



TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Vorlesungsmitschrift

Differentialgleichungen I

gelesen von Dr. Hans-Christian Kreusler im Wintersemester 2020/21

Inhaltsverzeichnis

Einführung	1
0 Beispiele und Klassifikation	2
0.1 Klassifizierung	4
1 Elementare Lösungsmethoden für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen	6
1.1 Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen	6
1.2 Nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen	10
1.3 Charakteristikenverfahren für quasilineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung in zwei Variablen	11
1.4 Die drei Grundtypen linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei Variablen	12
2 Existenz und Eindeutigkeit bei Anfangswertproblemen für gewöhnliche und Operator- Differentialgleichungen	17
2.1 Das Integral für stetige Funktionen mit Werten in einem BANACH-Raum	17
2.2 Die Sätze von PICARD-LINDELÖF: Lokale und globale eindeutige Lösbarkeit von Anfangs- wertproblemen	25
2.3 Lineare Systeme mit beschränkten Operatoren	33
2.4 Der Satz von PEANO	49
2.5 Einzigkeitsaussagen	58
2.6 Maximale fortgesetzte Lösungen und das Verhalten am Rand des maximalen Existenzbereichs	61
2.7 Der Hauptsatz für absolutstetige Funktionen	67
2.8 Lösbarkeit in Sinne von CARATHÉODORY	76
3 Abhängigkeit der Lösung von den Daten, Stabilität und Zeitdiskretisierung	80
3.1 Das Lemma von GRONWALL (diesmal richtig)	80
3.2 Stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten	83
3.3 Dissipative Systeme	86
3.4 Zeitdiskretisierung durch einfache Einschrittverfahren	89
3.5 Stabilität und der Satz von LJAPUNOV, asymptotisches Verhalten	96
4 Randwertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung	106
4.1 Grundbegriffe und elementare Aussagen	106
4.2 Randwertprobleme für homogene lineare Differentialgleichungen mit inhomogenen DIRICH- LET Randbedingungen	108
4.3 Die GREENsche Funktion	111
4.4 GREENsche Funktion für inhomogene lineare Randwertprobleme	114
4.5 Das Maximumprinzip	117
4.6 Allgemeine semilineare Randwertprobleme	121
Abbildungsverzeichnis	i
Index	ii
Literatur	iii

Getexed von Viktor Glombik

Zuletzt aktualisiert am 12. April 2022.

Einführung

20.10.2020

Der Kurs Differentialgleichungen I ist der Einstieg in den Differentialgleichungszyklus, bestehend aus den Kursen Differentialgleichungen I, II A, II B und III. In Differentialgleichungen I beschäftigen wir uns hauptsächlich mit [gewöhnlichen Differentialgleichungen](#).

In den meisten Analysis-Kursen werden [Anfangswertprobleme](#) für gewöhnliche Differentialgleichungen behandelt und der [Satz von PICARD-LINDELÖF](#) bewiesen. Dies bietet einen guten Ausgangspunkt für diese Vorlesung, in der wir uns mit Problemen der Art

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & \text{für } t \in I, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

beschäftigen werden, wobei (2) [Anfangsbedingung](#) heißt und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

Das ist jedoch nicht alles; am Ende der Vorlesung werden wir uns mit [Randwertproblemen](#) beschäftigen, welche ganz anders funktionieren als Anfangswertprobleme. Desweiteren werden wir auch partielle Differentialgleichungen behandeln.

Für alle diese Problem gibt es Fragen (nach HADAMARD), die wir beantworten wollen:

- [Existenz](#) und [Eindeutigkeit](#) der Lösungen. Gibt es Lösungen und wenn ja, wie viele?
- [Regularität](#) der Lösungen. Damit u eine Lösung von (1) sein kann, muss $u \in \mathcal{C}^1(I)$ gelten, aber ist $u \in \mathcal{C}^k(I)$ für $k > 1$?
- [Approximierbarkeit](#) der Lösungen. Ist keine Lösung berechenbar, ist sie dann approximierbar?
- [Explizite Lösbarkeit](#). Wir werden sehen, dass nur in wenigen Fällen explizite Lösungen von Differentialgleichungen berechenbar sind. Explizite Lösungsverfahren werden wir nur am Anfang dieser Vorlesung behandeln.
- [Stabilität](#) einer Lösung. Wie hängt die Lösung des Anfangswertproblems von dem [Anfangswert](#) u_0 (oder auch der Funktion f) ab: ändert sich die Lösung zum Anfangswert u_0 stark bei kleiner Veränderung von u_0 oder nur geringfügig?

Die Regularität ist besonders in der Numerik wichtig, da Funktionen mit höherer Regularität einfacher approximiert werden können.

Im Unterschied zur Analysis behandeln wir in diesem Kurs Funktionen $u: I \rightarrow X$ für einen beliebigen BANACH-Raum X , der nicht nur, wie in der Analysis, der \mathbb{R}^d , sondern auch unendlichdimensional sein kann, zum Beispiel der [Funktionsraum](#) $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$ oder der [Folgenraum](#) ℓ^2 .

Einerseits werden wir uns mit der klassischen Lösungstheorie für gewöhnliche Differentialgleichungen beschäftigen (die [Sätze von PICARD-LINDELÖF](#), der [Satz von PEANO](#), ...), andererseits ist dieser Kurs der Einstieg in den Differentialgleichungszyklus; viele der hier gelernten Konzepte werden in den weiterführenden Kursen auf [partielle Differentialgleichungen](#) (Differentialgleichungen II A und B) und [Evolutionsgleichungen](#) (Differentialgleichungen III) verallgemeinert.

0 Beispiele und Klassifikation

Zu Beginn dieser Vorlesung wollen wir uns ein paar Beispiele ansehen, um einzuordnen, welche Art von Problemen an welchen Stellen der Vorlesung behandelt werden.

Beispiel 0.0.1 (Gewöhnliches Anfangswertproblem in \mathbb{R})

Aus der Analysis sind [Anfangswertprobleme](#) der Form

$$\begin{cases} u'(t) = u(t), \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

für $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ bekannt, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein [Intervall](#) (also insbesondere zusammenhängend) ist. Die [Differentialgleichung](#) (3) beschreibt ein System, welches sich über die Zeit t verändert. Für eine geeignete Charakterisierung dieser Entwicklung wird der Anfangszustand benötigt, der durch die [Anfangsbedingung](#) (4) beschrieben wird. Man differenziert also zwischen dem Anfangswertproblem, der [Differentialgleichung](#) (3) und den weiteren [Bedingungen](#) (4).

In diesem Fall erfüllen alle Funktionen $u(t) = ce^t$ für beliebige $c \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung (3). Nehmen wir die Bedingung (4) hinzu, ist die [eindeutige](#) (ist noch zu beweisen) Lösung des Anfangswertproblems $u(t) = e^t$. Viele der Sätze, welche wir dieses Semester behandeln, werden Aussagen über die Lösbarkeit von Anfangswertproblemen und nicht über die Lösbarkeit von Differentialgleichungen treffen.

Nach Abschnitt 0.1 handelt es sich um eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung. \diamond

Wir können natürlich auch $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ für $d > 1$ betrachten.

Beispiel 0.0.2 (Systeme von Differentialgleichung: SIR-Modell)

Wir betrachten ein sehr primitives Modell, um zum Beispiel einen [Pandemieverlauf](#) zu modellieren. Seien $S, I, R: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} S(t) &:= \text{die Anzahl der anfälligen Personen,} && (\text{susceptible}) \\ I(t) &:= \text{die Anzahl der Erkrankten / Ansteckenden,} && (\text{infectious}) \\ R(t) &:= \text{die Anzahl der Immunisierten / Verstorbenen,} && (\text{removed}) \end{aligned}$$

jeweils zum Zeitpunkt t , definiert. Wir nehmen an, dass die „Gesamtbevölkerung“ $S(t) + I(t) + R(t)$ für alle $t \in [0, \infty)$ konstant ist und alle Summanden stets nichtnegativ sind.

Die Lösung der Differentialgleichung

$$S'(t) = -aI(t) \cdot S(t) \quad (5a)$$

$$I'(t) = aI(t) \cdot S(t) - bI(t) \quad (5b)$$

$$R'(t) = bI(t) \quad (5c)$$

für Konstanten $a, b \in [0, 1]$ ist von der Form $\begin{pmatrix} S \\ I \\ R \end{pmatrix}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Die Konstante a beschreibt die [Infektiosität](#): treffen sich eine ansteckende Person und eine anfällige Person, ausgedrückt durch den Term $I(t) \cdot S(t)$, so erfolgt mit Wahrscheinlichkeit a eine Infektion der anfälligen Person. Dann verringert sich die Zahl der anfälligen Personen um die gerade angesteckte Person (5a) und die Anzahl der Ansteckenden steigt (5b). Mit Wahrscheinlichkeit b wird eine erkrankte Person immun oder stirbt und das erklärt den Term $-bI(t)$ in (5b). Letztlich werden diese Personen nun der Gruppe R zugeordnet, was (5c) erklärt.

Außerdem ist die [Anfangswertbedingung](#) $(S(0), I(0), R(0))$ gegeben.

Ohne die Lösung dieses Anfangswertproblems explizit zu berechnen, können wir eine qualitative Analyse durchführen. Da S' negativ ist, fällt S monoton. Analog folgt, dass R monoton wächst, wie man es in Abbildung 1 beobachten kann.

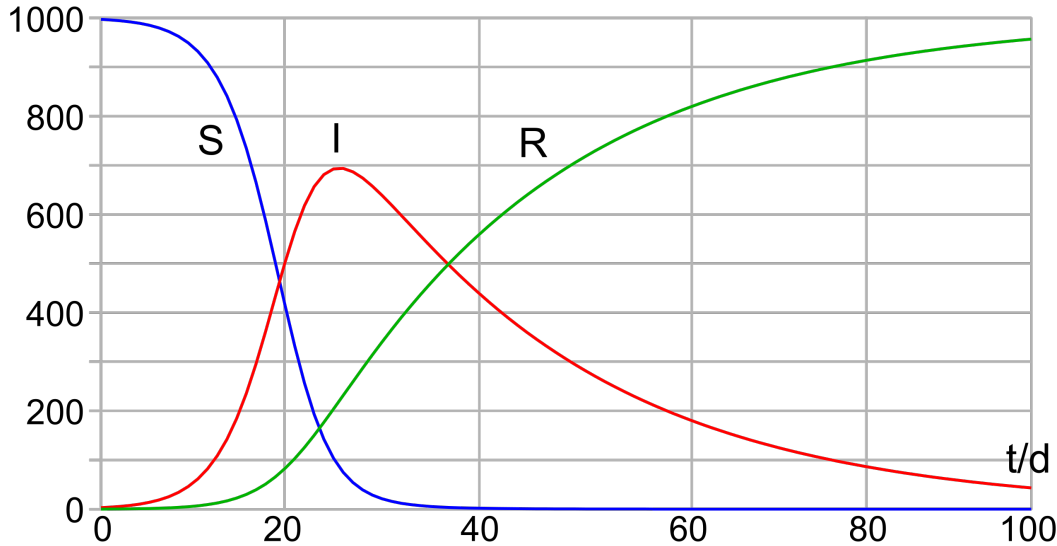


Abb. 1: Das SIR-Modell mit Anfangswert $(S, I, R)(0) = (997, 3, 0)$. [2]

Man beachte, dass das Maximum von I genau am Schnittpunkt der Funktionen S und R erreicht wird.

Nach Abschnitt 0.1 handelt es sich um eine gewöhnliche, semi-lineare Differentialgleichung. \diamond

Beispiel 0.0.3 (Randwertprobleme: Durchbiegung einer Platte (DGL I, II A, B))

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein [Gebiet](#) (offen, nichtleer, zusammenhängend) und die gesuchte Lösung $u(x): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die [Durchbiegung einer Platte](#) an einer Stelle $x \in \Omega$. Für Materialkonstanten β und v lautet die dazugehörige explizite partielle lineare Differentialgleichung vierter Ordnung (cf. Abschnitt 0.1)

$$\beta \Delta \Delta u + vu = f,$$

wobei $f(x)$ die Kraft, die an der Stelle $x \in \Omega$ wirkt, und $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ der [LAPLACE-Operator](#) ist.

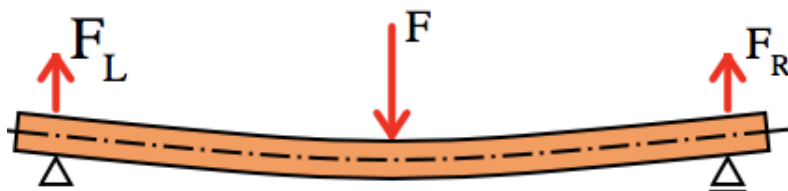


Abb. 2: Durchbiegung einer Platte [1].

Da die Platte am Rand von Ω , $\partial\Omega$, fixiert ist, benötigen wir die [Randbedingung](#) $u|_{\partial\Omega} = 0$. Solche Probleme heißen [stationäre Probleme](#), da sie nur vom Raum und nicht von der Zeit abhängen (wir üben den Druck auf die Platte aus und betrachten dann den Endzustand der durchgebogenen Platte, nicht den Prozess der Verbiegung). \diamond

[Randbedingung](#)

Beispiel 0.0.4 (NAVIER-STOKES-Strömungsgleichung (DGL II B und III))

In diesem [Clay-Institute-Millennium-Problem](#) ist $[0, \infty)$ das Zeitintervall und $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ der Raum. Wir suchen eine Lösung $u = u(x, t) \in \mathbb{R}^3$, welche der [Geschwindigkeit der Strömung](#) an der Stelle $x \in \Omega$ zum Zeitpunkt $t \in [0, \infty)$ entspricht.

Seien ν die Viskositätskonstante und π der Druck. Betrachte die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u_t - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \pi = f,$$

wobei der erste Term die Zeitableitung erster Ordnung, der zweite die Raumableitung zweiter Ordnung und f die externe Kraft darstellt. Wir können Anfangs- und Randbedingungen der Form

$$\begin{cases} u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, \infty), \end{cases}$$

stellen. Man kann dem System die Gleichung $\operatorname{div}(u) = 0$ hinzufügen, was bedeutet, dass wir ein inkompressibles Fluid (zum Beispiel Wasser) modellieren.

Diese Beispiel kombiniert also alles bisher Gelernte: die Differentialgleichung ist von der Zeit und von dem Ort abhängig. Nach Abschnitt 0.1 handelt es sich um eine semi-lineare Differentialgleichung. \diamond

0.1 | Klassifizierung

DEFINITION 0.1.1 (GEWÖHNLICHE/PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNG)

Eine Differentialgleichung heißt [gewöhnlich](#), wenn sie in Abhängigkeit von nur einer Variable (zumeist der Zeit) steht. Sonst heißt sie [partiell](#), wenn sie zum Beispiel von dem Raum ($x \in \mathbb{R}^d$, $d > 1$) oder von dem Raum und der Zeit $((t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ abhängt.

DEFINITION 0.1.2 (ORDNUNG EINER DIFFERENTIALGLEICHUNG)

Die [Ordnung](#) einer Differentialgleichung ist der Grad der höchsten auftretenden Ableitung.

[Ordnung](#)

DEFINITION 0.1.3 ((NICHT)LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNG)

Eine Differentialgleichung heißt [linear](#), wenn sie linear bezüglich der Lösungen und ihren Ableitung ist. Eine nichtlineare Differentialgleichung heißt

- [quasilinear](#), wenn die Gleichung linear in der höchsten Ableitung $u^{(n)}$ ist und die Koeffizientenfunktion vor der höchsten Ableitung höchstens von den niedrigeren Ableitungen $u, u', \dots, u^{(n-1)}$ abhängen. Dann können wir die Gleichung in der Form

$$a(t, u(t), u^{(1)}(t), \dots, u^{(n-1)}(t)) u^{(n)}(t) = f(t, u(t), u^{(1)}(t), \dots, u^{(n-1)}(t))$$

schreiben.

[quasilinear](#)

- [semilinear](#), wenn die Gleichung quasilinear ist und die Koeffizientenfunktion a vor der höchsten Ableitung nicht von u oder $u', \dots, u^{(n-1)}$ abhängt. Dann können wir die Gleichung in der Form

$$a(t) u^{(n)}(t) = f(t, u(t), u^{(1)}(t), \dots, u^{(n-1)}(t))$$

schreiben.

[semilinear](#)

- **vollständig nichtlinear**, wenn sie nicht einmal quasilinear (und somit auch nicht semilinear) sind.

**vollständig
nichtlinear****Beispiel 0.1.4 (Nichtlineare Differentialgleichung)**

- $u'' = uu'$ ist eine semilineare Differentialgleichung,
- $u \cdot u'' = (u')^2$ ist eine quasilineare aber nicht semilineare Differentialgleichung und
- $\sin(u'') = u'$ ist eine vollständig nichtlineare Differentialgleichung. \diamond

Beispiel 0.1.5 (Differentialgleichung, Anfangswert- und Randwertproblem)

Wir betrachten die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$-u'' = 0, \tag{6}$$

dessen allgemeine Lösung $u(t) = at + b$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist. Wie oben zeigen wir die Eindeutigkeit noch nicht.

Wir können aus (6) ein Anfangswertproblem machen:

$$\begin{cases} u''(t) = 0, & t \in [0, \infty), \\ u(0) = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Um die Lösung u zu erhalten, könnte man zwei Mal integrieren und erhält dann zwei Integrationskonstanten. Da wir nur eine Anfangsbedingung gegeben haben, können wir nicht beide Konstanten bestimmen. Es handelt sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, deshalb benötigen wir in (7) also zusätzlich eine Bedingung an die Ableitung, zum Beispiel $u'(0) = 1$, um eine eindeutige Lösung zu erhalten. Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u''(t) = 0, & t \in [0, \infty), \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 1, \end{cases}$$

ist $u(t) = t + 1$.

Wir können aus (6) auch ein Randwertproblem machen:

$$\begin{cases} u''(t) = 0, & t \in [0, 1], \\ u'(0) = 1, \\ u'(1) = 0. \end{cases}$$

Dieses System besitzt keine Lösung, da $u'(t) = a$ nicht gleichzeitig 0 und 1 sein kann. Ähnlich gibt kann man die Randbedingung so wählen, dass es unendlich viele Lösungen oder genau eine Lösung gibt.

Wir haben gesehen, dass man, ausgehend von einer Differentialgleichung, sehr verschiedene Probleme mit sehr unterschiedlichem Lösungsverhalten erhalten kann. \diamond

1

Elementare Lösungsmethoden für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen

1.1 | Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir betrachten ein Anfangswertproblem bestehend aus einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$f = \sum_{k=0}^n a_k u^{(k)} \quad \text{mit } a_n \equiv 1 \quad (8)$$

und n Anfangsbedingungen $u^{(k)}(t_0) = u_0^{(k)}$ für $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Hierbei sind $a_k, f, u: \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$ für $k \in \{0, \dots, n-1\}$ Funktionen, bei denen wir das Argument weglassen: wir schreiben a_k anstatt $a_k(t)$ und so weiter.

Wir verwenden die folgende Lösungsstrategie:

- ① Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (8).
- ② Bestimme die n Parameter aus den Anfangsbedingungen (durch Ableitung und Einsetzen).

Wir sehen, dass der erste Schritt der Wesentliche ist.



Allgemeine lineare Probleme: das Superpositionsprinzip

Seien X und Y reelle Vektorräume und $A: X \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung. Wir suchen zu $f \in Y$ ein $x \in X$, sodass die lineare Gleichung $A(x) =: Ax = f$ erfüllt ist.

Ist $f = 0$, so heißt das Problem **homogen**, sonst **inhomogen**.

Wir lösen das Problem mit dem **Superpositionsprinzip**:

- ① Die **Lösungsmenge** des homogenen Problems ist ein **Untervektorraum** von X .
- ② Die Lösungsmenge des inhomogenen Problems ist ein zum Lösungsraum des homogenen Problems **affiner Unterraum**: die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems ist die Summe einer partikulären und der allgemeinen Lösungen des homogenen Problems.

homogen

Superpositionsprinzip

Beweis. ① Lösen u_1 und u_2 das homogene Problem, so ist auch $u := \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ eine Lösung:

$$Au = \lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2 = 0.$$

- ② Sind u_p eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems und u_h eine Lösung des homogenen Problems, so ist $u_p + u_h$ eine Lösung des inhomogenen Problems:

$$A(u_p + u_h) = \underbrace{Au_p}_{=f} + \underbrace{Au_h}_{=0} = f.$$

□

Also können wir den ersten Schritt von oben in zwei Schritte aufteilen:

- 1a) Finde *eine* Lösung des inhomogenen Problems.
- 1b) Finde *alle* Lösungen des homogenen Problems.

Das homogene Problem

Wir suchen die Lösung der Gleichung (8) mit $f = 0$. Aus dem Superpositionsprinzip folgt, dass der Lösungsraum der homogenen Gleichung ein n -dimensionaler Vektorraum ist (siehe auch: später). Somit suchen wir **n linear unabhängige Lösungen** als **Basis des Lösungsraums**.

Sind die Koeffizientenfunktionen konstant, das heißt $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, so verwenden wir den **Exponentialansatz** $u(t) = e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir erhalten $u^{(k)}(t) = \lambda^k e^{\lambda t}$ für $k \in \{1, \dots, n\}$. Einsetzen der Ansatzfunktion u in die Differentialgleichung (8) ergibt

$$\underbrace{e^{\lambda t}}_{>0} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \right)}_{=: \chi(\lambda)} \stackrel{!}{=} 0.$$

Wir haben das Finden der Lösung also auf das Finden von Nullstellen des **charakteristischen Polynoms** χ zurückgeführt. Diese Nullstellen müssen jedoch weder alle verschieden noch reell sein.

Dazu schauen wir uns zwei Beispiele an.

Beispiel 1.1.1 Wir betrachten $u'(t) = u(t)$ beziehungsweise $u'(t) - u(t) = 0$. Dann ist also $a_0 = -1$. Das charakteristische Polynom ist $\lambda - 1$, also sind die Funktionen $u(t) = c \cdot e^{1 \cdot t} = c \cdot e^t$ für $c \in \mathbb{R}$ die Lösungen der Differentialgleichung. \diamond

Beispiel 1.1.2 (Exponentialansatz bei der Schwingungsgleichung)

Seien konstante Koeffizienten $p, q \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir lösen die Differentialgleichung

$$u''(t) + p \cdot u'(t) + q \cdot u(t) = 0 \quad (9)$$

mit dem **Exponentialansatz**: wir setzen $u(t) = e^{\lambda t}$ in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + p\lambda + q) \stackrel{!}{=} 0 \iff \underbrace{\lambda^2 + p\lambda + q = 0}_{=: \text{charakteristische Gleichung}}.$$

Fall 1: $\chi(\lambda)$ hat zwei *verschiedene, reelle* Nullstellen λ_1 und λ_2 . Dann sind $u_i(t) := e^{\lambda_i t}$ für $i \in \{1, 2\}$ die linear unabhängigen Lösungen. Die allgemeine Lösung ist $u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ nach dem Superpositionsprinzip.

Fall 2: Ist eine Nullstelle komplex, so ist die andere zu ihr komplex konjugiert: die Nullstellen sind $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$. Dann sind die Lösungen wie im Fall 1, jedoch wollen wir reellwertige und keine komplexwertige Funktionen. Sei $\lambda_1 := a + ib$ und somit $\lambda_2 = a - ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$u_1(t) + u_2(t) = e^{at} \cdot e^{ibt} + e^{at} \cdot e^{-ibt} = 2e^{at} \cos(bt) \quad \text{und} \quad u_1(t) - u_2(t) = 2ie^{at} \sin(bt)$$

und somit sind $u_1(t) := e^{at} \cos(bt)$ und $u_2(t) := e^{at} \sin(bt)$ zwei reellwertige, linear unabhängige Lösungen von (9).

Fall 3: $\chi(\lambda)$ hat eine doppelte Nullstelle λ . Dann sind $u_1 := e^{\lambda t}$ und $u_2 := t \cdot e^{\lambda t}$ zwei linear unabhängige Lösungen (selber nachrechnen!). \diamond

Im allgemeinen Fall gilt

- ① Ist λ eine k -fache reelle Nullstelle von χ , so hat die homogene Differentialgleichung die k linear unabhängige Lösungen $(u_j(t) = t^{j-1} e^{\lambda t})_{j=1}^k$.

Die lineare Unabhängigkeit der Lösungen ist *nicht* punktweise, sondern global zu verstehen. Beispielsweise sind die trigonometrischen Funktion \sin und \cos linear unabhängig.

Exponentialansatz

- ② Ist $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$ eine k -fache komplexe Nullstelle von χ , so hat die homogene Differentialgleichung die $2k$ linear unabhängige Lösungen

$$\begin{aligned} u_1(t) &= e^{\alpha t} \cos(\beta t), \dots, u_k(t) = t^{k-1} e^{\alpha t} \cos(\beta t), \\ u_{k+1}(t) &= e^{\alpha t} \sin(\beta t), \dots, u_{2k}(t) = t^{k-1} e^{\alpha t} \sin(\beta t). \end{aligned}$$

Die Funktionen aus ① und ② sind zusammen jeweils eine Basis für den Lösungsraum.

Für **nicht konstante Koeffizientenfunktionen**, das heißt $a_0, \dots, a_{n-1}: \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Situation komplizierter. Es gibt jedoch einfache Spezialfälle.

Beispiel 1.1.3 (Nichtkonstante Koeffizienten, erste Ordnung: explizite Formel)

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung $u'(t) + a(t)u(t) = 0$ ist

$$u(t) = C \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) ds\right) \quad (\text{Formel von DUHAMEL})$$

für beliebige $t_0, C \in \mathbb{R}$.

Der Lösungsraum dieser Differentialgleichung ist eindimensional, warum gibt es dann zwei Parameter? Nimmt man eine anderes t_0 , so ändert sich auch das C , somit gibt es nur ein wirklich freien Parameter.

Für Differentialgleichungen höherer Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten gibt es keine allgemeine Theorie. Es gibt jedoch ein Verfahren, mit dem das Lösen einer Differentialgleichung n -ter Ordnung auf das Lösen einer Differentialgleichung $(n-1)$ -ter Ordnung zurückführen kann. Dafür benötigt man jedoch schon eine Lösung des Problems n -Ordnung. Wir veranschaulichen dieses Verfahren für $n=2$.

Beispiel 1.1.4 (Reduktionsverfahren nach D'ALEMBERT)

Ist die Funktion u_1 eine Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = 0, \quad (10)$$

welche zum Beispiel geraten ist, kann man das Finden der zweiten, von u_1 linear unabhängigen, Lösung auf das Lösen einer Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen.

Wir verwenden den Ansatz $u_2(t) = u_1(t) \int_{t_0}^t v(s) ds$, wobei die Funktion v bestimmt werden muss. Mit dem **Hauptsatz der Integral und Differentialrechnung** und der Produktregel folgt

$$\begin{aligned} u_2'(t) &= u_1'(t) \int_{t_0}^t v(s) ds + u_1(t)v(t), \\ u_2''(t) &= u_1''(t) \int_{t_0}^t v(s) ds + u_1'(t)v(t) + u_1'(t)v(t) + u_1(t)v'(t). \end{aligned}$$

Einsetzen von u_2 in die Differentialgleichung (10) liefert

$$\begin{aligned} 0 &= u_1''(t) \int_{t_0}^t v(s) ds + 2u_1'(t)v(t) + u_1(t)v'(t) \\ &\quad + p(t)u_1'(t) \int_{t_0}^t v(s) ds + p(t)u_1(t)v(t) + q(t)u_1(t) \int_{t_0}^t v(s) ds \\ &= \underbrace{(u_1''(t) + p(t)u_1'(t) + q(t)u_1(t))}_{=0} \cdot \int_{t_0}^t v(s) ds + 2u_1'(t)v(t) + u_1(t)v'(t) + p(t)u_1(t)v(t), \end{aligned}$$

da u_1 eine Lösung von (10) ist. Wir müssen v als Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung

$$u_1(t)v'(t) + (2u_1'(t) + p(t)u_1(t))v(t) = 0$$

bestimmen.

Das inhomogene Problem

Ist $u(t) = \sum_{i=1}^n a_i u_i(t)$ mit Konstanten $a_i \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Problems, so können wir den Ansatz der **Variation der Konstanten**

Variation der Konstanten

$$u_p(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) u_i(t) \quad (11)$$

für die zu bestimmenden Funktionen $c_1, \dots, c_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ verwenden, um das inhomogene System zu lösen.

Im Allgemeinen ist (11) ein stark unterbestimmtes Gleichungssystem, da wir nur eine Gleichung (11) aber n Variablen $(u_i)_{i=1}^n$ haben. Bei einer Differentialgleichung der Ordnung $n = 1$ bekommen wir so jedoch immer eine Lösung.

Beispiel 1.1.5 (Variation der Konstanten) Betrachte die Differentialgleichung

$$u'(t) - tu(t) = \exp\left(\frac{1}{2}t^2 + t\right). \quad (12)$$

Nach der Formel von DUHAMEL ist die allgemeine Lösung der homogenen Problems

$$u_h(t) := C \cdot \exp\left(\int_0^t s \, ds\right) = C e^{\frac{1}{2}t^2}$$

für $C \in \mathbb{R}$. Wir suchen nun eine Funktion c , sodass $u_p(t) = c(t)e^{\frac{1}{2}t^2}$ die inhomogene Gleichung löst. Es ist

$$u'_p(t) = (c'(t) + t \cdot c(t)) e^{\frac{1}{2}t^2}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung (12) ergibt

$$(c'(t) + \cancel{t \cdot c(t)} - \cancel{t \cdot c(t)}) e^{\frac{1}{2}t^2} = \exp\left(\frac{1}{2}t^2 + t\right).$$

Also muss c die Gleichung

$$c'(t) = e^t$$

erfüllen. Wir wählen $c(t) = e^t$. Eine **partikuläre Lösung** ist somit $u_p(t) = e^t e^{\frac{1}{2}t^2}$. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems (12) ist somit

$$u(t) = \exp\left(\frac{1}{2}t^2 + t\right) + \mu e^{\frac{1}{2}t^2}$$

für $\mu \in \mathbb{R}$. ◇

Formel von DUHAMEL. Das Problem

$$u'(t) + a(t)u(t) = f(t)$$

hat die allgemeine Lösung

$$\exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) \, ds\right) \cdot C + \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_s^t a(\tau) \, d\tau\right) \cdot f(s) \, ds$$

für $C \in \mathbb{R}$. Ist zusätzlich eine Anfangsbedingung $u(t_0) = u_0$ gegeben, so ist die **eindeutige** Lösung des Anfangswertproblems

$$\exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) \, ds\right) \cdot u_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_s^t a(\tau) \, d\tau\right) \cdot f(s) \, ds. \quad (13)$$

Zuletzt betrachten wir erneut (8) mit konstanten Koeffizienten, welche wir als

$$\begin{pmatrix} u \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix}' + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} u \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}$$

umschreiben können. Dann sind die Nullstellen des **charakteristischen Polynoms** der homogenen Differentialgleichung genau die **Eigenwerte** (Nullstellen des charakteristischen Polynoms) von der Matrix A (selber überlegen). Wir setzen $v_k := u^{(k)}$ für $k \in \{0, \dots, n-1\}$ und $\bar{v} := (v_0 \dots v_{n-1})^T$ sowie $\bar{f} := (0, \dots, 0, f)$. Dann erfüllt \bar{v} die Differentialgleichung

$$\bar{v}' + A\bar{v} = \bar{f}, \quad (14)$$

wobei \bar{v} \mathbb{R}^n -wertig ist, denn dann gilt $v_0' - v_1 = 0$, das heißt $v_1 = v_0'$, $v_1' - v_2 = 0$, das heißt $v_2 = v_1' = v_0''$ und so weiter und schließlich $v_0^{(n)} + a_{n-1}v_0^{(n-1)} + \dots + a_0v_0 = f$, das heißt $u = v_0$ löst die Differentialgleichung. Ist umgekehrt \bar{v} eine Lösung von (14), so löst $u := v_0$ die Ausgangsdifferentialgleichung.

Würde die Formel von DUHAMEL auch für vektorwertige Funktionen gelten, könnten wir also auch für das Problem n -ter Ordnung eine Lösung finden, dazu später mehr.

1.2 | Nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir erläutern das Verfahren „Trennung der Veränderlichen“, welches auf BERNOULLI zurückgeht und betrachten eine Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$u'(t) = f(t)g(u(t))$$

Ist $g(u(t))$ für alle t von Interesse nicht Null, so gilt

$$\frac{u'(t)}{g(u(t))} = f(t).$$

Integriert man nun von einem t_0 bis t , so erhält man

$$\int_{t_0}^t \frac{u'(s)}{g(u(s))} ds = \int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{1}{g(z)} dz = \int_{t_0}^t f(s) ds \quad (15)$$

mit der Substitution $z = u(t)$. Somit ist die Lösung implizit durch (15) gegeben.

Beispiel 1.2.1 (Trennung der Veränderlichen)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{cases} u'(t) = \sqrt{|u(t)|} \cdot t, \\ u(0) = u_0 > 0. \end{cases} \quad (16)$$

Da $u_0 > 0$ ist und u stetig sein soll, ist u in einer Umgebung von $t = 0$ positiv, und so gilt nach der obigen Formel

$$\int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{1}{\sqrt{|u(s)|}} ds = \int_{t_0}^t s ds$$

Ausrechnen der Integrale ergibt

$$2 \left(\sqrt{u(t)} - \sqrt{u_0} \right) = \frac{t^2}{2}$$

und somit ist $u(t) = \left(\frac{t^2}{4} + \sqrt{u_0} \right)^2$ eine Lösung von (16). \diamond

1.3 Charakteristikenverfahren für quasilineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung in zwei Variablen

Für t als Zeit- und $x \in \mathbb{R}$ als Ortsvariable betrachten wir das **CAUCHY-Anfangswertproblem**

09.11.2020

$$\begin{cases} u_t(t, x) + a(t, x, u(t, x))u_x(t, x) = g(t, x, u(t, x)), & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (17)$$

mit einer **quasilinearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung**. Wir können uns die reellen Zahlen \mathbb{R} als eine unendlich dünne Röhre vorstellen (in komplizierteren, aus der Physik stammenden Problemen, wird stattdessen eine Röhre mit positiven Durchmesser betrachtet), in welcher sich mit der Zeit Gaspartikel bewegen. Quasilineare Differentialgleichungen erster Ordnung können daher **Transportphänomene** beschreiben.

Charakteristikenverfahren (LAGRANGE, 1779) Wir betrachten noch zu bestimmende **charakteristische Kurven** (oder: **Charakteristiken**) $x_c = x_c(t)$ für $t > 0$ und setzen $U(t)$ als die Einschränkung der Lösung auf die Kurve:

$$U(t) := u(t, x_c(t)). \quad (18)$$

Dann ist nach der mehrdimensionalen **Kettenregel**

$$U'(t) = u_t(t, x_c(t)) \cdot 1 + u_x(t, x_c(t)) \cdot x'_c(t) = u_t(t, x_c(t)) + u_x(t, x_c(t)) \cdot x'_c(t). \quad (19)$$

Vergleich mit der linken Seite der Differentialgleichung (17), bzw. Einsetzen von $x = x_c$ ergibt die *gewöhnliche* Differentialgleichung für x_c :

$$x'_c(t) = a(t, x_c(t), u(t, x_c(t))) \stackrel{(18)}{=} a(t, x_c(t), U(t)).$$

Einsetzen davon in (19) liefert eine Differentialgleichung für U :

$$\begin{aligned} U'(t) &= u_t(t, x_c(t)) + u_x(t, x_c(t)) \cdot a(t, x_c(t), U(t)) \\ &\stackrel{!}{=} g(t, x_c(t), u(t, x_c(t))) = g(t, x_c(t), U(t)). \end{aligned}$$

Wir müssen also das folgenden **gekoppelte nichtlineare System** zweier *gewöhnlicher* Differentialgleichungen lösen

$$\boxed{U'(t) = g(t, x_c(t), U(t)) \quad \text{und} \quad x'_c(t) = a(t, x_c(t), U(t)).}$$

Beispiel 1.3.1 (Einfache Transportgleichung)

Wir betrachten für $\lambda \in \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung

$$\begin{cases} u_t(t, x) + \lambda u_x(t, x) = 0, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

Es gilt $a(t, x) = \lambda$ und $g(t, x) = 0$ und somit $U'(t) = 0$. Somit ist U konstant gleich $U(0)$. Aus $x'_c(t) = \lambda$ folgt $x_c(t) = \lambda t + c$ für eine Konstante c , welche wir bestimmen können: $x_c(0) = c$ und somit $x_c(t) = \lambda t + x_c(0)$. Für jedes c existiert also eine **parametrisierte Kurve** $x_c(t)$, die man in Abbildung 4 sehen kann.

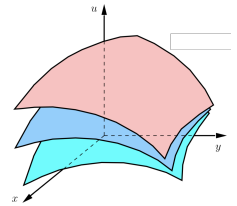


Abb. 3: Eine Lösungsfamilie einer partiellen Differentialgleichung im $(t, x, u(t, x))$ -Koordinatensystem.

