir sehen nun zwei verschiedene Arten der schwachen Konvergenz, bei denen stets $\Omega := [0, 1]$ der Definitionsbereich der Folgen ist.

Beispiel 5.1.2 (Konzentration der Masse (in 0))

Für $(u_n := n^{1/p} \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{n}]})_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ gilt $\|u_n\|_{0,p} = 1$, $u_n \rightharpoonup 0$ und sogar $u_n \rightarrow 0$ fast überall, aber nicht $u_n \rightarrow 0$. \diamond

Beispiel 5.1.3 (Oszillation (vgl. Beispiel 1.1.6))

Die Folge $(u_n(x) := \sin(2\pi n x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist **gleichmäßig beschränkt**: es gilt $\|u_n\|_{0,\infty} = 1$. Somit kann es **keinen Konzentrationseffekt** geben. Es gilt $u_n \rightharpoonup 0$ jedoch nicht $u_n \rightarrow 0$. \diamond

Wir sehen, dass wir selbst bei starker Konvergenz fast überall oder gleichmäßiger Beschränktheit nichts über die Konvergenz aussagen können. Im Folgenden behandeln wir eine Art, mehr über oszillierende Funktion zu erfahren.

Beispiel 5.1.4 (Erstes YOUNG-Maß (vgl. Beispiel 1.1.8))

Für $u(x) := h(x) - 2h(2x - 1)$, wobei h die HEAVISIDE-Funktion ist, definiere $u_n(x) := u(nx)$, wobei u 1-periodisch fortgesetzt wird.

Wir wollen die **Wahrscheinlichkeit messen, mit der ein Funktionswert „im Grenzwert“ angenommen wird**. In diesem Fall ist das zugehörige YOUNG-Maß, welches ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, dass diese Wahrscheinlichkeit modelliert, gegeben durch

$$\nu := \frac{\delta_{\{1\}} + \delta_{\{-1\}}}{2},$$

wobei δ das DIRAC-Maß ist. \diamond

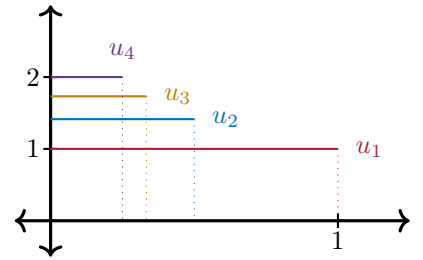


Abb. 12: Die Funktionen $(n^{\frac{1}{p}} \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{n}]})_{n=1}^4$.

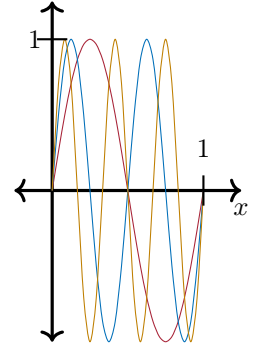


Abb. 13: Die Funktionen $(\sin(2\pi n x))_{n=1}^3$.

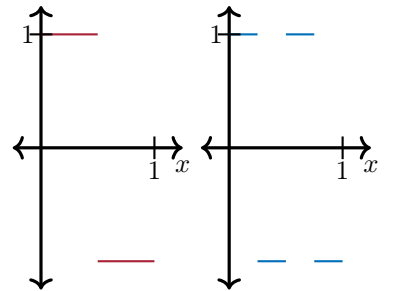


Abb. 14: Die Funktionen u_1 und u_2 aus Beispiel 5.1.4.

Beispiel 5.1.5 (Zweites YOUNG-Maß)

Betrachte die Hütchenfunktionenfolge in Abbildung 15. Hier ist ν die Gleichverteilung auf $[-1, 1]$ und es gilt $\nu(A) = |A \cap [-1, 1]|$ für alle messbaren $A \subset [-1, 1]$. \diamond

Beispiel 5.1.6 (Drittes YOUNG-Maß (vgl. Beispiel 1.1.6))

Betrachte $u_n(x) := \sin(2\pi nx)$. Hier hat ν die Dichte $\frac{\arcsin(y)}{\pi} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}$ auf $[-1, 1]$, da wir "von der y -Achse auf die Funktion schauen". Der Faktor $\frac{1}{\pi}$ normiert ν zu einem **Wahrscheinlichkeitsmaß**. Also gilt für alle messbaren $A \subset [-1, 1]$

$$\nu(A) = \frac{1}{\pi} \int_{A \cap [-1, 1]} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad \diamond$$

In diesen Beispielen herrschte überall das gleiche Oszillationsverhalten. Das muss jedoch nicht sein, man kann z.B. auch die ersten beide Beispiel kombinieren, indem man auf $[0, \frac{1}{2}]$ die ersten u_n 's und auf $[\frac{1}{2}, 1]$ die andere nimmt. Deren YOUNG-Maß ist dann auf $[0, \frac{1}{2}]$ das YOUNG-Maß aus dem ersten Beispiel und auf $[\frac{1}{2}, 1]$ das aus dem zweiten.

Wir haben also „herausgefunden“, dass das YOUNG-Maß eine **maßwertige Funktion** von Ω in einen Raum von geeigneten Maßen ist und jedes $x \in \Omega$ auf ein Maß $\nu(x) =: \nu_x$ abbildet. In allen diesen Beispielen gilt $u_n \rightarrow 0 = \mathbb{E}[\nu_x]$ für alle $x \in \Omega$.

Diese Intuition wollen wir nun mathematisch präzisieren.

DEFINITION 5.1.7 (RADON-MASSE, $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$)

Sei $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ der Vektorraum der beschränkten RADON-Maße auf \mathbb{R} . Ein beschränktes Maß μ heißt RADON-Maß, wenn folgende **Regularitätseigenschaft** für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ erfüllt ist:

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A \text{ kompakt}\}.$$

Auf $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ definieren wir die Norm

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R})} := \int d|\mu| = \sup_{(A_k)_{k=1}^N} \sum_{k=1}^N |\mu|(A_k),$$

wobei die A_k eine **paarweise disjunkte Ausschöpfung** von \mathbb{R} sind.

Es gilt $\mathbb{P}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$, wobei $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ die **Wahrscheinlichkeitsmaße** auf \mathbb{R} bezeichnet, und $\mu \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ genau dann wenn $\|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R})} = 1$ und $\mu \geq 0$ gilt.

Wir betrachten $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) := \{u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : u(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0\}$ mit der Supremumsnorm.

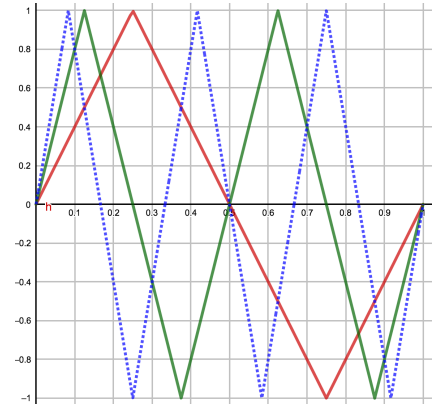


Abb. 15: Die Funktionen $(u_n(x))_{n=1}^3$ aus Beispiel 5.1.5.

Für die Vektorraumstruktur (sonst können wir keine Norm definieren) benötigen wir eigentlich auch signierte Maß, da aber Wahrscheinlichkeitsmaße nichtnegativ sind, ignorieren wir dies.

SATZ 5.1.1: RIESZ-MARKOV-KAKUTANI

Es gilt $\mathcal{M}(\mathbb{R}) \cong (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}))^*$ via $\langle \mu, f \rangle_{\mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}_0(\mathbb{R})} := \int f \, d\mu$.

DEFINITION 5.1.8 ($L_{w*}^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}))$, SCHWACH*-MESSBAR)
Sei

$$L_{w*}^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R})) := \{u : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}) : u \in L^\infty \text{ ist schwach*-messbar.}\},$$

wobei wir ν schwach*-messbar nennen, wenn die Abbildung

$$x \mapsto \langle \nu_x, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(y) \, d\nu_x(y)$$

für alle $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ messbar ist.

schwach*-messbar

SATZ 5.1.2

Es gilt $(L^1(\Omega; \mathcal{C}_0(\mathbb{R})))^* \cong L_{w*}^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}))$.

Beweis. Diestel/Uhl: *Vector Measures*. □

DEFINITION 5.1.9 (YOUNG-MASS)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ messbar und beschränkt sowie $(u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen. Die Abbildung $\nu_{(\cdot)} \in L_{w*}^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}))$ heißt von der Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erzeugtes YOUNG-Maß, wenn $\nu_x \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ für alle $x \in \Omega$ gilt und für jede CARATHEODORY-Funktion $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aus

$$(f(\cdot, u_n(\cdot)))_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{f} \quad \text{in } L^1(\Omega),$$

folgt, dass $\bar{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, t) \, d\nu_x(t)$ fast überall gilt.

YOUNG-Maß

SATZ 5.1.3: HAUPTSATZ ÜBER YOUNG-MASSE

Seien Ω und $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie oben. Existiert eine stetige monoton wachsende Funktion $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ und

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} g(|u_n(x)|) \, dx < \infty, \quad (24)$$

dann existiert eine Teilfolge $(u_{n'})_{n' \in \mathbb{N}}$, welche ein YOUNG-Maß erzeugt.

Ist $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in L^p beschränkt, wähle $g(t) := t^p$.

31.01.20

Bemerkung 5.1.10 (Separable Testfunktionen)

Um ein YOUNG-Maß zu charakterisieren, müssen nicht CARATHEODORY-Funktionen betrachtet werden. Da

$$L^1(\Omega) \otimes \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) := \text{span} \left(\{(x, t) \mapsto h(x)g(t) : h \in L^1(\Omega), g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})\} \right)$$

über die Identifikation $[f(x)](t) := h(x)g(t)$ dicht in $L^1(\Omega; \mathcal{C}_0(\mathbb{R}))$ liegt,

Die Dichtheit gilt übrigens sogar für $p \in [1, \infty)$.

genügt es nur Funktionen der Form $(x, t) \mapsto h(x)g(t)$ zum Testen zu betrachten.

Lemma 5.1.11 (Erwartungswert der YOUNG-Maßes)

Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ für $p \in [1, \infty]$, sodass $u_n \rightharpoonup u$ für $p < \infty$ bzw. $u_n \xrightarrow{*} u$ für $p = \infty$. Ist ν ein YOUNG-Maß einer Teilfolge von u_n so gilt

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} t \, d\nu_x(t) = \mathbb{E}[\nu_x] \quad \text{fast überall in } \Omega.$$

Beweis. Da (24) erfüllt ist, existiert eine Teilfolge $(u_{n'})_{n' \in \mathbb{N}}$ und ein zugehöriges YOUNG-Maß. Ist ν nun ein beliebiges YOUNG-Maß, so wählen wir die CARATHEODORY-Funktion $f(x, t) := t$. Dann gilt für $p \in [1, \infty)$ (schwach*-Konvergenz in L^∞ ist L^1 -Konvergenz)

$$f(\cdot, u_{n'}) = u_{n'} \rightharpoonup u$$

in $L^p(\Omega)$ und somit auch in $L^1(\Omega)$, da Ω beschränkt ist. Nach dem Hauptsatz über YOUNG-Maße folgt

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, t) \, d\nu_x(t) = \int_{\mathbb{R}} t \, d\nu_x(t) = \mathbb{E}[\nu_x]. \quad \square$$

Bemerkung 5.1.12 Wie überprüft man, dass im konkreten Fall (gegeben ein $f(\cdot, u_{n'})$) schwach in L^1 konvergiert?