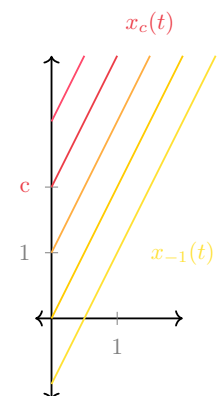


Abb. 4: Die Charakte-

Ist $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ gegeben, so möchten wir c beziehungsweise $x_c(0)$ derart bestimmen, dass (t, x) auf der zugehörigen Kurve liegt, also dass $x = x_c(t)$ gilt. Hier ist dies eindeutig lösbar, was man in Abbildung 4 sieht und auch ausrechnen kann: es gilt

$$x = x_c(t) = \lambda t + x_c(0) \implies x_c(0) = x - \lambda t.$$

Somit gilt

$$u(t, x) = u(t, x_c(t)) = U(t) = U(0) = u(0, x_c(0)) = u_0(x_c(0)) = u_0(x - \lambda t).$$

Man rechnet leicht nach, dass diese Funktion eine Lösung von (17) ist. \diamond

Beispiel 1.3.2 Wir betrachten

$$\begin{cases} u_t(t, x) + x \cdot u_x(t, x) = 0, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (20)$$

Wir setzen wieder $U = U(0)$. Es gilt $x'_c(t) = x_c(t)$ und somit $x_c(t) = e^t \cdot x_c(0)$. Für gegebene (x, t) lösen wir $x = x_c(t) = e^t x_c(0)$, es gilt $x_c(0) = x \cdot e^{-t}$. Somit schneiden sich die Charakteristiken nicht (cf. Abbildung 5). Es folgt

$$u(t, x) = u(t, x_c(t)) = U(t) = U(0) = u(0, x_c(0)) = u_0(xe^{-t}).$$

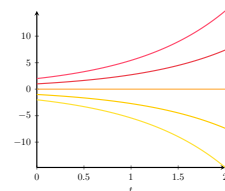


Abb. 5: Die Charakteristiken von (20).

1.4 Die drei Grundtypen linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei Variablen

Wir betrachten die allgemeine Form einer **linearen partiellen** Differentialgleichung **zweiter Ordnung** in zwei Variablen

$$\underbrace{au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}}_{\text{Hauptteil}} + du_x + eu_y + fu + g = 0, \quad (21)$$

wobei a, b, c, d, e, f und g Koeffizientenfunktionen in x und y sind.

DEFINITION 1.4.1 (HYPERBOLISCH, PARABOLISCH, ELLIPTISCH)

Sei $D(x, y) := b(x, y)^2 - a(x, y)c(x, y)$ die **Diskriminante** von (21). Gilt

- $D(x, y) > 0$, so heißt (21) **hyperbolisch** im Punkt (x, y) .
- $D(x, y) = 0$, so heißt (21) **parabolisch** im Punkt (x, y) .
- $D(x, y) < 0$, so heißt (21) **elliptisch** im Punkt (x, y) .

hyperbolisch
parabolisch
elliptisch

Wir nennen (21) hyperbolisch / parabolisch / elliptisch, wenn sie in jedem Punkt hyperbolisch / parabolisch / elliptisch ist.

Diese Begriffe kommen historisch von quadratischen Gleichungen und **Kegelschnitten**. Man beachte, dass die Diskriminante symmetrisch in a und c und somit in x und y ist. Dieses Konzept lässt sich auch auf Differentialgleichungen von höheren Ordnungen verallgemeinern.

Beispiel 1.4.2 (hyperbolische, parabolische, elliptische Differentialgleichungen)

- Die **POISSON-Gleichung** $-\Delta u = 0$ oder die **HELMHOLTZ-Gleichung** $-\Delta u + \kappa u = g$ sind **elliptische** Differentialgleichung ($a = c = -1, b = 0 \implies D = -1 < 0$), und stellen **stationäre** Probleme beziehungsweise Systeme im stabilem oder gar Ruhezustand dar, da es keine ausgezeichnete Zeit- oder Raumdimension gibt.
- Die **Wärmegleichung** $u_t - \Delta u = f$ ist eine **parabolische** Differentialgleichung, ($a = -1, b = c = 0 \implies D = 0$). Parabolische Gleichungen sind **Evolutionsgleichungen**, da es nur eine Zeitableitung aber mehrere Raumableitungen gibt. Wärmegleichung
- Die **Wellengleichung** $u_{tt} - \Delta u = f$ ist eine **hyperbolische** Differentialgleichung ($a = -1, b = 0, c = 1 \implies D = 1 > 0$), welche **oszillatorisches Verhalten** modellieren. Wellengleichung

Beispiel 1.4.3 (Die schwingende Saite)

Wir betrachten die folgende hyperbolische partielle Differentialgleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0, \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in (0, L), \\ u_t(0, x) = v_0(x), & x \in (0, L). \end{cases} \quad (22)$$

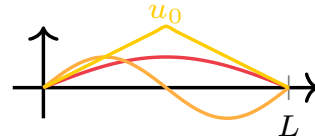


Abb. 6: Eine schwingende Saite und eine anfängliche Auslenkung u_0 .

welche eine schwingende Saite modelliert (wobei wir Reibung und Dämpfung vernachlässigen). Hierbei ist v_0 der **anfängliche Impuls**. Wir nennen $u(t, 0) = u(t, L) = 0$ **homogene DIRICHLET-Randbedingungen**

Wir verwenden den **Separationsansatz** $u(t, x) = T(t)X(x)$ und wollen auch das Superpositionsprinzip ausnutzen. Dann gilt $u_{tt}(t, x) = X(x)T''(t)$ und $u_{xx}(t, x) = T(t)X''(x)$. Setzen wir das in (22) ein, erhalten wir für alle $t > 0$ und $x \in (0, L)$, die $X(x) \neq 0 \neq T(t)$ erfüllen,

$$X(x)T''(t) = T(t)X''(x) \iff \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Daraus folgt, dass beide Terme konstant sind (weil beide Seiten jeweils nur von einer Variablen abhängen), und wir setzen sie gleich $-\lambda^2$ für ein $\lambda > 0$.

Also gilt $T''(t) = -\lambda^2 T(t)$ und $X''(x) = -\lambda^2 X(x)$ und somit sind alle Lösungen der Differentialgleichung von der Form (cf. Beispiel 1.1.2)

$$T(t) := a \sin(\lambda t) + b \cos(\lambda t), \quad t > 0 \quad \text{und} \quad X(x) := c \sin(\lambda x) + d \cos(\lambda x), \quad x \in (0, L)$$

für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Also sind alle Lösungen der Differentialgleichung der Form

$$u(t, x) = (a \sin(\lambda t) + b \cos(\lambda t)) (c \sin(\lambda x) + d \cos(\lambda x)).$$

Nach der ersten Randbedingung gilt

$$0 = u(t, 0) = (a \sin(\lambda t) + b \cos(\lambda t)) \cdot d.$$

für alle $t > 0$. Weil der Sinus und der Kosinus linear unabhängig sind, ist der Klammerausdruck im Allgemeinen nicht Null. Da wir die triviale Nulllösung ($a = b = 0$, dann $u \equiv 0$) ausschließen, folgt $d = 0$. Es ist auch intuitiv sinnvoll, dass der Kosinusterm durch die Randbedingung wegfällt, weil die Saite am Rand bei Null fixiert ist.

Nach der ersten Randbedingung gilt für alle $t > 0$

$$0 = u(t, L) = (a \sin(\lambda t) + b \cos(\lambda t)) \cdot c \sin(\lambda L).$$

Wie oben folgt $c \sin(\lambda L) = 0$ und somit $\lambda = \frac{k\pi}{L}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Seien $\tilde{a} := ac \in \mathbb{R}$ und $\tilde{b} := bc \in \mathbb{R}$

Da das Randwertproblem ein lineares, homogenes Problem ist, ist auch jede Linearkombination der Lösungen eine Lösung. Somit ist

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^n \left[\tilde{a}_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} \cdot t\right) + \tilde{b}_k \cos\left(\frac{k\pi}{L} \cdot t\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi}{L} \cdot x\right)$$

für $(\tilde{a}_k, \tilde{b}_k)_{k=1}^n \subset \mathbb{R}^2$ die allgemeine Lösung von (22). Diese Funktion bleibt sogar eine Lösung, wenn wir über ganz \mathbb{Z} anstatt nur über $\{1, \dots, n\}$ summieren, was wir aber nicht beweisen.

Aus den Anfangswertbedingungen folgt

$$u_0(x) = u(0, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{b}_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} \cdot x\right) \quad \text{und} \quad v_0(x) = u_t(0, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{a}_k \frac{k\pi}{L} \sin\left(\frac{k\pi}{L} \cdot x\right).$$

Wir wählen \tilde{b}_k als die **FOURIER-Koeffizienten** der Sinusdarstellung von u_0 und \tilde{a}_k als die FOURIER-Koeffizienten der Sinusdarstellung von v_0 .

Insgesamt ergibt sich eine Darstellung der Lösung als Reihe, was zu unsere Intuition passt: die Schwingung der Saite ist eine Linearkombination der einzelnen Frequenzen, die sinusoidale Schwingungen sind. \diamond

Beispiel 1.4.4 (Das Anfangswertproblem für die Wellengleichung)

Wir betrachten die folgende homogene hyperbolische Differentialgleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & t > 0, \ x \in \mathbb{R}. \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0, x) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

für $c > 0$.



Ansatz: D'ALEMBERT-Lösung

Wir führen die neuen Variablen $\xi(t, x) := x + ct$, $\eta(t, x) := x - ct$ ein und setzen $v(\xi, \eta) := u(t, x)$.

Dann gilt (wir lassen der Kürze halber die Argumente (t, x) weg)

$$\begin{aligned} u_x &= v_x(\xi, \eta) = (v_\xi \cdot \xi_x)(\xi, \eta) + (v_\eta \cdot \eta_x)(\xi, \eta) = v_\xi(\xi, \eta) + v_\eta(\xi, \eta), \\ u_{xx} &= v_{\xi\xi}(\xi, \eta) + 2v_{\xi\eta}(\xi, \eta) + v_{\eta\eta}(\xi, \eta), \\ u_{tt} &= c^2 v_{\xi\xi}(\xi, \eta) - 2c^2 v_{\xi\eta}(\xi, \eta) + c^2 v_{\eta\eta}(\xi, \eta) = c^2 [v_{\xi\xi}(\xi, \eta) - 2v_{\xi\eta}(\xi, \eta) + v_{\eta\eta}(\xi, \eta)], \end{aligned}$$

wobei u_x und v_x nicht die partielle Ableitung nach x sind, sondern die totale.

Einsetzen in die linke Seite der Differentialgleichung ergibt

$$c^2 [v_{\xi\xi}(\xi, \eta) - 2v_{\xi\eta}(\xi, \eta) + v_{\eta\eta}(\xi, \eta)] = -4c^2 v_{\xi\eta}(\xi, \eta),$$

was Null sein muss. Ist v eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $v_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0$, so ist die zugehörige Funktion $u(t, x) = v(\xi, \eta) = v(x + ct, x - ct)$ eine Lösung der Differentialgleichung. Insbesondere gilt die Bedingung für Funktionen der Form $v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$, sofern f und g hinreichend differenzierbare Funktionen sind. Es sind also Funktionen der Form $u(t, x) = f(x + ct) + g(x - ct)$ Lösungen der Differentialgleichungen.

Setzen wir die Anfangsbedingungen ein, erhalten wir

$$u_0(x) = u(0, x) = f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad v_0(x) = u_t(0, x) = c[f'(x) - g'(x)].$$

Also ist $f'(x) - g'(x) = \frac{1}{c}v_0(x)$ und somit folgt mit dem **Hauptsatz**

$$f(x) - g(x) + \underbrace{g(0) - f(0)}_{=:d} = \frac{1}{c} \int_0^x v_0(s) ds. \quad (23)$$

Aus Addition und Subtraktion von $u_0(x) = f(x) + g(x)$ mit (23) folgt

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} \int_0^x v_0(s) ds + u_0(x) + d \right) \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} u_0(x) - d - \frac{1}{c} \int_0^x v_0(s) ds \right).$$

Somit erhalten wir die **D'ALEMBERT-Lösung**

$$\begin{aligned} u(t, x) &= f(x + ct) + g(x - ct) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} \int_0^{x+ct} v_0(s) ds + u_0(x + ct) \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} \int_0^{x-ct} v_0(s) ds + u_0(x - ct) \right) \\ &= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds + \frac{u_0(x + ct) + u_0(x - ct)}{2}. \end{aligned}$$

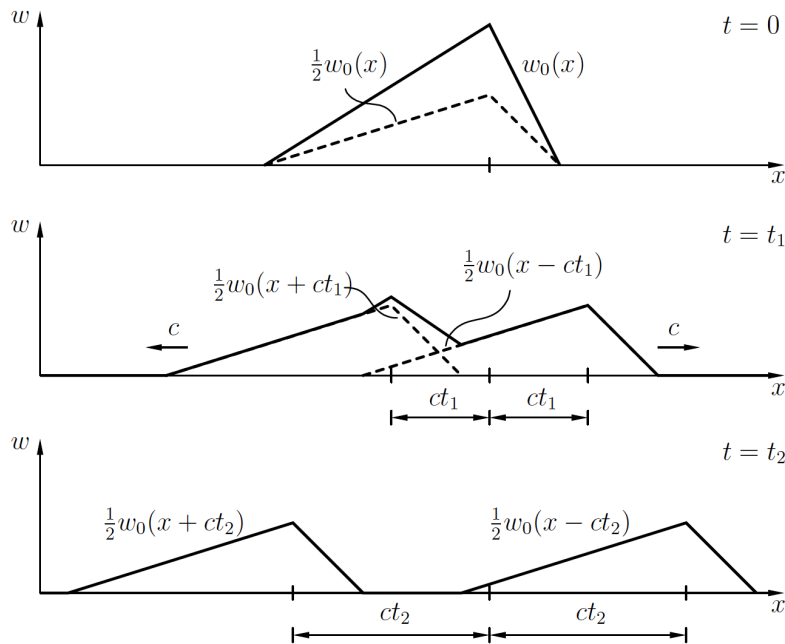


Abb. 7: Setzt man $v_0 \equiv 0$, so ist die Lösung durch $\frac{1}{2} (u_0(x + ct) + u_0(x - ct))$ (hier wird w_0 anstatt von u_0 benutzt) gegeben und beschreibt zum Beispiel die aufgrund einer anfänglichen Verschiebung auf einer unendlichen Saite wandernde Wellen. [3]

In Abbildung 8 kann man die Interpretation der Kurven $x \pm ct$ erkennen: die Geraden mit den Steigungen $\pm c$ durch einen Punkt (t, x) schneiden die x -Achse bei $x \pm ct$. Die Punkte der Anfangsbedingung, die Einfluss auf die Lösung an dieser Stelle (x, t) haben, sind in rot markiert und genau durch die Geraden bestimmt. Dies spiegelt sich auch in der errechneten Lösung wieder: wir haben die Terme $u_0(x \pm ct)$ und $\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds$, nehmen also alle Werte zwischen $x - ct$ und $x + ct$ Einfluss auf das Verhalten der Lösung bei (x, t) .

Umgekehrt beeinflusst ein beliebiger Anfangswert $(0, \hat{x})$ auf der x -Achse genau die Lösungen an den Punkten, die in dem eingezeichneten blauen Kegel, begrenzt durch die bekannten

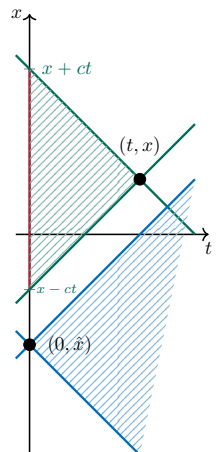


Abb. 8: Die Lösung wird nur an den (x, t) -Werten von den Anfangswerten beeinflusst, die in einem durch die Geraden mit Steigung $\pm c$ gegeben Kegel liegen.

Geraden von Steigung $\pm c$, liegen. Somit kann man c als die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Informationen interpretieren, also die Schallgeschwindigkeit. \diamond

Existenz und Eindeutigkeit bei Anfangswertproblemen für gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen

2.1 Das Integral für stetige Funktionen mit Werten in einem Banach-Raum

16.11.2020

Seien im Folgenden $(X, \|\cdot\|)$ ein **reeller BANACH-Raum**, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein **kompaktes** Intervall und $u: [a, b] \rightarrow X$ eine **stetige** Funktion.

DEFINITION 2.1.1 (STETIGKEIT IN BANACH-RÄUMEN)

Die Funktion u ist **stetig**

- ① in $s \in [a, b]$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $t \in [a, b]$ mit $|t - s| < \delta$ gilt: $\|u(t) - u(s)\| < \varepsilon$.
- ② auf $[a, b]$, wenn u in jedem $s \in [a, b]$ stetig ist.

Weil $[a, b]$ **kompakt** ist, ist u nach dem **Satz von HEINE gleichmäßig stetig** auf $[a, b]$, das heißt für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass $\|u(t) - u(s)\| < \varepsilon$ für alle $s, t \in [a, b]$ mit $|s - t| < \delta$ gilt.

Beispiel 2.1.2 (Stetigkeit in BANACH-Räumen)

- ① Ist $X = \mathbb{R}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$, so ist aus der Analysis bekannt, dass Stetigkeit von u zu der Stetigkeit aller **Komponenten** von u äquivalent ist.
- ② Auf $X = \ell^1$, dem Raum der absolut summierbaren Folgen $v = (v_k)_{k=1}^\infty$ mit $\|v\|_1 := \sum_{k=1}^\infty |v_k| < \infty$, betrachten wir die Funktion

$$u: [0, T] \rightarrow \ell^1, \quad t \mapsto \left(1, t, \frac{t^2}{2!}, \dots\right) = \left(\frac{1}{(k-1)!} t^{k-1}\right)_{k=1}^\infty,$$

welche aufgrund von

$$\|u(t)\|_{\ell^1} = \sum_{k=1}^\infty |(u(t))_k| = \sum_{k=1}^\infty \frac{|t|^{k-1}}{(k-1)!} = e^t \leq e^T < \infty,$$

wobei $(u(t))_k$ die k -te Komponente von $u(t)$ ist, für alle $t \in [0, T]$ wohldefiniert ist.

Jede Komponente von u ist stetig, jedoch reicht das nicht, um die Stetigkeit zu beweisen. Für $t, s \in [0, T]$ gilt

$$\|u(t) - u(s)\|_{\ell^1} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(k-1)!} |t^{k-1} - s^{k-1}| = \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{(k-1)!} |t^{k-1} - s^{k-1}|.$$

Dann folgt mit $f(r) := r^{k-1}$ und $f'(r) = (k-1)r^{k-2}$ für $r \geq 2$

$$\begin{aligned} |t^{k-1} - s^{k-1}| &= |f(t) - f(s)| \stackrel{\text{MWS}}{\leq} \sup_{r \in [0, T]} f'(r) |t - s| \\ &= \sup_{r \in [0, T]} (k-1)r^{k-2} |t - s| \leq (k-1)T^{k-2} |t - s|, \end{aligned}$$

wobei MWS für den [Mittelwertsatz](#) steht. Insgesamt ist u sogar LIPSCHITZ-stetig mit Konstante $L := e^T$:

$$\begin{aligned}\|u(t) - u(s)\|_{\ell^1} &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} (k-1) T^{k-2} |t-s| = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{T^{k-2}}{(k-2)!} |t-s| \\ &= \underbrace{e^T}_{< \infty} |t-s| \xrightarrow{t \rightarrow s} 0.\end{aligned}$$

◇

DEFINITION 2.1.3 (DER FUNKTIONENRAUM $\mathcal{C}([a, b]; X)$)

Mit $\mathcal{C}([a, b]; X)$ bezeichnen wir den Raum der stetigen Funktionen $u: [a, b] \rightarrow X$.

Lemma 2.1.4 ($(\mathcal{C}([a, b]; X), \|\cdot\|_{\infty})$ ist ein BANACH-Raum)

Versehen mit der Norm $\|u\|_{\infty} := \sup_{t \in [a, b]} \|u(t)\|$ wird $\mathcal{C}([a, b]; X)$ zu einem BANACH-Raum.

Beweis. Entweder schon aus der Analysis bekannt oder Übungsaufgabe. □

Wir wenden uns nun der Definition des Integrals zu. Wie in der Analysis I werden wir das Integral erst für einfache Funktionen (hier: Treppenfunktionen) definieren und die Definition dann „hochziehen“.

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir eine [äquidistante Zerlegung](#) $t_k^{(n)} := a + k \frac{b-a}{n}$ mit $k \in \{0, \dots, n\}$ des Intervalls $[a, b]$. Wir setzen

$$u^{(n)}(t) := \begin{cases} u(t_k^{(n)}), & t \in [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}) \text{ für } k \in \{0, \dots, n-1\} \\ u(t_{n-1}^{(n)}), & t = b. \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Folge $(u^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen u , weil u gleichmäßig stetig ist (Übungsaufgabe / Tutorium). Ferner setzen wir

$$\int_a^b u^{(n)}(t) dt := \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{u(t_k^{(n)})}_{\in X} \in X. \quad (24)$$

Durch n -fache Anwendung der [Dreiecksungleichung](#) für die Norm erhält man die Dreiecksungleichung für das Integral:

$$\left\| \int_a^b u^{(n)}(t) dt \right\| \leq \int_a^b \underbrace{\|u^{(n)}(t)\|}_{[a, b] \rightarrow \mathbb{R}} dt. \quad (25)$$

Da das Integral für Treppenfunktionen (24) [linear](#) ist, gilt für $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\left\| \int_a^b u^{(n)}(t) dt - \int_a^b u^{(m)}(t) dt \right\| &= \left\| \int_a^b (u^{(n)} - u^{(m)})(t) dt \right\| \stackrel{(25)}{\leq} \int_a^b \|(u^{(n)} - u^{(m)})(t)\| dt \\ &\leq \|u^{(n)} - u^{(m)}\|_{\infty} (b-a) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0,\end{aligned}$$

wobei die Konvergenz aus der gleichmäßigen Konvergenz der $(u^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ folgt. Somit ist $\left(\int_a^b u^{(n)}(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ eine [CAUCHY-Folge](#), also existiert ein $\int_a^b u(t) dt \in X$ mit

$$\int_a^b u(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b u^{(n)}(t) dt.$$

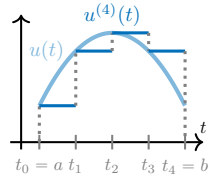


Abb. 9: Die Funktion $u \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ und die [Treppenfunktion](#) $u^{(4)}$.

Ist u nicht stetig, sondern nur [messbar](#), ist die Definition eines Integralbegriffs (zum Beispiel BOCHNER-Integral in DGL III), wesentlich komplizierter.

Beispiel 2.1.5 (Integration einer BANACH-Raum-wertigen Funktion)

Integrieren wir jede Komponente der Funktion u aus Beispiel 2.1.2 über $[0, T]$ einzeln, erhalten wir das selbe Ergebnis, wie wenn wir eine äquidistante Zerlegung wählen:

$$\begin{aligned} \int_0^T u(t) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T u^{(n)}(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T-0}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u\left(\frac{kT}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1, k\frac{T}{n}, \frac{T^2 k^2}{2! \cdot n^2}, \dots\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(T, \frac{T^2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k, \frac{T^3}{2n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2, \dots\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(T, \frac{T^2}{n^2} \frac{n(n-1)}{2}, \frac{T^3}{2n^3} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}, \dots\right) \\ &= \left(T, \frac{T^2}{2}, \frac{T^3}{6}, \dots\right). \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass ℓ_1 -Konvergenz vorliegt, müssen wir die Norm der folgenden Differenz betrachten:

$$\begin{aligned} &\left\| \left(T, \frac{T^2}{2}, \frac{T^3}{6}, \dots\right) - \left(T, \frac{T^2}{n^2} \frac{n(n-1)}{2}, \frac{T^3}{2n^3} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}, \dots\right) \right\|_1 \\ &= 0 + \left| \frac{T^2}{2} \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \right| + \left| \frac{T^3}{6} \left(1 - \frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}\right) \right| + \dots \\ &= \frac{T^2}{2n} + \frac{T^3}{6} \frac{3n+1}{2n^2} \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Die Konvergenz folgt mit dem [Satz von LEBESGUE](#). ◇

Eigenschaften des Integrals

Lemma 2.1.6 (Grundlegende Eigenschaften des Integrals)

- ① Das Integral ist [unabhängig](#) von der Wahl der approximierenden Folge $(u^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ beziehungsweise der Zerlegungsfolge $\left((t_k^{(n)})_{k=0}^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, das heißt für jede [Zerlegungsfolge](#), deren [Feinheiten](#) $\Delta_n := \max_{k \in \{0, \dots, n-1\}} |t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}|$ eine Nullfolge bilden, gilt

$$\int_a^b u(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} u(t_k^{(n)}) (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}).$$

- ② Das Integral ist [linear](#): für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $u, v \in \mathcal{C}([a, b])$ gilt

$$\int_a^b (\lambda u + v)(t) dt = \lambda \int_a^b u(t) dt + \int_a^b v(t) dt.$$

- ③ Für $u \in \mathcal{C}([a, b]; X)$ gilt die [Dreiecksungleichung](#)

$$\left\| \int_a^b u(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|u(t)\| dt.$$

Beweis. ① Hausaufgabe.

- ② Übungsaufgabe.

- ③ Aufgrund der Stetigkeit von u ist auch die Funktion $t \mapsto \|u(t)\|$ stetig, somit gilt

$$\left\| \int_a^b u(t) dt \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_a^b u_n(t) dt \right\| \stackrel{(25)}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \|u_n(t)\| dt \stackrel{(\star)}{=} \int_a^b \|u(t)\| dt.$$

Ist $\left((t_k^{(n)})_{k=0}^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Zerlegungsfolge mit verschwindender Feinheit, so gilt

$$\|u_n(t)\| = \begin{cases} \|u(t_k^{(n)})\|, & t \in [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}], \quad k \in \{0, \dots, n-1\}, \\ \|u(b)\|, & t = b. \end{cases}$$

Somit ist $(\|u_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit Werten in \mathbb{R} und $\|u_n\|$ konvergiert gleichmäßig gegen $\|u\|$, und somit gilt (\star) . \square

Bemerkung 2.1.7 Sei $X = \mathbb{R}^n$. Für $n = 1$ gilt der [Mittelwertsatz der Integralrechnung](#); es existiert ein $\xi \in [a, b]$, sodass

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b u(t) dt = u(\xi)$$

gilt. Für $n > 1$ betrachte $u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))^T$. Dann ist $\int_0^1 u(t) dt = (0, 0)^T$, aber es gilt $u(t) \neq (0, 0)^T$ für alle $t \in [0, 1]$.

Für einen geeigneten Ersatz des Mittelwertsatz benötigen wir den Begriff der konvexen Hülle.

DEFINITION 2.1.8 (KONVEXE HÜLLE)

Die [konvexe Hülle](#) einer Teilmenge $M \subset X$ ist

$$\text{co}(M) := \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i : N \in \mathbb{N}, \lambda_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, x_i \in M \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \right\}$$

und ihre [abgeschlossene konvexe Hülle](#) ist $\overline{\text{co}}(M) := \overline{\text{co}(M)}^{\|\cdot\|_X}$.

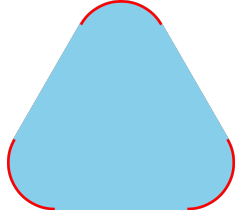


Abb. 10: Die blaue Menge ist die konvexe Hülle der roten Menge. [4]

Lemma 2.1.9 (Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes)

Für $u \in \mathcal{C}([a, b]; X)$ gilt $\frac{1}{b-a} \int_a^b u(t) dt \in \overline{\text{co}}(u([a, b]))$.

Beweis. Nach Lemma 2.1.6 ① können wir eine äquidistante Zerlegung wählen. Dann gilt

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b u(t) dt = \frac{1}{b-a} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u(t_k^{(n)}) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u(t_k^{(n)}).$$

Also gilt (da $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} = 1$)

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b u(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \overbrace{u(t_k)}^{\in u([a, b])}}_{\substack{\text{Konvexkombination} \\ \in \text{co}(u([a, b]))}} \frac{1}{n} \in \overline{\text{co}}(u([a, b])).$$

\square

Wir können $\bar{u}_i := \frac{1}{b-a} \int_a^b u_i(t) dt$ als gewichteten Mittelwert der Punkte der Pfades $u_i([a, b])$ interpretieren, wobei die Segmente, wo die „Geschwindigkeit hoch“ ist, ein geringes Gewicht bekommen (vgl. Abbildung 11). [5]

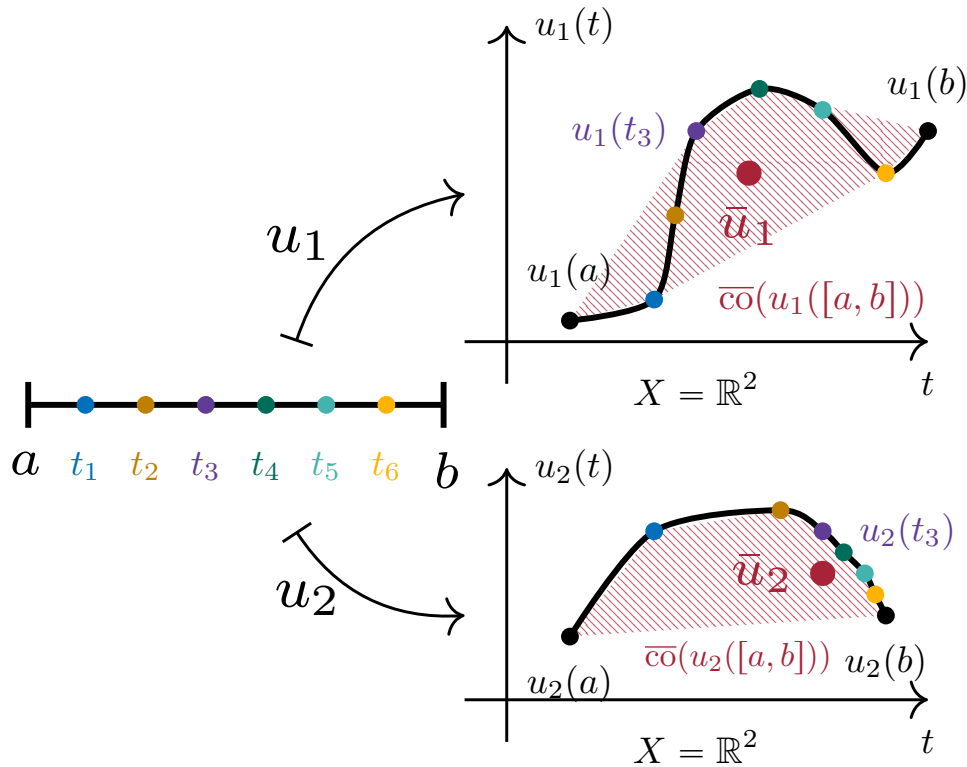


Abb. 11: Veranschaulichung von Lemma 2.1.9 mit zwei verschiedenen Funktionen.

DEFINITION 2.1.10 (RELATIV KOMPAKT)

Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt **relativ kompakt**, wenn $\overline{M} \subset X$ kompakt ist.

relativ kompakt

SATZ 2.1.1: MAZUR (1930)

Ist $Z \subset X$ relativ kompakt, so ist $\overline{\text{co}}(Z) \subset X$ kompakt.

Beweis. Recherche-Hausaufgabe. □

DEFINITION 2.1.11 (LINEARE BESCHRÄNKTE OPERATOREN)

Ein linearer Operator $A: X \rightarrow Y$ ist beschränkt, wenn ein $C > 0$ existiert, sodass $\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X$ für alle $x \in X$ gilt. Die Menge der **linearen beschränkten Operatoren** ist

$$L(X, Y) := \{A: X \rightarrow Y \mid A \text{ ist linear und beschränkt}\}.$$

Wir setzen
 $L(X) := L(X, X)$

Mit der Norm $\|A\|_{L(X, Y)} := \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$ ist $L(X, X)$ ein BANACH-Raum, wenn Y ein BANACH-Raum ist. Ist $A: X \rightarrow Y$ linear, so ist A genau dann stetig, wenn A beschränkt ist.

Lemma 2.1.12 (Linearität)

Ist $A \in L(X, Y)$ und Y ein BANACH-Raum, so gilt

$$A\left(\underbrace{\int_a^b u(t) \, dt}_{\in X}\right) = \int_a^b \underbrace{(Au)(t)}_{\in Y} \, dt.$$

Beweis. Da die Funktion $u: [a, b] \rightarrow X$ stetig ist, ist auch $Au: [0, T] \rightarrow Y$, $t \mapsto (Au)(t)$ als Komposition stetiger Funktionen stetig, also $Au \in \mathcal{C}([a, b]; Y)$:

$$\|(Au)(t) - (Au)(s)\|_Y \stackrel{L}{=} \|A(u(t) - u(s))\|_Y \leq \|A\|_{L(X, Y)} \|u(t) - u(s)\|_X \xrightarrow{t \rightarrow s} 0,$$

Damit ist das Integral von Au wohldefiniert.

Sei nun $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen wie oben. Da A stetig ist, gilt

$$\begin{aligned} A \left(\int_a^b u(t) dt \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} A \left(\int_a^b u_n(t) dt \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} A \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u(t_k^{(n)}) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (Au)(t_k^{(n)}) = \int_a^b (Au)(t) dt, \end{aligned}$$

da für die Treppenfunktionen

$$(Au)^{(n)}(t) := \begin{cases} (Au)(t_k^{(n)}), & t \in [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}) \text{ mit } k \in \{0, \dots, n-1\} \\ (Au)(t_{n-1}^{(n)}), & t = b, \end{cases}$$

gilt. Außerdem gilt, weil A stetig ist,

$$\|Au - Au^{(n)}\|_\infty \stackrel{L}{=} \|A(u - u^{(n)})\|_\infty \leq \|A\|_{L(X, Y)} \cdot \|u(t) - u^{(n)}(t)\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{glm.}} 0. \quad \square$$

SATZ 2.1.2: LEBESGUE-PUNKTE, STETIGKEIT IM L^1 -MITTEL

Für eine Funktion $u \in \mathcal{C}([a, b]; X)$, die mit Null fortgesetzt wird ($u|_{[a, b]^c} \equiv 0$), gilt

- ① $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s) ds = u(t)$ für alle $t \in [a, b]$.^a
- ② $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|u(s) - u(t)\| ds = 0$ für alle $t \in [a, b]$.
- ③ $\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \|u(t+h) - u(t)\| dt = 0$. (Stetigkeit im L^1 -Mittel)

^aDann heißt t ein **LEBESGUE-Punkt** von u . Wir zeigen, dass alle $t \in [a, b]$ LEBESGUE-Punkte sind.

Beweis. ① folgt aus ②, denn es gilt

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s) ds - u(t) \right\|_X &= \frac{1}{|h|} \left\| \int_t^{t+h} u(s) ds - \int_t^{t+h} u(t) ds \right\|_X \\ &\stackrel{\triangle}{\leq} \frac{1}{|h|} \int_{t \wedge t+h}^{t \vee t+h} \|u(s) - u(t)\|_X ds \stackrel{\textcircled{2}}{\rightarrow} 0, \end{aligned}$$

wobei $x \wedge y = \max(x, y)$ und $x \vee y = \min(x, y)$ Kurzschreibweisen sind.

- ② Da u stetig in jedem $t \in [a, b]$ ist, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass $\|u(t) - u(s)\| < \varepsilon$ für alle $s \in [a, b]$ gilt, wenn $|s - t| \leq \delta$ ist. Wir wählen $|h| < \delta$, somit folgt

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \underbrace{\|u(s) - u(t)\|}_{< \varepsilon} ds < \frac{(t+h) - t}{h} \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

- ③ Die Abbildung u ist sogar **gleichmäßig stetig**, zu $\tilde{\varepsilon} > 0$ existiert ein $\tilde{\delta} > 0$, sodass $\|u(t) - u(s)\| \leq \tilde{\varepsilon}$ für alle $s, t \in [a, b]$ mit $|s - t| \leq \tilde{\delta}$ gilt. Damit gilt für $|h| < \tilde{\delta}$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $h > 0$:

$$\begin{aligned} \int_a^b \|u(t+h) - u(t)\| dt &= \int_a^{b-h} \|u(t+h) - u(t)\| dt + \int_{b-h}^b \|0 - u(t)\| dt \\ &\leq \tilde{\varepsilon}(b-a) + \|u\|_{\infty} \cdot h. \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann wähle $|h| < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2\|u\|_{\infty}}, \tilde{\delta} \right\}$ (ohne Beschränkung der Allgemeinheit $u \neq 0$) wobei $\tilde{\delta}$ zu $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ gewählt sei. \square

DEFINITION 2.1.13 ((STETIGE) DIFFERENZIERBARKEIT)

- ① Die Funktion $u: [a, b] \rightarrow X$ heißt in $t_0 \in [a, b]$ **differenzierbar**, wenn es ein $v \in X$ mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t_0+h) - u(t_0)}{h} - v \right\|_X = 0.$$

gibt. Wir setzen $u'(t_0) := v$.

- ② Ist u in allen $t \in [a, b]$ differenzierbar, so ist u auf $[a, b]$ **differenzierbar**, das heißt die **Ableitung** $u': [a, b] \rightarrow X$ existiert auf ganz $[a, b]$.
- ③ Ist die Ableitung u' stetig, so ist u **stetig differenzierbar** und wir schreiben $u \in \mathcal{C}^1([a, b]; X)$. Eine Norm auf $\mathcal{C}^1([a, b]; X)$ ist $\|u\|_{\mathcal{C}^1} := \|u\|_{\infty} + \|u'\|_{\infty}$.

differenzierbar

Für die Endpunkte beschränken wir uns auf einseitige Grenzwerte.