- Ist $(u_n)_n$ für $p \in (1, \infty)$ in L^p beschränkt, und für ein $C > 0$ und ein $q < p$ der Wachstumsbedingung

$$|f(t)| \leq C(1 + |t|^q),$$

genügt (hier $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$), so folgt für $r \in \left[1, \frac{p}{q}\right]$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(u_n)|^r \, dx \leq \int_{\mathbb{R}} C(1 + |u_n|^q)^r \, dx \leq C(1 + \|u_n\|_{0,p}^p) \leq C_1.$$

- Selbst, wenn $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ in $L^1(\Omega)$ beschränkt ist, muss es keine schwach konvergente Teilfolge geben. Jedoch gilt der

SATZ 5.1.4: DUNFORD-PETTIS

Eine beschränkte Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ hat genau dann ein schwach konvergente Teilfolge, wenn $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar ist, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ sodass

$$\int_A |u_n| \, d\lambda < \varepsilon \quad \forall A \subset \Omega \text{ messbar, } \lambda(A) < \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

gilt. Dies ist äquivalent zu

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : \int_{\{x: |u_n(x)| > M\}} |u_n| \, d\lambda < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

SATZ 5.1.5: DE LA VALLÉE POUSSIN

Eine beschränkte Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ hat genau dann eine schwach konvergente Teilfolge, wenn eine monoton wachsende Funktion $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ existiert mit

$$\frac{\psi(z)}{z} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \infty, \quad \text{und} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \psi(|u_n|) dx < \infty.$$

Lemma 5.1.13 (John M. Ball (1989))

Es gilt fast überall

$$\nu_x(A) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{y \in B(x, \varepsilon) : u_n(y) \in A\}|}{|B(x, \varepsilon)|},$$

wobei $|\cdot|$ Volumen beschreibt.

Beispiel 5.1.14 (Y-Me „erkennen“ Konzentrationseffekte nicht)

Sei $u_n := n^{1/p} \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}$ wie in Beispiel 5.1.2. Wir betrachten das Verhalten von $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ in $L^\infty(0, 1)$ für Funktionen $f \in C_0(\mathbb{R})$. Seien $f \in C_0(\mathbb{R})$ und $\nu \in L^1(0, 1)$ gilt

$$\langle f(u_n), \nu \rangle_{\mathbb{R} \times \mathcal{M}(\mathbb{R})} = \int \underbrace{f(u_n)}_{\rightarrow f(0)\nu} \nu dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{LEBESGUE}} \int f(0) \nu dx,$$

also $f(u_n) \xrightarrow{*} f(0)$ in $L^\infty(0, 1)$. Damit folgt $f(0) = \int f(t) d\nu_x(t)$, also $\nu_x = \delta_{\{0\}}$ fast überall. Jedoch ist das YOUNG-Maß der Nullfolge auch $\delta_{\{0\}}$. \diamond

SATZ 5.1.6: P. PEDREGAL, 1997

Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ für $p \in [1, \infty)$. Dann gilt $u_n \rightharpoonup u$ in $L^p(\Omega)$ genau dann wenn

- ① $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schwach in $L^1(\Omega)$ konvergiert.
- ② Das von $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erzeugte YOUNG-Maß die Form $\nu_x = \delta_{u(x)}$ für ein $u \in L^p(\Omega)$ hat.

Wir können nun den Hauptsatz beweisen.

07.02.2020

Beweis. ① Da g monoton wachsend (W) ist, gilt für $t \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} \infty &> \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} g(|u_n(x)|) dx \stackrel{(W)}{\geq} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\{x: |u_n(x)| \geq t\}} g(t) dx \\ &\geq g(t) \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}} m(\{x : |u_n(x)| \geq t\}). \end{aligned}$$

Da $g(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ gilt, folgt aus dem Obigen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} m(\{x : |u_n(x)| \geq t\}) = 0. \quad (25)$$

- ② Sei u_n wie im Satz und erfülle (25). Zu jedem u_n assoziieren wir die maßwertige Funktion

$$\nu^{(n)}: \Omega \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}), \quad \nu_x^{(n)} := \delta_{\{u_n(x)\}}.$$

Dann gilt $\nu^{(n)} \in L_{w*}^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}))$ und $\|\nu^{(n)}\| \leq 1$:

① Messbarkeit: Für $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ und $x \in \Omega$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \nu_x^{(n)}, f \rangle_{\mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}_0(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} f(t) d\nu_x^{(n)}(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) d\nu_{\{u_n(x)\}}(t) = f(u_n(x)). \end{aligned}$$

Somit ist $x \mapsto \langle \nu_x^{(n)}, f \rangle$ messbar, da u_n messbar und f stetig sind.