Lemma 2.1.14 (Mittelwertsatz in allgemeinen BANACH-Räumen)

Für ein Intervall $[s, t] \subset [a, b]$ gilt $\|u(s) - u(t)\| \leq |s - t| \cdot \sup_{\xi \in [s, t]} \|u'(\xi)\|$.

Beweis. Zeidler: *Nonlinear Functional Analysis I: Fixed-Point Theorems*. \square

SATZ 2.1.3: HAUPTSATZ DER INTEGRAL- UND DIFFERENTIALRECHNUNG

Seien $v \in \mathcal{C}([a, b]; X)$ und $u(t) := \int_a^t v(s) ds$ für $t \in [a, b]$. Dann ist u differenzierbar auf $[a, b]$ mit der Ableitung $u' = v$.

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $h > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - v(t) \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \left[\int_a^{t+h} v(s) ds - \int_a^t v(s) ds \right] - v(t) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(s) dx - v(t) \right\| \xrightarrow[h \rightarrow 0]{2.1.2 \text{ ①}} 0. \end{aligned}$$

\square

Korollar 2.1.15 ($(\mathcal{C}^1([a, b]; X), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1})$ ist ein BANACH-Raum)

Der Raum $(\mathcal{C}^1([a, b]; X), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1})$ ist ein BANACH-Raum.

Beweis. Hausaufgabe, man benutze unter anderem Satz 2.1.2 und Lemma 2.1.4. \square

Beispiel 2.1.16 (Zu Definition 2.1.11)

Für $T: \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto u(0) + u'(1)$ gilt $T \in L(\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}), \mathbb{R})$ und $\|T\| = 1$. \diamond

Beweis. Hausaufgabe. \square

Der NEMYZKI-Operator

Wir nähern uns mit großen Schritten Differentialgleichungen der Form $u'(t) = f(t, u(t))$, auch wenn das noch nicht ersichtlich sein mag. Für eine Teilmenge $M \subset X$ betrachten wir die Funktion $f: [0, T] \times M \rightarrow X$. Diese rechte Seite der Differentialgleichung „weist nichts“ von u , zum Beispiel ist für $u'(t) = u^2(t) \cdot t$ die Funktion f durch $(t, v) \mapsto tv^2$ gegeben.

DEFINITION 2.1.17 (NEMYZKI-OPERATOR)

Der **NEMYZKI-Operator** F ist die durch f induzierte Abbildung

$$(Fu)(t) := f(t, u(t)).$$

Ist $u: [0, T] \rightarrow M$, so ist $Fu: [0, T] \rightarrow X$.

NEMYZKI-Operator

SATZ 2.1.4: EIGENSCHAFTEN DES NEMYZKI-OPERATORS

- ① Der NEMYZKI-Operator bildet **stetige Funktionen auf stetige Funktionen** ab: ist $f: [0, T] \times X \rightarrow X$ stetig, so ist

$$F: \mathcal{C}([0, T]; X) \rightarrow \mathcal{C}([0, T]; X).$$

- ② Ist $f: [0, T] \times \overline{B}(u_0, r) \rightarrow X$ stetig, wobei $\overline{B}(u_0, r) := \{x \in X : \|u_0 - x\| \leq r\}$ ist, so ist

$$F: \mathcal{C}([0, T]; \overline{B}(u_0, r)) \rightarrow \mathcal{C}([0, T]; X).$$

Hierbei ist eine Funktion $f: [0, T] \times M \rightarrow X$ stetig in $(t, v) \in [0, T] \times M$ wenn für jedes $s \in [0, T]$, jedes $w \in M$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $\|f(t, v) - f(s, w)\| < \varepsilon$ ist, wenn $|t - s| + \|v - w\| < \delta$ gilt.

Beweis. Kompositionen stetiger Funktionen sind stetig. (Tutorium) □

Im obigen Satz werden stetige Funktionen der Form

$$f: [0, T] \times \overline{B}(u_0, r) \rightarrow X$$

betrachtet. Ist X endlichdimensional, so ist $\overline{B}(u_0, r)$ und damit $[0, T] \times \overline{B}(u_0, r)$ kompakt. Dann ist zum Beispiel eine stetige Funktion, wie f , gleichmäßig stetig und beschränkt. Im Unendlichdimensionalen gilt das im Allgemeinen nicht: ist $f: [0, T] \times \overline{B}(u_0, r) \rightarrow X$ stetig, so ist f im Allgemeinen weder beschränkt noch gleichmäßig stetig.

SATZ 2.1.5: KOMPAKTHEITSSATZ VON RIESZ

Ein normierter Vektorraum X ist genau dann **endlichdimensional**, wenn die **abgeschlossene Einheitskugel in X kompakt** ist und genau dann wenn in X jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

Beweis. Jeder Kurs in Funktionalanalysis. □

2.2 Die Sätze von Picard-Lindelöf: Lokale und globale eindeutige Lösbarkeit von Anfangswertproblemen

Im Folgenden seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein **reeller BANACH-Raum**, $J \subset \mathbb{R}$ ein **Intervall**, $M \subset X$ eine Teilmenge, $t_0 \in J$ ein Startzeitpunkt und $u_0 \in X$ ein Anfangswert sowie $f: J \times M \rightarrow X$ eine **stetige** Funktion. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in J \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \quad (26)$$

DEFINITION 2.2.1 (LÖSUNG DES ANFANGSWERTPROBLEMS)

Ein Funktion u ist eine Lösung des Anfangswertproblems (26) auf einem Intervall I mit $t_0 \in I \subset J$, falls $u \in C^1(I, M)$ die Differentialgleichung auf I erfüllt und $u(t_0) = u_0$ gilt.

23.11.2020

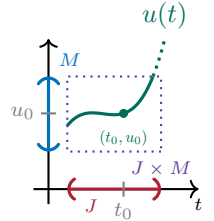


Abb. 12: Das Anfangswertproblem (26).

DEFINITION 2.2.2 (GLOBALE L-LIPSCHITZ-STETIGKEIT)

Die Abbildung f genügt einer **L-LIPSCHITZ-Bedingung** bezüglich des zweiten Arguments, wenn ein $L > 0$ existiert, sodass für alle $t \in I$ und alle $v, w \in M$ gilt

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq L\|v - w\|.$$

Da in der Definition die LIPSCHITZ-Konstante $L > 0$ nicht von t abhängt, spricht man von einer **gleichmäßigen LIPSCHITZ-Konstante**.

Lemma 2.2.3 (LIPSCHITZ-Bedingung impliziert Beschränktheit)

Sei $f: [0, T] \times \overline{B}(u_0, r) \rightarrow X$ für ein $r > 0$ eine stetige Abbildung, welche einer **L-LIPSCHITZ-Bedingung** genügt. Dann ist f beschränkt, das heißt es gibt ein $M > 0$ mit $\|f(t, v)\| \leq M$ für alle $t \in [0, T]$ und alle $v \in \overline{B}(u_0, r)$.

Im Endlichdimensionalen folgt der Beweis des Lemmas unmittelbar daraus, dass stetige Funktionen auf Kompakta beschränkt sind (cf. auch Satz 2.1.5).

Beweis. Für alle $t \in [0, T]$ und alle $v \in \overline{B}(u_0, r)$ gilt

$$\begin{aligned} \|f(t, v)\| &\stackrel{\Delta \neq}{\leq} \|f(t, v) - f(t, u_0)\| + \|f(t, u_0)\| \leq L\|v - u_0\| + \|f(t, u_0)\| \\ &\leq Lr + \sup_{t \in [0, T]} \|f(t, u_0)\| < \infty, \end{aligned}$$

da die Abbildung $t \mapsto f(t, u_0)$ auf dem Kompaktum $[0, T]$ stetig und somit beschränkt ist. \square

SATZ 2.2.1: PICARD-LINDELÖF, LOKALE VERSION (1893)

Seien $J = [0, T]$ und $M = \overline{B}(u_0, r)$ für $T, r > 0$. Genügt f einer **L-LIPSCHITZ-Bedingung**, so besitzt das Anfangswertproblem (26) **genau** eine Lösung $u \in C^1(I; M)$, wobei $I := [0, T] \cap [t_0 - a, t_0 + a]$ und $a := \min\left(\frac{r}{M}, \frac{1}{2L}\right)$ und M aus dem vorherigen Lemma stammt.



Motivation: Assoziierte Integralgleichung

Wir können die Lösung des Anfangswertproblems (26) als

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds =: (Tu)(t) \quad (27)$$

schreiben.

Die Idee des Beweises ist es, mit dem **BANACHschen Fixpunktsatz** einen Fixpunkt des Operators T in der Menge $\mathcal{C}([0, T]; \overline{B}(u_0, r))$ zu finden.

Bemerkung. Für jede Teilmenge $M \subset X$ ist

$$\mathcal{C}([0, T]; M) := \{u: [0, T] \rightarrow X \mid u \text{ ist stetig und } u([0, T]) \subset M\},$$

Beweis. Wir präzisieren und beweisen zunächst die Aussage aus der **Motivation**: es ist $u \in \mathcal{C}^1(I; \overline{B}(u_0, r))$ genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems (26), wenn $u \in \mathcal{C}(J; \overline{B}(u_0, r))$ die Integralgleichung (27) auf J löst, das heißt wenn $u \in \mathcal{C}(J; \overline{B}(u_0, r))$ ein **Fixpunkt** des Operators T auf

$$\mathcal{A} := \mathcal{C}(J; \overline{B}(u_0, r)) = \{u: J \rightarrow X \mid u \text{ ist stetig und } |u(t) - u_0| \leq r \, \forall t \in J\}.$$

ist.

„ \implies “: Sei $u \in \mathcal{C}^1(I; \overline{B}(u_0, r))$ eine Lösung des Anfangswertproblems (26). Dann folgt durch Integration

$$u(t) - \underbrace{u(t_0)}_{=u_0} = \int_{t_0}^t u'(s) \, ds \stackrel{(26)}{=} \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds.$$

„ \impliedby “: Sei $u \in \mathcal{A}$ ein Fixpunkt von T . Dann gilt

$$u(t) = (Tu)(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds \quad (28)$$

für alle $t \in J$. Die Abbildung $s \mapsto f(s, u(s))$ (das Bild des **NEMYZKI-Operators**) ist nach Satz 2.1.4 stetig, weil u stetig ist. Aus dem **Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung** folgt, dass die rechte Seite (und damit die linke Seite) der obigen Gleichung **stetig differenzierbar** mit der Ableitung $f(t, u(t))$ ist, also gilt $u \in \mathcal{C}^1(J; \overline{B}(u_0, r))$ und $u'(t) = f(t, u(t))$. Letztlich folgt $u(t_0) = u_0 + 0$ aus (28).

Wir zeigen nun mit dem **Fixpunktsatz von BANACH**, dass es genau einen Fixpunkt von T in \mathcal{A} gibt.

- ① Es ist \mathcal{A} eine **abgeschlossene Teilmenge** des nach Lemma 2.1.4 vollständigen Raums $\mathcal{C}(I; X)$ und damit ein **vollständiger metrischer Raum** bezüglich der induzierten Metrik: sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine Folge mit $u_n \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{n \rightarrow \infty} u$ in $\mathcal{C}(I; X)$. Dann ist u stetig und

$$\|u(t) - u_0\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(t) - u_0\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} r = r.$$

gilt für alle $t \in I$, also gilt $u(t) \in \overline{B}(u_0, r)$.

- ② Es gilt $\mathcal{A} \neq \emptyset$, da die konstante Funktion $u \equiv u_0 \in \mathcal{A}$ ist.

- ③ Ferner ist T eine **Selbstabbildung**, das heißt es gilt $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$; für $u \in \mathcal{A}$ ist Tu stetig (cf. oben) und somit gilt für $t \in I$ gilt

$$\begin{aligned} \|Tu(t) - u_0\| &\stackrel{(27)}{=} \left\| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds \right\| \leq \int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} \|f(s, u(s))\| \, ds \\ &\leq M|t - t_0| \leq Ma \leq M \frac{r}{M} = r \end{aligned}$$

und somit $(Tu)(t) \in \overline{B}(u_0, r)$.

- ④ Ferner ist T eine **Kontraktion**, denn für $u, v \in \mathcal{A}$ gilt

$$\begin{aligned} \|Tu - Tv\|_{\mathcal{C}(I; \overline{B}(u_0, r))} &= \max_{t \in I} \|(Tu)(t) - (Tv)(t)\|_X \\ &\stackrel{(27)}{=} \max_{t \in I} \left\| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds - \int_{t_0}^t f(s, v(s)) \, ds \right\|_X \\ &\stackrel{\triangle \neq}{\leq} \max_{t \in I} \int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_X \, ds \\ &\leq \max_{t \in I} \int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} L \|u(s) - v(s)\|_X \, ds \\ &\leq \max_{t \in I} L|t - t_0| \|u - v\|_{\mathcal{C}(I; \overline{B}(u_0, r))} \\ &\leq La \|u - v\|_{\mathcal{C}(I; \overline{B}(u_0, r))} \leq \frac{1}{2} \|u - v\|_{\mathcal{C}(I; \overline{B}(u_0, r))}. \end{aligned}$$

Nach dem **Fixpunktsatz von BANACH** existiert genau ein Fixpunkt $u \in \mathcal{A}$ von T . \square

Beispiel 2.2.4 (Unendlich viele Lösungen) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = \sqrt{|u(t)|}, & t > 0, \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Dann erfüllt für beliebige $R > 0$ die Funktion

$$f: \mathbb{R} \times \overline{B}(0, R) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, v) \mapsto \sqrt{|v|}$$

keine LIPSCHITZ-Bedingung, da die **Wurzelfunktion in 0 nicht LIPSCHITZ-stetig** ist. Somit ist die lokale Version des Satzes von PICARD-LINDELÖF nicht anwendbar. Es existieren **unendlich viele Lösungen**: für jedes $\tau > 0$ ist

$$u_\tau(t) := \begin{cases} 0, & \text{für } t \leq \tau, \\ \frac{1}{4}(t - \tau)^2, & \text{für } t > \tau. \end{cases}$$

eine stetig differenzierbare Lösung von (29). \diamond

Man betrachte erneut Abbildung 12: nur weil eine Lösung lokal um (u_0, t_0) existiert, muss diese nicht auf ganz $J \times M$ existieren. Ferner ist es auf einer kleinen Umgebung von (u_0, t_0) einfacher, eine LIPSCHITZ-Bedingung zu erfüllen, als eine globale auf ganz $J \times M$.

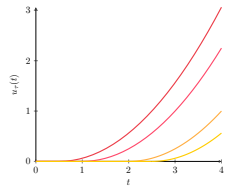


Abb. 13: Vier verschiedene Lösungen von (29) mit $\tau \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, \frac{5}{2}\}$.

SATZ 2.2.2: PICARD-LINDELÖF: GLOBALE LÖSBARKEIT BEI GLOBALER LIPSCHITZ-BEDINGUNG

Sei $f: [0, T] \times X \rightarrow X$ eine stetige Funktion, die einer LIPSCHITZ-Bedingung auf ganz X im zweiten Argument genüge. Dann besitzt das Anfangswertproblem (26) genau globale eine Lösung $u \in C^1([0, T]; X)$.

Man kann den Beweis durch Iterieren der lokalen Version des Satzes führen (cf. Übung).

Beweis. Wir betrachten erneut (27), diesmal auf $\mathcal{A} := \mathcal{C}([0, T]; X)$ und zeigen, dass dann der Operator T genau einen Fixpunkt besitzt. Analog zum vorherigen Beweis ist es leicht zu zeigen, dass \mathcal{A} ein nicht-leerer BANACH-Raum und T eine Selbstabbildung auf \mathcal{A} ist.

Um die Kontraktionseigenschaft zu zeigen, betrachten wir auf \mathcal{A} die Abbildung

$$\|\cdot\|_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty), \quad v \mapsto \max_{t \in [0, T]} e^{-L|t_0-t|} \|v(t)\|_X.$$

Dann ist $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ ein BANACH-Raum, denn $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ ist eine zu $\|\cdot\|_{\mathcal{C}([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_X$ äquivalente Norm: es gilt

$$e^{-2L} \|\cdot\|_{\mathcal{C}([0, T]; X)} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{A}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{C}([0, T]; X)}.$$

Für $u, v \in \mathcal{A}$ gilt

$$\begin{aligned} \|Tu - Tv\|_{\mathcal{A}} &\stackrel{(27)}{=} \max_{t \in [0, T]} e^{-L|t_0-t|} \left\| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) - f(s, v(s)) \, ds \right\|_X \\ &\stackrel{\triangle}{\leq} \max_{t \in [0, T]} e^{-L|t_0-t|} \int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} L \|u(s) - v(s)\|_X \, ds \\ &= L \max_{t \in [0, T]} e^{-L|t_0-t|} \int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} \underbrace{e^{L|s-t_0|} \|u(s) - v(s)\|_X}_{\leq \|u-v\|_{\mathcal{A}}} \, ds \\ &\leq L \max_{t \in [0, T]} e^{-L|t_0-t|} \underbrace{\int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} e^{L|s-t_0|} \, ds}_{= \frac{1}{L}(e^{L|t-t_0|} - 1)} \|u - v\|_{\mathcal{A}} \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} \left(1 - e^{-L|t_0-t|} \right) \|u - v\|_{\mathcal{A}} = \left[1 - e^{-L \max_{t \in [0, T]} |t-t_0|} \right] \|u - v\|_{\mathcal{A}} \\ &\leq \underbrace{\left[1 - e^{-LT} \right]}_{\in (0, 1)} \|u - v\|_{\mathcal{A}} < \|u - v\|_{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

Mit dem Fixpunktsatz von BANACH folgt nun die Aussage. \square

Wie oben bemerkt, ist die globale LIPSCHITZ-Bedingung eine starke Voraussetzung. Wenn wir auch mit nur einer lokalen LIPSCHITZ-Bedingung (v. i.) eine globale Lösung bekommen wollen, benötigen wir eine weitere Voraussetzung, die **a-priori-Abschätzung**.

Die folgende Definition sieht komplizierter aus, als sie ist, und bedeutet nur, dass es um jeden Punkt eine kleine Umgebung gibt, in der eine LIPSCHITZ-Bedingungen erfüllt ist.

DEFINITION 2.2.5 (LOKALE L-LIPSCHITZ-STETIGKEIT)

Die stetige Abbildung $f: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ genügt einer **lokalen L-LIPSCHITZ-Bedingung**, wenn zu jedem $(t, v) \in \mathbb{R} \times X$ ein $r > 0$, ein $\varepsilon > 0$ und ein $L > 0$ existieren, sodass

$$\|f(s, w) - f(s, \tilde{w})\| \leq L \|w - \tilde{w}\|$$

für alle $s \in [t - \varepsilon, t + \varepsilon]$ und alle $w, \tilde{w} \in \overline{B}(v, r)$ gilt.

Der folgende Satz ist ein Beispiel des wichtigen Prinzips: **A-priori-Abschätzung gibt Existenz**.

SATZ 2.2.3: PICARD-LINDELÖF: GLOBALE LÖSBARKEIT BEI LOKALER LIP-SCHITZ-BEDINGUNG

Sei $f: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ eine stetige Funktion, die einer lokalen L -LIPSCHITZ-Bedingung genügt. Ferner existiere ein $M > 0$, sodass

$$\|f(t, u(t))\| \leq M \quad (\text{a-priori-Abschätzung})$$

für jede Lösung u des Anfangswertproblems (26) und alle $t \in \mathbb{R}$, auf denen die Lösung existiert, gilt. Dann ist das Anfangswertproblem (26) auf \mathbb{R} **eindeutig** lösbar.



A-priori-Abschätzungen

Die sogenannte **a-priori-Abschätzung** im obigen Satz mag erstmal etwas seltsam daherkommen, da wir Forderungen an die Lösung stellen, bevor wir wissen, ob sie überhaupt existiert (daher auch der Name **a-priori-Abschätzung**). Solch eine Bedingung ist also wie folgt zu verstehen: Wenn eine Lösung existiert, dann muss sie diese Bedingung erfüllen. An dieser Stelle wird erstmal nichts darüber ausgesagt, **ob** die Lösung überhaupt existiert. Allerdings werden wir (insbesondere in den folgenden Veranstaltungen Differentialgleichungen IIA - III) sehen, dass **a-priori-Abschätzungen** oft dabei helfen, Existenz von Lösungen zu zeigen.

Bemerkung 2.2.6 (Beweisidee) Die erste Version des Satzes von PICARD-LINDELÖF garantiert die Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems auf $I := [t_0 - a, t_0 + a]$ mit $a := \min \left\{ \frac{r}{M}, \frac{1}{2L} \right\}$. Wir werden später in Satz 2.5.1 sehen, dass die Lösung stets eindeutig ist, wenn die rechte Seite eine lokale LIPSCHITZ-Bedingung erfüllt und deswegen nur die Existenz zeigen.

Der Beweis sollte also so anfangen: angenommen, diese Lösung würde nicht auf ganz \mathbb{R} existieren. Leider ist der vorangegangene Satz unsinnig, da die Lösung nur auf $I \subsetneq \mathbb{R}$ definiert ist, und somit gar nicht auf ganz \mathbb{R} existieren kann. Richtig formuliert ist es also: angenommen, es gibt keine auf \mathbb{R} definierte stetige Funktion, die auf I mit u übereinstimmt.

Die Idee ist nun, in dem neuen Anfangswert $t_0 + a$ die lokale Version des Satzes von PICARD-LINDELÖF anzuwenden, um das Existenzintervall auf zum Beispiel $[t_0 - a, c]$ mit $c > t_0 + a$ zu vergrößern. Dann wenden wir die lokale Version auf das Anfangswertproblem mit Anfangswert c an und wiederholen dieses Verfahren. Genau so können wir mit $t_0 - a$ verfahren.

Jedoch ist nicht garantiert, dass wir dadurch das Existenzintervall auf ganz \mathbb{R} vergrößern können, da zum Beispiel der Zuwachs der Intervalllänge durch $(2^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben sein könnte, da diese Größe von den LIPSCHITZ-Konstanten L abhängt, welche stets unterschiedlich und insbesondere wachsend sein können.

Beweis. Unter der obigen Annahme existieren $\alpha < t_0 < \beta < \infty$, sodass (α, β) das größte offene Intervall ist, auf dem eine Lösung u existiert. Es genügt nun zu zeigen, dass wir die Lösung auf den Rand von (α, β) fortsetzen können, denn dann können wir mit neuem Anfangswert β die lokale Version des Satzes von PICARD-LINDELÖF anwenden und erhalten ein größeres maximales Existenzintervall, was ein Widerspruch zu der Wahl von α und β ist.

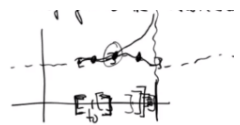


Abb. 14: TODO

Für $t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$ gilt mit der [a-priori-Abschätzung](#)

$$\begin{aligned} \|u(t_1) - u(t_2)\| &\stackrel{(27)}{=} \left\| \int_{t_0}^{t_1} f(s, u(s)) \, ds - \int_{t_0}^{t_2} f(s, u(s)) \, ds \right\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(s, u(s)) \, ds \right\| \\ &\leq \int_{t_1 \wedge t_2}^{t_1 \vee t_2} \|f(s, u(s))\| \, ds \leq M|t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

Also ist u auf (α, β) LIPSCHITZ-stetig und somit [gleichmäßig stetig](#). Somit kann u stetig in die Punkte α und β fortgesetzt werden. Wir definieren $u(\beta) := \lim_{t \nearrow \beta} u(t)$ und $u(\alpha)$ analog. Somit gilt (27) nicht nur auf (α, β) sondern sogar auf $[\alpha, \beta]$.

Wenden wir nun den [ersten Satz von PICARD-LINDELÖF](#) auf das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} v'(t) = f(t, v(t)), \\ v(\beta) = u(\beta) \end{cases}$$

an, so gibt es eine Lösung auf $[\beta - \tilde{\alpha}, \beta + \tilde{\alpha}]$, welche auf $[\beta - \tilde{\alpha}, \beta]$ mit u übereinstimmt. Damit existiert eine Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems auf $(\alpha, \beta + \tilde{\alpha}]$, was ein Widerspruch ist. \square

Beispiel 2.2.7 (Blow-up der Lösung) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = 1 + u^2(t), & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Dann ist die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, v) \mapsto 1 + v^2$ stetig auf \mathbb{R}^2 und erfüllt aufgrund des [Schränkensatzes](#) (nur anwendbar im [Endlichdimensionalen](#)!) eine lokale LIPSCHITZ-Bedingung, weil f stetig differenzierbar ist. Eine globale LIPSCHITZ-Bedingung ist jedoch nicht gegeben und f erfüllt keine geeignete a-priori-Abschätzung.

Die Lösung ist dann gegeben durch $u(t) = \tan(t)$. Da $t_0 = 0$ ist, ist das maximale Existenzintervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subset \mathbb{R}$, da es für $t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ ein [blow-up](#) gibt. \diamond

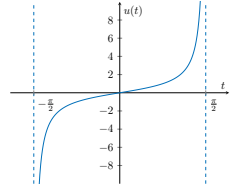


Abb. 15: Die Lösung von (30) ist der Tangens.

Später werden wir sehen, dass wenn die rechte Seite [superlinear](#) in der Lösung u ist, zum Beispiel $f(t, v) = v^a$ mit $a > 1$, es stets zu einem blow-up kommen wird.

Beispiel 2.2.8 ($X = \mathbb{R}$) Betrachte für $X = \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = t \sin(u(t)), & t \in [0, 10], \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Dann suchen wir eine Lösung $u: J \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall $J \subset [0, 10]$. Die rechte Seite ist

$$f: [0, 10] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, v) \mapsto t \sin(v)$$

hängt also nicht von der Lösung ab, denn es steht dort $\sin(v)$ und *nicht* $\sin(v(t))$. \diamond

Beispiel 2.2.9 ($X = \mathbb{R}^n$: das SIR-Modell) Wir betrachten erneut das SIR-Modell

$$\begin{cases} u'(t) := \begin{pmatrix} S \\ I \\ R \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} -aS(t)I(t) \\ aS(t)I(t) - bI(t) \\ bI(t) \end{pmatrix} =: f(t, u(t)), & t > 0 \\ u(0) = \begin{pmatrix} S_0 \\ I_0 \\ R_0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Dann ist $X = \mathbb{R}^3$ und

$$f: [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (t, v) \mapsto \begin{pmatrix} -av_1v_2 \\ av_1v_2 - bv_2 \\ bv_2 \end{pmatrix}.$$

◇

Beispiel 2.2.10 (Alternative Ansätze für die Wärmeleitungsgleichung)

Wir betrachten die [partielle](#) Differentialgleichung

$$\begin{cases} u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = g(t, x), & (t, x) \in [0, T) \times [0, \pi), \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [0, \pi), \\ u(t, 0) = 0 = u(t, \pi), & t \in [0, T). \end{cases}$$

Wir zeigen jetzt, wie wir dieses Problem umformulieren können, sodass es wie ein [gewöhnliches](#) Anfangswertproblem aussieht.

Angenommen, g und u_0 sind bereits als [FOURIER-Entwicklung](#) gegeben, das heißt

$$u_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k^{(0)} \sin(kx) \quad \text{und} \quad g(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k(t) \sin(kx)$$

mit $u_k^{(0)} \in \mathbb{R}$ und $g_k: [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann suchen wir die Lösung u in der Form

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k(t) \sin(kx)$$

mit $u_k: [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir wollen u in dieser Form in die Differentialgleichung einsetzen und daraus die Koeffizienten $u_k(t)$ bestimmen. Weil die Funktionen $(x \mapsto \sin(kx))_{k \in \mathbb{N}}$ paarweise [linear unabhängig](#) sind, sieht der Koeffizientenvergleich so aus: für jedes $k \in \mathbb{N}$ muss

$$\begin{cases} u'_k(t) - k^2 u_k(t) = g_k(t), & t \in [0, T), \\ u_k(0) = u_k^{(0)}, \end{cases}$$

gelten, wobei wir nicht beweisen, dass wir die Reihen gliedweise differenzieren dürfen. Wir bringen das Problem noch in die gewohnte Form:

$$\begin{cases} u'_k(t) = g_k(t) + k^2 u_k(t) =: f_k(t, u_k(t)), & t \in [0, T), \\ u_k(0) = u_k^{(0)}. \end{cases} \quad (P_k)$$

Dann ist $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge gewöhnlicher Anfangswertprobleme beziehungsweise ein [folgenwertiges Anfangswertproblem](#): für jedes $t > 0$ suchen wir die Folge $(u_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$. Wir suchen also eine Funktion $\tilde{u}: [0, T) \rightarrow \tilde{\ell}$ (wobei $\tilde{\ell}$ ein unendlichdimensionaler Folgenraum ist) mit

$$\begin{cases} \tilde{u}'(t) = (g_k(t) + k^2 u_k(t))_{k \in \mathbb{N}}, & t > 0 \\ \tilde{u}(0) = (u_k^{(0)})_{k \in \mathbb{N}}. \end{cases}$$

Wir stellen einen weiteren Ansatz vor: zu $u: (0, T) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ assoziieren wir eine „[abstrakte Funktion](#)“

$$\tilde{u}: (0, T) \rightarrow \mathcal{C}(0, \pi), \quad [\tilde{u}(t)](x) := u(t, x)$$

beziehungsweise $\tilde{u}(t) := u(t, \cdot)$. Dann [korrespondiert](#) u_t zu \tilde{u}' . Wir definieren den Ableitungsoperator $Av := -v_{xx}$ für $v \in \mathcal{C}^2(0, \pi) \subset \mathcal{C}(0, \pi)$ und die „Ersatz-rechte-Seite“ $f(t, v) := g(t, v) + Av$. Dann löst \tilde{u} das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \tilde{u}'(t) = f(t, \tilde{u}(t)), \\ \tilde{u}(0) = u_0, \end{cases}$$

Wir haben die partielle Differentialgleichung in ein Anfangswertproblem in $X = \mathcal{C}(0, \pi)$, welcher unendlichdimensional ist, umgeschrieben.

Zuletzt bemerken wir, dass alles Gezeigte nicht rigoros durchgeführt wurde. Die Details folgen erst in Differentialgleichungen III. \diamond

2.3 | Lineare Systeme mit beschränkten Operatoren

23.11.2020

Wir betrachten für ein Intervall $J \subset \mathbb{R}$ mit $(t_0, u_0) \in J \times X$ das inhomogene lineare Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)u(t) = b(t), & t \in J \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \quad (31)$$

wobei die rechte Seite $b: J \rightarrow X$ eine stetige Funktion, $A(t) \in L(X)$ für alle $t \in J$ ist, und die Abbildung $t \mapsto A(t)$ eine stetige Abbildung ist. Also gilt $A \in \mathcal{C}(J; L(X))$.

SATZ 2.3.1: LINEARE SYSTEME SIND EINDEUTIG LÖSBAR

Das Anfangswertproblem (31) besitzt eine eindeutige Lösung auf $J \subset \mathbb{R}$.

Für den Beweis wollen wir die globale Version des Satzes von PICARD-LINDELÖF anwenden.

Beweis. ① Sei zunächst J ein kompaktes Intervall. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $J = [0, T]$ für ein $T > 0$ ist. Wir definieren die rechte Seite

$$f: [0, T] \times X \rightarrow X, \quad (t, v) \mapsto b(t) - A(t)v,$$

welche als Komposition stetiger Abbildungen stetig ist. Diese Abbildung erfüllt sogar eine globale LIPSCHITZ-Bedingung; für alle $t \in J$ gilt

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| = \|A(t)v - A(t)w\| = \|A(t)(v - w)\| \leq \|A(t)\|_{L(X)} \|v - w\|.$$

Da A und $\|\cdot\|_{L(X)}$ stetig sind, ist auch die Abbildung $t \mapsto \|A(t)\|_{L(X)}$ stetig auf dem kompakten Intervall J und somit auch beschränkt. Mit $L := \|A(t)\|_{L(X)} \geq 0$ ist also auch die LIPSCHITZ-Bedingung erfüllt. Mit der zweiten Version des Satzes von PICARD-LINDELÖF folgt die Existenz einer eindeutigen Lösung auf J .

② Ist J ein beliebiges Intervall, so gilt

$$J = \bigcup_{\substack{I \subset J \\ I \text{ kompakt.}}} I.$$

Auf jedem kompakten Intervall $I \subset J$ mit $t_0 \in I$ existiert nach ① genau eine Lösung u_I des Anfangswertproblems (31).

Wir setzen nun $u: J \rightarrow X$, $u(t) = u_I(t)$ für $t \in I$. Die Funktion u ist wohldefiniert, da für kompakte Intervalle $I, \tilde{I} \subset J$ mit $t_0, t \in I \cap \tilde{I}$

$$u_I(t) = u_{I \cap \tilde{I}}(t) = u_{\tilde{I}}(t)$$

gilt. Somit löst u das Anfangswertproblem auf ganz J ; es gilt $u(t_0) = u_0$, da $u(t_0) = u_I(t_0)$ für alle kompakten $I \subset J$ und ferner

$$u'(t) = u'_I(t) = f(t, u_I(t)) = f(t, u(t))$$

für alle kompakten Intervalle $I \subset J$ mit $t_0, t \in I$ gilt. □

DEFINITION 2.3.1 (AUTONOME DIFFERENTIALGLEICHUNG)

Sind $A(t) \equiv A \in L(X)$ (und auch b) konstant, so nennt man die Differentialgleichung $u'(t) + A(t)u(t) = b(t)$ autonom.

Bemerkung 2.3.2 Ist A linear und beschränkt, so ist X der Definitionsbereich von A . Ist $\dim(X) < \infty$, so ist jeder lineare Operator $A: X \rightarrow X$ beschränkt. Ist A hingegen linear und **unbeschränkt** (beziehungsweise unstetig), so ist der Definitionsbereich von A im Allgemeinen eine echte Teilmenge von X . Hierunter fallen insbesondere **Ableitungsoperatoren**: ist X ein Funktionenraum, so ist der Operator $(Au)(t) := u'(t)$ für $u \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ ein unbeschränkter Operator und der Definitionsbereich von A ist nur $\mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$. Die Theorie wird für unbeschränkte Operatoren deutlich komplizierter und erst in Differentialgleichungen III ausgeführt. \triangle

Der Propagator

Motivation (Der Propagator für $X := \mathbb{R}$). Es gilt $L(X) \cong \mathbb{R}$. Wir betrachten

15.11.18

$$\begin{cases} u'(t) + a(t)u(t) = b(t), \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

wobei $a, b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind. Dann erhalten wir nach der Formel von DUHAMEL die eindeutige Lösung

$$u(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) ds\right) u_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_s^t a(\tau) d\tau\right) b(s) ds \quad (32)$$

Ersetzen wir a durch einen Operator $A \in \mathcal{C}(J; L(X))$, wäre das Integral $\int_{t_0}^t A(s) ds$ immer noch wohldefiniert, da $L(X)$ und somit auch $\mathcal{C}(J; L(X))$ ein BANACH-Raum ist (cf. Definition 2.1.11). Das Integral $\int_{t_0}^t A(s) ds$ ist dann ein Operator $B \in \mathcal{C}(J; L(X))$. Können wir e^B vernünftig definieren, ergibt diese Formel auch in einem allgemeinen Rahmen Sinn.

Setzen wir

$$U(t, s) := \exp\left(-\int_s^t a(\tau) d\tau\right),$$

können wir (32) kürzer schreiben als

$$u(t) = U(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^t U(t, s)b(s) ds.$$

Dann gilt:

- $U: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cong L(\mathbb{R})$,
- U ist stetig,
- $U(t, t) \equiv 1$,
- $U(t, r)U(r, s) = U(t, s)$,
- für $s \in \mathbb{R}$ und $u_0 \in X$ ist $u(t) = U(t, s)u_0$ die Lösung des **homogenen** Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) + a(t)u(t) = 0, \\ u(s) = 0. \end{cases}$$

- ist $a(t) \equiv a$ konstant, so gilt $U(t, s) = e^{-a(t-s)}$,
- $U(t, s)^{-1} = U(s, t)$,
- $\frac{\partial}{\partial t} U(t, s) = -U(t, s)a(t)$ und $\frac{\partial}{\partial s} U(t, s) = U(t, s)a(s)$.

\triangle

Wir wollen $U(t, s)$ für beliebige X definieren. Nach Satz 2.3.1 ist das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)u(t) = 0, \\ u(s) = u_0 \end{cases} \quad (33)$$

für $A \in \mathcal{C}(J; L(X))$, $s \in \mathbb{R}$ und $u_0 \in \mathbb{R}$ eindeutig auf ganz \mathbb{R} lösbar.

DEFINITION 2.3.3 (PROPAGATOR EINES LINEAREN SYSTEMS)

Sei u die Lösung von (33). Wir definieren $U(t, s)$ *punktweise* durch $u(t) = U(t, s)u_0$. Dann ist $U(t, s): X \rightarrow X$, $u_0 \mapsto U(t, s)u_0$ für $s, t \in \mathbb{R}$ und U heißt **Propagator zu (33)**.

Propagator

Also ist $U(t, s)$ der **Lösungsoperator** für die Situation, dass wir zum Zeitpunkt s starten und zum Zeitpunkt t auswerten.

Im Allgemeinen existiert für den Propagator $U(t, s)$ **keine explizite Darstellung**.

Lemma 2.3.4 (Explizite Darstellung des Propagators)

Kommutieren alle $(A(t))_{t \in \mathbb{R}}$, das heißt $A(t)A(s) = A(s)A(t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$, so gilt

$$U(t, s) = \exp \left(- \int_s^t A(\tau) d\tau \right),$$

wobei wir für beliebige $B \in L(X)$ definieren $e^B := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \in L(X)$.