② Nach Definition 5.1.7 gilt

$$\|\nu_x^{(n)}\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} d|\nu_x^{(n)}| = \int_{\mathbb{R}} d\delta_{\{u_n(x)\}} = 1$$

und somit $\|\nu^{(n)}\|_{L_{w*}^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}))} = 1$. Mit Satz 5.1.2, der Separabilität von $L^1(\Omega; \mathcal{C}_0(\mathbb{R}))$ (selber überlegen!) und der Beschränktheit von $(\nu^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ folgt die Existenz einer gleichnamigen Teilfolge $(\nu^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ und einem $\nu \in L_{w*}^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}))$ mit

$$\nu^{(n)} \xrightarrow{*} \nu \quad \text{in } L_{w*}^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R})),$$

das heißt für alle $\tilde{f} \in L^1(\Omega; \mathcal{C}_0(\mathbb{R}))$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\tilde{f}(x))(u_n(x)) dx &= \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} (\tilde{f}(x))(t) d\nu_x^{(n)}(t) \\ &= \int_{\Omega} \langle \nu_x^{(n)}, \tilde{f}(x) \rangle_{\mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}_0(\mathbb{R})} dx \\ &= \langle \nu^{(n)}, \tilde{f} \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle \nu, \tilde{f} \rangle \\ &= \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} (\tilde{f}(x))(t) d\nu_x(t). \end{aligned}$$

Wir betrachten \tilde{f} der Form $(\tilde{f}(x))(t) = g(x)f(t)$ mit $g \in L^1(\Omega)$ und $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Dann gilt $\tilde{f} \in L^1(\Omega; \mathcal{C}_0(\mathbb{R}))$, also folgt nach dem Obigen

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(x)f(u_n(x)) dx &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} f(t) d\nu_x^{(n)}(t) g(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \langle \nu_x, f \rangle_{\mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}_0(\mathbb{R})} g(x) dx. \end{aligned}$$

Da g beliebig war, gilt für alle $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$

$$f(u_n) \xrightarrow{*} \langle \nu, f \rangle \quad \text{in } L^\infty(\Omega) \quad (26)$$

③ Wir zeigen $\nu_x \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ für fast alle $x \in \Omega$. Da $\|\nu_x^{(n)}\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R})} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und fast alle $x \in \Omega$ und insbesondere $\|\nu^{(n)}\| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und die Norm schwach* folgenunterhalbstetig ist, folgt $\|\nu\| \leq 1$.

① Wir zeigen $\nu_x \geq 0$ fast überall. Mit (26) folgt für $g \in L^1(\Omega)$ und $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$

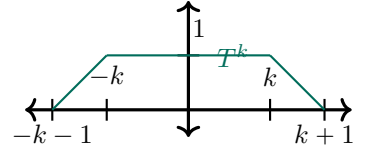
$$\int_{\Omega} g(x)f(u_n(x)) dx \rightarrow \int_{\Omega} \langle \nu_x, f \rangle g(x) dx.$$

Für $f, g \geq 0$ folgt also $\int_{\Omega} \langle \nu_x, f \rangle g(x) dx \geq 0$. Hieraus folgt $\langle \nu_x, f \rangle \geq 0$ für fast alle $x \in \Omega$ und alle $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ mit $f \geq 0$, da man g als Indikatorfunktionen wählen kann, die gegen einen Punkt konvergieren und dann LEBESGUE anwendet). Somit folgt

$$\langle \nu_x, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\nu_x(t)$$

und somit $\nu_x \geq 0$ (man kann sich auf beschränkte messbare Mengen A beschränken, dann glätten und benötigt nur punktweise Grenzwerte, und kann also LEBESGUE anwenden).

- ii) Wir zeigen, dass ν_x ein Wahrscheinlichkeitsmaß, d.h. $\|\nu_x\| = 1$ fast überall: Sei $T^k \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ gegeben durch die links beschriebene Funktion. Für alle messbaren Mengen $E \subset \Omega$ gilt mit (26)



$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|E|} \int_E T^k(u_n(x)) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|E|} \int_{\Omega} \mathbf{1}_E(x) T^k(u_n(x)) dx \\ &= \frac{1}{|E|} \int_E \langle \nu_x, T^k \rangle dx \\ &= \frac{1}{|E|} \int_E \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \underbrace{T^k(t)}_{\leq 1} d\nu_x(t)}_{\leq \|\nu_x\|} dx \\ &\leq \frac{1}{|E|} \int_E \|\nu_x\| dx \end{aligned}$$

Ist das am Anfang nicht Lemma 5.1.1??? Andererseits gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{|E|} \int_E \underbrace{(1 - T^k(u_n(x)))}_{=0 \text{ für } |u_n(x)| \leq k} dx \leq \frac{m(\{x \in E : |u_n(x)| \geq k\})}{|E|} \\ &\leq \frac{1}{|E|} \sup_{n \in \mathbb{N}} m(\{x \in \Omega : |u_n(x)| \geq k\}) =: \varepsilon_k. \end{aligned}$$

Somit folgt $1 - \varepsilon_k \leq \frac{1}{|E|} \int_{\Omega} T^k(u_n(x)) dx$.

Im Grenzwert folgt für $n \rightarrow \infty$

$$1 - \varepsilon_k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|E|} \int_E T^k(u_n(x)) dx \leq \frac{1}{|E|} \int_E \|\nu_x\| dx.$$

Für $k \rightarrow \infty$ gilt also

$$1 \leq \frac{1}{|E|} \int_E \|\nu_x\| dx \leq 1$$

und somit gilt

$$\frac{1}{|E|} \int_E \|\nu_x\| dx = 1$$

für alle messbaren Mengen $E \subset \Omega$.

- 4) Da $\nu^{(n)} \xrightarrow{*} \nu$ in $L_{w*}^{\infty}(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}))$ gilt, können wir ähnlich wie oben folgern: Seien $g \in L^{\infty}(\Omega)$, $f \in L^1(\Omega; \mathcal{C}_0(\mathbb{R}))$. Wir betrachten

$$(\tilde{f}(x))(t) := g(x)(f(x))(t).$$

Dann gilt $\tilde{f} \in L^1(\Omega; \mathcal{C}_0(\mathbb{R}))$. Somit folgt für alle $g \in L^\infty$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(x) \langle \nu_x^{(n)}, f(x) \rangle dx &= \langle \nu^{(n)}, \tilde{f} \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle \nu, \tilde{f} \rangle \\ &= \int_{\Omega} g(x) \langle \nu_x, \tilde{f}(x) \rangle dx. \end{aligned}$$

Es folgt also

$$\begin{aligned} (f(\cdot))(u_n(\cdot)) &= \int_{\mathbb{R}} (f(\cdot))(t) d\nu_{(\cdot)}^{(n)}(t) = \langle \nu^{(n)}, f(\cdot) \rangle \\ &\xrightarrow[\text{in } L^1(\Omega)]{*} \langle \nu, f(\cdot) \rangle = \int_{\mathbb{R}} (f(\cdot))(t) d\nu_{(\cdot)}(t) \end{aligned}$$

für alle $f \in L^1(\Omega; \mathcal{C}_0(\mathbb{R}))$ oder punktweise notiert:

$$[x \mapsto (f(x))(u_n(x))] \rightarrow \left[x \mapsto \int_{\mathbb{R}} (f(x))(t) d\nu_x(t) \right]. \quad (27)$$

Wir betrachten $L^1(\Omega; \mathcal{C}_0(\mathbb{R}))$ als Teilmenge der CARATHEODORY-Funktionen (via $(f(x))(t) \leftrightarrow f(x, t)$). Dann liest sich (27) so:

$$[x \mapsto f(x, u_n(x))] \xrightarrow[\text{in } L^1(\Omega)]{} \left[x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, t) d\nu_x(t) \right]$$

oder so:

$$f(\cdot, u_n) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(\cdot, t) d\nu_{(\cdot)}(t).$$

14.02.2020

⑤ Seien

$$f^+(x, t) := \max(f(x, t), 0) \quad \text{und} \quad f^-(x, t) := f(x, t) - f^+(x, t).$$

Nach dem Satz von DUNFORD-PETTIS sind die Mengen

$$\{f^+(\cdot, u_n(\cdot))\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad \{f^-(\cdot, u_n(\cdot))\}_{n \in \mathbb{N}}$$

schwach folgenkompakt in L^1 . Es genügt somit, nur $f \geq 0$ zu betrachten. Da bis auf Teilfolgen

$$f(\cdot, u_n(\cdot)) \rightharpoonup \bar{f} \quad \text{in } L^1(\Omega)$$

gilt, müssen wir

$$\bar{f} = \langle \nu_x, f \rangle \quad \text{fast überall}$$

zeigen.

Sei T^k wie oben. Betrachte

$$f^k(x, t) := f(x, t)T^k(t)$$

Für festes $x \in \Omega$ gilt somit $f^k(x, \cdot) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Sei $\varphi \in L^\infty(\Omega)$. Wir wollen zeigen, dass

$$\int_{\Omega} \varphi(x) f^k(x, u_n(x)) dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi(x) f(x, u_n(x)) dx \quad (28)$$

gleichmäßig in n gilt.

Sei $\varepsilon > 0$. Zunächst gilt

$$\left| \int_{\Omega} \varphi(x) [f^k(x, u_n) - f(x, u_n)] dx \right| \leq C \int_{|u_n(x)| \geq k} f(x, u_n) dx$$

Da $(f(\cdot, u_n(\cdot)))_{n \in \mathbb{N}}$ schwach in $L^1(\Omega)$ konvergiert folgt aus dem Satz von DUNFORD-PETTIS die Existenz eines $M \geq 0$ sodass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\{x: f(x, u_n(x)) \geq M\}} f(x, u_n(x)) dx \leq \varepsilon$$

gilt. Summa summarum gilt für genügend große k und alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_{\{x: |u_n(x)| \geq k\}} f(x, u_n(x)) dx &= \int_{\left\{ \begin{array}{l} x: |u_n(x)| \geq k, \\ f(x, u_n(x)) \leq M \end{array} \right\}} f(x, u_n(x)) dx \\ &\quad + \int_{\left\{ \begin{array}{l} x: |u_n(x)| \geq k, \\ f(x, u_n(x)) > M \end{array} \right\}} f(x, u_n(x)) dx \\ &\leq M \cdot m(\{x: |u_n(x)| \geq k\}) + \varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Da f^k die Voraussetzungen der vorangegangenen Schritte des Beweises erfüllt (!), gilt für $\varphi \in L^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \varphi(x) f^k(x, u_n(x)) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi(x) \langle \nu_x, f^k(x, \cdot) \rangle dx.$$