Schon für allgemeine Matrizen $A(t) \in L(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist diese Kommutativitätsbedingung verletzt, jedoch ist sie stets für Diagonalmatrizen erfüllt.

Bemerkung 2.3.5 Die Operatorexponentialabbildung ist wohldefiniert, da für $m, n \in \mathbb{N}$ mit ohne Beschränkung der Allgemeinheit $m > n$

$$\left\| \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} B^k - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} B^k \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k!} B^k \right\| \stackrel{\triangle}{\leq} \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k!} \|B^k\| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k!} \|B\|^k \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0,$$

gilt, da $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|B\|^k = e^{\|B\|} < \infty$ gilt. Somit bilden die Partialsummen $(\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} B^k)_{m \in \mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge. Mit X ist auch $L(X)$ vollständig und somit konvergiert $e^B := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k$.

Lemma 2.3.6 (Rechenregeln für exp)

Seien $A, B \in L(X)$. Kommutieren A und B , so gilt $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$ und $(e^A)^{-1} = e^{-A}$. Ist B invertierbar, folgt $e^{BAB^{-1}} = B e^A B^{-1}$. Ferner gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{1}{n} B \right)^n = e^B = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{1}{n} B \right)^{-n} \quad \text{und} \quad Bv = \lim_{t \searrow 0} \frac{e^{tB}v - v}{t}$$

für $v \in X$, wenn $(I - \frac{1}{n} B)^n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ invertierbar ist.

Beweis. Hausaufgabe. □

Beweis. (von Lemma 2.3.4) Es ist $-\int_s^t A(\tau) d\tau \in L(X)$ wohldefiniert für $s, t \in \mathbb{R}$ und damit ist $U(t, s)$ wohldefiniert. Es gilt

$$\frac{d}{dt} \exp \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right) = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(- \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} \left(- \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right)^{k-1} (-A(t))$$

Da der Konvergenzradius dieser Reihe ganz \mathbb{R} ist, können wir gliedweise differenzieren. Können wir $-A(t)$ auch vor die Reihe schreiben, können wir so weiter machen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} \left(- \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right)^{k-1} (-A(t)) &= -A(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \left(- \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right)^{k-1} \\ &= -A(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(- \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right)^k \\ &= -A(t) \exp \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right), \end{aligned}$$

was die Behauptung ist.

Durch Induktion genügt es zu zeigen, dass $A(t)$ mit $\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$ kommutiert. Es gilt

$$\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} A(t_k^{(n)}) \frac{t - t_0}{n},$$

und somit kommutiert $A(t)$ mit $\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$, da alle $(A(t))_{t \in \mathbb{R}}$ kommutieren. \square

Ist $A(t) := A$ konstant, so kommutieren alle $(A(t))_{t \in \mathbb{R}}$. Dann ist

$$U(t, s) = e^{-A \cdot (t-s)}.$$

Dann ist $S(r) = e^{-Ar}$ (cf. Satz 2.3.2 (5)) und somit ist die Lösung der autonomen Version von (33) gerade $u(t) = e^{-(t-t_0)A}u_0$, genau wie im Eindimensionalen.

SATZ 2.3.2: EIGENSCHAFTEN DES PROPAGATORS

Seien $s, t, r \in \mathbb{R}$.

- ① Es gilt $U(t, s) \in L(X)$ und die Abbildung $(t, s) \mapsto U(t, s)$ ist stetig, es gilt also $U \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, L(X))$.
- ② Es gilt $U(t, t) = \text{id}_X$.
- ③ Es gilt $U(t, s)U(s, r) = U(t, r)$ und $U(t, s)^{-1} = U(s, t)$.
- ④ Die Abbildung $(t, s) \mapsto U(t, s)$ ist die Lösung des Operator- beziehungsweise $L(X)$ -wertigen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} U(t, s) + A(t)U(t, s) = 0, \\ U(s, s) = \text{id}. \end{cases}$$

- ⑤ Ist $A(t) \equiv A \in L(X)$ konstant, dann gilt $U(t, s) = U(t - s, 0) = S(t - s)$ mit $S(r) := U(r, 0)$.
- ⑥ Es gilt $\frac{\partial}{\partial t} U(t, s) = -A(t)U(t, s)$ und $\frac{\partial}{\partial s} U(t, s) = U(t, s)A(s)$.
- ⑦ Es gilt die Abschätzung

$$\|U(t, s)\|_{L(X)} \leq \exp \left(\int_{s \wedge t}^{s \vee t} \|A(\tau)\|_{L(X)} d\tau \right). \quad (34)$$

Die beiden Aussage ② und ③ zeigen, dass sich der Propagator „wie eine Exponentialfunktion“ verhält. Die Gleichung ⑤ sagt aus, dass der Startpunkt egal ist, und nur das betrachtete Zeitintervall relevant ist; wir benötigen nur den Parameter $t - s$ (Länge des Zeitintervalls) anstatt zwei Parameter (Startpunkt s und Endpunkt t). Man beachte, dass die Verkettung $A(t)U(t, s)$ in ⑥ nicht kommutiert: $A(t)U(t, s) \neq U(t, s)A(t)$.

Bemerkung 2.3.7 (Exkurs zur Halbgruppentheorie) Es ist $(U(t, s))_{s, t \in \mathbb{R}}$ eine zweiparametrische Operatorenfamilie, welche **reversible zeitabhängige Prozesse** beschreibt, da $U(t, s)$ invertierbar mit $U(t, s)^{-1} = U(s, t)$ ist.

Im **autonomen** Fall gilt $U(t, s) = e^{-(t-s)A}$. Auch hier sind es reversible Prozesse, denn $S(r)$ ist invertierbar mit $S(r)^{-1} = S(-r)$. Weil der Operator A beschränkt ist, bildet die Menge $(S(r))_{r \in \mathbb{R}}$ eine einparametrische **abelsche Gruppe** bezüglich der Komposition, es sind die Eigenschaften Assoziativität, Existenz eines neutralen Elements, Existenz von Inversen und Kommutativität erfüllt: es gilt

$$\begin{aligned} S(t_1)(S(t_2)S(t_3)) &= (S(t_1)S(t_2))(S(t_3)) \quad \forall t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}, \\ S(0) &= \text{id}, \\ S(t)^{-1} &= S(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ S(t)S(r) &= S(r)S(t) \quad \forall t, r \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Bei irreversiblen Prozessen (zum Beispiel modelliert durch die Wärmeleitungsgleichung), können wir den Anfangszustand des Systems nicht bestimmen, nur weil wir den Zustand des Systems an einem späteren Zeitpunkt kennen. Diese Prozesse werden im Allgemeinen von **unbeschränkten** Operatoren beschrieben, zum Beispiel dem LAPLACE-Operator $-\Delta$. Dann kann man nur versuchen, $S(t)$ für zum Beispiel $t \geq 0$ zu definieren. Nun handelt es sich bei $(S(t))_{t \geq 0}$ (so etwas wie $S(r) = e^{-Ar}$ für einen unbeschränkten Operator A) nur um eine **Halbgruppe** (nur Assoziativität und Existenz eines neutralen Elements sind gegeben), da für $t > 0$ **keine Inverse** $S(t)^{-1} = S(-t)$ existiert. Wir werden diese Theorie in Differentialgleichungen III unter dem Namen **milde Lösungen** erneut aufgreifen.

Somit beschreiben die Propagatoren $(U(t, s))_{s, t \in \mathbb{R}}$ die Evolution von nicht autonomen, aber **reversiblen** Prozessen. \triangle

SATZ 2.3.3: LEMMA VON GRONWALL (VORFORM)

Seien λ und b stetige Funktionen, λ **nichtnegativ** und $a \in L^1([t_0, T])$ (zum Beispiel a stetig).

① Gilt die Abschätzung

$$a(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t \lambda(s)a(s) \, ds, \quad (35)$$

so folgt die Abschätzung

$$a(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t \lambda(s) \exp\left(\int_s^t \lambda(\tau) \, d\tau\right) b(s) \, ds.$$

② Ist b **monoton wachsend**, so gilt für alle $t \geq t_0$ die Abschätzung

$$a(t) \leq b(t) \exp\left(\int_{t_0}^t \lambda(s) \, ds\right).$$

Man beachte, dass bei (35) die Funktion a auf beiden Seiten der Ungleichung auftaucht, bei den anderen Ungleichungen jedoch nur auf einer.

Beweis. Zunächst gilt für alle $t \in [t_0, T]$

$$\left| \int_{t_0}^t \lambda(s)a(s) \, ds \right| \leq \int_{t_0}^t \lambda(s)|a(s)| \, ds \leq \int_{t_0}^T \lambda(s)|a(s)| \, ds \leq \|\lambda\|_\infty \|a\|_{L^1} < \infty.$$

Mit der Produktregel gilt

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \left(\exp \left(- \int_{t_0}^t \lambda(s) ds \right) \int_{t_0}^t \lambda(s) a(s) ds \right) \\
 &= - \lambda(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t \lambda(s) ds \right) \int_{t_0}^t \lambda(s) a(s) ds + \exp \left(- \int_{t_0}^t \lambda(s) ds \right) \lambda(t) a(t) \\
 &= \underbrace{\lambda(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t \lambda(s) ds \right)}_{\geq 0} \underbrace{\left(a(t) - \int_{t_0}^t \lambda(s) a(s) ds \right)}_{\leq b(t)} \\
 &\leq \lambda(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t \lambda(s) ds \right) b(t).
 \end{aligned}$$

Integration von t_0 bis t ergibt

$$\exp \left(- \int_{t_0}^t \lambda(s) ds \right) \int_{t_0}^t \lambda(s) a(s) ds \leq \int_{t_0}^t \lambda(s) \exp \left(- \int_{t_0}^s \lambda(\tau) d\tau \right) b(s) ds,$$

also durch Multiplikation beider Seiten mit $\exp \left(\int_{t_0}^t \lambda(s) ds \right)$

$$\int_{t_0}^t \lambda(s) a(s) ds \leq \int_{t_0}^t \lambda(s) \exp \left(\int_s^t \lambda(\tau) d\tau \right) b(s) ds. \quad (36)$$

Insgesamt folgt

$$a(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t \lambda(s) a(s) ds \stackrel{(36)}{\leq} b(t) + \int_{t_0}^t \lambda(s) \exp \left(\int_s^t \lambda(\tau) d\tau \right) b(s) ds.$$

Ist b monoton wachsend, schätzen wir weiter ab:

$$\begin{aligned}
 a(t) &\leq b(t) \left(1 + \int_{t_0}^t \underbrace{\lambda(s) \exp \left(\int_s^t \lambda(\tau) d\tau \right)}_{= -\frac{\partial}{\partial s} \exp \left(\int_s^t \lambda(\tau) d\tau \right)} ds \right) = b(t) \left(1 + \exp \left(\int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau \right) \right) \\
 &= -\frac{\partial}{\partial s} \exp \left(\int_s^t \lambda(\tau) d\tau \right)
 \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.3.8 Die Voraussetzung $\lambda \geq 0$ ist wesentlich (Übungsaufgabe).

Beweis. (von Satz 2.3.2) Zunächst beweisen wir 7. Nach Definition gilt für ohne Beschränkung der Allgemeinheit $t \geq s$

$$\|U(t, s)\|_{L(X)} = \sup_{u_0 \neq 0} \frac{\|U(t, s)u_0\|}{\|u_0\|}.$$

Seien $u_0 \in X$ und u die Lösung des Anfangswertproblems (33). Dann gilt nach Definition 2.3.3

$$\|U(t, s)u_0\| = \|u(t)\|,$$

Nun gilt nach dem Hauptsatz der Integral und Differentialgleichung

$$\|u(t)\| = \left\| u_0 + \int_s^t -A(\tau)u(\tau) d\tau \right\| \stackrel{\Delta \neq}{\leq} \|u_0\| + \int_s^t \|A(\tau)\|_{L(X)} \|u(\tau)\| d\tau.$$

Seien $b(\tau) := \|u_0\|$, welche konstant also monoton wachsend ist, $\lambda(\tau) := \|A(\tau)\| \geq 0$ sowie $a(\tau) := \|u(\tau)\|$. Nun gilt nach dem Lemma von Gronwall

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| \exp \left(\int_s^t \|A(\tau)\|_{L(X)} d\tau \right).$$

Somit ist

$$\|U(t, s)\|_{L(X)} \leq \exp \left(\int_s^t \|A(\tau)\|_{L(X)} d\tau \right).$$

① Linearität. Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $u_0, v_0 \in X$. Wir wollen

$$U(t, s)(\alpha u_0 + \beta v_0) = \alpha U(t, s)u_0 + \beta U(t, s)v_0$$

zeigen. Seien weiter die Funktionen u und v die Lösungen des Anfangswertproblems (33) beziehungsweise

$$\begin{cases} v'(t) + A(t)v(t) = 0, \\ v(s) = v_0. \end{cases}$$

Dann gilt $u(t) = U(t, s)u_0$ und $v(t) = U(t, s)v_0$.

Wir setzen $w := \lambda u + \mu v$, so ist w die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} w'(t) + A(t)w(t) = 0 \\ w(s) = \lambda u(s) + \mu v(s) = \lambda u_0 + \mu v_0. \end{cases}$$

Damit folgt

$$\lambda U(t, s)u_0 + \mu U(t, s)v_0 = \lambda u(t) + \mu v(t) = w(t) = U(t, s)(\lambda u_0 + \mu v_0).$$

Beschränktheit. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $t \geq s$. Mit ⑦ folgt

$$\|U(t, s)u_0\| \leq \underbrace{\exp \left(\int_s^t \|A(\tau)\| d\tau \right)}_{=: C > 0 \text{ (für feste } t \geq s \in \mathbb{R})} \|u_0\|.$$

Stetigkeit. Für $(t, s), (t', s') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zeigen wir

$$\|U(t', s') - U(t, s)\|_{L(X)} \xrightarrow{(t', s') \rightarrow (t, s)} 0.$$

Es gilt

$$\|U(t', s') - U(t, s)\|_{L(X)} \stackrel{\triangle \neq}{\leq} \|U(t', s') - U(t, s')\|_{L(X)} + \|U(t, s') - U(t, s)\|_{L(X)}.$$

Zum ersten Summand. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $t' > t$. Dann gilt

$$\|U(t', s') - U(t, s')\| = \sup_{u_0 \neq 0} \frac{\|U(t', s')u_0 - U(t, s')u_0\|}{\|u_0\|}.$$

Sei u die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)u(t) = 0, \\ u(s') = u_0. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\|U(t', s')u_0 - U(t, s')u_0\| = \|u(t') - u(t)\|.$$

Nach dem Hauptsatz der Integral und Differentialgleichung gilt

$$\begin{aligned} \|u(t') - u(t)\| &\stackrel{\triangle \neq}{\leq} \int_t^{t'} \| -A(\tau)u(\tau) \| d\tau \\ &\stackrel{\triangle \neq}{\leq} \int_t^{t'} \|A(\tau)\|_{L(X)} \|u(\tau) - u(t)\|_X d\tau + \int_t^{t'} \|A(\tau)\|_{L(X)} \|u(t)\|_X d\tau. \end{aligned}$$

Seien $\lambda(\tau) := \|A(\tau)\| \geq 0$, $a(\tau) := \|u(\tau) - u(t)\|$ und $b'(t) = \int_t^{t'} \|A(\tau)\|_{L(X)} \|u(t)\|_X d\tau$, welche monoton wächst, da der Integrand nichtnegativ ist. Mit dem Lemma von GRONWALL folgt

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(t')\| &\leq \int_t^{t'} \|A(\tau)\| d\tau \|u(t)\| \exp\left(\int_t^{t'} \|A(\tau)\| d\tau\right) \\ &\stackrel{(7)}{\leq} \int_t^{t'} \|A(\tau)\| d\tau \exp\left(\int_{\min(s',t)}^{\max(s',t')} \|A(\tau)\| d\tau\right) \|u_0\| \exp\left(\int_t^{t'} \|A(\tau)\| d\tau\right) \end{aligned}$$

Also gilt

$$\|U(t', s) - U(t, s')\| \leq \underbrace{\int_t^{t'} \|A(\tau)\| d\tau}_{\xrightarrow{t' \rightarrow t} 0} \underbrace{\exp\left(\int_{\min(s',t)}^{\max(s',t')} \|A(\tau)\| d\tau\right)}_{\text{beschränkt}} \underbrace{\exp\left(\int_t^{t'} \|A(\tau)\| d\tau\right)}_{\xrightarrow{s' \rightarrow s, t' \rightarrow t} 0}$$

Zweiter Summand. Es gilt

$$\begin{aligned} \|U(t, s') - U(t, s)\| &\stackrel{(3)}{=} \|U(t, s)U(s, s') - U(t, s)U(s', s')\| \leq \|U(t, s)\| \|U(s, s') - U(s', s')\| \\ &\stackrel{(2)}{=} \underbrace{\|U(t, s)\|}_{\text{beschränkt nach (7)}} \underbrace{\|U(s, s') - U(s', s')\|}_{\xrightarrow{\text{wie oben}} 0} \end{aligned}$$

- (2) Seien $u_0 \in X$ und die Funktion u die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)u(t) = 0 \\ u(s) = u_0. \end{cases} \quad (37)$$

Dann ist $u_0 = u(s) = U(s, s)u_0$, also ist $U(s, s) = \text{id}$.

- (3) Wir zeigen

$$(U(t, r)U(r, s))u_0 = U(t, s)u_0.$$

Sei u die Lösung von (37). Wir zeigen $U(t, r)u(r) = u(t)$. Sei v die Lösung von

$$\begin{cases} v'(t) + A(t)v(t) = 0, \\ v(r) = u(r). \end{cases}$$

Es gilt $v(t) = u(t)$, da u und v die gleiche Differentialgleichungen und die gleiche Anfangsbedingung $u(r) = v(r)$ erfüllen. Also gilt $u \equiv v$ und somit insbesondere $u(t) = v(t)$. Hieraus folgt nach (2)

$$U(t, s)U(s, t) = U(t, t) = \text{id} \quad \text{und} \quad U(s, t)U(t, s) = U(s, s) = \text{id}$$

und somit die zweite Behauptung.

07.12.2020

- (4) Folgt aus (6) und (2).

- ⑤ Sei $A(t) \equiv A$. Dann gilt $U(t, s) = U(t - s, 0)$. Seien $u_0 \in X$ und die Funktion u eine Lösung von (33). Dann ist $U(t, s)u_0 = u(t)$.

Wir setzen $v(t) := u(t + s)$. Dann gilt $v(0) = u(s) = u_0$ und

$$v'(t) = \frac{d}{dt}u(t + s) = u'(t + s) = -Au(t + s) = -Av(t),$$

und somit löst v des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} v'(t) + Av(t) = 0 \\ v(0) = u_0. \end{cases}$$

Also gilt $v(t) = U(t, 0)u_0$ und $v(t) = u(t + s) = U(t + s, s)u_0$, also ist $U(t + s, s) = U(t, 0)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und insbesondere

$$U(t, s) = U(t - s + s, s) = U(t - s, 0).$$

- ⑥ Ein **falscher** Beweis ist: seien $u_0 \in X$ und u die Lösung des Anfangswertproblems mit Startpunkt u_0 , dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t, s)u_0 = \frac{\partial}{\partial t}u(t) = u'(t) = -A(t)u(t) = -A(t)U(t, s)u_0.$$

Der Fehler ist, dass wir $\frac{\partial}{\partial t}(U(t, s)u_0)$ betrachtet haben, wir aber eigentlich $(\frac{\partial}{\partial t}U(t, s))u_0$ betrachten sollten, wobei der erste Term eine Ableitung in X und der zweite eine Ableitung in $L(X)$ darstellt.

Wir zeigen

$$\left\| \frac{U(r, s) - U(t, s)}{r - t} - A(t)U(t, s) \right\|_{L(X)} \xrightarrow{r \rightarrow t} 0.$$

Wir betrachten für $u_0 \in X$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $r \geq t$

$$\left\| \frac{U(r, s)u_0 - U(t, s)u_0}{r - t} - A(t)U(t, s)u_0 \right\|_X \leq \frac{1}{r - t} \|u(r) - u(t) + (r - t)A(t)u(t)\|,$$

wobei u die Lösung des Anfangswertproblems (33) ist. Mit der Integralgleichung oder dem Mittelwertsatz folgt

$$\begin{aligned} u(r) - u(t) + (r - t)A(t)u(t) &= \int_t^r u'(\tau) d\tau + (r - t)A(t)u(t) \\ &= - \int_t^r A(\tau)u(\tau) d\tau + (r - t)A(t)u(t) \\ &= \int_t^r A(t)u(t) - A(\tau)u(\tau) d\tau \\ &= - \int_t^r A(\tau) (u(\tau) - u(t) + (\tau - t)A(t)u(t)) d\tau \\ &\quad + \int_t^r (A(t) - A(\tau)) u(t) d\tau \\ &\quad + \int_t^r A(\tau)(\tau - t) d\tau A(t)u(t). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \underbrace{\|u(r) - u(t) + (r - t)A(t)u(t)\|}_{=:a(r)} &\stackrel{\triangle \neq}{\leq} \int_t^r \underbrace{\|A(\tau)\|}_{=: \lambda(\tau)} \underbrace{\|u(\tau) - u(t) + (\tau - t)A(t)u(t)\|}_{=:a(\tau)} d\tau \\ &\quad + \underbrace{\left(\int_t^r \|A(t) - A(\tau) + \|A(\tau)\| |\tau - t| d\tau \|A(t)\| \right)}_{=:b(r) \text{ (wie oben monoton wachsend.)}} \|u(t)\|. \end{aligned}$$

Nach dem Lemma von Gronwall gilt nun

$$\begin{aligned} \|u(r) - u(t) + (r - t)A(t)u(t)\| &\leq \left(\int_t^r \|A(t) - A(\tau)\| d\tau + \int_t^r \|A(\tau)\| |\tau - t| d\tau \|A(t)\| \right) \\ &\quad \cdot \|u(t)\| \cdot \exp \left(\int_t^r \|A(\tau)\| d\tau \right) \\ &\stackrel{7}{\leq} \left(\int_t^r \|A(t) - A(\tau)\| d\tau + \int_t^r \|A(\tau)\| |\tau - t| d\tau \|A(t)\| \right) \\ &\quad \cdot \exp \left(\int_t^r \|A(\tau)\| d\tau \right) \exp \left(\int_{s \wedge t}^{s \vee t} \|A(\tau)\| d\tau \right) \|u_0\|. \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \left\| \frac{U(r, s) - U(t, s)}{r - t} + A(t)U(t, s) \right\| &\leq \left(\frac{1}{r - t} \int_t^r \|A(t) - A(\tau)\| d\tau \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r - t} \int_t^r \|A(\tau)\| |\tau - t| d\tau \|A(t)\| \right) \\ &\quad \underbrace{\exp \left(\int_t^r \|A(\tau)\| d\tau \right) \exp \left(\int_{\min(s, t)}^{\max(s, t)} \|A(\tau)\| d\tau \right)}_{\text{beschränkt}}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{1}{r - t} \int_t^r \|A(t) - A(\tau)\| d\tau \xrightarrow{r \rightarrow t} 0,$$

da A stetig ist deshalb auch und

$$\frac{1}{r - t} \int_t^r \|A(\tau)\| |\tau - t| d\tau \leq \int_t^r \|A(\tau)\| d\tau.$$

Also ist $\frac{\partial}{\partial s} U(t, s) = A(t)U(t, s)$.

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{U(t, s + h) - U(t, s)}{h} &= U(t, s + h) \frac{\text{id} - U(s + h, s)}{h} \\ &= -U(t, s + h) \left(\frac{U(s, s + h) - U(s, s)}{h} \right) \\ &\xrightarrow[\text{cf. oben}]{h \rightarrow 0} -U(t, s)(-A(s)U(s, s)) = U(t, s)A(s). \end{aligned}$$

□

Das inhomogene Problem und die Formel von DUHAMEL

SATZ 2.3.4: SATZ VON DUHAMEL

Seien $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; L(X))$ und $b \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; X)$. Dann ist für beliebige $t_0 \in \mathbb{R}$ und $u_0 \in X$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)u(t) = b(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (38)$$

gegeben durch

$$u(t) = U(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^t U(t, s)b(s) ds,$$

wobei U der zu A gehörige Propagator ist.

Um diesen Satz beweisen zu können, benötigen wir noch die folgende Differentiationsregel für sogenannte Parameterintegrale.

Lemma 2.3.9 (LEIBNIZregel für Parameterintegrale)

Seien $a, b \in C^1([0, T])$. Weiterhin sei $f: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow X$ stetig differenzierbar in der ersten Komponente, d.h. die Abbildung $t \mapsto f(t, s)$ ist stetig differenzierbar für alle $s \in \mathbb{R}$, und sowohl die Abbildung $s \mapsto f(t, s)$ als auch $s \mapsto \frac{\partial}{\partial t} f(t, s)$ seien integrierbar über \mathbb{R} . Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, s) ds = f(t, b(t))b'(t) - f(t, a(t))a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t, s) ds.$$

Beweis. Wir definieren uns die Hilfsfunktion $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow X$ mit

$$F(u, v, w) = \int_u^v f(w, s) ds.$$

Dann gilt

$$F'(u, v, w) = \left(-f(w, u), \quad f(w, v), \quad \int_u^v \frac{\partial}{\partial w} f(w, s) ds \right),$$

wobei der erste und zweite Eintrag des Vektors einfach aus dem üblichen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgen. Mit der Kettenregel erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, s) ds &= \frac{d}{dt} F(a(t), b(t), t) \\ &= F'(a(t), b(t), t) \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ t \end{pmatrix}' \\ &= -f(t, a(t))a'(t) + f(t, b(t))b'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t, s) ds. \end{aligned}$$

□

Beweis. (von Satz 2.3.4) Die Wohldefiniertheit ist klar. Da das Anfangswertproblem nach Satz 2.3.1 eindeutig lösbar ist, genügt es zu zeigen, dass u das Anfangswertproblem löst. Es gilt

$$u(t_0) = U(t_0, t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t_0} U(t, s)b(s) ds = u_0.$$

und mit dem vorherigen Lemma 2.3.9

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{d}{dt} U(t, t_0)u_0 + \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t U(t, s)b(s) ds \\ &= -A(t)U(t, t_0)u_0 - \int_{t_0}^t A(t)U(t, s)b(s) ds + U(t, t)b(t) \\ &= -A(t)U(t, t_0)u_0 - A(t) \int_{t_0}^t U(t, s)b(s) ds + b(t) \\ &= -A(t) \left(U(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^t U(t, s)b(s) ds \right) + b(t) \\ &= -A(t)u(t) + b(t). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.3.10 Im autonomen Fall gilt

$$u(t) = e^{-(t-t_0)A}u_0 + \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A}b(s) ds.$$

Bemerkung 2.3.11 (Semilineare Problem) Die Formel von DUHAMEL gilt auch für **semilineare** Problem $u'(t) + A(t)u(t) = b(t, u(t))$. Dann ist die Lösung des Anfangswertproblems genau ein Fixpunkt von

$$(Tu)(t) := U(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^t U(t, s)b(s, u(s)) ds$$

Das endlichdimensionale Problem ($X = \mathbb{R}^d$)

SATZ 2.3.5: STRUKTUR DES LÖSUNGSRAUMS

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^{d \times d} \cong L(X))$.

- ① Die Mengen V aller Lösungen des homogenen Problems $u'(t) + A(t)u(t) = 0$ ist linearer d -dimensionaler Unterraum von $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^d)$.
- ② Für $b \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^d)$ ist die Menge V_b der Lösung der inhomogenen Gleichung $u'(t) + A(t)u(t) = b(t)$ ist ein zu V **affiner** Unterraum, das heißt es gilt $V_b = V + u_p$ für ein $u_p \in V_b$.
- ③ Seien $u_1, \dots, u_m \in V$ mit $m \leq d$ Lösungen der homogenen Gleichungen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
 - ① u_1, \dots, u_m sind **linear unabhängige Funktionen** in $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^d)$.
 - ② Für alle $s \in I$ sind $u_1(s), \dots, u_m(s)$ **linear unabhängige Vektoren** in \mathbb{R}^d .
 - ③ Für ein $\bar{t} \in I$ sind $u_1(\bar{t}), \dots, u_m(\bar{t})$ linear unabhängig Vektoren in \mathbb{R}^d .

Beweis. Die Aussage ① und ② (bis auf die Dimensionsaussage) folgen direkt aus dem **Superpositionsprinzip**.

Wir zeigen nun, dass $\dim(V) = d$ gilt. Wir definieren für beliebige $s \in I$

$$S_s := U(\cdot, s): \mathbb{R}^d \rightarrow V, \quad u_0 \mapsto u,$$

wobei u die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)u(t) = 0, \\ u(s) = u_0 \end{cases}$$

ist. Dann gilt

- ① Die Abbildung S_s ist linear: Seien $u_0, v_0 \in \mathbb{R}^d$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und u beziehungsweise v die Lösung zum Anfangswert u_0 beziehungsweise v_0 , so ist $\mu u + \lambda v$ die Lösung zum Anfangswert $\mu u_0 + \lambda v_0$ also gilt $S_s(\mu u_0 + \lambda v_0) = \mu S_s u_0 + \lambda S_s v_0$.
- ② S_s ist injektiv: Gilt $u_0 \neq v_0$, so folgt insbesondere

$$u(s) = (S_s u_0)(s) = u_0 \neq v_0 = (S_s v_0)(s) = v(s)$$

und somit $S_s u_0 \neq S_s v_0$

- ③ Sei $u \in V$ beliebig. Wir setzen $u_0 = u(s)$. Dann folgt $S_s(u_0) = u$. Also ist S_s surjektiv.

Somit ist S_s ein **Isomorphismus** zwischen \mathbb{R}^d und V und somit gilt $\dim(V) = \dim(\mathbb{R}^d) = d$.

Zu ③: Seien $s \in I$ und S_s wie oben, so gilt $V \cong \mathbb{R}^d$ und es sind $u_1, \dots, u_m \in V$ genau dann linear unabhängige Funktionen in V , wenn $S^{-1}(u_1), \dots, S^{-1}(u_m) = u_1(s), \dots, u_m(s)$ linear unabhängige Vektoren in \mathbb{R}^d sind. Das zeigt „② \iff ③“. Da $s \in I$ beliebig gewählt werden kann, folgt, dass u_1, \dots, u_m in V genau dann linear unabhängig sind, wenn $u_1(s), \dots, u_m(s)$ linear unabhängig in \mathbb{R}^d für alle $s \in I$ sind. \square

DEFINITION 2.3.12 (FUNDAMENTALSYSTEM, WRONSKI-DETERMINANTE)

Eine Basis $(v_1, \dots, v_d) \subset V$ von V ist ein **Fundamentalsystem** und

$$U(t) := (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

die **Fundamentalmatrix**.

Sind $u_1, \dots, u_d \in V$ (nicht notwendigerweise lineare unabhängige) Lösungen, so heißt

$$w: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \det(u_1(t), \dots, u_d(t))$$

die **WRONSKI-Determinante**.

Fundamentalsystem

WRONSKI-Determinante

SATZ 2.3.6: EIGENSCHAFTEN DER WRONSKI-DETERMINANTE

- ① Entweder gilt $w \equiv 0$ oder $w(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.
- ② Die Lösungen $u_1, \dots, u_d \in V$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $w(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt.
- ③ Die Lösungen $u_1, \dots, u_d \in V$ sind genau dann linear unabhängig, wenn ein $s \in I$ existiert mit $w(s) \neq 0$.
- ④ Die WRONSKI-Determinante erfüllt die homogene Differentialgleichung (in \mathbb{R} !)

$$w'(t) + \operatorname{tr}(A(t))w(t) = 0.$$

Für beliebige $t_0 \in I$ gilt somit die **Formel von LIOUVILLE**

$$w(t) = w(t_0) \exp \left(- \int_{t_0}^t \operatorname{tr}(A(\tau)) d\tau \right),$$

wobei $\operatorname{tr}(A)$ die Spur, also die Summe der Diagonalelemente, der Matrix A ist.

Formel von LIOUVILLE

Beweis. Die Aussagen ① - ③ folgen sofort aus dem vorherigen Satz, da $u_1(t), \dots, u_d(t)$ genau dann linear unabhängig sind, wenn $\det(u_1(t), \dots, u_d(t)) = w(t) \neq 0$ ist.

Zu ④: Seien $u_1, \dots, u_d \in V$ Lösungen der homogenen Gleichung, das heißt es gilt $u_i'(t) + A(t)u_i(t) = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$. Seien

$$W(t) = (u_1(t), \dots, u_d(t)) =: (w_{i,j}(t))_{i,j \in \{1, \dots, d\}} \quad \text{und} \quad y_i(t) := (w_{i,1}(t), \dots, w_{i,d}(t))$$

die Zeilen von $W(t)$. Dann gilt für die Ableitung von $W(t)$

$$W'(t) = (u_1'(t), \dots, u_d'(t)) = -A(t)(u_1(t), \dots, u_d(t)) = -A(t)W(t).$$

also

$$\begin{aligned} (y_1'(t), \dots, y_d'(t))^T &= W'(t) = -A(t)W(t) \\ &= -A(t)(y_1(t), \dots, y_d(t))^T = \left(\sum_{i=1}^d a_{1,i}(t)y_i(t), \dots, \sum_{i=1}^d a_{d,i}(t)y_i(t) \right). \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
 w'(t) &= |\det(W(t))'| = \sum_{\sigma \in S_d} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^d w_{i,\sigma(i)}(t) \right)' \\
 &= \sum_{\sigma \in S_d} \operatorname{sgn}(\sigma) w'_{1,\sigma(1)}(t) \left(\prod_{i=2}^d w_{i,\sigma(i)}(t) \right) + \dots \\
 &\quad + \sum_{\sigma \in S_d} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^{d-1} w_{i,\sigma(i)}(t) \right) w'_{d,\sigma(d)}(t) \\
 &= \det((y'_1(t), \dots, y_d(t))^T) + \dots + \det((y_1(t), \dots, y'_d(t))^T) \\
 &= -\det\left(\left(\sum_{i=1}^d a_{1,i}(t)y_i(t), y_2(t), \dots, y_d(t)\right)^T\right) - \dots \\
 &\quad - \det\left(\left(y_1(t), \dots, \sum_{i=1}^d a_{d,i}(t)y_i(t)\right)^T\right) \\
 &\stackrel{(\star)}{=} -\det((a_{11}(t)y_1(t), y_2(t), \dots, y_d(t))^T) - \dots \\
 &\quad - \det((y_1(t), \dots, a_{dd}(t)y_d(t))^T) \\
 &= -\sum_{i=1}^d a_{ii}(t) \det((y_1(t), \dots, y_d(t))^T) = \operatorname{tr}(A)w(t),
 \end{aligned}$$

wobei wir in (\star) benutzt habe, dass die Determinante verschwindet, wenn zwei Zeilen linear unabhängig sind. \square

SATZ 2.3.7: FUNDAMENTALSYSTEM UND PROPAGATOR

Sei $U(t) := (u_1(t), \dots, u_d(t)) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine Fundamentalmatrix. Dann ist

$$U(t, s) = U(t)U(s)^{-1}$$

der Propagator des zugehörigen Systems.

Ist umgekehrt $U(t, s)$ der Propagator des Systems, so ist $U(\cdot, s)$ für beliebige s eine Fundamentalmatrix.

Beweis. Sei $u \in V$, dann gilt $u'(t) + A(t)u(t) = 0$. Mit $u_0 = u(s)$ löst u das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u' + Au = 0, \\ u(s) = u_0 \end{cases}$$

und dann gilt $u(t) = U(t, s)u_0 = U(t, s)u(s)$.

Bilden also $u_1, \dots, u_d \in V$ ein Fundamentalsystem, so gilt

$$u_i(t) = U(t, s)u_i(s)$$

und somit spaltenweise $U(t) = U(t, s)U(s)$. Da $U(s)$ invertierbar ist (linear unabhängige Spalten für jedes s), gilt $U(t, s) = U(t)U(s)^{-1}$.

Der zweite Teil ist Übungsaufgabe. \square

Der autonome Fall

Wir betrachten den autonomen Fall $A(t) \equiv A \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Dann ist $u(t) = U(t, 0)u_0 = S(t)u_0 = e^{-tA}u_0$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Fall 1: Ist A **diagonalisierbar**, also ähnlich zu einer Diagonalmatrix, so existiert eine invertierbare Matrix $P \in \mathbb{R}^{d \times d}$ und eine Diagonalmatrix $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ mit $A = PDP^{-1}$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} e^{-tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} \underbrace{(PDP^{-1})^k}_{PDP^{-1}PD \dots DP^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} PD^k P^{-1} \\ &= P \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} D^k \right) P^{-1} = Pe^{-tD}P^{-1}, \end{aligned}$$

wobei $\exp(D) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_d})$ gilt.

Fall 2: A ist nicht diagonalisierbar.



Erinnerung: Hauptraumzerlegung

Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A mit den algebraischen Vielfachheiten μ_1, \dots, μ_m , so gilt

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^d \prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_i)^{\mu_i} \quad \text{und} \quad \mathbb{C}^d = \bigoplus_{i=1}^m \underbrace{\text{Ker}(A - \lambda_i I)^{\mu_i}}_{\text{Hauptraum zu } \lambda_i}$$

Somit lässt sich jeder Vektor $u_0 \in \mathbb{R}^d$ schreiben als $u_0 = \sum_{i=1}^m z_i$ mit $z_i \in \text{Ker}(A - \lambda_i I)^{\mu_i}$.