Da der Grenzwert gleichmäßig in n ist, können wir die Grenzprozesse vertauschen:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi(x) \langle \nu_x, f^k(x, \cdot) \rangle dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi(x) \langle \nu_x, f^k(x, \cdot) \rangle dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi(x) \langle \nu_x, f^k(x, \cdot) \rangle dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi(x) \langle \nu_x, f(x, \cdot) \rangle dx \\ &= \int_{\Omega} \bar{f}(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\int_{\Omega} \bar{f}(x) \varphi(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} f^k(x, t) d\nu_x(t) \varphi(x) dx.$$

Wähle nun $\varphi \geq 0$. Dann gilt

$$f^k(x, t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x, t) \quad \text{fast überall.}$$

Da f^k monoton wachsend ist, folgt mit dem Satz über monotone Konvergenz

$$\int_{\Omega} \bar{f}(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} f(x, t) d\nu_x(t) \varphi(x) dx$$

und somit mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung (da $C_c^\infty \subset L^\infty$)

$$\langle \nu_x, f(x, \cdot) \rangle = \bar{f}(x) \quad \text{fast überall.} \quad \square$$

5.2 Anwendungen: Maßwertige Lösungen

Beispiel 5.2.1 (Nicht monotoner Hauptteil)

Betrachte das Randwertproblem in Divergenzform

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\varphi(\nabla u)) = 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

wobei φ *nicht monoton*, aber stetig ist und Konstanten $c_1, c_2, c_3 > 0$ existiert, sodass für alle $x \in \Omega$ gilt

$$|\varphi(x)| \leq c_1(1 + |x|) \quad \text{und} \quad \varphi(x) \cdot x \geq c_2|x|^2 - c_3.$$

Wir wollen mit *Regularisierung* eine *approximierende Folge von Lösungen* konstruieren. Betrachte

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\varphi(\nabla u_\varepsilon)) + \varepsilon \Delta^2 u_\varepsilon = 0, & \text{auf } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{und} \quad \nabla u_\varepsilon \cdot n = 0, & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

wobei n ein äußerer Normalenvektor ist. Durch den *gutartigen Regularisierungsterm* $\varepsilon \Delta^2 u$ ist das Randwertproblem nun von *vierter Ordnung*, somit benötigen wir mehr Randbedingungen. Für die variationelle Formulierung wählen wir $V := (\mathcal{H}_0^2(\Omega), \|\Delta \cdot\|_2)$ und betrachten die schwache Formulierung

Eine andere mögliche Randbedingung wäre $\Delta u = 0$ auf $\delta\Omega$. Wähle dann $V := \mathcal{H}_0^1(\Omega) \cap \mathcal{H}_0^2(\Omega)$.

$$\underbrace{\int_{\Omega} \varphi(\nabla u_\varepsilon) \nabla v \, dx}_{=: \langle Bu_\varepsilon, v \rangle} + \varepsilon \underbrace{\int_{\Omega} \Delta u_\varepsilon \Delta v \, dx}_{=: \langle Au_\varepsilon, v \rangle} = 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}_0^2(\Omega) \quad (P_\varepsilon)$$

Als Übung zeigt man mit dem Satz von BROWDER-MINTY, dass es für alle $\varepsilon > 0$ eine Lösung gibt.

A-priori-Abschätzung. Wir testen in (P_ε) mit $v = u_\varepsilon$ und erhalten

$$\begin{aligned} 0 = \langle Au_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle + \langle Bu_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle &= \int_{\Omega} \varphi(\nabla u_\varepsilon) \nabla u_\varepsilon \, dx + \varepsilon \int_{\Omega} (\Delta u_\varepsilon)^2 \, dx \\ &= \int_{\Omega} \varphi(\nabla u_\varepsilon) \nabla u_\varepsilon \, dx + \varepsilon \|u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_0^2}^2 \\ &\geq \int_{\Omega} c_2 \|u_\varepsilon\|^2 - c_3 \, dx + \varepsilon \|u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_0^2}^2 \\ &= c_2 \|u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_0^1}^2 - c_3 |\Omega| + \varepsilon \|u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_0^2}^2. \end{aligned}$$

Somit sind $\sqrt{\varepsilon} \|u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_0^2}$ und $\|u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_0^1}$ unabhängig von ε beschränkt. Daher existieren (gleich bezeichnete) Teilfolgen, sodass

$$\nabla u_\varepsilon \xrightarrow{\text{in } L^2(\Omega)} \nabla u \quad \text{und} \quad \varepsilon \|\Delta u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_0^2} \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0$$

gilt.

Grenzwertidentifikation. Wir wollen zum Grenzwert übergehen. Für alle $v \in \mathcal{H}_0^2(\Omega)$ gilt

$$\varepsilon \langle Au_\varepsilon, v \rangle + \langle Bu_\varepsilon, v \rangle \leq \underbrace{\varepsilon \|\Delta u_\varepsilon\|_2 \|\Delta v\|_2}_{\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0} + \langle Bu_\varepsilon, v \rangle.$$

Im zweiten Term können wir nicht zum Grenzwert übergehen, da wir nur schwache Konvergenz und keine Monotonie haben. Deswegen wollen wir den Grenzwert im Sinne von YOUNG-Maßen identifizieren.

Da die Folgen $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ in $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ und $(\nabla u_\varepsilon)_\varepsilon$ in $L^2(\Omega)$ beschränkt sind und somit die Voraussetzungen des Hauptsatzes erfüllen, erzeugt die Folge $(\nabla u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ ein YOUNG-Maß $\nu_x \in L_{w*}^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}))$. Wir müssen überprüfen, ob φ zulässig ist. Zunächst ist φ stetig und somit eine CARATHEODORY-Funktion.

Wir wollen zeigen, dass $(\varphi(\nabla u_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ in $L^1(\Omega)$ schwach konvergiert. Nach dem Satz von DE LA VALLÉE POUSSIN genügt es eine Funktion $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$\frac{\psi(z)}{z} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \infty, \quad \text{und} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \psi(|\varphi(\nabla u_\varepsilon(x))|) dx < \infty.$$

zu finden. Die Funktion $\psi(z) := z^2$ erfüllt beide Bedingungen: für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\int_{\Omega} |\varphi(\nabla u_\varepsilon)|^2 dx \leq c_1^2 \int_{\Omega} (1 + |\nabla u_\varepsilon|)^2 dx \leq c(1 + \|\nabla u_\varepsilon\|_2^2) < \infty$$

Somit gilt

$$\varphi(\nabla u_\varepsilon) \rightharpoonup \langle \nu_x, \varphi \rangle \quad \text{in } L^1(\Omega)$$

und somit nach dem Hauptsatz

$$\langle Bu_\varepsilon, v \rangle \rightarrow \int_{\Omega} \langle \nu_x, \varphi \rangle \nabla v dx,$$

für alle $v \in \mathcal{H}_0^2(\Omega)$, also

$$\langle \nu_x, \text{id} \rangle = \nabla u \quad \text{für fast alle } x \in \Omega. \quad \diamond$$

05.02.19

Beispiel 5.2.2 (TODO)

Betrachte ein eindimensionales Randwertproblem in Divergenzform

$$\begin{cases} -(a(x, u'(x)))' = 0 & \text{in } (a, b), \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

und seine Operator-Formulierung: Sei $V := \mathcal{W}_0^{1,p}(a, b)$

$$Au = 0 \text{ in } V^*, \quad A: V \rightarrow V^*, \quad \langle Au, v \rangle := \int_a^b a(x, u'(x)) v'(x) dx$$

Hierbei soll a die Voraussetzungen von Satz 1.3.3 erfüllen.

Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ eine approximierende Folge mit $u_n \rightharpoonup u$ und $Au_n \rightharpoonup b$ in V^* , also

$$a(\cdot, u_n(\cdot)) \rightharpoonup \bar{b} \quad \text{in } L^p(\Omega),$$

welche ein YOUNG-Maß $\nu_{(\cdot)}: (a, b) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R})$ erzeugt.

Nun können wir einen verallgemeinerten Lösungsbegriff definieren:

DEFINITION 5.2.3 (MASSWERTIGE LÖSUNG)

Das Dupel $(u, \nu_{(\cdot)}) \in V \times L_{w*}^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}))$ heißt maßwertige Lösung von (P), wenn für alle $v \in \mathcal{W}_0^{1,p}(a, b)$ und fast alle $x \in (a, b)$

$$\int_a^b \int_{\mathbb{R}} a(x, t) d\nu_x(t) v'(x) dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} t d\nu_x(t) = u'(x)$$

gilt bzw (für das erste Beispiel (P_ε))

$$\int_{\Omega} \langle \nu_x, \varphi \rangle \nabla v dx = 0 \quad \text{und} \quad \nabla u(x) = \langle \nu_x, \text{id} \rangle \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Ist $\nu_x = \delta_{u'(x)}$, so ist u eine schwache Lösung. \diamond

Bemerkung 5.2.4 Maßwertige Lösungen können nur angewandt werden, wenn oszillatorisches Verhalten vorliegt, jedoch nicht für Konzentrationseffekte. Dafür benutzt man verallgemeinerte YOUNG-Maße, welches ein Tripel $(\nu, \lambda, \nu^\infty)$ ist, wobei λ defekt (????) ist und ν^∞ den Winkel angibt (vgl. Tomáš Roubíček: *Relaxation in Optimization Theory and Variational Calculus* oder das Paper von Madja und DiPerna, 1987.)

Beispiel 5.2.5 (Wenn YOUNG-Maße scheitern)

Betrachte für ein offenes Intervall Ω das eindimensionale Randwertproblem

$$\begin{cases} -(\Phi(u'(x)))' = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

wobei $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\varphi + \text{id}$ definiert ist und

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{für } x < -\frac{3}{2}, \\ -1, & \text{für } -\frac{3}{2} \leq x < -\frac{1}{2}, \\ 2x, & \text{für } -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{für } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}, \\ x - \frac{1}{2}, & \text{für } x \geq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Dann ist φ monoton, stetig (insbesondere radialstetig) und koerzitiv. Somit ist Φ strikt monoton, stetig und koerzitiv: für $x \neq y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(\Phi(x) - \Phi(y))(x - y) = (\varphi(x) - \varphi(y))(x - y) + (x - y)^2 > 0$$

Und $|\Phi(x)| \stackrel{\Delta \neq}{\leq} |\varphi(x)| + |x| \leq 3(|x| + 1)$. Nach dem Satz von MURAT existiert eine eindeutige schwache Lösung $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, also gilt

$$\int_{\Omega} \Phi(u') v' dx = 0$$

für alle $v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$. Diese schwache Lösung ist auch eine maßwertige Lösung mit $\nu_x = \delta_{u'(x)}$: Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} t d\delta_{u'(x)}(t) = u'(x)$$

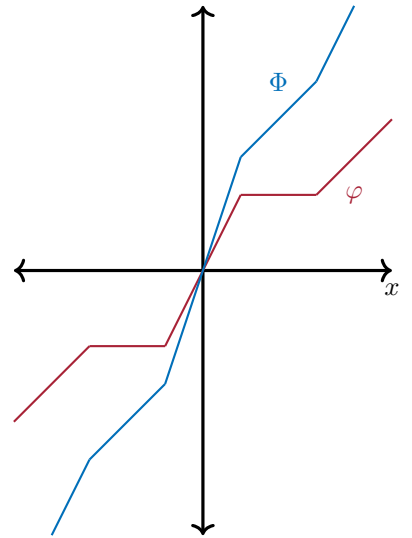


Abb. 16: Die Abbildungen φ und Φ .

und

$$\int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} \Phi(t) d\delta_{u'(x)}(t) v'(x) dx = \int_{\Omega} \Phi(u'(x)) v'(x) dx = 0$$

für alle $v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$.