SATZ 2.3.8: LÖSUNGSFORMEL FÜR AUTONOME SYSTEME

Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

wobei $u_0 = \sum_{i=1}^m z_i$ mit $z_i \in \text{Ker}(A - \lambda_i I)^{\mu_i}$, ist

$$u(t) = \sum_{j=1}^m \underbrace{e^{-\lambda_j(t-t_0)}}_{\substack{\text{exp. Wachstum} \\ \text{mit Eigenwerten} \\ \text{als Gewicht}}} \sum_{\mu=0}^{\mu_j-1} \frac{1}{\mu!} \underbrace{(-(t-t_0))^\mu (A - \lambda_j I)^\mu}_{\substack{\text{polynomiell} \\ \text{Wachstum}}} z_j.$$

Beweis. Es gilt

$$u(t) = e^{-(t-t_0)A}u_0 = \sum_{j=1}^m e^{-(t-t_0)A}z_j = \sum_{j=1}^m e^{-\lambda_j(t-t_0)} e^{-(t-t_0)(A-\lambda_j I)} z_j.$$

Weil $z_j \in \text{Ker}(A - \lambda_j I)^{\mu_j}$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ ist $(*)$, gilt

$$e^{-(t-t_0)(A-\lambda_j I)} z_j = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-(t-t_0))^\mu}{\mu!} (A - \lambda_j I)^\mu z_j \stackrel{(*)}{=} \sum_{\mu=0}^{\mu_j-1} \frac{(-(t-t_0))^\mu}{\mu!} (A - \lambda_j I)^\mu z_j.$$

□

Bemerkung 2.3.13 Diese Formel verallgemeinert den Exponentialansatz aus dem ersten Kapitel.

2.4 | Der Satz von Peano

14.12.2020

Motivation. Für $u_0 \in X$, $T, r > 0$ und $f: [0, T] \times \overline{B}(u_0, r) \rightarrow X$ betrachten wir erneut das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in [0, T] \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \quad (39)$$

Unter welchen Voraussetzungen an f kann die Existenz einer Lösung gezeigt werden? Nach einem Satz von PICARD-LINDELÖF gibt es eine eindeutige lokale Lösung, wenn f stetig ist und eine LIPSCHITZ-Bedingung erfüllt. In Beispiel 2.2.4 haben wir eine stetige rechte Seite f gesehen, welche keine LIPSCHITZ-Bedingung erfüllt, bei der das zugehörige Anfangswertproblem unendlich viele Lösungen besitzt. Wir untersuchen in diesem Unterkapitel, ob die Stetigkeit der rechten Seite für die Existenz einer Lösung schon genügt.

SATZ 2.4.1: VON PEANO, ENDLICHDIMENSIONAL (1890)

Seien $X = (\mathbb{R}^d, |\cdot|)$ ein endlichdimensionaler BANACH-Raum und für $u_0 \in \mathbb{R}^d$ und $r > 0$ $f: [0, T] \times \overline{B}(u_0, r) \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine stetige Funktion.

Sei $m := \|f\|_\infty$, das heißt $\|f(t, v)\| \leq m$ für alle $(t, v) \in [0, T] \times \overline{B}(u_0, r)$.

Dann hat das Anfangswertproblem (39) mindestens eine Lösung auf dem Intervall

$$I = [0, T] \cap \left[t_0 - \frac{r}{m}, t_0 + \frac{r}{m} \right].$$

Bemerkung 2.4.1 Da f stetig und $[0, T]$ und insbesondere $\overline{B}(u_0, r) \subset \mathbb{R}^d$ kompakt sind, ist f beschränkt, es gilt also $\|f\|_\infty < \infty$ und somit existiert das m aus dem obigen Satz. Wäre $\dim(X) = \infty$, gilt das nicht (Hausaufgabe).

Beweisskizze. Wieder betrachten wir $A := \mathcal{C}(I; \overline{B}(u_0, r))$ und zeigen, dass

$$T: A \rightarrow A, (Tv)(t) := u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) \, ds$$

eine Selbstabbildung ist. Wir können den Fixpunktsatz von BANACH nicht anwenden, da f keine LIPSCHITZ-Bedingung erfüllt und außerdem würden wir dann eine stärkere Aussage erhalten. Wir wenden stattdessen den Fixpunktsatz von SCHAUDER an. \square

SATZ 2.4.2: ARZELÀ-ASCOLI IN \mathbb{R}^d

Sei $\{u_n\} \subset \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R}^d)$ (gleichmäßig) beschränkt und gleichgradig stetig. Dann existiert eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $\{u_{n'}\}$.

DEFINITION 2.4.2 ((GLEICHMÄSSIGE) BESCHRÄNKTHEIT)

Eine Teilmenge $A \subset \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R}^d)$ heißt (gleichmäßig) beschränkt, wenn ein $M > 0$ existiert, sodass $\|u\|_\infty \leq M$ für alle $u \in A$ gilt.

DEFINITION 2.4.3 (GLEICHGRADIGE STETIGKEIT)

Eine Teilmenge $A \subset \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R}^d)$ heißt gleichgradig stetig, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert sodass

$$\|u(t) - u(s)\| < \varepsilon$$

für alle $s, t \in [a, b]$ mit $|s - t| < \delta$ für alle $u \in A$ gilt.

gleichgradig stetig

Bemerkung 2.4.4 (Äquivalente Formulierung von Satz 2.4.2) Ist $A \subset C([a, b]; \mathbb{R}^d)$ (gleichmäßig) beschränkt und gleichgradig stetig, so ist A relativ kompakt.

Das sieht man so: ist $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge, so kann auf diese der Satz von ARZELÀ-ASCOLI angewandt werden, das heißt es gibt eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Bemerkung 2.4.5 (Umkehrung von Satz 2.4.2)

Es gilt auch die Umkehrung von Satz 2.4.2: Ist $A \subset C([a, b]; \mathbb{R}^d)$ relativ kompakt, so ist A beschränkt und gleichgradig stetig.

Fixpunktsätze

SATZ 2.4.3: BROUWERSCHER FIXPUNKTSATZ (1912)

Jede stetige Abbildung einer abgeschlossenen Kugel des \mathbb{R}^d in sich selbst besitzt mindestens einen Fixpunkt.

Anstatt abgeschlossenen Kugeln kann jede nichtleere, beschränkte abgeschlossene konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^d betrachtet werden.

Bemerkung 2.4.6 (BROUWER in Dimension Eins) Für $d = 1$ folgt der Satz 2.4.3 aus der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$.

Beweis. Naos/Tutschke "Große Sätze und schöne Beweise der Mathematik". \square

Gegenbeispiel 2.4.7 (BROUWERSCHER FIXPUNKTSATZ IM UNENDLICHDIMENSIONALEN)

Sei H ein unendlichdimensionaler, separabler HILBERT-Raum. KAKUTANI hat 1943 eine stetige Abbildung der abgeschlossenen Einheitskugel $\overline{B}(0, 1) \subset H$ in sich konstruiert, die keinen Fixpunkt besitzt. Sei hierzu $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ eine [Orthonormalbasis](#) von H . Jedes Element $u \in H$ lässt sich dann als eine verallgemeinerte FOURIER-Reihe

$$u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e_n$$

mit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ darstellen. Definiere

$$S: H \rightarrow H, \quad u \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e_{n+1},$$

welche linear und beschränkt (also stetig) ist und

$$T: H \rightarrow H; \quad u \mapsto \frac{1}{2}(1 - \|u\|)e_0 + S(u)$$

Dann ist T stetig und bildet $\overline{B}(0, 1)$ in sich ab aber besitzt keinen Fixpunkt. \diamond

Beweis. Hausaufgabe. \square

SATZ 2.4.4: SCHAUDERSCHER FIXPUNKTSATZ (1930)

Sei A eine nichtleere abgeschlossenen beschränkte konvexe Teilmenge eines BANACH-Raums und $T: A \rightarrow A$ eine [kompakte](#) Abbildung. Dann besitzt T mindestens einen Fixpunkt.

Beweisskizze. Wir benötigen einen Approximationssatz, um die Aussagen in ein endlichdimensionales Setting zu bringen, wo wir den Fixpunktsatz von BROUWER anwenden können.

Es gilt dann die
PARSEVAL'sche
Gleichung:
 $\|u\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n|^2$.

DEFINITION 2.4.8 (KOMPAKTE ABBILDUNG)

Seien X und Y normierte Räume. Dann heißt $T: X \supset D \rightarrow Y$ **kompakt**, wenn gilt

kompakt

- ① T stetig ist.
- ② T beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet.

Ist T linear, so folgt ① aus ②.

Bemerkung 2.4.9 (Relative Kompaktheit) Eine Menge ist **relativ kompakt**, wenn jede Folge in dieser Menge eine konvergente Teilfolge hat. Somit ist ② von oben äquivalent dazu, da für jede beschränkte Folge $(u_n) \subset D$ eine Teilfolge (u'_n) besitzt, sodass (Tu'_n) konvergiert.

Nach dem Satz von HEINE-BOREL sind in \mathbb{R}^n die **relativ kompakten** Mengen genau die beschränkten Mengen.

Beispiel 2.4.10 (Kompakter Integraloperator) Ist $k \in \mathcal{C}([0, 1]^2; X)$, so ist

$$T: \mathcal{C}([0, 1]; X) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1]; X), \quad u(t) \mapsto \int_0^1 k(t, s)u(s) \, ds$$

ein kompakter Operator. ◇

Beweis. Hausaufgabe. □

SATZ 2.4.5: APPROXIMATIONSSATZ FÜR KOMPAKTE OPERATOREN

Seien X und Y BANACH-Räume, $M \subset X$ eine beschränkte Teilmenge und $T: M \rightarrow Y$ eine **kompakte** Abbildung. Dann existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein stetiger Operator $T_n: M \rightarrow Y$ mit den Eigenschaften

- ① $\sup_{x \in M} \|T_n x - Tx\|_Y \leq \frac{1}{n}$,
- ② T_n hat ein endlichdimensionales Bild, das heißt es gilt $\dim(\text{span}(T_n(M))) < \infty$.
- ③ Es gilt $T_n(M) \subset \text{co}(T(M))$.

Bemerkung 2.4.11 Es ist sogar T_n **kompakt**, weil er ein endlichdimensionales Bild hat: zunächst ist T_n stetig und da T kompakt und M beschränkt ist, so ist $T(M)$ **relativ kompakt**, also beschränkt und damit existiert ein $C > 0$, sodass

$$\|T_n v\| \leq \|T_n v - Tv\| + \|Tv\| \leq \frac{1}{n} + C \leq C + 1$$

für alle $v \in M$ gilt. Somit ist $T_n(M)$ eine beschränkte Teilmenge eines endlichdimensionalen Raums und somit **relativ kompakt** nach Bemerkung 2.4.9.

Beweis. ① Da der Operator T **kompakt** und die Menge M beschränkt ist, ist $T(M) \subset Y$ **relativ kompakt**, also insbesondere **totalbeschränkt**, das heißt für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein endliches $\frac{1}{n}$ -**Netz**, das heißt für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren endlich viele $Tv_1, \dots, Tv_m \in T(M)$, sodass

$$T(M) \subset \bigcup_{i=1}^m B\left(Tv_i, \frac{1}{n}\right)$$

gilt. Für jedes $u \in M$ existiert also mindestens ein $i \in \{1, \dots, m\}$, sodass $Tu \in B(Tv_i, \frac{1}{n})$ gilt, also dass $\|Tu - Tv_i\| < \frac{1}{n}$ ist.

Wir setzen für $i \in \{1, \dots, m\}$ und $u \in M$

$$a_i(u) := \max\left(0, \frac{1}{n} - \|Tu - Tv_i\|\right)$$

Dann ist für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ die Abbildung $a_i: M \rightarrow [0, \infty)$ stetig und es gilt $a_i(u) > 0$ für festes u und mindestens ein $i \in \{1, \dots, m\}$. Damit ist $\sum_{i=1}^m a_i(u) > 0$ für alle $u \in M$

- ② Wir setzen den „SCHAUDER-Operator“

$$T_n: M \rightarrow Y, u \mapsto \sum_{i=1}^m \frac{a_i(u)}{\sum_{j=1}^m a_j(u)} T v_i.$$

Der Operator T_n ist wohldefiniert, da $\sum a_j(u) > 0$ für alle u gilt und er als Komposition stetiger Funktionen stetig ist, da die Funktion $(a_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ stetig sind.

- ③ Da für festes $u \in M$ gilt

$$\begin{aligned} \|Tu - T_n u\| &= \left\| Tu - \sum_{i=1}^m \frac{a_i(u)}{\sum_{j=1}^m a_j(u)} T v_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^m \frac{a_i(u)}{\sum_{j=1}^m a_j(u)} (Tu - T v_i) \right\| \\ &\stackrel{\triangle}{\leq} \sum_{i=1}^m \frac{a_i(u)}{\sum_{j=1}^m a_j(u)} \|Tu - T v_i\| \leq \sum_{i=1}^m \frac{a_i(u)}{\sum_{j=1}^m a_j(u)} \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung daraus folgt, dass entweder $\|Tu - T v_i\| \geq \frac{1}{n}$ ist, und somit $a_i(u) = 0$ oder $\|Tu - T v_i\| < \frac{1}{n}$.

- ④ Nach Konstruktion gilt für alle $u \in M$

$$T_n u \in \text{span}(\{T v_1, \dots, T v_m\})$$

und somit $\dim \text{span}(T_n(M)) \leq m < \infty$.

- ⑤ Für alle $u \in M$ gilt (cf. oben)

$$T_n(u) = \sum_{i=1}^m \underbrace{\frac{a_i(u)}{\sum_{j=1}^m a_j(u)}}_{:= \lambda_i \in [0,1]} \underbrace{T v_i}_{\in T(M)}.$$

Aus $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ folgt $T_n(u) \in \text{co}(T(M))$. □

Beweis. (des Satzes von SCHAUDER) ① Seien $T: A \rightarrow A$ kompakt und $A \subset X$ eine nichtleere abgeschlossene, beschränkte, konvexe Teilmenge eines BANACH-Raums X .

Nach dem Approximationssatz existieren aufgrund der Beschränktheit von A stetige Operatoren $T_n: A \rightarrow X_n$, wobei X_n ein endlichdimensionaler Unterraum von X ist, für alle $n \in \mathbb{N}$. Den Fixpunktsatz von BROUWER können wir noch nicht auf T_n anwenden.

- ② Wir setzen $A_n := A \cap X_n$. Dann ist A_n

- abgeschlossen als Schnitt abgeschlossener Mengen, da A und X_n als endlichdimensionaler Unterraum von X ebenfalls abgeschlossen ist.
- beschränkt, da $A_n \subset A$ gilt und A beschränkt ist.
- konvex als Schnitt konvexer Mengen, da A und X_n konvex sind (Unterräume sind konvex).
- nichtleer, da $\emptyset \neq T_n(A) \subset A$ und $T_n(A) \in X_n$ gilt: $T_n(A) \subset X_n$ ist klar, da $X_n = \text{span}(T_n(A))$ und außerdem ist $T_n(A) \subset \text{co}(T(A)) \subset \text{co}(A) = A$.

Wir betrachten nun $T_n|_{A_n}$ und zeigen, dass T_n eine Selbstabbildung ist. Es gilt einerseits $A \cap X_n = A \cap \text{span}(T_n(A)) \neq \emptyset$ und andererseits

$$T_n(A_n) \subset T_n(A) \subset A \quad \text{und} \quad T_n(A_n) \subset T_n(A) \subset X_n$$

und somit $T_n(A_n) = A_n$.

- ③ Nach dem Fixpunktsatz von BROUWER besitzt der Operator T_n mindestens einen Fixpunkt $u_n \in A_n$, für den $T_n u_n = u_n$ gilt. Wir zeigen nun, dass $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und ihr Grenzwert ein Fixpunkt von T ist.

Da $u_n \in A_n \subset A$ ist, gilt $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$. Weil A beschränkt ist, existiert eine Teilfolge $(u_{n'})_{n' \in \mathbb{N}}$, sodass die Bildfolge $(Tu_{n'})_{n' \in \mathbb{N}}$ konvergiert: $Tu_{n'} \xrightarrow{n' \rightarrow \infty} u$, weil T kompakt ist.

Da $(Tu_{n'})_{n' \in \mathbb{N}} \subset T(A) = A$ und A abgeschlossen ist, gilt $u \in A$. Es ist u ein Fixpunkt von T :

$$\begin{aligned} \|u_{n'} - u\| &\stackrel{\Delta \neq}{\leq} \|u_{n'} - Tu_{n'}\| + \|Tu_{n'} - u\| = \|T_{n'} u_{n'} - Tu_{n'}\| + \|Tu_{n'} - u\| \\ &\stackrel{2.4.5}{\leq} \frac{1}{n'} + \|Tu_{n'} - u\| \xrightarrow{n' \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

also gilt $u_{n'} \rightarrow u$. Da der Operator T stetig ist, folgt

$$Tu = T\left(\lim_{n' \rightarrow \infty} u_{n'}\right) = \lim_{n' \rightarrow \infty} Tu_{n'} = u.$$

□

Beweis. (des endlichdimensionalen Satzes von PEANO) Wie im Beweis des Satz von PICARD-LINDELÖF setzen wir $A := \mathcal{C}(I, \overline{B}(u_0, r))$ und

$$T: A \rightarrow A, \quad u(t) \mapsto u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds.$$

Wir zeigen nun, dass T mindestens einen Fixpunkt in A besitzt. Wie beim Beweis des Satzes von PICARD-LINDELÖF ist A nichtleer und abgeschlossen und $T: A \rightarrow A$ eine wohldefinierte Selbstabbildung.

Beschränktheit von A . Für $u \in A$ und alle $t \in I$ gilt

$$|u(t)| \leq |u(t) - u_0| + |u_0| \leq r + |u_0|$$

und somit $\|u\|_\infty \leq r + |u_0|$.

Konvexität von A . Seien $u, v \in A$ und $\lambda \in [0, 1]$. Dann ist die Abbildung $t \mapsto \lambda u(t) + (1 - \lambda)v(t)$ als Komposition stetiger Funktionen stetig und für alle $t \in I$ gilt

$$\begin{aligned} |\lambda u(t) + (1 - \lambda)v(t) - u_0| &\stackrel{\Delta \neq}{\leq} |\lambda(u(t) - u_0)| + |(1 - \lambda)(v(t) - u_0)| \\ &= \lambda|u(t) - u_0| + (1 - \lambda)|v(t) - u_0| \leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r, \end{aligned}$$

also gilt $\lambda u + (1 - \lambda)v \in A$.

Nun zeigen wir die Kompaktheit des Operators T .

Stetigkeit von T . Da f stetig und $I \times \overline{B}(u_0, r)$ hier kompakt (denn \mathbb{R}^d ist endlichdimensional, cf. Satz 2.1.5) ist, ist f gleichmäßig stetig, insbesondere gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass

$$|f(s, x) - f(s, y)| < \varepsilon \cdot \frac{m}{r}$$

für alle $s \in I$ und alle $x, y \in \overline{B}(u_0, r)$ mit $|x - y| < \delta$.

Seien nun $\varepsilon > 0$ und δ entsprechend gewählt. Für beliebige $u, v \in A$ mit $\|u - v\|_\infty < \delta$, das heißt insbesondere $|u(t) - v(t)| < \delta$ für alle $t \in I$, folgt

$$\|Tu - Tv\|_\infty \leq \int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| \, ds \leq \max_{t \in I} \int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} \varepsilon \cdot \frac{m}{r} \, ds = \varepsilon \cdot \frac{r}{m} \max_{t \in I} |t - t_0| \leq \varepsilon.$$

Kompaktheit von T . Da $T: A \rightarrow A$ eine Selbstabbildung und A (gleichmäßig) beschränkt ist, genügt es zu zeigen, dass $T(A) \subset A \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^d)$ relativ kompakt ist. Wir wenden nun den Satz von ARZELÁ-ASCOLI an. $T(A)$ ist gleichmäßig beschränkt, da $T(A) \subset A$ gilt und A beschränkt ist.

Gleichgradige Stetigkeit von $T(A)$. Sei $u \in A$ beliebig. Dann gilt für $s, t \in I$

$$\begin{aligned} |(Tu)(t) - (Tu)(s)| &= \left| \int_{t_0}^t f(r, u(r)) \, dr - \int_{t_0}^s f(r, u(r)) \, dr \right| \\ &\leq \int_{s \wedge t}^{s \vee t} |f(r, u(r))| \, dr \leq m|t - s| \xrightarrow{|t-s| \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Somit ist T sogar „gleichgradig LIPSCHITZ-stetig“ mit LIPSCHITZ-Konstante m .

Nach dem Satz von ARZELÁ-ASCOLI ist $T(A)$ relativ kompakt und somit T kompakt. Nach dem Fixpunktsatz von SCHAUDER existiert also mindestens ein Fixpunkt. \square

Wie schon vorher erwähnt genügt die Stetigkeit der rechten Seite im Unendlichdimensionalen nicht aus, um die Existenz einer lokalen Lösung zu garantieren.

Gegenbeispiel 2.4.12 (Endlichdimensionaler Satz von PEANO)

Der Raum der reellen Nullfolgen $X := c_0 := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : x_n \rightarrow 0\}$ versehen mit der Supremumsnorm $\|x\|_\infty := \max_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ ist ein unendlichdimensionaler BANACH-Raum.

Wir betrachten ein Anfangswertproblem, bestehend aus dem folgenden abzählbar unendlichen System

$$\begin{cases} u'_n(t) = 2\sqrt{|u_n(t)|}, & t \in [0, T] \\ u_n(0) = \frac{1}{n^2} \end{cases} \quad (40)$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $u_0 := (n^{-2})_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$ und die rechte Seite $f: c_0 \rightarrow c_0, v \mapsto (2\sqrt{|v_n|})_{n \in \mathbb{N}}$ wohldefiniert, denn für alle $x \in c_0$ gilt auch $f(x) \in c_0$: ist $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$ eine Nullfolge, so ist auch $(\sqrt{|v_n|})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Wir zeigen nun, dass die Voraussetzungen der endlichdimensionalen Version des Satzes von PEANO erfüllt sind.

Stetigkeit: Sei $v \in c_0$ beliebig. Da v beschränkt ist, gilt $|v_n| \leq \|v\|_\infty < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Daher ist die Abbildung $z \mapsto \sqrt{|z|}$ auf dem Intervall $[-\|v\|_\infty, \|v\|_\infty]$ gleichmäßig stetig. Deshalb existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass $|\sqrt{|s|} - \sqrt{|t|}| < \frac{\varepsilon}{2}$ ist, wenn $|s - t| < \delta$ für $s, t \in [-\|v\|_\infty, \|v\|_\infty]$ gilt.

Sei $w \in X$ mit $\|v - w\|_\infty < \delta$, das heißt $|v_n - w_n| < \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\|f(v) - f(w)\|_\infty = \max_{i \in \mathbb{N}} 2 \underbrace{|\sqrt{|v_n|} - \sqrt{|w_n|}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

Es existiert jedoch keine Lösung des Anfangswertproblems: angenommen, es gebe eine Lösung $u: I \rightarrow X$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$. Dann löst die n -te Komponente von u , u_n , das Anfangswertproblem (40). Die Lösungen $u_n(t) = (t + \frac{1}{n})^2$ (zum Beispiel durch Trennung der Variablen berechnet) existiert sogar auf ganz $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und ist dort nach dem Satz von PICARD-LINDELÖF eindeutig, da die Wurzelfunktion auf jedem Intervall $J \subset \mathbb{R}_{>0}$ mit $\frac{1}{n^2} \in J$ LIPSCHITZ-stetig ist. Für $t > 0$ ist die Folge $u(t)$ jedoch keine Nullfolge, da $(t + \frac{1}{n})^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t^2 > 0$ gilt. \diamond

04.01.2021



Idee

Ersetze die Stetigkeit von f durch **Kompaktheit**.

SATZ 2.4.6: VON PEANO, UNENDLICHDIMENSIONALE VERSION

Seien $u_0 \in X$, $r, T > 0$, $t_0 \in [0, T]$ und $f: [0, T] \times \overline{B}(u_0, r) \rightarrow X$ eine **kompakte** Abbildung. Dann hat das Anfangswertproblem (26) eine Lösung auf dem Intervall

$$I := [0, T] \cap \left[t_0 - \frac{r}{m}, t_0 + \frac{r}{m} \right],$$

wobei m die Majorante von f , zum Beispiel $m := \|f\|_\infty$, ist, das heißt f genüge

$$|f(t, v)| \leq m \quad \forall (t, v) \in [0, T] \times \overline{B}(u_0, r).$$

Bemerkung 2.4.13 Da die Menge $[0, T] \times \overline{B}(u_0, r)$ beschränkt und f kompakt ist, ist das Bild von f relativ kompakt, also insbesondere beschränkt. Da wir im Unendlichdimensionalen sind, garantiert nicht einmal die Kompaktheit von f die gleichmäßige Stetigkeit von f (es ist $\overline{B}(u_0, r)$ nicht kompakt).

SATZ 2.4.7: VERALLGEMEINERTER SATZ VON ARZELÀ-ASCOLI

Es ist $A \subset \mathcal{C}([a, b]; X)$ genau dann relativ kompakt, wenn

- ① A gleichgradig stetig ist und
- ② die Menge $A(t) := \{u(t) : u \in A\} \subset X$ für alle $t \in [a, b]$ relativ kompakt ist.

Bemerkung 2.4.14 Da im Unendlichdimensionalen der Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS nicht gilt, benötigen wir als Ersatz die zweite Bedingung.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Beweis. (Unendlichdimensionaler PEANO) Ganz analog zum endlichdimensionalen Fall betrachten wir $A := \mathcal{C}(I, \overline{B}(u_0, r))$ und den Operator

$$T: A \rightarrow A, \quad (Tu)(t) := u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds, \quad t \in I.$$

Dann ist A nichtleer, abgeschlossen, beschränkt und konvex und T eine Selbstabbildung.

Stetigkeit. Für $v, w \in A$ gilt

$$\|Tv - Tw\|_\infty \leq \max_{t \in I} \int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} \|f(s, v(s)) - f(s, w(s))\| \, ds.$$

Im endlichdimensionalen Fall konnten wir den Integranden gegen $\varepsilon > 0$ abschätzen, wenn $\|v - w\|_\infty < \delta$ galt, da f gleichmäßig stetig war. Im Unendlichdimensionalen ist die gleichmäßige Stetigkeit nicht mehr gegeben.

Sei $v \in A$. Die Stetigkeit von T in v folgt, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $w \in A$ mit $\|v - w\|_\infty < \delta$ gilt: $\|f(t, v(t)) - f(t, w(t))\| < \varepsilon$ für alle $t \in I$.

Angenommen, das gelte nicht, dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass für jedes $\delta > 0$ eine „Gegenbeispielfunktion“ w_δ existiert, sodass die Abschätzung nicht gilt. Da wir mit Folgen arbeiten wollen, beschränken wir uns auf $\delta := \frac{1}{n} > 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Es existiert also insbesondere für alle

$n \in \mathbb{N}$ ein $w_n \in A$ und ein $t_n \in I$, sodass gilt

$$\|v - w_n\|_\infty < \frac{1}{n} \quad \text{aber} \quad \|f(t_n, v(t_n)) - f(t_n, w_n(t_n))\| \geq \varepsilon.$$

Da $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ gilt und I kompakt ist, existiert eine Teilfolge (wieder mit t_n bezeichnet), welche gegen $t \in I$ konvergiert. Da v stetig ist, folgt $v(t_n) \rightarrow v(t)$ und somit

$$\|v(t) - w_n(t_n)\| \stackrel{\Delta \neq}{\leq} \underbrace{\|v(t) - v(t_n)\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|v(t_n) - w_n(t_n)\|}_{< \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

und somit konvergiert $w_n(t_n)$ gegen $v(t)$.

Da f stetig ist, folgt

$$\varepsilon \leq \|f(t_n, v(t_n)) - f(t_n, w_n(t_n))\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|f(t, v(t)) - f(t, v(t))\| = 0,$$

was einen Widerspruch darstellt.

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta > 0$ entsprechend gewählt. Dann gilt für $u \in A$ mit $\|v - u\| < \delta$

$$\|Tu - Tv\| \leq \max_{t \in I} \int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} \underbrace{\|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|}_{< \varepsilon} ds \leq \max_{t \in I} |t - t_0| \varepsilon < \varepsilon \frac{m}{r}.$$

Kompaktheit. Wir zeigen, dass T beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet und dafür reicht es zu zeigen, dass $T(A) \subset \mathcal{C}(I; X)$ relativ kompakt ist.

Wieder ist $T(A)$ gleichgradig stetig. Es bleibt zu zeigen, dass für beliebiges $t \in I$ die Menge

$$M(t) := \{(Tu)(t) : u \in A\} = \left\{ u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds : u \in A \right\} \subset X$$

relativ kompakt ist.

Seien $u \in A$ und $t \in I$, dann gilt

$$u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds = u_0 + (t - t_0) \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds.$$

Wir zeigen zunächst, dass $\left\{ \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds : u \in A \right\}$ eine relativ kompakte Teilmenge ist. Nach Lemma 2.1.9 gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds &\in \overline{\text{co}}(\{f(s, u(s)) : s \in I\}) \subset \overline{\text{co}}(\{f(s, v) : s \in I, v \in \overline{B}(u_0, r)\}) \\ &= \overline{\text{co}}(f(I \times B(u_0, r))). \end{aligned}$$

Da $I \times B(u_0, r)$ beschränkt und f kompakt ist, ist $I \times B(u_0, r)$ relativ kompakt. Nach dem Satz von MAZUR ist $M := \overline{\text{co}}(f(I \times \overline{B}(u_0, r)))$ kompakt. Insgesamt gilt $(Tu)(t) \in u_0 + (t - t_0)M =: N$ und N ist auch kompakt. Somit ist $M(t) \subset N$ relativ kompakt, da Teilmengen relativ kompakter (und somit auch kompakter) Mengen relativ kompakt sind.

Nach dem verallgemeinerten Satz von ARZELÁ-ASCOLI ist $T(A)$ relativ kompakt und somit T ein kompakter Operator. Die Behauptung folgt mit dem Fixpunktsatz von SCHAUDER. \square

Korollar 2.4.15 (Struktur der Lösungsmenge)

Unter den Voraussetzungen des Satzes von PEANO ist die Lösungsmenge $L \subset \mathcal{C}(I; X)$ kompakt (aber nicht in $\mathcal{C}^1(I; X)$ obwohl $L \subset \mathcal{C}^1(I; X)$).

Beweis. Für alle $u \in L$ gilt $u = Tu$, und somit $L \subset T(A) \subset A$. Weil A beschränkt ist, ist $T(A)$ und somit L relativ kompakt.

Da A beschränkt ist und T kompakt, so ist $T(A)$ und damit auch L relativ kompakt. Außerdem ist L abgeschlossen, denn für eine gegen u konvergente Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L \subset A$ gilt, da A abgeschlossen ist, $u \in A$. Da $Tu_n = u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ und aufgrund der Stetigkeit von T auch $Tu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Tu$ gilt, folgt $u = Tu$, also $u \in L$. Somit ist L kompakt. \square

Letztlich noch ein Beispiel von „A-priori-Abschätzung gibt Existenz“.

SATZ 2.4.8: LERAY UND SCHAUDER

Sei $A: X \rightarrow X$ eine kompakte Abbildung. Dann besitzt die Gleichung

$$u = Au \tag{41}$$

eine Lösung, falls folgende A-priori-Abschätzung gilt: es gibt ein $r > 0$ derart, dass

$$\|u\| \leq r$$

für jede Lösung u der Gleichung

$$u = tAu$$

für $t \in [0, 1)$ gilt.

Die Lösbarkeit der Gleichung $u = tAu$ wird nicht behauptet!

Beweis. Seien $M := \{u \in X \mid \|u\| \leq 2r\}$ und

$$Bu := \begin{cases} Au, & \text{für } \|Au\| \leq 2r, \\ \frac{2r}{\|Au\|} Au, & \text{für } \|Au\| > 2r. \end{cases}$$

Dann ist $B: M \rightarrow M$ eine kompakte Abbildung. Es folgt die Existenz eines Fixpunkts von B und somit die Lösbarkeit von (41).

Details: Hausaufgabe. \square

2.5 | Einzigkeitsaussagen

SATZ 2.5.1: LOKALE LIPSCHITZ-BEDINGUNG

Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein *offenes* Intervall, $D \subset X$ offen und $f: J \times D \rightarrow X$ stetig und genüge eine *lokalen LIPSCHITZ-Bedingung*. Dann hat das Anfangswertproblem (26) für beliebige $t_0 \in J$ und $u_0 \in D$ *höchstens* eine Lösung auf J .

Bemerkung 2.5.1 (Überprüfen der LIPSCHITZ-Bedingung) Ist $X = \mathbb{R}^d$, erfüllt eine rechte Seite f ein lokale LIPSCHITZ-Bedingung, wenn sie *stetig differenzierbar* ist.

Beweis. Angenommen, es gäbe zwei Lösungen u, v auf J , das heißt es gibt ein $t \in J$ (o.B.d.A. $t > t_0$) mit $u(t) \neq v(t)$. Wir setzen $\bar{t} := \inf\{t > t_0 : u(t) \neq v(t)\}$. Weil u und v stetig sind, gibt es keinen ersten Punkt, an dem sich u und v unterscheiden, sondern nur einen letzten Punkt, bis zu dem sie gleich sind. Dann gilt $\bar{t} \geq t_0$ und $u(t) = v(t)$ für alle $t \in [t_0, \bar{t}]$. Ferner ist $u(t) \neq v(t)$ für alle $t \in [\bar{t}, \bar{t} + \varepsilon)$ für beliebige $\varepsilon > 0$.

Abb. 16: TODO

Da $\bar{t} \in J$ ist, gilt $u(\bar{t}) = v(\bar{t}) \in D$. Somit existieren $a, r > 0$, sodass

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq L\|v - w\|$$

für alle $t \in [\bar{t}, \bar{t} + a) \subset J$ für alle $v, w \in B(u(\bar{t}), r) \subset D$. Für $t \in [\bar{t}, \bar{t} + a)$ gilt

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) - f(s, v(s)) \, ds \right\| = \left\| \int_{\bar{t}}^t f(s, u(s)) - f(s, v(s)) \, ds \right\| \\ &\stackrel{\triangle}{\leq} \int_{\bar{t}}^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| \, ds \leq \int_{\bar{t}}^t L\|u(s) - v(s)\| \, ds. \end{aligned}$$

Um die LIPSCHITZ-Bedingung im letzten Schritt anwenden zu dürfen, muss $u(t), v(t) \in B(u(\bar{t}), r)$ für alle $t \in [\bar{t}, \bar{t} + a)$ gelten. Ist das nicht der Fall, müssen wir a durch ein $0 < \tilde{a} < a$ ersetzen, damit die Ungleichung stimmt.

Seien $b \equiv 0$, $\lambda \equiv L$ und $a(t) := \|u(t) - v(t)\|$. Nach dem zweiten Teil des Lemmas von GRONWALL gilt

$$\|u(t) - v(t)\| \leq 0 \cdot e^{L(t-t_0)} = 0$$

und somit $u(t) = v(t)$ für alle $t \in [\bar{t}, \bar{t} + a)$, was ein Widerspruch zu der Definition von \bar{t} ist. \square

DEFINITION 2.5.2 (OSGOOD-BEDINGUNG)

Eine Funktion $f: J \times D \rightarrow X$ genügt einer *OSGOOD-Bedingung*, wenn

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq w(\|v - w\|) \quad (42)$$

für alle $t \in J$ und $v, w \in D$ gilt, wobei $w: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- ① Es gilt $w(0) = 0$ und $w(z) > 0$ für alle $z > 0$.
- ② Die Funktion w ist monoton wachsend.
- ③ Es gilt $w(x + y) \leq w(x) + w(y)$ für alle $x, y \in [0, \infty)$.
- ④ Es gilt

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{w(z)} \, dz = \infty.$$

Bemerkung 2.5.3 (Die Funktion w) Da $w(0) = 0$ ist, hat die Funktion $\frac{1}{w}$ eine Singularität bei 0. Die vierte Bedingung sagt aus, dass diese Singularität „so schlimm“ sein muss, dass das uneigentliche Integral divergiert. Zum Beispiel erfüllt $w(z) := \sqrt{z}$ diese Eigenschaft nicht, da w nicht „schnell genug“ gegen 0 geht. Hingegen erfüllt $w(z) = Lz$ die vierte Bedingung und dann ist die OSGOOD-Bedingung genau eine LIPSCHITZ-Bedingung. Daher verallgemeinert der folgende Satz den vorangegangenen, da zum Beispiel auch $w(z) := Lz \ln(z^{-1})$ die obigen Bedingungen erfüllt.

SATZ 2.5.2: EINDEUTIGKEITSSATZ VON OSGOOD

Sei $f: J \times D \rightarrow X$ wie oben, stetig und genüge einer OSGOOD-Bedingung. Dann hat das Anfangswertproblem (26) **höchstens** eine Lösung auf J .

Beweis. Als Hausaufgabe formuliert man den Beweis der ursprünglichen ähnlichen Aussagen aus *Osgood, W.F.: Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ohne Hinzunahme der CAUCHY-LIPSCHITZ'schen Bedingung.* (Monatsh. f. Mathematik und Physik 9, 331–345 (1898)) in unserer Sprache. In der ursprünglichen Fassung ist w auf \mathbb{R} definiert und erfüllt $w(-x) = w(x)$ anstatt der Bedingungen ② und ③. Ferner soll die Ungleichung (42) für $x \in [t_0 + \rho, t_0 - \rho]$ und $v, w \in [u_0 - s, u_0 + s]$ gelten. \square

Ein HILBERT-Raum-Setting ist für die weiterführende Theorie (partielle und stochastische Differentialgleichungen) besser geeignet. Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, |\cdot|)$ ein **reeller Hilbert-Raum**, wobei $|\cdot|$ die durch das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm ist.

Ich habe mich gegen die Notation (\cdot, \cdot) für das Skalarprodukt entschieden, weil wir die duale Paarung nicht brauchen und zum Beispiel der Beweis von Lemma 2.5.6 so übersichtlicher ist.

DEFINITION 2.5.4 (EINSEITIGE LIPSCHITZ-BEDINGUNG)

Eine Funktion $f: [0, T] \times H \rightarrow H$ genügt einer **einseitigen LIPSCHITZ-Bedingung**, wenn es ein $L \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\langle f(t, v) - f(t, w), v - w \rangle \leq L|v - w|^2$$

für alle $t \in [0, T]$ und $v, w \in H$ gilt.

SATZ 2.5.3: EINSEITIGE LIPSCHITZ-BEDINGUNG

Seien $t_0 \in [0, T]$, $u_0 \in H$ und $f: [0, T] \times H \rightarrow H$ eine stetige Funktion, die einer einseitigen LIPSCHITZ-Bedingung genügt. Dann hat das Anfangswertproblem (26) für alle $t \geq t_0$ **höchstens** eine Lösung.

Bemerkung 2.5.5 (LIPSCHITZ-Bedingung \implies einseitige LIPSCHITZ-Bedingung)

Genügt f einer LIPSCHITZ-Bedingung auf H , gibt es ein $L \geq 0$, sodass $|f(t, v) - f(t, w)| \leq L|v - w|$ für alle $v, w \in H$ gilt. Dann folgt mit der CAUCHY-SCHWARTZschen Ungleichung

$$\langle f(t, v) - f(t, w), v - w \rangle \stackrel{\text{CS}}{\leq} |f(t, v) - f(t, w)| |v - w| \leq L|v - w|^2.$$

Lemma 2.5.6 (Ableitung des Normquadrats einer Funktion)

Für $u \in C^1([0, T], H)$ gilt

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = 2\langle u'(t), u(t) \rangle.$$

Bemerkung 2.5.7 Ist $H = \mathbb{R}$, so gilt mit der Produktregel

$$\frac{d}{dt} u^2(t) = 2u(t)u'(t)$$

und der Beweis ist und ähnlich einfach für \mathbb{R}^d .

Beweis. Wir betrachten den Differenzenquotient von $|u(t)|^2$. Sei $\tau_h u(t) := u(t+h)$ für alle $t \in [0, T]$, sodass $t+h \in [0, T]$ ist. Dann folgt (wir lassen stets das Argument t weg)

$$\begin{aligned} |\tau_h u|^2 - |u|^2 &= \langle \tau_h u - u, \tau_h u \rangle - \langle u, u - \tau_h u \rangle \\ &= \langle \tau_h u - u, \tau_h u \rangle + \langle \tau_h u - u, u \rangle. \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass bei Summanden, jeweils geteilt durch h , gegen $\langle u, u' \rangle$ konvergieren. Für den zweiten Summanden gilt

$$\left| \langle u', u \rangle - \frac{\langle \tau_h u - u, u \rangle}{h} \right| = \left| \left\langle u' - \frac{\tau_h u - u}{h}, u \right\rangle \right|_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{CS}}{\leq} \left| u' - \underbrace{\frac{\tau_h u - u}{h}}_{\rightarrow u', \text{ da } u \in C^1} \right|_H |u|_H \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

und somit

$$\frac{\langle \tau_h u - u, u \rangle}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \langle u', u \rangle.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \left| \langle u', u \rangle - \frac{\langle \tau_h u - u, \tau_h u \rangle}{h} \right| &= \left| \langle u', u - \tau_h u \rangle + \langle u', \tau_h u \rangle - \frac{1}{h} \langle \tau_h u - u, \tau_h u \rangle \right| \\ &\stackrel{\Delta \neq}{\leq} |\langle u', u - \tau_h u \rangle| + \left| \left\langle u' - \frac{\tau_h u - u}{h}, \tau_h u \right\rangle \right| \\ &\stackrel{\text{CS}}{\leq} |u'| \underbrace{|u - \tau_h u|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\left| u' - \frac{\tau_h u - u}{h} \right|}_{\rightarrow 0} \underbrace{|\tau_h u|}_{\leq \|u\|_\infty} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{\langle \tau_h u - u, \tau_h u \rangle}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \langle u', u \rangle. \quad \square$$

Beweis. (von Satz 2.5.3) Wir wollen mit Hilfe des vorangegangenen Lemmas eine ähnliche Aussage wie das Lemma für Gronwall für die Ableitung von u zeigen.

Seien u und v Lösungen des Anfangswertproblems (26). Dann existiert ein $L \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t) - v(t)|^2 &= \langle u'(t) - v'(t), u(t) - v(t) \rangle \\ &\stackrel{(26)}{=} \langle f(t, u(t)) - f(t, v(t)), u(t) - v(t) \rangle \leq L |u(t) - v(t)|^2 \end{aligned}$$

für $t \geq t_0$ gilt. Da $L \in \mathbb{R}$ ist, können wir nicht beide Seiten integrieren und das Lemma von GRONWALL anwenden. Später werden wir die gesuchte Aussage als „Differenzielles Lemma von GRONWALL“ beweisen, hier können wir aber einfach den „Exponentialtrick“ anwenden: es gilt

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-2L(t-t_0)} |u(t) - v(t)|^2 \right) = e^{-2L(t-t_0)} \underbrace{\left(\frac{d}{dt} (|u(t) - v(t)|^2) - 2L |u(t) - v(t)|^2 \right)}_{\leq 0} \leq 0.$$

Integration ergibt mit dem Hauptsatz der Integral und Differentialrechnung

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{ds} \left(e^{-2L(s-t_0)} |u(s) - v(s)|^2 \right) ds = e^{-2L(t-t_0)} |u(t) - v(t)|^2 - 0 \leq 0$$

und somit $|u(t) - v(t)|^2$ für alle $t \geq t_0$ und somit $u \equiv v$. \square

2.6 Maximale fortgesetzte Lösungen und das Verhalten am Rand des maximalen Existenzbereichs

11.01.2021

Vorbereitung: Halbordnungen und das Lemma von ZORN

Sei im Folgenden M eine nichtleere Menge.

DEFINITION 2.6.1 (RELATION, HALBORDNUNG, TOTALE ORDNUNG)

- Eine **binäre Relation** (R, \leq) auf M ist eine Teilmenge $R \subset M \times M$. Wir schreiben $x \leq y$, wenn $(x, y) \in R$.
- Eine Relation (R, \leq) auf M heißt **Halbordnung**, wenn gilt:
 - für alle $x \in M$ ist $x \leq x$ (beziehungsweise $(x, x) \in R$). (Reflexivität)
 - für alle $x, y, z \in M$ folgt aus $x \leq y$ und $y \leq z$, dass $x \leq z$ gilt. (Transitivität)
 - für alle $x, y \in M$ folgt aus $x \leq y$ und $y \leq x$, dass $x = y$ gilt. (Antisymmetrie)
- Eine Halbordnung ist eine **totale Ordnung**, wenn je zwei Elemente in M **vergleichbar** sind: für beliebige $x, y \in M$ gilt stets $x \leq y$ oder $y \geq x$. Man nennt M durch \leq **total geordnet**.

Beispiel 2.6.2 (Relation) Seien $M := \mathbb{N}$ und \leq das bekannte kleiner-gleich. Dann ist $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \leq y\}$. \diamond

Beispiel 2.6.3 (Halbgeordnete, aber nicht total geordnete Menge)

Seien $M = P(\mathbb{N})$ die **Potenzmenge** von \mathbb{N} und $A \leq B$ für $A, B \in M$, wenn $A \subset B$ ist. Dann ist \leq eine Halbordnung auf M , aber keine totale Ordnung, da zum Beispiel für $A := \{1, 2\}$ und $B := \{2, 3\}$ weder $A \subset B$ noch $B \subset A$ gilt. \diamond

DEFINITION 2.6.4 (MAXIMALES ELEMENT, OBERE SCHRANKE, KETTE)

Sei M eine durch \leq halbgeordnete Menge. Ein Element $z \in M$ ist

- ein **maximales Element** von M , wenn es kein größeres Element als z in M gibt (und nicht, dass $z \geq x$ für alle $x \in M$ gilt, da M nicht total geordnet ist): für alle $x \in M$ folgt aus $x \geq z$, dass $x = z$ gilt.
- eine **obere Schranke** einer Teilmenge $N \subset M$, wenn $x \leq z$ für alle $x \in N$ gilt.

Eine Teilmenge $N \subset M$ heißt **Kette**, wenn sie bezüglich \leq auf M total geordnet ist.

Wir fordern, dass z mit allen $x \in N$ vergleichbar ist.

Beachte, dass die obere Schranke einer Menge nicht in dieser enthalten sein muss.

Beispiel 2.6.5 (Kette) Betrachte wieder $(P(\mathbb{N}), \leq)$ aus Beispiel 2.6.3. Dann ist $N := \{\{1, 4, 9, \dots, n^2\} : n \in \mathbb{N}\}$ eine Kette in $(P(\mathbb{N}), \leq)$. \diamond

Lemma von ZORN (1922). Sei M eine durch \leq halbgeordnete Menge. Wenn jede Kette in M eine obere Schranke besitzt, so hat M ein maximales Element.

Achtung: (Unter Voraussetzung der Axiome der **ZERMELO-FRAENKEL-Mengenlehre**) ist das Lemma von ZORN zum **Auswahlaxiom** äquivalent.

Auswahlaxiom (1904). Zu jeder Familie $\{X_i\}_{i \in I}$ nichtleerer Mengen existiert eine Funktion $F: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ mit $F(i) \in X_i$ für alle $i \in I$.

Während das Auswahlaxiom intuitiv Sinn ergibt, ist es (unter Voraussetzung der Axiome der ZF-Mengenlehre) äquivalent zum schon viel weniger intuitiven **Wohlordnungssatz**.

Wohlordnungssatz. Jede Menge besitzt eine **Wohlordnung**, das heißt eine Ordnung, bezüglich der jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt.

Nach dem Wohlordnungssatz gibt es zum Beispiel auf \mathbb{R} eine Ordnung, in der es keine nach unten offenen Intervalle (das sind Mengen ohne kleinstes Element) gibt.

Maximal fortgesetzte Lösungen

Seien im Folgenden $J \subset \mathbb{R}$ ein **offenes Intervall**, $D \subset X$ eine **offene Menge** und $f: J \times D \rightarrow X$ eine Funktion. Wir betrachten das Anfangswertproblem (26).

? Frage

Ist eine Lösung u auf $I \subset J$ gegeben, gibt es dann eine fortgesetzte Lösung \tilde{u} auf $\tilde{I} \subset J$ mit $I \subset \tilde{I}$ und $u = \tilde{u}$ auf I ?

Wir wollen eine Lösung u **maximal fortgesetzt** nennen, wenn es keine echte Fortsetzung gibt. Ist u bereits auf ganz J definiert, so ist u **maximal fortgesetzt** (Definition später).

Beispiel 2.6.6 (Maximal fortgesetzte Lösung)

Betrachte erneut Beispiel 2.2.7 mit der Anfangsbedingung $u(0) = 0$. Der Satz von PICARD-LINDELÖF garantiert die Existenz einer **lokalen** Lösung, $u(x) = \tan(x)$. Jedoch kann diese Lösung nicht auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt werden, da $u(t) = \tan(t)$ Polstellen bei $\pm \frac{\pi}{2}$ hat. Somit ist das maximale Existenzintervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. \diamond

DEFINITION 2.6.7 (GRAPH EINER LÖSUNG)

Der **Graph** einer Lösung $u: J \supset J_u \rightarrow X$ von (26) mit $u_0 \in J_u$ ist

$$\Gamma(u) := \{(t, u(t)) : t \in J_u\} \subset J \times D.$$

Graph

DEFINITION 2.6.8 ((MAXIMALE) FORTSETZUNG EINER LÖSUNG)

Ist $u \in C^1(J_u; X)$ eine auf $J_u \subset J$ gegebene Lösung des obigen Anfangswertproblems (26) mit $u_0 \in J_u$, so nennen wir

- eine Lösung v des Anfangswertproblems mit Definitionsbereich J_v eine **Fortsetzung** von u , wenn $\Gamma(u) \subset \Gamma(v)$, also $J_u \subset J_v$ und $u \equiv v|_{J_u}$ gelten.
- u **maximal fortgesetzt**, wenn u keine echte Fortsetzung besitzt, das heißt: ist v eine auf J_v gegebene Lösung des Anfangswertproblems mit $\Gamma(v) \supset \Gamma(u)$, so folgt $(\Gamma(u) = \Gamma(v)$ und somit) $u = v$.

Fortsetzung

maximal
fortgesetzt

Bemerkung 2.6.9 Beachte, dass wenn ein Anfangswertproblem mehrere Lösungen hat, der Begriff der maximal fortgesetzten Lösung keine Beziehung unter den verschiedenen Lösungen herstellt. Es gilt lediglich, dass diese bestimmte Lösung nicht weiter fortgesetzt werden kann, und nicht, dass diese maximal fortgesetzte Lösung *alle* Lösungen fortsetzt.

Lemma 2.6.10 (Existenz einer maximal fortgesetzten Lösung)

Die Menge aller Lösungen des Anfangswertproblems (26) mit $J := J_u$ ist bezüglich $u \leq v : \iff \Gamma(u) \subset \Gamma(v)$ halbgeordnet. Jede auf einem Intervall J_u mit $t_0 \in J_u$ gegebene Lösung u des Anfangswertproblems besitzt eine maximale Fortsetzung, das heißt eine Fortsetzung, die maximal fortgesetzt ist.

Dieses Lemma sagt weder etwas über Existenz noch über Eindeutigkeit einer Lösung von (26) aus.

Beweis. ① Wir haben in Beispiel 2.6.3 schon argumentiert, dass \subset eine Halbordnung ist.

② Seien $u \in C^1(J_u; X)$ eine Lösung und M die Menge aller Fortsetzungen von u :

$$M := \{w \in C^1(J_w; X) : w \text{ ist eine Fortsetzung von } u\},$$

das heißt $w \in M$ löst das Anfangswertproblem auf $J_w \supset J_u$ und es gilt $u = w$ auf J_u . Dann ist (M, \leq) halbgeordnet (aber nicht total geordnet, selbst wenn die Lösung eindeutig wäre).

③ Um das Lemma von ZORN anzuwenden, müssen wir zeigen, dass jede Kette in M ein maximales Element hat. Sei $N \subset M$ eine Kette, das heißt eine total geordnete Menge, in M . Für alle $v_1, v_2 \in N$ gilt $v_1 \leq v_2$ oder $v_2 \leq v_1$, das heißt entweder $J_{v_1} \subset J_{v_2}$ oder $J_{v_2} \subset J_{v_1}$ und $v_1 = v_2$ auf $J_{v_1} \cap J_{v_2} \supset J_u$. Dann besitzt N eine obere Schranke: wir setzen $J_v := \bigcup_{v_i \in N} J_{v_i}$ und $v(t) := v_i(t)$ für ein $v_i \in N$ mit $t \in J_{v_i}$. Das ist wohldefiniert, da für $t \in J_{v_i} \cap J_{v_j}$ mit $v_i, v_j \in N$ gilt: $v_i(t) = v_j(t)$, da $J_{v_i} \cap J_{v_j} \subset J_{v_k}$ für $k \in \{i, j\}$ und $v_i \leq v_j$ oder $v_j \leq v_i$ ist.

④ Es ist $v \in M$, das heißt eine Fortsetzung von u : es gilt $v(t_0) = v_i(t_0)$ für alle $v_i \in N$ und

$$v'(t) = v_i(t) = f(t, v_i(t)) = f(t, v(t))$$

für $t \in J_{v_i}$ und $v_i \in N$, also löst v das Anfangswertproblem. Es ist v eine obere Schranke von N : für $v_i \in N$ gilt nach Konstruktion $J_{v_i} \subset J$ und $v_i = v$ auf J_{v_i} . Nach dem Lemma von ZORN besitzt M ein maximales Element und dieses ist die gesuchte maximale Fortsetzung. \square

Bemerkung 2.6.11 Wer daran interessiert ist, wie viel man ohne das Auswahlaxiom beweisen kann oder welche Abschwächungen / Zusatzvoraussetzungen nötig sind, sei auf *Axiom of choice* von Horst Herrlich verwiesen.

Wir können dieses Lemma zum Beispiel auf die Sätze von PEANO oder PICARD-LINDELÖF anwenden:

SATZ 2.6.1: PEANO-BEISPIELSATZ

Seien $X = \mathbb{R}^d$, $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $D \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f: J \times D \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine stetige Funktion. Dann existiert für alle $t_0 \in J$ und $u_0 \in D$ eine maximal fortgesetzte Lösung des Anfangswertproblems (26).

Beweis. Unter den Voraussetzungen existiert nach dem Satz von PEANO eine Lösung u auf einem Intervall $I \subset J$ mit $t_0 \in I$. Nach Lemma 2.6.10 besitzt u eine maximale Fortsetzung. \square

SATZ 2.6.2: RANDVERHALTEN (GLOBALER EXISTENZ- UND EINDEUTIGKEITSSATZ)

Genügt f einer **lokalen LIPSCHITZ-Bedingung**, so besitzt das Anfangswertproblem (26) für alle $t_0 \in J$ und $u_0 \in D$ **genau eine maximal fortgesetzte Lösung** u , deren Definitionsbereich (das maximale Existenzintervall) wir mit $J_{\max} \subset J$ bezeichnen.

- ① J_{\max} ist offen, das heißt $J_{\max} = (\alpha, \beta)$ für $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$.
- ② Wenn f auf Mengen der Form $J' \times D'$, wobei $J' \subset J$ kompakt ist sowie D' beschränkt ist und positiven Abstand von ∂D hat, beschränkt ist, so gilt: Es ist $\alpha = \inf(J)$ oder

$$\lim_{t \searrow \alpha} \min(\text{dist}(u(t), \partial D), \|u(t)\|^{-1}) = 0$$

und entsprechend für den rechten Randpunkt $\beta = \sup(J)$ oder

$$\lim_{t \nearrow \beta} \min(\text{dist}(u(t), \partial D), \|u(t)\|^{-1}) = 0. \quad (43)$$

Dabei können auch jeweils beide Fälle gleichzeitig auftreten.

J_{\max} hängt von t_0 und u_0 ab.

Bemerkung 2.6.12 (Abstand von einer Menge / einem Punkt zu einer Menge)

Es ist $\text{dist}(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|$ und $\text{dist}(N, M) := \inf_{n \in N, m \in M} \|n - m\|$ für Menge M, N .

Bemerkung 2.6.13 (② ist erfüllt, wenn $\dim(X) < \infty$)

Seien $J' \subset J$ kompakt und $D' \subset D$ beschränkt mit $\text{dist}(D', \partial D) > 0$. Dann ist $\overline{D'} \subset D$ kompakt. Da f stetig ist, ist f auf $J' \times D'$ (sogar auf $J' \times \overline{D'}$) beschränkt.

Bemerkung 2.6.14 Ohne die Bedingung ② ist die Aussage von Satz 2.6.2 im Unendlichdimensionalen im Allgemeinen falsch, da der Grenzwert $\lim_{t \nearrow \beta} \|u(t)\|^{-1}$ nicht existieren muss.

Bemerkung 2.6.15 Es sind genau die folgenden Fälle möglich (bei β)

- ① Ist $\beta = \sup(J)$, so liegt globale Lösbarkeit vor.
- ② Es gilt (43). Dann gibt es zwei Möglichkeiten.
 - a) $\lim_{t \nearrow \beta} \text{dist}(u(t), \partial D) = 0$.
 - b) Da $\|u(t)\|$ nichtnegativ ist, ist $\lim_{t \nearrow \beta} \|u(t)\|^{-1} = 0$ mit $\lim_{t \nearrow \beta} \|u(t)\| = \infty$ gleichbedeutend. Dann muss D unbeschränkt sein, zum Beispiel $D = X$. Man betrachte hierzu Abbildung 15, wo $D = \mathbb{R}$ ist. Es kommt an beiden Randpunkte zu einem blow-up der Lösung, $\beta = \frac{\pi}{2}$ und $\alpha = -\beta$.

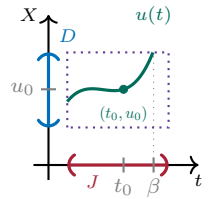


Abb. 17: Der Fall 2a.

Beweis. (von Satz 2.6.2) ① Sei $(t_0, u_0) \in J \times D$. Nach dem ersten Satz von PICARD-LINDELÖF hat das zugehörige Anfangswertproblem (26) genau eine Lösung auf einem Intervall I mit $t_0 \in I$. Die Lösung hat nach Lemma 2.6.10 ein maximale fortgesetzte Lösung, welche nach Satz 2.5.1 eindeutig ist, da f einer lokalen LIPSCHITZ-Bedingung genügt. Somit hat das Anfangswertproblem genau eine maximal fortgesetzte Lösung u auf dem maximalen Existenzintervall $J_{\max} \subset J$.

- ② Zunächst zeigen wir, dass J_{\max} ein offenes Intervall ist und nehmen dazu das Gegenteil an. Sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $J_{\max} = (\alpha, \beta] \subset J$. Dann ist $\beta \in J$ und es existiert $\tilde{u}_0 := u(\beta) \in D$. Nach dem lokalen Satz von PICARD-LINDELÖF hat

das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} v'(t) = f(t, v(t)), \\ v(\beta) = u(\beta) \end{cases}$$

genau eine Lösung auf einem Intervall $\tilde{I} := [\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon]$ für ein $\varepsilon > 0$. Auf dem Intervall $\tilde{I} \cap J_{\max} = [\beta - \varepsilon, \beta]$ stimmt diese mit der maximalen Lösung überein, was im Widerspruch dazu steht, dass die Lösung maximal fortgesetzt ist.

- ③ Die Hauptaussage über das Randverhalten (o.B.d.A. nur für β) beweisen wir auch mit einem Widerspruch: angenommen, es gilt

$$\beta < \sup(J) \quad \text{und} \quad \lim_{t \nearrow \beta} \min(\text{dist}(u(t), \partial D), \|u(t)\|^{-1}) \rightarrow 0.$$

Wir zeigen im Folgenden, dass wir die Lösung in den rechten Randpunkt $\beta \in J$ fortsetzen können, indem wir die LIPSCHITZ-Stetigkeit von f benutzen, die aus einer gewissen Beschränktheit von f folgt.

Auf der zweiten Bedingung folgt die Existenz eines $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (\alpha, \beta)$ mit $t_n \nearrow \beta$ und

$$\text{dist}(u(t_n), \partial D) \geq 2\varepsilon. \quad \text{und} \quad \|u(t_n)\| \leq \frac{1}{2\varepsilon} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (44)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varepsilon^2 < \frac{1}{2}$ und somit $\varepsilon < \frac{1}{2\varepsilon}$. Auf der Menge

$$K := \{(t, v) : t \in [t_0, \beta], v \in \overline{B}(0, \varepsilon^{-1}) \cap D, \text{dist}(v, \partial D) \geq \varepsilon\}$$

ist f nach Bedingung ② beschränkt, da K beschränkt ist und positiven Abstand zu ∂D hat. Sei nun $M := \sup(|f(K)|) < \infty$. Insbesondere gilt $|f(t_n, u(t_n))| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da $\|u(t_n)\| < \frac{1}{2\varepsilon} < \frac{1}{\varepsilon}$ nach (44) gilt.

- ④ Wir wollen nun zeigen, dass f nicht nur auf der Folge, sondern überall durch M majorisiert wird und das geht aufgrund des „Platzes“ zwischen $\frac{1}{2\varepsilon}$ und $\frac{1}{\varepsilon}$.

Sei $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{M})$ unabhängig von n gewählt. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $s \in [0, \min(\delta, \beta - t_n))$

$$\|u(t_n + s)\| < \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \text{dist}(u(t_n + s), \partial D) > \varepsilon. \quad (45)$$

Warum? Angenommen, das gilt nicht, dann existiert ein $n^* \in \mathbb{N}$ und das kleinste s^* mit $s^* \in (0, \min(\delta, \beta - t_{n^*}))$, sodass für $s \in [0, s^*)$ gilt

$$\|u(t_{n^*} + s)\| < \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \text{dist}(u(t_{n^*} + s), \partial D) > \varepsilon.$$

und, weil f stetig ist

$$\|u(t_{n^*} + s^*)\| = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{oder} \quad \text{dist}(u(t_{n^*} + s^*), \partial D) = \varepsilon. \quad (46)$$

Für $s \in [0, s^*)$ gilt nun

$$\|f(t_{n^*} + s, u(t_{n^*} + s))\| \leq M$$

und somit

$$\begin{aligned} \|u(t_{n^*} + s^*) - u(t_{n^*})\| &= \left\| \int_{t_{n^*}}^{t_{n^*} + s^*} f(\tau, u(\tau)) \, d\tau \right\| \stackrel{\triangle}{\leq} \int_{t_{n^*}}^{t_{n^*} + s^*} \underbrace{\|f(\tau, u(\tau))\|}_{\leq M} \, d\tau \\ &\leq M s^* < M \delta < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\|u(t_n^* + s^*)\| \stackrel{\Delta \neq}{\leq} \|u(t_n^*)\| + \|u(t_n^* + s) - u(t_n^*)\| < \frac{1}{2\varepsilon} + \varepsilon < \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon},$$

also kann der erste Fall aus (46) nicht eintreten. Andererseits ist

$$\text{dist}(u(t_n^* + s^*), \partial D) \stackrel{(\star)}{\geq} \text{dist}(u(t_n^*), \partial D) - \|u(t_n^* + s^*) - u(t_n^*)\| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon.$$

Somit kann der zweite Fall aus (46) auch nicht eintreten und es gilt (45).

Abb. 18: TODO: (★)
verdeutlichen

- ⑤ Da $t_n \nearrow \beta$ gilt, können wir ein $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ wählen, sodass $\beta - t_{\tilde{n}} < \delta$. Nach (45) gilt für alle $s \in [t_{\tilde{n}}, \beta)$

$$\|u(s)\| < \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \text{dist}(u(s), \partial D) > \varepsilon$$

und somit $\|f(s, u(s))\| \leq M$ für alle $s \in [t_{\tilde{n}}, \beta)$.

Es folgt für $s, t \in [t_{\tilde{n}}, \beta)$

$$\|u(s) - u(t)\| \stackrel{\Delta \neq}{\leq} \int_{\min(s,t)}^{\max(s,t)} \|f(\tau, u(\tau))\| d\tau \leq M|s - t|.$$

Damit ist u auf $[t_{\tilde{n}}, \beta)$ LIPSCHITZ-stetig und somit **gleichmäßig stetig** und kann deshalb stetig auf $[t_{\tilde{n}}, \beta]$ fortgesetzt werden.

- ⑥ Wir setzen $u(\beta) := \lim_{t \nearrow \beta} u(t)$. Dann löst u aufgrund der Stetigkeit von f und weil β ein innerer Punkt von J ist, die Integralgleichung

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, u(\tau)) d\tau$$

und damit das Anfangswertproblem auf dem Intervall $[t_{\tilde{n}}, \beta]$, was ein Widerspruch zu der Maximalität von β ist. \square

2.7 | Der Hauptsatz für absolutstetige Funktionen

? Frage

Für welche Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt der Hauptsatz $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$?

18.01.2021

Sei im Folgenden stets $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Motivation.

- ① Der Hauptsatz gilt, wenn f stetig differenzierbar ist.
- ② Wenn f' nicht integrierbar ist, gilt der Hauptsatz im Allgemeinen nicht, was zum Beispiel die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin(x^{-2}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (47)$$

zeigt, da f zwar differenzierbar ist, aber $f' \notin L^1([a, b])$ gilt.

- ③ Es existiert eine Funktion $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit den folgende Eigenschaften:

- ① f ist stetig und monoton wachsend mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$,
- ② f ist fast überall differenzierbar und
- ③ $f'(x) = 0$ für fast alle $x \in [0, 1]$ (insbesondere ist f' integrierbar),

wobei der letzte Punkt der Problematische ist. Für diese Funktion gilt der Hauptsatz nicht.

Der folgende Satz beantwortet die obige Frage.

SATZ 2.7.1: ÄQUIVALENTE CHARAKTERISIERUNGEN VON ABSOLUTER STETIGKEIT

Für eine stetige und monoton wachsende Funktion f sind die folgenden Aussagen äquivalent: die Abbildung f

- ① ist **absolut stetig**.
- ② bildet Nullmengen auf Nullmengen ab.
- ③ ist fast überall differenzierbar, ihre Ableitung f' ist integrierbar und es gilt der Hauptsatz

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

für alle $x \in [a, b]$.

Bemerkung 2.7.1 Für die Äquivalenz ① \iff ③ und die Implikation ① / ③ \implies ② ist die Voraussetzung der Monotonie nicht notwendig, siehe Bemerkung 2.7.6 für eine ausführliche Begründung.

Die Implikation ② \implies ① / ③ ist ohne die Monotonie im Allgemeinen falsch! Ein Beispiel ist die Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}), & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

(Übungsaufgabe).

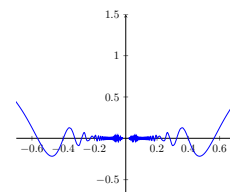


Abb. 19: Die Funktion (47).

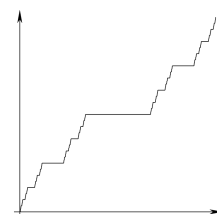


Abb. 20: Man kann die Funktion f nicht zeichnen, sonst nur approximieren, da sie „rekursiv“ definiert ist.

DEFINITION 2.7.2 (ABSOLUTE STETIGKEIT)

Eine Funktion f heißt **absolut stetig**, wenn für beliebige paarweise disjunkten Mengen von Intervallen $(a_i, b_i) \subset [a, b]$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt: für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon \quad (48)$$

gilt, wenn $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$ ist.

absolut stetig

Bemerkung 2.7.3 Für eine Funktion f gilt die Implikationskette

$$f \text{ LIPSCHITZ-stetig} \implies f \text{ absolut stetig} \xRightarrow{n=1} f \text{ gleichmäßig stetig},$$

da

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| \leq L \sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < L\delta = \varepsilon$$

gilt. Der Hauptsatz gilt also insbesondere für LIPSCHITZ-stetig Funktionen, die damit fast überall differenzierbar sind mit $f' \in L^1([a, b])$ (in der Tat sogar $f' \in L^\infty([a, b])$).

Lemma 2.7.4 (Äquivalente Charakterisierung von absoluter Stetigkeit)

Die Bedingung (48) in der Definition von absoluter Stetigkeit ist zu der Bedingung

$$\left| \sum_{i=1}^n f(b_i) - f(a_i) \right| < \varepsilon$$

äquivalent.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Kann zu einem Maß μ jedes bezüglich μ absolut stetige Maß durch eine Dichte dargestellt werden? Die Antwort liefert der folgende Satz, welchen wir für den Beweis von Satz 2.7.1 brauchen werden.

SATZ 2.7.2: SATZ VON RADON-NIKODYM

Seien λ das LEBESGUE-Maß auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und ν ein endliches, bezüglich λ **absolut stetiges**, **BOREL-Maß** (geschrieben $\nu \ll \lambda$) das heißt $\lambda(N) = 0$ impliziert $\nu(N) = 0$.

Dann existiert eine **integrierbare nichtnegative** Funktion $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ sodass

$$\nu(A) = \int_A f \, d\lambda. \quad (49)$$

für alle messbaren Teilmengen $A \subset [a, b]$ gilt.

Bemerkung 2.7.5 Die Funktion f heißt **RADON-NIKODYM-Ableitung** von ν bezüglich λ . Symbolisch könnte man $f = \frac{d\nu}{d\lambda}$ schreiben und dann „umstellen“ zu „ $f \, d\lambda = d\nu$ “ und dann „integrieren, um mit dem Hauptsatz (49) zu erhalten“.

Sei im Folgenden stets M die LEBESGUE- σ -Algebra, also die Menge aller messbaren Mengen $A \subset [a, b]$.

Beweis. ① Sei

$$G := \left\{ g: [a, b] \rightarrow [0, \infty) \text{ messbar, } \nu(A) \geq \int_A g \, d\lambda \quad \forall A \in M \right\}.$$

Dann ist $G \neq \emptyset$, da $g \equiv 0 \in G$ gilt. Diese Menge enthält alle Kandidaten für die gesuchte Funktion f . Wir werden im Folgenden ein maximales Element in G finden und zeigen, dass es anstatt der Ungleichung sogar Gleichheit erfüllt.

- ② Die Menge G ist **abgeschlossen bezüglich Maximumbildung**, das heißt

$$g, h \in G \implies \max(g, h) \in G.$$

Dann bilden

$$A_1 := \{x \in [a, b] : g(x) \geq h(x)\} \quad \text{und} \quad A_2 := [a, b] \setminus A_1$$

eine **disjunkte Überdeckung** von A : es gilt $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ und $A_1 \cup A_2 = A$.

Für $A \in M$ gilt

$$\begin{aligned} \int_A \max\{g, h\} d\lambda &= \int_{A \cap A_1} \max(g, h) d\lambda + \int_{A \cap A_2} \max(g, h) d\lambda \\ &= \int_{A \cap A_1} g d\lambda + \int_{A \cap A_2} h d\lambda \leq \nu(A \cap A_1) + \nu(A \cap A_2) = \nu(A), \end{aligned}$$

wobei die Ungleichung aus $g, h \in G$ und die letzte Gleichheit aus den Eigenschaften eines Maßes folgt, da $A \cap A_1$ und $A \cap A_2$ disjunkt sind. Ferner ist das Maximum zweier nichtnegativen messbaren Funktionen nichtnegativ und messbar. Induktiv gilt für $g_1, \dots, g_n \in G$ auch $\max(g_1, \dots, g_n) \in G$.

- ③ Wir suchen nun ein **maximales Element**, welches nicht für alle $A \in M$ die Ungleichung erfüllt, sondern erstmal nur für $A = [a, b]$. Wir definieren $\int g d\lambda := \int_{[a, b]} g d\lambda$ und

$$\gamma := \sup_{g \in G} \int g d\lambda \in [0, \infty]$$

Dies ist wohldefiniert, da $\int g d\lambda \leq \nu([a, b]) < \infty$ für alle $g \in G$ gilt und somit $\gamma \leq \nu([a, b])$. Nach der Definition des Supremums existiert eine Folge $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset G$, sodass $\int \tilde{g}_n d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma$ gilt.

Wir setzen nun $g_n := \max\{\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n\}$. Nach ② ist $g_n \in G$, $\tilde{g}_n \leq g_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **monoton wachsend** und $g_n \geq 0$. Nach Konstruktion folgt

$$\int \tilde{g}_n d\lambda \leq \int g_n d\lambda \leq \gamma \implies \int g_n d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma. \quad (50)$$

Definiere $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty]$, $x \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x)$. Dann ist f messbar und nichtnegativ, dann die g_n nichtnegativ sind. Mit dem **Satz von der monotonen Konvergenz** (beziehungsweise von BEPPO LEVI) folgt

$$\int f d\lambda = \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\lambda \stackrel{(50)}{=} \gamma \leq \nu([a, b]), \quad (51)$$

also ist f integrierbar. Analog folgt für $A \in M$

$$\int_A f d\lambda = \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\lambda \leq \nu(A)$$

und somit $f \in G$.

Insgesamt heißt das, dass $g \mapsto \int g d\lambda$ auf G ihr Maximum in f annimmt.

- ④ Es bleibt zu zeigen, dass $\int_A f \, d\lambda = \nu(A)$, oder äquivalent, dass für

$$\tau(A) := \nu(A) - \int_A f \, d\lambda \quad (52)$$

$\tau(A) = 0$ für alle $A \in M$ gilt.

Es ist τ ein endliches Maß: zunächst ist τ nichtnegativ, da $f \in G$ und somit $\int_A f \, d\lambda \leq \nu(A)$ ist. Die anderen Eigenschaften folgen aus den Eigenschaften von ν als Maß und den Eigenschaften des Integrals (Analysis III oder selber überlegen).

Das Maß τ und die Abbildung $A \mapsto \int_A f \, d\lambda$ sind absolut stetig bezüglich λ . Somit folgt $\tau(A) = 0$ aus $\lambda(A) = 0$.