Für $\omega \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ mit $\|\omega'\|_{L^\infty(\Omega)} < \frac{1}{4}$ definiere

$$\nu_x = \frac{1 - \omega'(x)}{2} \delta_{2\omega'(x)+1} + \frac{1 + \omega'(x)}{2} \delta_{2\omega'(x)-1}.$$

Dann gilt $\nu_x \geq 0$ und

$$\nu_x(\mathbb{R}) = \frac{1 - \omega'(x)}{2} + \frac{1 + \omega'(x)}{2} = 1.$$

Die Regularität ist klar, also ist ν_x ein Wahrscheinlichkeits-RADON-Maß.

Für $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definiere die Kurznotation

$$\langle \nu_x, f \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(t) d\nu_x(t).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle \nu_x, \text{id} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} t d\nu_x(t) \\ &= \frac{(1 - \omega'(x))(2\omega'(x) + 1)}{2} + \frac{(1 + \omega'(x))(2\omega'(x) - 1)}{2} = \omega'(x). \end{aligned} \quad (29)$$

Da $|\omega'(x)| < \frac{1}{4}$ fast überall in Ω gilt, folgt

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + 1 \leq 2\omega'(x) + 1 \leq \frac{3}{2}$$

und analog $2\omega'(x) - 1 \in [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$ fast überall in Ω . Somit gilt

$$\varphi(2\omega'(x) + 1) = 1 = -\varphi(2\omega'(x) - 1)$$

fast überall in Ω . Somit folgt mit 29

$$\begin{aligned} \langle \nu_x, \Phi \rangle &= \langle \nu_x, \varphi \rangle + \langle \nu_x, \text{id} \rangle \\ &= \frac{(1 - \omega'(x))\varphi(2\omega'(x) + 1)}{2} + \frac{(1 + \omega'(x))\varphi(2\omega'(x) - 1)}{2} + \omega'(x) \\ &= -\omega'(x) + \omega'(x) = 0. \end{aligned}$$

Somit folgt für alle $v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \langle \nu_x, \Phi \rangle v'(x) dx = 0.$$

Somit existieren unendlich viele maßwertige Lösungen $(\nu_{(\cdot)}, v)$ mit $v \neq u$. \diamond

Das obigen Beispiel zeigt, dass auch ein korrekt gestelltes Problem in schwacher Formulierung unendliche viele "nicht-physikalische" Lösungen hat, wenn man maßwertige Lösungen zulässt. Dies zeigt, dass man Zulässigkeitskriterien benötigt, um die „richtige“ maßwertige Lösung zu finden.

Dafür gibt es mehrere Ansätze:

korrekt gestellt bedeutet hier nicht notwendigerweise stetige Abhängigkeit von den Daten.

- ① **Energy inequality.** Für die stationäre EULER-Gleichung $(u_t + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, \nabla u = 0)$ nutzt man z.B.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx \leq 0.$$

Dies kann sinnvoll sein, da die L^2 -Norm bezüglich x die Energie des Systems darstellt. Andere Möglichkeiten sind

$$\int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |u_0(x, t)|^2 dx$$

fast überall in $[0, T]$ oder

$$\int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |u(x, s)|^2 dx$$

fast überall für $s \geq t$.

Für die NAVIER-STOKES Gleichung $u_t + \mu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, \nabla u = 0$ kann man

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx \leq 0.$$

verwenden.

- ② **(Maßwertige) schwach-stark Einzigkeit.** Das beschreibt die Eigenschaft eines verallgemeinerten Lösungsbegriffs, dass eine starke (nicht notwendigerweise klassische) Lösung die einzige unter den verallgemeinerten Lösung ist, d.h. existiert eine starke Lösung, so ist die verallgemeinerte Lösung eindeutig und stimmt mit der starken Lösung überein.

Index

B

beschränkt LIPSCHITZ-stetig. 20

D

demistetig 8

Diffusionsterm 51

Dualitätsabbildung 13, 42

F

folgenunterhalbstetig 6

FRÉCHET-Ableitung 40

G

GÂTEAUX-Ableitung 40

GALERKIN-Schema 1

gleichmäßig konvex 6

gleichmäßig monoton 10

H

hemistetig 8

K

koerzitiv 10

Konvektionsterm 51

konvex 46

L

LINQUIST Identität 16

lokal beschränkt 8

M

MINTY's Trick 12, 13, 19, 22, 48

monoton 10

P

Potenzialoperator 44

pseudomonoton 32

R

radialstetig 8

S

schwach abgeschlossen 2

schwach koerzitiv 46

schwach*-messbar 62

schwach-schwach-stetig 8

stark monoton 10

strikt konvex 7

strikt monoton 10

V

verstärkt stetig 8

Y

YOUNG-Maß 62