- ⑤ Wir zeigen nun $\tau([a, b]) = 0$, denn dann ist auch $\tau(A) = 0$ für alle $A \in M$. Angenommen, es gilt $\tau([a, b]) > 0$. Dann ist aufgrund von $\lambda([a, b]) > 0$ (weil $\tau \ll \lambda$)

$$\beta := \frac{1}{2} \frac{\tau([a, b])}{\lambda([a, b])} > 0$$

und somit

$$\tau([a, b]) = 2\beta\lambda([a, b]) > \beta\lambda([a, b]).$$

Es existiert dann (Beweis unten, ⑥) eine Menge $A_0 \in M$, sodass

$$\tau(A_0) - \beta\lambda(A_0) \geq \tau([a, b]) - \beta\lambda([a, b]) > 0 \quad (53)$$

und somit $\tau(A_0) > \beta\lambda(A_0)$ gilt und sodass für alle $A \in M$

$$\tau(A \cap A_0) \geq \beta\lambda(A \cap A_0) \quad (54)$$

gilt. Wir betrachte die Hilfsfunktion $f_0 := f + \beta\chi_{A_0}$, wobei χ_B die Indikatorfunktion der Menge B ist. Es ist $f_0 \in G$, denn für alle $A \in M$ gilt

$$\int_A f_0 \, d\lambda = \int_A f \, d\lambda + \beta\lambda(A \cap A_0) \stackrel{(54)}{\leq} \int_A f \, d\lambda + \tau(A \cap A_0) \leq \int_A f \, d\lambda + \tau(A) \stackrel{(52)}{=} \nu(A),$$

wobei die zweite Ungleichung gilt, weil τ ein Maß ist und $A \cap A_0 \subset A$. Da f_0 nichtnegativ und messbar ist, folgt $f_0 \in G$. Es gilt aber

$$\int f_0 \, d\lambda = \underbrace{\int f \, d\lambda}_{\stackrel{(51)}{=} \gamma} + \underbrace{\beta}_{>0} \underbrace{\lambda(A_0)}_{>0} > \gamma,$$

was einen Widerspruch zur Konstruktion von f als maximales Element von G darstellt.

Dabei folgt aus $\tau(A_0) > \beta\lambda(A_0)$, dass $\lambda(A_0) > 0$, da gilt: wäre $\lambda(A_0) = 0$, so folgt wegen $\tau \ll \lambda$ auch $\tau(A_0) = 0$ also $\tau(A_0) - \beta\lambda(A_0) = 0$, was einen Widerspruch zu (53) darstellt.

- ⑥ Es bleibt zu zeigen, dass für $\vartheta := \tau - \beta\lambda$ ein $A_0 \in M$ existiert, sodass

$$\vartheta(A_0) \geq \vartheta([a, b]) \quad \text{und} \quad \vartheta(A \cap A_0) \geq 0$$

für alle $A \in M$ gilt. Man beachte, dass ϑ kein Maß ist.

- Ⓐ Wir können $\vartheta([a, b]) > 0$ voraussetzen, da sonst $A_0 = \emptyset$ die Voraussetzungen erfüllt.

- ⓑ Wir zeigen zunächst, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $A_\varepsilon \in M$ mit

$$\vartheta(A_\varepsilon) \geq \vartheta([a, b]) \quad \text{und} \quad \vartheta(A \cap A_\varepsilon) > -\varepsilon$$

für alle $A \in M$ existiert.

- Wenn für alle $A \in M$ gilt, dass $\vartheta(A) > -\varepsilon$ ist, so können wir $A_\varepsilon = [a, b]$ wählen. Sonst existiert ein $A_1 \in M$, sodass $\vartheta(A_1) \leq -\varepsilon$ gilt. Dann gilt für $A_1^c := [a, b] \setminus A_1$

$$\vartheta(A_1^c) = \vartheta([a, b]) - \vartheta(A_1) \geq \vartheta([a, b]) + \varepsilon > \vartheta([a, b]).$$

- Wenn $\vartheta(A \cap A_1^c) > -\varepsilon$ für alle $A \in M$ gilt, so wähle $A_\varepsilon := A_1^c$. Sonst existiert ein $A_2 \in M$, sodass $\vartheta(A_2 \cap A_1^c) \leq -\varepsilon$ gilt. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A_2 \cap A_1 = \emptyset$ annehmen, da ϑ nur den Schnitt von A_1^c mit A_2 „sieht“.

Dann folgt

$$\vartheta((A_1 \sqcup A_2)^c) = \vartheta([a, b]) - \vartheta(A_1) - \vartheta(A_2) \geq \vartheta([a, b]) + 2\varepsilon > \vartheta([a, b]),$$

wobei \sqcup die disjunkte Vereinigung bezeichnet.

- Ist nun $\vartheta((A_1 \sqcup A_2)^c \cap A) > -\varepsilon$ für alle $A \in M$ gilt, so wähle $A_\varepsilon := (A_1 \cap A_2)^c$ und wir sind fertig, sonst ...

Kommen wir nach endlich vielen Schritten nicht zum Ziel, so existiert eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen mit $A_n \in M$,

$$\vartheta(A_n) \leq -\varepsilon \quad \text{und} \quad \vartheta\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^c\right) > \vartheta([a, b])$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\vartheta\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \vartheta(A_i) \leq -n \cdot \varepsilon \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \quad (55)$$

und somit divergiert die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \vartheta(A_i)$. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \vartheta(A_i) &= \sum_{i=1}^n \tau(A_i) - \beta \lambda(A_i) \\ &= \underbrace{\tau\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)}_{\leq \tau([a, b])} - \beta \underbrace{\lambda\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)}_{\leq \lambda([a, b])} \geq -\tau([a, b]) - \beta \lambda([a, b]), \end{aligned}$$

also ist die Folge der Partialsummen nach unten beschränkt, was im Widerspruch zu (55) steht.

- ⓒ Wir zeigen nun die ursprüngliche Behauptung. Seien für $\varepsilon := \frac{1}{n} > 0$ die Mengen $(A_{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}}$ konstruiert. Es gilt $A_{\frac{1}{n}} \supset A_{\frac{1}{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$: sind $A_1 \supset A_{\frac{1}{2}} \supset \dots \supset A_{\frac{1}{n}}$ entsprechend konstruiert, so wende man Teilschritt ⓑ auf $A_{\frac{1}{n}}$ anstelle von $[a, b]$ an.

Wir setzen $A_0 := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}} \subset [a, b]$, welche eine messbare Menge ist. Dann folgt

$$\tau(A_0) = \tau\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}}\right) \quad \text{und} \quad \lambda(A_0) = \lambda\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}}\right)$$

und damit (aufgrund der σ -Stetigkeit von oben der Maße τ und λ)

$$\vartheta(A_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(A_{\frac{1}{n}}) - \beta \lambda(A_{\frac{1}{n}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta(A_{\frac{1}{n}}) \geq \vartheta([a, b])$$

und somit für alle $A \in M$

$$\vartheta(A \cap A_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta(A \cap A_{\frac{1}{n}}) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} = 0. \quad \square$$

Beweis. (von Satz 2.7.1) „① \implies ②“: Seien die Abbildung f absolut stetig, und $A \in M$ mit $\lambda(A)$ eine Menge mit Maß Null. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A \subset (a, b)$.

Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ entsprechend der absoluten Stetigkeit gewählt. Dann existiert eine **offene Menge** V mit $A \subset V \subset (a, b)$ mit $\lambda(V) \leq \delta$. Dann existieren (selber überlegen!) paarweise disjunkte Intervalle (a_k, b_k) für $k \in \mathbb{N}$ mit

Die Randpunkte und ihre Urbilder sind einzelne Punkte, also Nullmengen bezüglich des LEBESGUE-Maßes.

$$V = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} (a_k, b_k) \quad \text{also} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} |b_k - a_k| < \delta.$$

Damit folgt (selber überlegen)

$$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| \leq \varepsilon.$$

Da $A \subset V$ ist, folgt wegen der Monotonie von f

$$f(A) \subset f(V) \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [f(a_k), f(b_k)]$$

und somit ist

$$\lambda^*(f(A)) \leq \sum_k |f(b_k) - f(a_k)| \leq \varepsilon,$$

also ist $\lambda(f(A)) = 0$ und somit $f(A)$ eine Nullmenge, da $f(A)$ auch messbar ist: das äußere Maß von $f(A)$ ist Null (Vollständigkeit des LEBESGUE-Maßes) oder: $f(A)$ ist eine Teilmenge von BOREL-Mengen mit beliebig kleinem Maß und somit messbar.

„② \implies ③“: Sei f eine stetige Funktion, welche Nullmengen auf Nullmengen abbildet. Es ist f monoton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend, und deswegen „verschieben“ f ein wenig, sodass sie **injektiv** wird: wir setzen $g(x) := x + f(x)$. Dann ist die Abbildung g wohldefiniert, stetig und *streng* monoton wachsend, also insbesondere injektiv und bildet g Nullmengen auf Nullmengen ab.

Sei $A \in M$. Dann ist $A = A_0 \sqcup A_1$, wobei $\lambda(A_0) = 0$ ist und A_1 eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen, also eine **σ -kompakte** Menge ist. Dann ist $g(A_0)$ eine Nullmenge (und somit messbar) und aufgrund der Stetigkeit von g ist $g(A_1)$ eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen, und somit messbar.

Insgesamt ist also $g(A) = g(A_0) \cup g(A_1)$ messbar und aufgrund der Injektivität von g ist

$$\nu(A) := \lambda(g(A)) \tag{56}$$

für eine Menge $A \in M$ ein **Maß**. Da g Nullmengen auf Nullmengen abbildet, ist $\nu \ll \lambda$: ν ist absolut stetig bezüglich des LEBESGUE-Maßes λ .

Nach dem Satz von RADON-NIKODYM existiert eine integrierbare Funktion $\tilde{f} \geq 0$, sodass

$$\nu(A) = \int_A \tilde{f} d\lambda$$

für alle $A \in M$ gilt. Mit $A = [a, x]$ folgt (mit der strengen Monotonie von g) $g(A) = [g(a), g(x)]$ und damit

$$g(x) - g(a) = \lambda(g(A)) \stackrel{(56)}{=} \nu(A) = \int_a^x \tilde{f} \, d\lambda = \int_A \tilde{f} \, d\lambda,$$

welches durch einsetzen der Definition von g zu folgendem äquivalent wird:

$$f(x) - f(a) + x - a = \int_a^x \tilde{f}(x) \, dx$$

und somit

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \tilde{f} - 1 \, d\lambda.$$

Mit \tilde{f} ist auch $\tilde{f} - 1$ integrierbar.

Wir zeigen nun, dass f fast überall differenzierbar mit $f' = \tilde{f} - 1$ ist. Für jede integrierbare Funktion g und fast alle x gilt (ähnlich zu Satz 2.1.2 ①, ein Beweis findet sich in der Dissertation von LEBESGUE)

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} g \, d\lambda \xrightarrow{h \rightarrow 0} g(x)$$

man sagt: fast alle x sind **LEBESGUE-Punkte** von g . Dies impliziert

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \tilde{f}(t) - 1 \, dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} \tilde{f}(x) - 1$$

für fast alle x .

„③ \implies ①“:

a) Wir benötigen zunächst das folgende Resultat aus der Maßtheorie.

Stetigkeit im L^1 -Mittel. Sei f eine integrierbare Funktion. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für alle Mengen $A \in M$ mit $\lambda(A) < \delta$ gilt

$$\left| \int_A f \, d\lambda \right| < \varepsilon.$$

Beweis. Da mit f auch $|f|$ integrierbar ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $N > 0$ mit

$$\int |f| - |f|_N \, d\lambda < \frac{\varepsilon}{2},$$

wobei

$$|f|_N(x) := \begin{cases} |f(x)|, & \text{für } |f(x)| \leq N, \\ N, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir wählen $\delta := \frac{\varepsilon}{2N} > 0$. Ist dann $A \in M$ mit $\lambda(A) < \delta$, so folgt aufgrund von

$$0 \leq \int_A |f| - |f|_N \, d\lambda = \int_A |f| \, d\lambda - \int_A |f|_N \, d\lambda < \frac{\varepsilon}{2},$$

dass

$$\begin{aligned} \left| \int_A f \, d\lambda \right| &\leq \int_A |f| \, d\lambda \leq \int_A |f|_N \, d\lambda + \int_A |f| - |f|_N \, d\lambda \\ &\leq N\lambda(A) + \int_A |f| - |f|_N \, d\lambda \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

gilt.

- ⓑ Damit folgt ganz allgemein: ist g eine integrierbare Funktion und $\varphi(x) := \int_a^x g \, d\lambda + C$, so ist φ absolut stetig.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta > 0$ wie oben. Ist $((a_i, b_i) \subset [a, b])_{i=1}^n$ eine endliche Menge paarweise disjunkter Intervalle mit $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$, so folgt mit dem soeben gezeigten (da mit g auch $|g|$ integrierbar ist)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\varphi(b_i) - \varphi(a_i)| &= \sum_{i=1}^n \left| \int_{a_i}^{b_i} g \, d\lambda - \int_{a_i}^{a_i} g \, d\lambda \right| = \sum_{i=1}^n \left| \int_{a_i}^{b_i} g \, d\lambda \right| \triangleq \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} |g| \, d\lambda \\ &= \int_{\bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i)} |g| \, d\lambda < \varepsilon, \end{aligned}$$

da $\lambda(\bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i)) = \sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$ gilt, weil die Intervall paarweise disjunkt sind.

□

Bemerkung 2.7.6 (Die Monotonieforderung ist nicht notwendig)

Sei nun $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ absolut stetig und nicht notwendigerweise monoton wachsend. Für $x \in [a, b]$ definieren wir die sogenannte **Totalvariationsfunktion**

Totalvariations-
funktion

$$F(x) := \sup \sum_{i=1}^N |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \infty,$$

wobei das Supremum über alle endlichen Zerlegungen des Intervalls $[a, x]$ der Form

$$a = t_0 < \dots < t_k < \dots < t_N = x$$

gebildet wird. Diese Totalvariationsfunktion ist wohldefiniert (Tutoriumsaufgabe).

Außerdem ist F monoton wachsend: für $a \leq x < y < b$ und eine endliche Zerlegung des Intervalls $[a, x]$ $(t_i)_{i=1}^N$ gilt

$$F(y) \geq |f(y) - f(x)| + \sum_{i=1}^N |f(t_i) - f(t_{i-1})|,$$

da $(t_i)_{i=1}^N \cup \{y\}$ eine endliche Zerlegung des Intervalls $[a, y]$ ist. Durch Supremumsbildung über alle Zerlegungen $(t_i)_{i=1}^N$ von $[a, x]$ folgt

$$F(y) \geq \underbrace{|f(y) - f(x)|}_{\geq 0} + F(x)$$

und somit ist F monoton wachsend. Ferner folgt durch Auflösen des Betrags

$$F(y) \geq f(y) - f(x) + F(x) \quad \text{und} \quad F(y) \geq f(x) - f(y) + F(x)$$

und somit sind auch die Funktionen $F \pm f$ monoton wachsend.

Wir zeigen nun, dass F absolut stetig ist. Als Hausaufgabe zeigt man: für beliebige $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ gilt

$$F(\beta) - F(\alpha) = \sup_{(t_i)_{i=1}^n \subset (\alpha, \beta)} \sum_{i=1}^n |f(t_{i+1}) - f(t_i)|,$$

wobei die Familie $(t_i)_{i=1}^n$ eine Zerlegung des Intervalls (α, β) ist.

Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ wie in der absoluten Stetigkeit von f gewählt. Für eine endliche Menge $((a_k, b_k))_{k=1}^n$ von paarweise disjunkten Intervallen mit Gesamtlänge $\sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < \delta$ folgt (selbst überlegen!)

$$\sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_{k=1}^n \sup_{a_i = t_k^{(0)} < \dots < t_k^{(N_k)} = b_k} \sum_{j=1}^{N_k} |f(t_k^{(j)}) - f(t_k^{(j-1)})| \leq \varepsilon,$$

weil f absolut stetig ist und die Zerlegung $\left(\left(t_k^{(1)}, \dots, t_k^{(N_k)}\right)\right)_{k=1}^N$ eine endliche Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ mit Gesamtlänge kleiner als δ ist. Somit ist F absolut stetig und somit auch $F \pm f$ absolut stetig.

Wir wenden auf $F \pm f$ den vorherigen Satz 2.7.1 an: die Funktionen $F \pm f$ sind fast überall differenzierbar mit $(F \pm f)' \in L^1([a, b])$. Da $f = \frac{1}{2}((F + f) - (F - f))$ gilt, ist auf f der Hauptsatz auch anwendbar: f ist fast überall differenzierbar mit $f' \in L^1([a, b])$ und es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2}(F + f)'(x) - \frac{1}{2}(F - f)'(x).$$

Damit sehen wir, dass wir für die Implikation ① \implies ② / ③ aus Satz 2.7.1 nicht die Monotonie von f benötigen. Außerdem folgt sofort aus dem Beweis des Satzes, dass die Implikation ③ \implies ① ebenfalls für nichtmonotone Funktionen gilt.

Bemerkung 2.7.7 Alles geht ebenso für vektorwertige Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ (komponentenweise). Es wird jedoch komplizierter für Funktionen $f: [a, b] \rightarrow X$, wobei X ein unendlichdimensionaler BANACH-Raum ist. Das liegt daran, dass wir dafür eine LEBESGUE-Integral für BANACH-Raum-wertige Funktionen benötigen, das BOCHNER-Integral, welches im Kurs Differentialgleichungen III behandelt wird, da der Messbarkeitsbegriff ein wenig anders ist.

2.8 | Lösbarkeit in Sinne von Carathéodory

25.01.2021

Wir den Lösungsbegriff für Probleme der Form (26) verallgemeinern, in dem wir nur die **Integralgleichung** betrachten.

DEFINITION 2.8.1 (LÖSUNG IM SINNE VON CARATHÉODORY)

Eine **absolut stetige** Funktion, welche auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ die **Integralgleichung** (27) erfüllt, heißt Lösung des Anfangswertproblems (26) im **Sinne von CARATHÉODORY**.

Eine Lösung im Sinne von CARATHÉODORY löst die Differentialgleichungen fast überall (und genügt der Anfangsbedingung), da absolut stetige Funktionen fast überall differenzierbar sind und da der Hauptsatz, den wir benutzt haben um die Äquivalenz zwischen dem Anfangswertproblem (26) und der Integralgleichung (27) herzustellen, für absolut stetige Funktionen gilt.

Wir benötigen zwei Bedingungen an die rechte Seite, damit wir zum Beispiel die Sätze von PICARD-LINDELÖF oder PEANO auf das CARATHÉODORY-Setting verallgemeinern können.

Die CARATHÉODORY-Bedingung ersetzt und verallgemeinert die Stetigkeit der rechten Seite.

DEFINITION 2.8.2 (CARATHÉODORY-BEDINGUNG)

Eine Abbildung $f: [0, T] \times M \rightarrow \mathbb{R}^d$, wobei $M \subset \mathbb{R}^d$ ist, genügt einer **CARATHÉODORY-Bedingung**, wenn für alle $i \in \{1, \dots, d\}$ gilt

- ① für alle $u \in M$ ist die Abbildung $t \mapsto f_i(t, u)$ auf $[0, T]$ **messbar**.
- ② für fast alle $t \in [0, T]$ ist die Abbildung $u \mapsto f_i(t, u)$ **stetig** auf M .

CARATHÉODORY-
Bedingung

Aufgrund der weggefallenen Stetigkeit muss die rechte Seite nicht mehr beschränkt sein, auch im endlichdimensionalen Fall, wo ihr Definitionsbereich kompakt ist. Die Majoranten-Bedingung ersetzt und verallgemeinert die Beschränktheit der rechten Seite.

DEFINITION 2.8.3 (MAJORANTEN-BEDINGUNG)

Die Abbildung f genügt einer **Majoranten-Bedingung**, wenn eine LEBESGUE-integrierbare Funktion $m: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$|f_i(t, v)| \leq m(t)$$

für alle $i \in \{1, \dots, d\}$, für alle $v \in M$ und fast alle $t \in [0, T]$ gilt.

Majoranten-
Bedingung

Lemma 2.8.4 (Verallgemeinerung der NEMYZSKI-Operator-Eigenschaften)

- ① Erfüllt die Abbildung f eine **CARATHÉODORY-Bedingung**, so bildet der NEMYZSKI-Operator **messbare** Funktionen auf **messbare** Funktionen ab.
- ② Erfüllt die Abbildung f zusätzlich eine **Majoranten-Bedingung**, so bildet der NEMYZSKI-Operator **messbare** Funktionen auf **integrierbare** Funktionen ab.

Beweis. ① Es genügt f einer **CARATHÉODORY-Bedingung**. Sei

$$M_d := \{u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d : u \text{ messbar}\}.$$

Wir zeigen, dass $F: M_d \rightarrow M_d$ gilt, wobei $(Fv)(t) := f(t, v(t))$ für $t \in [0, T]$ der NEMYZKI-Operator ist.

Sei $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine messbare Funktion. Um zu zeigen, dass Fu messbar ist, zeigen wir, dass Fu der punktweise fast überall Grenzwert einer Folge von messbaren Funktionen ist. Diese Folge werden wir mithilfe einfacher Funktionen konstruieren, welche die Funktion u approximieren.

Wir zeigen dafür, dass die Abbildungen $t \mapsto f_i(t, u(t))$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$ messbar sind. Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge einfacher Funktionen mit $u_n \rightarrow u$ punktweise fast überall. Jede einfache Funktion u_n können wir als Linearkombination von charakteristischen Funktionen schreiben:

$$u_n = \sum_{j=1}^{N_n} u_j^{(n)} \chi_{A_j^{(n)}}$$

mit $u_j^{(n)} \in \mathbb{R}^d$ und paarweise disjunkten messbaren Mengen $(A_j)_{j \in \{1, \dots, N_n\}}$ mit $[0, T] = \bigcup_{j=1}^{N_n} A_j^{(n)}$.

Wir zeigen nun, dass die Abbildungen $t \mapsto f_i(t, u_n(t))$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$ messbar sind. Weil für jedes n die Familie $(A_j^{(n)})_{j=1}^{N_n}$ disjunkt ist, ist jedes $t \in [0, T]$ in genau einem $A_k^{(n)}$. Dann gilt $f_i(t, u_n(t)) = f_i(t, u_k^{(n)})$ und somit

$$f_i(t, u_n(t)) = f_i \left(t, \sum_{j=1}^{N_n} u_j^{(n)} \chi_{A_j^{(n)}}(t) \right) = \sum_{j=1}^{N_n} f_i(t, u_j^{(n)}) \chi_{A_j^{(n)}}(t).$$

Da einfache Funktionen messbar sind und Produkte (aufgrund der CARATHÉODORY-Bedingung ist $t \mapsto f_i(t, u_j^{(n)})$ messbar) sowie Summen messbarer Funktionen messbar sind, folgt die Behauptung.

Es gilt $f_i(\cdot, u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_i(\cdot, u)$, da für fast alle $t \in [0, T]$ gilt, dass $u_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(t)$ und für fast alle $t \in [0, T]$ $f_i(t, \cdot)$ stetig ist (CARATHÉODORY-Bedingung). Somit ist $f(\cdot, u)$ als fast überall punktwiser Grenzwert einer Folge messbarer Funktionen messbar.

- ② Aufgrund der Majoranten-Bedingung gilt für alle $i \in \{1, \dots, d\}$

$$\int_0^T |f_i(t, u(t))| dt \leq \int_0^T m(t) dt < \infty.$$

□

SATZ 2.8.1: LOKALE LÖSBARKEIT (CARATHÉODORY, 1918)

Seien $X = \mathbb{R}^d$, $u_0 \in X$, $t_0 \in [0, T]$ und $r > 0$. Die Abbildung $f: [0, T] \times \overline{B}(u_0, r) \rightarrow \mathbb{R}^d$ genüge den beiden obigen Bedingungen, sodass ein $m \in L^1([0, T])$ mit

$$\|f(t, v)\| \leq m(t)$$

für fast alle $t \in [0, T]$ und alle $v \in \overline{B}(u_0, r)$ existiert. Dann besitzt das Anfangswertproblem (26) auf dem Intervall

$$I_a := [t_0 - a, t_0 + a] \cap [0, T]$$

mindestens eine Lösung $u: I_a \rightarrow \overline{B}(u_0, r)$ im Sinne von CARATHÉODORY, wobei $a > 0$ so zu gewählt ist, dass

$$\max_{t \in I_a} \left| \int_{t_0}^t m(s) ds \right| \leq r.$$

Bemerkung 2.8.5 (Satz 2.8.1 verallgemeinert den endlichdimensionalen PEANO)

Wenn f stetig ist, und somit $m \equiv \|f\|_\infty > 0$ gewählt werden kann, erfüllt $a = \frac{r}{2M}$ die obige Bedingung.

Beweis. Wir betrachten die nichtleere, abgeschlossene, beschränkte und konvexe Menge $A := \mathcal{C}(I, \overline{B}(u_0, r))$.

Sei nun für $u \in A$

$$(Tu)(t) := u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds.$$

Sei $u \in A$. Dann ist u insbesondere messbar und mit Lemma 2.8.4 folgt, dass $f(\cdot, u)$ integrierbar ist. Somit ist T wohldefiniert.

Der Operator T ist eine **Selbstabbildung**, da nach dem Hauptsatz für absolut stetige Funktionen die Abbildung $t \mapsto u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) \, ds$ für $u \in A$ absolut stetig, also insbesondere stetig ist. Ferner gilt für $u \in A$ und $t \in I$

$$\begin{aligned} |(Tu)(t) - u_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds \right| \leq \int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} |f(s, u(s))| \, ds \\ &\leq \int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} m(s) \, ds \leq \max_{t \in I} \left| \int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} m(s) \, ds \right| \leq r, \end{aligned}$$

und somit ist $T: A \rightarrow A$ eine Selbstabbildung.

Stetigkeit: Es gelte $v_n \rightarrow \bar{v}$ in A , das heißt gleichmäßig, für $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$. Wir betrachten

$$\begin{aligned} \|Tv_n - T\bar{v}\| &\stackrel{\Delta \neq}{\leq} \max_{t \in I} \int_{t_0}^t |f(s, v_n(s)) - f(s, \bar{v}(s))| \, ds \\ &\leq \int_I |f(s, v_n(s)) - f(s, \bar{v}(s))| \, ds \xrightarrow[\text{Satz von LEBESGUE}]{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Da insbesondere $v_n(s) \rightarrow v(s)$ für alle $s \in I$ gilt und f die CARATHÉODORY-Bedingung erfüllt, gilt für fast alle $s \in I$

$$|f(s, v_n(s)) - f(s, \bar{v}(s))| \rightarrow 0.$$

Da f die Majoranten-Bedingung erfüllt, gilt für fast alle $s \in I$

$$|f(s, v_n(s)) - f(s, \bar{v}(s))| \stackrel{\Delta \neq}{\leq} |f(s, v_n(s))| + |f(s, \bar{v}(s))| \leq 2m(s).$$

Da $n \in L^1(I)$ gilt, folgt mit dem **Satz von LEBESGUE**

$$\|Tv_n - T\bar{v}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Kompaktheit: Um zu zeigen, dass T beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet, genügt es wieder zu zeigen, dass $T(A) \subset A \subset \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^d)$ relativ kompakt ist. Wieder ist $T(A)$ gleichmäßig beschränkt, da $T(A) \subset A$ gilt und A beschränkt ist.

Gleichgradige Stetigkeit Für $u \in A$ und $s, t \in I$ gilt

$$|(Tu)(t) - (Tu)(s)| \stackrel{\Delta \neq}{\leq} \int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} |f(\tau, u(\tau))| \, d\tau \leq \int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} m(\tau) \, d\tau.$$

Da m integrierbar ist, ist m im L^1 -Mittel stetig, das heißt zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass $\int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} m(\tau) \, d\tau$ für $|t - s| < \varepsilon$ gilt (cf. den Beweis von Satz 2.7.1 „**3**“ \implies **1**) und somit $|(Tu)(t) - (Tu)(s)| \xrightarrow{|t-s| \rightarrow 0} 0$.

Nach dem Satz von ARZELÁ-ASCOLI ist $T(A)$ relativ kompakt und somit T ein kompakter Operator. Die Behauptung folgt mit dem Fixpunktsatz von SCHAUDER. \square

SATZ 2.8.2: MAXIMAL FORTGESETZTE LÖSUNGEN IM SINNE VON CARATHÉODORY

Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $D \subset \mathbb{R}^d$ offen. Es genüge $f: J \times D \rightarrow \mathbb{R}^d$ einer CARATHÉODORY-Bedingung und auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset D$ einer Majoranten-Bedingung, das heißt ist $K \subset D$, so existiert eine integrierbare Funktion $m_K \in L^1(J)$ mit

$$|f(t, v)| \leq m_K(t)$$

für $v \in K$ und fast alle $t \in J$.

Dann hat das Anfangswertproblem (26) für alle $t_0 \in J$ und $u_0 \in D$ mindestens eine maximal fortgesetzte Lösung u im Sinne von CARATHÉODORY. Am Rand des maximalen Existenzintervalls (α, β) von u gilt das übliche Randverhalten, das heißt $\beta = \sup(J)$ oder $\lim_{t \nearrow \beta} \min(\text{dist}(u(t), \partial D), \|u(t)\|^{-1})$ und entsprechend für α .

Genügt f auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset D$ einer LIPSCHITZ-Bedingung der Form

$$|f(t, v) - f(t, w)| \leq \ell_K(t)|v - w|$$

für fast alle $t \in J$ und alle $v, w \in K$ für eine integrierbare Funktion $\ell_K \in L^1(J)$, so ist die Lösung **eindeutig** bestimmt.

Der Beweis verläuft analog zum klassischen Setting, allerdings müssen ein paar Stellen angepasst werden. Dabei wird die Stetigkeit im L^1 benötigt.

Beweis. Hausaufgabe. \square

Bemerkung 2.8.6 Die maximal fortgesetzte Lösung ist dabei nur auf jedem kompakten Teilintervall von (α, β) absolut stetig, nicht auf dem gesamten Intervall. Ansonsten wäre sie insbesondere gleichmäßig stetig auf (α, β) und könnte sofort auf den Rand des Intervalls fortgesetzt werden.

Bemerkung 2.8.7 Obwohl die Ableitung u' nur noch integrierbar und nicht mehr stetig ist, ist im CARATHÉODORY-Setting die Lösung u absolut stetig und somit stetig. Deshalb ergibt **Punktauswertung**, das heißt der Ausdruck $u(t)$ überhaupt einen Sinn.

3 Abhängigkeit der Lösung von den Daten, Stabilität und Zeitdiskretisierung

3.1 | Das Lemma von Gronwall (diesmal richtig)

SATZ 3.1.1: LEMMA VON GRONWALL

Seien $T \in [0, \infty]$, $t_0 \in [0, T]$ sowie $a, b \in L^\infty(t_0, T)$ und $\lambda \in L^1(t_0, T)$ mit $\lambda(t) \geq 0$ für fast alle $t \in (t_0, T)$.

① Gilt nun fast überall in (t_0, T) die Abschätzung

$$a(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t \lambda(s) a(s) \, ds, \quad (57)$$

so folgt fast überall in (t_0, T) die Abschätzung

$$a(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t e^{\Lambda(t)-\Lambda(s)} \lambda(s) b(s) \, ds,$$

wobei $\Lambda(t) := \int_{t_0}^t \lambda(s) \, ds$.

② Ist b auf dem Intervall $[t_0, T]$ **absolut stetig**, so gilt fast überall in (t_0, T) die Abschätzung

$$a(t) \leq e^{\Lambda(t)} \left(b(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-\Lambda(s)} b'(s) \, ds \right).$$

③ Ist b **stetig** und **monoton wachsend**, so gilt fast überall in (t_0, T) die Abschätzung

$$a(t) \leq b(t) e^{\Lambda(t)}.$$

Beweis. Da $a, b \in L^\infty$ und $\lambda \in L^1$ ist, sind alle obigen Integralen wohldefiniert, da mit der HÖLDERSchen Ungleichung gilt

$$\int_{t_0}^t a(s) \lambda(s) \, ds \leq \|a\|_{L^\infty} \|\lambda\|_{L^1} < \infty.$$

① Wir setzen $\tilde{a}(t) := e^{\Lambda(t)} \int_{t_0}^t \lambda(s) a(s) \, ds$. Dann gilt fast überall nach dem Hauptsatz für absolut stetige Funktionen

$$\begin{aligned} \tilde{a}'(t) &= e^{-\Lambda(t)} (-\lambda(t)) \int_{t_0}^t \lambda(s) a(s) \, ds + e^{-\Lambda(t)} \lambda(t) a(t) \\ &= \underbrace{e^{-\Lambda(t)} \lambda(t)}_{\geq 0} \underbrace{\left(a(t) - \int_{t_0}^t \lambda(s) a(s) \, ds \right)}_{\leq b(t) \text{ nach (57)}} \leq e^{-\Lambda(t)} \lambda(t) b(t). \end{aligned} \quad (58)$$

Da Ableitungsregeln wie die Ketten- oder Produktregel mit dem Hauptsatz bewiesen werden können, gelten diese auch für das Ableiten absolut stetiger Funktionen.

Dann

$$\tilde{a}(t_0) = e^{-\Lambda(t_0)} \int_{t_0}^{t_0} \lambda(s) a(s) \, ds = 0$$

gilt, erhalten wir durch Integration von (58) die fast überall geltende Abschätzung

$$\tilde{a}(t) \leq \int_{t_0}^t e^{-\Lambda(s)} \lambda(s) b(s) \, ds. \quad (59)$$

Also gilt nach Voraussetzung

$$e^{-\Lambda(t)} (a(t) - b(t)) \stackrel{(57)}{\leq} e^{-\Lambda(t)} \int_{t_0}^{t_0} \lambda(s) a(s) ds = \tilde{a}(t) \stackrel{(59)}{\leq} \int_{t_0}^t e^{-\Lambda(s)} \lambda(s) b(s) ds,$$

Die Behauptung folgt durch Multiplikation mit $e^{\Lambda(t)}$ und anschließendem Umstellen.

- ② Ist b absolut stetig, so ist b fast überall differenzierbar und somit folgt mit partieller Integration fast überall

$$\int_{t_0}^t \underbrace{e^{-\Lambda(s)} \lambda(s)}_{v'} \underbrace{b(s)}_u ds = \int_{t_0}^t e^{-\Lambda(s)} b'(s) ds - e^{-\Lambda(t)} b(t) + b(t_0),$$

da $e^{\Lambda(t_0)} = e^0 = 1$ ist, und somit durch Addition von $e^{-\Lambda(t)} b(t)$ auf beiden Seiten und der Multiplikation mit $e^{\Lambda(t)}$

$$e^{\Lambda(t)} \left(b(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-\Lambda(s)} b'(s) ds \right) = \int_{t_0}^t e^{\Lambda(t)-\Lambda(s)} \lambda(s) b(s) ds + b(t),$$

also folgt die Ungleichung aus ①.

- ③ Ist b monoton wachsend und stetig, so gilt wie im Beweis der Vorform des Lemmas von GRONWALL

$$\begin{aligned} a(t) &\leq b(t) + \int_{t_0}^t e^{\Lambda(t)-\Lambda(s)} \lambda(s) \underbrace{b(s)}_{\leq b(t)} ds \\ &\leq b(t) \left(1 + \int_{t_0}^t e^{\Lambda(t)-\Lambda(s)} \lambda(s) ds \right) = b(t) \left(1 + e^{\Lambda(t)} (1 - e^{-\Lambda(t)}) \right) = e^{\Lambda(t)} b(t). \end{aligned} \quad \square$$

Ein Problem bei der vorangegangenen Formulierung des Lemmas von GRONWALL ist, die Voraussetzung, dass λ nichtnegativ sein muss. Ist λ nichtnegativ, so ist die rechte Seite $b(t)e^{\Lambda(t)}$ groß. Wir formulieren deshalb eine andere Version des Lemmas von GRONWALL mit einer stärkeren Voraussetzung, welche allgemeiner ist als die Aussage, die wir in dem Beweis des Satzes über die einseitige LIPSCHITZ-Bedingung gezeigt haben.

Lemma 3.1.1 (Differenzielles Lemma von GRONWALL)

Seien $a: [t_0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ eine absolut stetige Funktionen und $\lambda, g \in L^1(t_0, T)$ integrierbar. Gilt für fast alle $t \in (t_0, T)$

$$a'(t) \leq g(t) + \lambda(t)a(t), \tag{60}$$

so folgt für fast alle $t \in (t_0, T)$

$$a(t) \leq e^{\Lambda(t)} a(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\Lambda(t)-\Lambda(s)} g(s) ds$$

Bemerkung 3.1.2 Die Voraussetzung (60) ist stärker als die Voraussetzung (57) im vorangegangenen Satz, da die Integration linear ist und somit schwache Ungleichungen erhält. Somit erhält man unter der Voraussetzung (60) durch einfaches Integrieren auch die Voraussetzung (57), durch differenzieren von (57) aber im Allgemeinen nicht (60).

Bemerkung 3.1.3 Die Funktion λ darf auch negativ sein.

Bemerkung 3.1.4 Da $g, \lambda \in L^1(t_0, T)$ eigentlich Äquivalenzklassen von absolutintegrierbaren Funktionen sind, ergeben die Punktauswertungen $g(t)$ oder $\lambda(t)$ keinen Sinn. Die Voraussetzung ist so zu verstehen, dass wir uns feste, integrierbare Funktion g und λ nehmen, für die Punktauswertung dann Sinn ergibt.

Beweis. Wir definieren

$$\tilde{a}(t) := e^{-\Lambda(t)} a(t), \quad (61)$$

welche als Komposition absolut stetiger Abbildungen absolut stetig und somit fast überall differenzierbar ist. Dann gilt für fast alle t

$$\tilde{a}'(t) = \underbrace{e^{-\Lambda(t)}}_{>0} (a'(t) - \lambda(t)a(t)) \stackrel{(60)}{\leq} e^{-\Lambda(t)} g(t).$$

Durch Integration über (t_0, t) folgt mit dem Hauptsatz für absolut stetige Funktionen

$$\tilde{a}(t) - \tilde{a}(t_0) \leq \int_{t_0}^t e^{-\Lambda(s)} g(s) \, ds$$

und daher mit (61) (impliziert $\tilde{a}(t_0) = a(t_0)$ wie oben)

$$e^{-\Lambda(t)} a(t) \leq a(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-\Lambda(s)} g(s) \, ds.$$

Durch Multiplikation mit $e^{\Lambda(t)} > 0$ folgt die Behauptung. □

3.2 | Stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten

Wir behandeln nun eine weitere der Fragen nach HADAMARD aus der Einführung: wie verändert sich die Lösung, wenn man die Parameter (welche man in der Praxis nie exakt kennt) ein wenig verändert?

DEFINITION 3.2.1 (DATEN)

Die **Daten** des Anfangswertproblems (26) sind t_0, u_0 und f .

Daten

SATZ 3.2.1: STETIGE ABHÄNGIGKEIT VON DEN ANFANGSWERTEN

Unter den Voraussetzungen der ersten Version des Satzes PICARD-LINDELÖF sei die Funktion u die (eindeutige!) Lösung des Anfangswertproblems (26) für ein $u_0 \in X$ aus dem Existenzintervall $I \subset [0, T]$. Für beliebige $v_0 \in B(u_0, r)$ (offen!) ist das Anfangswertproblem (26) mit den Daten t_0, v_0 und f eindeutig lösbar auf einem Intervall $J \subset I$. Für alle $t \in J$ erfüllt diese Lösung v

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{L|t-t_0|} \|u_0 - v_0\| \leq e^{LT} \|u_0 - v_0\|, \quad (62)$$

wobei L die LIPSCHITZ-Konstante von f ist.

Bemerkung 3.2.2 Unter den Voraussetzungen des globalen Satzes von PICARD-LINDELÖF existieren zu $u_0, v_0 \in X$ jeweils genau eine Lösung u beziehungsweise v auf ganz $[0, T]$. Für alle $t \in [0, T]$ gilt (62) und somit folgt

$$\|u - v\|_{C([0, T]; X)} \leq e^{LT} \|u_0 - v_0\|. \quad (63)$$

Der Lösungsoperator, welche einen Anfangswert auf die zugehörige Lösung abbildet, ist als Abbildung von $B(u_0, r)$ in $C([0, T]; X)$ LIPSCHITZ-stetig.

Kann man das beschränkte Intervall $[0, T]$ durch ein halboffenes Intervall $[t_0, \infty)$ ersetzen, erhalten wir mit dem obigen Satz, dass

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{L|t-t_0|} \|u_0 - v_0\|$$

für alle $t \geq t_0$ gilt. Eine Abschätzung wie in (63) ist jedoch nicht möglich, da $e^{L|t-t_0|} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ gilt: die Lösungen können sich exponentiell schnell voneinander entfernen.

Beispiel 3.2.3 (Logistisches Wachstum)

Betrachte

$$\begin{cases} u'(t) = tu(t)(u(t) - 2), \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

mit der Lösung $u(t) = \frac{2u_0}{u_0 + (2-u_0)e^{t^2}}$ für $t \geq 0$. Für eine qualitative Analyse der Differentialgleichung betrachte das entsprechende Übungsvideo vom Anfang der Vorlesung.. \diamond

Beweis. Da der Ball $B(u_0, r)$ offen ist, existiert eine positive Zahl $r' \in (0, r)$, sodass $B(v_0, r') \subset B(u_0, r)$. Da die Einschränkung von f auf $[0, T] \times \overline{B}(v_0, r')$ weiterhin die Voraussetzung des ersten Satzes von PICARD-LINDELÖF erfüllt, existiert genau eine Lösung v des Anfangswertproblems (26) mit den Daten t_0, v_0 und f auf einem Intervall $J \subset I \subset [0, T]$.

Für alle $t \in J$ gilt

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &\stackrel{(27)}{=} \left\| u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds - v_0 - \int_{t_0}^t f(s, v(s)) \, ds \right\| \\ &\stackrel{\Delta \neq}{\leq} \|u_0 - v_0\| + \int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| \, ds \\ &\leq \|u_0 - v_0\| + L \int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} \|u(s) - v(s)\| \, ds. \end{aligned}$$

Mit $a(t) := \|u(t) - v(t)\|$ und $\lambda := L \geq 0$ und $b := \|u_0 - v_0\|$ folgt mit dem Lemma von GRONWALL, da b monoton wachsend ist

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{L|t_0 - t|} \|u_0 - v_0\|.$$

Für $t < t_0$ muss zuvor eine Transformation $t \rightarrow t_0 - t$ durchgeführt werden (selber überlegen!). \square

Was passiert, wenn wir die Anfangswertbedingung fest lassen aber die rechte Seite verändern?

SATZ 3.2.2: STETIGE ABHÄNGIGKEIT VON DER RECHTEN SEITE

Seien $f, g: [0, T] \times \overline{B}(u_0, r) \rightarrow X$ zwei rechte Seiten, welche die Voraussetzungen des Satzes von PICARD-LINDELÖF erfüllen. Dann haben die Anfangswertprobleme

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad \text{beziehungsweise} \quad \begin{cases} v'(t) = g(t, v(t)), \\ v(t_0) = u_0 \end{cases}$$

jeweils genau eine Lösung u beziehungsweise v auf einem gemeinsamen Existenzintervall I .

Für alle $t \in I$ gilt dann

$$\|u(t) - v(t)\| \leq |t - t_0| \exp(\min\{L_f, L_g\}|t - t_0|) \cdot \underbrace{\sup_{\substack{t \in [0, T] \\ \omega \in \overline{B}(u_0, r)}} |f(t, \omega) - g(t, \omega)|}_{= \|f - g\|_{C([0, T] \times \overline{B}(u_0, r); X)}}$$

und somit insbesondere

$$\|u - v\|_\infty \leq T \exp(\min\{L_f, L_g\}T) \|f - g\|_\infty$$

wobei L_f beziehungsweise L_g die LIPSCHITZ-Konstanten von f beziehungsweise g sind.

Beweis. Für alle $t \in I \cap J$ gilt, da f eine L_f -LIPSCHITZ-Bedingung erfüllt

$$\begin{aligned}
 \|u(t) - v(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) - g(s, v(s)) \, ds \right\| \\
 &\stackrel{\Delta \neq}{\leq} \int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| \, ds + \int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} \|f(s, v(s)) - g(s, v(s))\| \, ds \\
 &\leq \int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} L_f \|u(s) - v(s)\| \, ds + \int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} \|f - g\|_\infty \, ds \\
 &= L_f \int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} \|u(s) - v(s)\| \, ds + |t - t_0| \|f - g\|_\infty.
 \end{aligned}$$

Ganz analog gilt

$$\|u(t) - v(t)\| \leq L_g \int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} \|u(s) - v(s)\| \, ds + |t - t_0| \|f - g\|_\infty.$$

Setzen wir beide Aussage zusammen, erhalten wir

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \min\{L_f, L_g\} \int_{t_0 \wedge t}^{t_0 \vee t} \|u(s) - v(s)\| \, ds + |t - t_0| \|f - g\|_\infty$$

und mit $\lambda := \min\{L_f, L_g\} \geq 0$ und $b(t) := |t - t_0| \|f - g\|_\infty$ (monoton wachsend) und dem Lemma von GRONWALL folgt die Behauptung und für $t < t_0$ wenden wir die bekannte Transformation an. \square

3.3 | Dissipative Systeme

01.02.2021

In der Abhängigkeit der Lösung von den Daten taucht ein exponentieller Faktor auf, der für große Zeitintervalle sehr groß ist. System, in denen wir einen Faktor der Form e^{-t} haben, heißen **dissipativ**.



Motivation

Wir betrachten die Anfangswertprobleme

$$\begin{cases} u'(t) = \pm u(t), \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

mit den Lösungen $u_1(t) = e^t u_0$ und $u_2(t) = e^{-t} u_0$.

An den unteren Richtungsfelder und den Diagrammen der Beispiellösungsfamilien kann man leicht erkennen, dass u_1 eine sehr ungünstige Lösung ist, da auch schon für Anfangswerte u_0 , die sich gering von 0 unterscheiden, die Lösungen sehr schnell wachsen.

Für u_2 kann man genau das Gegenteil beobachten. Für beliebige Anfangswerte konvergieren die Lösung exponentiell gegen Null.

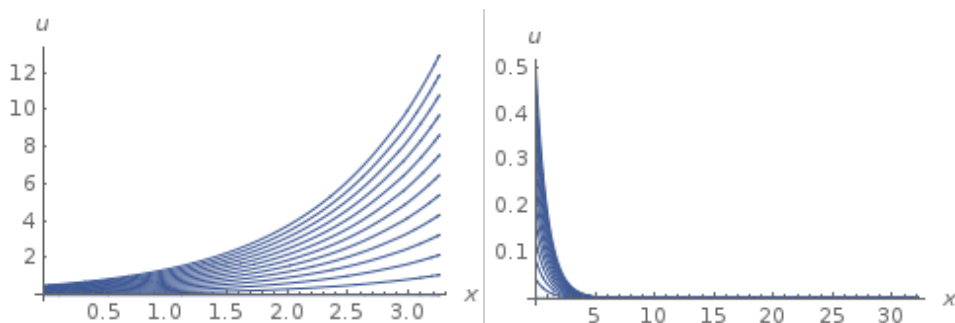


Abb. 22: [Quelle: WolframAlpha]

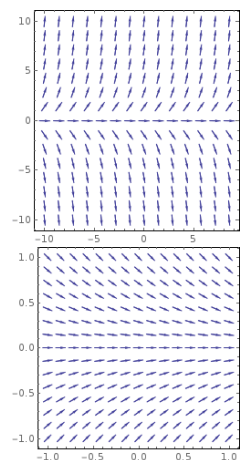


Abb. 21: [Quelle: WolframAlpha]

Sei im Folgenden stets $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \| \cdot \|)$ ein HILBERT-Raum.

DEFINITION 3.3.1 ((STARK) DISSIPATIVE FUNKTION)

Eine Funktion $f: [0, T] \times H \rightarrow H$ heißt

- ① **dissipativ**, wenn für alle $t \in [0, T]$ und alle $u, v \in H$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\langle f(t, u) - f(t, v), u - v \rangle \leq 0.$$

- ② **stark dissipativ**, wenn ein $\mu > 0$ existiert, sodass für alle $t \in [0, T]$ und alle $u, v \in H$

$$\langle f(t, u) - f(t, v), u - v \rangle \leq -\mu \|u - v\|^2.$$

dissipativ

Bemerkung 3.3.2 Ein Operator ist stark dissipativ, wenn er eine einseitige LIPSCHITZ-Bedingung mit negativer LIPSCHITZ-Konstante $L := -\mu < 0$ erfüllt.

Beispiel 3.3.3 Betrachten wir das Anfangswert aus der Motivation mit $-$ und $u_0 =$. Dann ist $f(t, v) = -v$ eine stark dissipative Funktion mit Dissipativitätskonstante $\mu := 1 > 0$, da für alle $t, u, v \in \mathbb{R}$

$$\langle f(t, u) - f(t, v), u - v \rangle = \langle v - u, u - v \rangle = -\|u - v\|^2$$

gilt. ◇

Beispiel 3.3.4 (Lineare Systeme I)

Betrachten wir für $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ein lineares System der Form

$$u'(t) + Au(t) = b(t),$$

so ist die rechte Seite $f(t, v) := b(t) - Av$ für $v \in \mathbb{R}^d$. Betrachte

$$-\mu\|u - v\|^2 \stackrel{!}{\geq} \langle f(t, u) - f(t, v), u - v \rangle = \langle Av - Au, u - v \rangle = -\langle A(u - v), u - v \rangle.$$

Die geforderte Ungleichung ist dann äquivalent zu

$$\langle A(u - v), u - v \rangle \geq \mu\|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d$$

Wegen der Linearität von A ist das zu

$$\langle Aw, w \rangle \geq \mu\|w\|^2 \quad \forall w \in \mathbb{R}^d$$

äquivalent. Somit ist f genau dann stark dissipativ, wenn A eine **positiv definite** Matrix ist.

Ist A symmetrisch, so dies der Fall, wenn alle Eigenwerte λ von A positiv sind und man kann μ also Minimum dieser Eigenwerte wählen. ◇

SATZ 3.3.1: STETIGE ABHÄNGIGKEIT VON DEN ANFANGSWERTEN BEI DISSIPATIVEN SYSTEMEN

Seien $f: [0, T] \times H \rightarrow H$ eine **stark dissipative** Funktion mit Dissipativitätskonstante $\mu \geq 0$ und u, v Lösung des Anfangswertproblems (26) mit $u(t_0) = u_0 \in H$ und $v(t_0) = v_0 \in H$. Für alle t aus einem gemeinsamen Existenzintervall I und alle $s \in [t_0, T]$ gilt

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{-\mu(t-s)}\|u(s) - v(s)\| \leq e^{-\mu(t-t_0)}\|u_0 - v_0\| \leq \|u_0 - v_0\|.$$

Bemerkung 3.3.5 Man beachte, dass die schöne Eigenschaft des e^{-t} -Faktors nur für s rechts von dem Existenzintervall gilt, ähnlich wie bei der **einseitigen LIPSCHITZ-Bedingung**.

Bemerkung 3.3.6 (Langzeitverhalten) Existieren die Lösungen u und v für alle $t \geq t_0$, so folgt insbesondere $\|u(t) - v(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ exponentiell schnell. Diesem „**Langzeitverhalten**“ werden wir uns im übernächsten Abschnitt zuwenden.

Beweis. Wir zeigen nur die Abschätzung

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{\mu(t_0-t)}\|u_0 - v_0\|.$$

Für alle $t \in I$ und alle $u, v \in \mathcal{C}^1(I; H)$ gilt nach Lemma 2.5.6

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t) - v(t)\|^2 &= \langle u'(t) - v'(t), u(t) - v(t) \rangle \\ &= \langle f(t, u(t)) - f(t, v(t)), u(t) - v(t) \rangle \leq -\mu\|u(t) - v(t)\|^2, \end{aligned}$$

wobei die Abschätzung aus der starken Dissipativität von f folgt. Somit ist

$$\frac{d}{dt}\|u(t) - v(t)\|^2 \leq -2\mu\|u(t) - v(t)\|^2.$$

Die differentielle Version des Lemmas von GRONWALL liefert

$$\|u(t) - v(t)\|^2 \leq \exp\left(-\int_{t_0}^t 2\mu d\tau\right) \|u(t_0) - v(t_0)\|^2 = e^{-2\mu(t-t_0)} \|u(t_0) - v(t_0)\|^2.$$

Mit der Stetigkeit und strikten Monotonie der Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ folgt die Behauptung. \square

Beispiel 3.3.7 (Lineare Systeme II)

Nehmen wir nun an, das folgende lineare System sei stark dissipativ

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Ist $u_0 = 0$, so ist $u \equiv 0$ die einzige Lösung.

Für beliebige Anfangswerte u_0 und der zugehörigen Lösung u folgt mit Satz 3.3.1

$$\|u(t)\| = \|u(t) - 0\| \leq e^{-\mu(t-t_0)} \|u_0 - 0\| = e^{-\mu(t-t_0)} \|u_0\|.$$

Für den Propagator U folgt nun für alle $t > t_0$ die Abschätzung

$$\|U(t, t_0)\|_{L(H)} \stackrel{\text{Def.}}{=} \sup_{u_0 \neq 0} \frac{\|U(t, t_0)u_0\|}{\|u_0\|} = \sup_{u_0 \neq 0} \frac{\|u(t)\|}{\|u_0\|} = e^{-\mu(t-t_0)}. \quad (64)$$

\diamond

Bemerkung 3.3.8 (Dissipativität und Anfangswerte und Diskretisierung)

Dissipative Strukturen, wie sie zum Beispiel $-\Delta$ besitzt, geben uns dieses exponentiell abfallende Verhalten. Man stelle sich ein Wasserglas vor, in das wir einen Tintentropfen hineinfallen lassen. Mit der Zeit strebt die Verteilung der Tinte in dem Glas gegen die Gleichverteilung. Wenn man stattdessen den gleichen Tropfen an einem anderen Ort in das Glas hinein tropfen lässt, strebt die Verteilung gegen exakt die selbe Gleichverteilung. Den Einfluss, den die Differenz dieser verschiedenen Anfangswerte auf das Verhalten der Lösung haben, verschwindet also mit der Zeit. Bei der Wärmeverteilung in einem Stab ergibt sich ein ganz ähnliches Verhalten.

Dieses für dissipative Systeme typische Verhalten ist hilfreich für die Diskretisierung einer Differentialgleichung, da diese Verhalten bedeutet, dass die Rechenfehler im Laufe der Zeit unwichtiger werden.

3.4 Zeitdiskretisierung durch einfache Einschrittverfahren

01.02.2021

Einschrittverfahren sind eigentlich grundlegende Themen der Numerik von Differentialgleichungen, aber für uns auch von theoretischem Interesse; ein typischer Ansatz für Existenzbeweise ist das Zurückführen eines komplizierten Problems auf einfachere Probleme durch Approximation. Konkrete diskretisieren wir die Zeitabhängigkeit; wir betrachten für jeden einzelnen „Zeitschritt“ die diskretisierten, nun von der Zeit unabhängigen, Probleme, die einfacher sind. Die Lösungen für jeden Zeitschritt kann man dann zu einem Polygonzug von leichten Lösungen verbinden und hofft, dass die approximierende Folge von Lösungen gegen die Lösung des komplizierteren Problems konvergiert. Probleme wie Konvergenzgeschwindigkeit oder Rechenaufwand sind dabei unwichtig und werden der Numerik überlassen. Wir beschränken uns in diesem Kapitel auf das implizite und das explizite EULER-Verfahren. Wir werden sehen, dass wenn wir ein **dissipatives** System mit dem impliziten EULER-Verfahren diskretisieren, die Rechenfehler schnell verschwinden.

Für $f: [0, T] \times X \rightarrow X$ betrachten wir wieder (26). Wir wollen Lösungen $u: [0, T] \rightarrow X$ approximieren.



Idee: Einschrittverfahren

Wir zerteilen das Intervall $[0, T]$ äquidistant durch eine Folge von $N + 1$ Stützstellen, zum Beispiel $\{t_k := \frac{nT}{N}\}_{n=0}^N$, in N Intervalle, sodass

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$$

gilt. Wir approximieren $u(t_n) \approx u^{(n)} \in X$ und suchen eine Folge $(u^{(n)})_{n=0}^N \subset X$ und konstruieren diese, indem wir die Ableitung $u'(t_n)$ durch

$$\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t_n} = \frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\Delta t_n}$$

approximieren, wobei $\Delta t_n := t_{n+1} - t_n = \frac{T}{N} \equiv \Delta t$ für $k \in \{0, \dots, n-1\}$ die **Schrittweite** ist. Wir wählen zum Beispiel $u^0 \approx u^{(0)}$.

Damit erhalten wir verschiedene Verfahren, in dem wir $f(t_k, u(t_k))$ wie folgt

$$\frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\Delta t_n} = \begin{cases} f(t_n, u^{(n)}), & \text{explizites EULER-Verfahren,} \\ f(t_{n+1}, u^{(n+1)}), & \text{implizites EULER-Verfahren,} \\ f\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}, \frac{u^{(n)} + u^{(n+1)}}{2}\right), & \text{Mittelpunkt-Verfahren.} \end{cases} \quad (65)$$

approximieren.

Zu gegebenen $u^{(0)} \in X$ konstruieren wir also $(u^{(n)})_{n=0}^N$ durch

$$u^{(n+1)} = \begin{cases} u^{(n)} + \Delta t_n f(t_n, u^{(n)}), & \text{explizites EULER-Verfahren,} \\ u^{(n)} + \Delta t_n f(t_{n+1}, u^{(n+1)}), & \text{implizites EULER-Verfahren.} \end{cases}$$

Bemerkung 3.4.1 Diese Formeln kann man auf über die **numerischen Quadraturformeln** für das Integral in der Integralgleichung herleiten.

Bemerkung 3.4.2 (Explizit vs. Implizit) Das explizite Verfahren ist sehr **einfach** durchzuführen. Die Rekursionsformel gibt in **geschlossener Form** das nächste Folgenglied an.

Das implizite EULER-Verfahren erhält jedoch die **Dissipativität** (siehe später). Hier muss man jedoch eine **nichtlineare Gleichung lösen**, da $u^{(n+1)}$ auf beiden Seiten der Gleichung steht. Hierfür zieht man Methoden der Numerik (zum Beispiel NEWTON-Verfahren) heran.

Das explizite EULER-Verfahren

SATZ 3.4.1: DAS EXPLIZITE EULER-VERFAHREN

Sei $f: [0, T] \times X \rightarrow X$ eine stetige Funktion, welche der folgenden **strengeren LIP-SCHITZ-Bedingung** (bezüglich beider Argumente!) genügt: für alle $s, t \in [0, T]$ und $u, v \in X$ gilt.

$$\|f(s, u) - f(t, v)\| \leq L(\|s - t\| + \|u - v\|). \quad (66)$$

Wir setzen $w_0 := (1 + L\Delta t) \leq e^{L\Delta t}$. Dann ist $w_0^n \leq e^{Lt_n}$.

- ① Sowohl die Lösung $(u^{(n)})_{n=0}^N$ des expliziten EULER-Verfahrens als auch deren **diskrete Ableitung** $\left(\frac{u^{(n)} - u^{(n-1)}}{\Delta t}\right)_{n=1}^N$ sind bezüglich Δt **beschränkt**; es gilt

$$\|u^{(n)}\| \leq \|u^{(0)}\| + \frac{1}{L}(w_0^n - 1)(1 + \|f(0, u^{(0)})\|) \quad (67)$$

für alle $n \in \{0, \dots, N\}$ und

$$\left\|\frac{u^{(n)} - u^{(n-1)}}{\Delta t}\right\| \leq w_0^{n-1}(1 + \|f(0, u^{(0)})\|) - 1 \quad (68)$$

für alle $n \in \{1, \dots, N\}$.

- ② Die Lösungen sind **stabil**: Sind $(u^{(n)})_{n=0}^N$ und $(v^{(n)})_{n=0}^N$ Lösungen zu den Anfangswerten $u^{(0)}$ beziehungsweise v_0 , so gilt

$$\|u^{(n)} - v^{(n)}\| \leq w_0^n \|u^{(0)} - v_0\|$$

für alle $n \in \{0, \dots, N\}$.

- ③ Ist u die nach dem globalen Satz von PICARD-LINDELÖF existierende Lösung und $u \in \mathcal{C}^2([0, T]; X)$, so folgt für den **Diskretisierungsfehler** $e^{(n)} := u(t_n) - u^{(n)}$

$$\|e^{(n)}\| \leq w_0^n \left(\|e^{(0)}\| + \Delta t \int_0^{t_n} \|u''(t)\| dt \right). \quad (69)$$

Bemerkung 3.4.3 (Lineare Konvergenz) Approximiert die Folge der $((u^{(n)})_{n=0}^N)_{N \in \mathbb{N}}$ in geeigneter Weise die Lösung des Anfangswertproblems? Ist die Lösung regulärer, das heißt nicht nur $u \in \mathcal{C}^1([0, T]; X)$, sondern sogar $u \in \mathcal{C}^2([0, T]; X)$, so können wir die rechte Seite in (69) nach oben gegen $C_1 + C_2 \frac{T}{N} \|u''\|_{\mathcal{C}^2([0, T]; X)}$, also gegen $C_1 + C_3 \frac{1}{N}$ für (obgleich sehr große) Konstanten $C_1, C_2, C_3 \geq 0$ abschätzen. Somit liegt **lineare Konvergenz** vor. Dies ist eine typische Eigenschaft: höhere Regularität gibt bessere (Konvergenz-)Eigenschaften. Bei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten können wir beispielsweise exakte Lösungsformeln aufstellen, die zeigen, dass die Lösungen sogar unendlich oft differenzierbar sind.

Beweis. Zunächst gilt

$$w_0 = 1 + L\Delta t \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(L\Delta t)^k}{k!} = e^{L\Delta t}$$

und somit $w_0^n \leq e^{nL\Delta t} = e^{LT}$.

- ① Wir zeigen zunächst die Abschätzung (68). Für $n = 1$ gilt $u^{(1)} - u^{(0)} = \Delta t f(0, u^{(0)})$, also folgt $\frac{\|u^{(1)} - u^{(0)}\|}{\Delta t} \stackrel{(*)}{=} \|f(0, u^{(0)})\|$ und somit (68). Für $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned}
 \|u^{(n)} - u^{(n-1)}\| &= \|u^{(n-1)} - u^{(n-2)} + \Delta t \left(f(t_{n-1}, u^{(n-1)}) - f(t_{n-2}, u^{(n-2)}) \right) \| \\
 &\stackrel{\triangle \neq}{\leq} \|u^{(n-1)} - u^{(n-2)}\| + \Delta t L \left(\underbrace{|t_{n-1} - t_{n-2}|}_{=\Delta t} + \|u^{(n-1)} - u^{(n-2)}\| \right) \\
 &\leq \|u^{(n-1)} - u^{(n-2)}\| \underbrace{(1 + L\Delta t)}_{=w_0} + L(\Delta t)^2 \\
 &\leq w_0 w_0 \|u^{(n-2)} - u^{(n-3)}\| + L(\Delta t)^2 (1 + w_0) \\
 &\leq \dots \\
 &\leq w_0^{n-1} \|u^{(1)} - u^{(0)}\| + L(\Delta t)^2 \cdot \sum_{\ell=0}^{n-2} w_0^\ell \\
 &\leq w_0^{n-1} \|u^{(1)} - u^{(0)}\| + L(\Delta t)^2 \cdot \frac{w_0^{n-1} - 1}{w_0 - 1} \\
 &\stackrel{(*)}{=} \Delta t w_0^{n-1} \|f(0, u^{(0)})\| + L(\Delta t)^2 \frac{w_0^{n-1} - 1}{\Delta t L} \\
 &= \Delta t \left(w_0^{n-1} \|f(0, u^{(0)})\| + w_0^{n-1} - 1 \right) \\
 &= \Delta t \left(w_0^{n-1} (\|f(0, u^{(0)})\| + 1) - 1 \right),
 \end{aligned}$$

und somit folgt (68) durch Teilen durch Δt .

Ferner folgt unter Verwendung der soeben gezeigten Ungleichung (68)

$$\begin{aligned}
 \|u^{(n)}\| &\stackrel{\triangle \neq}{\leq} \|u^{(n)} - u^{(n-1)}\| + \|u^{(n-1)}\| \\
 &\leq \|u^{(n-1)}\| + \Delta t \left(w_0^{n-1} (\|f(0, u^{(0)})\| + 1) - 1 \right) \\
 &\leq \|u^{(n-1)}\| + \Delta t w_0^{n-1} (\|f(0, u^{(0)})\| + 1) \\
 &\leq \|u^{(n-2)}\| + \Delta t (w_0^{n-1} + w_0^{n-2}) (\|f(0, u^{(0)})\| + 1) \\
 &\leq \dots \\
 &\leq \|u^{(0)}\| + \Delta t (\|f(0, u^{(0)})\| + 1) \sum_{k=0}^{n-1} w_0^k = \|u^{(0)}\| + \Delta t (\|f(0, u^{(0)})\| + 1) \frac{w_0^n - 1}{L\Delta t} \\
 &= \|u^{(0)}\| + \frac{1}{L} (\|f(0, u^{(0)})\| + 1) (w_0^n - 1).
 \end{aligned}$$

- ② Es gilt

$$\begin{aligned}
 \|u^{(n)} - v^{(n)}\| &= \|u^{(n-1)} - v^{(n-1)} + \Delta t \left(f(t_{n-1}, u^{(n-1)}) - f(t_{n-1}, v^{(n-1)}) \right) \| \\
 &\stackrel{(66)}{\leq} \|u^{(n-1)} - v^{(n-1)}\| + L\Delta t \|u^{(n-1)} - v^{(n-1)}\| \\
 &= (1 + L\Delta t) \|u^{(n-1)} - v^{(n-1)}\| = w_0 \|u^{(n-1)} - v^{(n-1)}\| \\
 &\leq \dots \leq w_0^n \|u^{(0)} - v^{(0)}\|.
 \end{aligned}$$

- ③ Wir zeigen zunächst eine **Fehlerrgleichung**, eine Abschätzung für die Ableitung von $e^{(n)}$.

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Delta t} (e^{(n+1)} - e^{(n)}) &= \frac{1}{\Delta t} (u(t_{n+1}) - u(t_n) - (u^{(n+1)} - u^{(n)})) \\
 &= \frac{1}{\Delta t} (u(t_{n+1}) - u(t_n) - \Delta t f(t_n, u^{(n)})) \\
 &= \frac{1}{\Delta t} (u(t_{n+1}) - u(t_n)) - f(t_n, u^{(n)}) \\
 &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} u'(t) dt - f(t_n, u^{(n)}) \\
 &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} 1 \cdot u'(t) dt \underbrace{- u'(t_n) + f(t_n, u(t_n))}_{=0} - f(t_n, u^{(n)}) \\
 &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t) u''(t) dt + f(t_n, u(t_n)) - f(t_n, u^{(n)}).
 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
 \|e^{(n+1)}\| &\stackrel{\Delta \neq}{\leq} \|e^{(n)}\| + \int_{t_n}^{t_{n+1}} |t_{n+1} - t| \|u''(t)\| dt + \Delta t \underbrace{\|f(t_n, u(t_n)) - f(t_n, u^{(n)})\|}_{\stackrel{(6.6)}{\leq} \Delta t L \|u(t_n) - u^{(n)}\| = \Delta t L \|e^{(n)}\|} \\
 &\leq w_0 \|e^{(n)}\| + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \underbrace{|t_{n+1} - t|}_{\leq \Delta t} \|u''(t)\| dt \\
 &\leq w_0 \|e^{(n)}\| + \Delta t \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u''(t)\| dt \\
 &\leq w_0^2 \|e^{(n-1)}\| + \Delta t \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u''(t)\| dt + w_0 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u''(t)\| dt \right) \leq \dots \\
 &\leq w_0^{n+1} \|e^{(0)}\| + \Delta t w_0^n \int_0^{t_{n+1}} \|u''(t)\| dt \\
 &\leq w_0^{n+1} \left(\|e^{(0)}\| + \Delta t \int_0^{t_{n+1}} \|u''(t)\| dt \right),
 \end{aligned}$$

da $w_0 > 1$ gilt. □

Das implizite EULER-Verfahren

SATZ 3.4.2: DAS IMPLIZITE EULER-VERFAHREN

Sei $f: [0, T] \times X \rightarrow X$ eine stetige Funktion, welche der obigen **strengerem LIPSCHITZ-Bedingung** genügt. Dann existiert **genau** eine Lösung $(u^{(n)})$ des implizite EULER-Verfahrens, **wenn** $\Delta t < \frac{1}{L}$ gilt. Für diese Folge gelten die folgenden **Abschätzungen** gelten, wobei $w_1 := (1 - L\Delta t)^{-1}$ ist:

- ① $\|u^{(n)}\| \leq \|u^{(0)}\| + \frac{1}{L}(w_1^n - 1)(1 + \|f(0, u^{(0)})\|)$ für alle $n \in \{0, \dots, N\}$,
- ② $\frac{1}{\Delta t} \|u^{(n)} - u^{(n-1)}\| \leq w_1^n (1 + \|f(0, u^{(0)})\|) - 1$ für alle $n \in \{1, \dots, N\}$.

Bemerkung 3.4.4 Ist die $\frac{1}{L} - \Delta t$ klein, so ist w_1 sehr groß.

Beweis. (Tutoriumsaufgaben 12.1 und 12.2) Einzigkeit der Lösung. Sei $n \in \{1, \dots, N\}$. Wir müssen zeigen, dass zu jedem gegebenen $u^{(n-1)}$ ein $u^{(n)}$ eindeutig bestimmt werden kann. Betrachte die **Rekursionsgleichung**

$$u^{(n)} = u^{(n-1)} + \Delta t f(t_n, u^{(n)}) \quad (70)$$

und definiere $T_n: X \rightarrow X$, $u \mapsto u^{(n-1)} + \Delta t f(t_n, u)$. Jeder Fixpunkt von T_n ist die Lösung von (70). Die Abbildung T_n ist eine **Kontraktion**, denn für $u, v \in X$ gilt

$$\|T_n u - T_n v\| = \Delta t \|f(t_n, u) - f(t_n, v)\| \stackrel{(66)}{\leq} \underbrace{\Delta t \cdot L}_{<1} \|u - v\|.$$

Nach dem **Fixpunktsatz von BANACH** existiert genau ein Fixpunkt von T_n und somit eine eindeutige Lösung von (70).

② Zunächst gilt die Ungleichung für $n = 1$:

$$\begin{aligned} \|u^{(1)} - u^{(0)}\| &\stackrel{(65)}{=} \Delta t \|f(t_1, u^{(1)})\| \stackrel{\triangle \neq}{\leq} \Delta t \left(\|f(t_1, u^{(1)}) - f(0, u^{(0)})\| + \|f(0, u^{(0)})\| \right) \\ &\stackrel{(66)}{=} \Delta t \left(\underbrace{L|t_1 - 0|}_{=\Delta t} + L\|u^{(1)} - u^{(0)}\| + \|f(0, u^{(0)})\| \right). \end{aligned}$$

Durch Umstellen folgt

$$\begin{aligned} \|u^{(1)} - u^{(0)}\| &\leq \frac{L(\Delta t)^2 + \Delta t \|f(0, u^{(0)})\|}{1 - L\Delta t} = w_1 (L(\Delta t)^2 + \Delta t \|f(0, u^{(0)})\|) \\ &= w_1(\Delta t) \left(1 - \frac{1}{w_1} + \|f(0, u^{(0)})\| \right) = \Delta t \left(w_1 \left(1 + \|f(0, u^{(0)})\| \right) - 1 \right), \end{aligned} \tag{71}$$

da $L(\Delta t) = 1 - (1 - L\Delta t) = 1 - \frac{1}{w_1}$ gilt. Für $n \in \{2, \dots, N\}$ gilt

$$\begin{aligned} \|u^{(n)} - u^{(n-1)}\| &\stackrel{(65)}{=} \left\| u^{(n-1)} - u^{(n-2)} + \Delta t \left(f(t_n, u^{(n)}) - f(t_{n-1}, u^{(n-1)}) \right) \right\| \\ &\stackrel{\triangle \neq}{\leq} \left\| u^{(n-1)} - u^{(n-2)} \right\| + \Delta t \left\| f(t_n, u^{(n)}) - f(t_{n-1}, u^{(n-1)}) \right\| \\ &\stackrel{(66)}{\leq} \left\| u^{(n-1)} - u^{(n-2)} \right\| + L(\Delta t) \left(\underbrace{|t_n - t_{n-1}|}_{=\Delta t} + \|u^{(n)} - u^{(n-1)}\| \right). \end{aligned}$$

Durch Umstellen folgt

$$(1 - L\Delta t) \|u^{(n)} - u^{(n-1)}\| \leq \|u^{(n-1)} - u^{(n-2)}\| + L(\Delta t)^2$$

und somit

$$\|u^{(n)} - u^{(n-1)}\| \leq w_1 \|u^{(n-1)} - u^{(n-2)}\| + w_1 L(\Delta t)^2 \tag{72}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(72)}{\leq} w_1 \left(w_1 \|u^{(n-2)} - u^{(n-3)}\| + w_1 L(\Delta t)^2 \right) + w_1 L(\Delta t)^2 \\ &= w_1^2 \|u^{(n-2)} - u^{(n-3)}\| + L(\Delta t)^2 (w_1 + w_1^2) \\ &\leq \dots \leq w_1^{n-1} \|u^{(1)} - u^{(0)}\| + L(\Delta t)^2 \sum_{k=1}^{n-1} w_1^k \\ &\stackrel{(71)}{\leq} w_1^{n-1} \Delta t \left(w_1 \left(1 + \|f(0, u^{(0)})\| \right) - 1 \right) + L(\Delta t)^2 \frac{w_1^n - w_1}{w_1 - 1} \\ &= \Delta t \left(w_1^n \left(1 + \|f(0, u^{(0)})\| \right) - w_1^{n-1} + \underbrace{L(\Delta t)}_{=\frac{w_1-1}{w_1}} \frac{w_1^n - w_1}{w_1 - 1} \right) \\ &= \Delta t \left(w_1^n \left(1 + \|f(0, u^{(0)})\| \right) - \cancel{w_1^{n-1}} + \cancel{w_1^{n-1}} - 1 \right). \end{aligned} \tag{73}$$

① Somit folgt für $n \in \{1, \dots, N\}$ (für $n = 0$ ist die Ungleichung klar)

$$\begin{aligned}
 \|u^{(n)}\| &\stackrel{\Delta \neq}{\leq} \|u^{(n-1)}\| + \|u^{(n)} - u^{(n-1)}\| \stackrel{\Delta \neq}{\leq} \|u^{(n-2)}\| + \|u^{(n-1)} - u^{(n-2)}\| + \|u^{(n)} - u^{(n-1)}\| \\
 &\stackrel{\Delta \neq}{\leq} \dots \leq \|u^{(0)}\| + \sum_{k=1}^n \|u^{(k)} - u^{(k-1)}\| \stackrel{(73)}{\leq} \|u^{(0)}\| + \Delta t \sum_{k=1}^n w_1^k (1 + \|f(0, u^{(0)})\|) - 1 \\
 &= \|u^{(0)}\| + \Delta t (1 + \|f(0, u^{(0)})\|) \left(\sum_{k=1}^n w_1^k \right) - \underbrace{n\Delta t}_{\geq 0} \\
 &\leq \|u^{(0)}\| + \frac{1}{L} \frac{w_1 - 1}{w_1} (1 + \|f(0, u^{(0)})\|) w_1 \frac{w_1^n - 1}{w_1 - 1} \\
 &= \|u^{(0)}\| + \frac{1}{L} (w_1^n - 1) (1 + \|f(0, u^{(0)})\|).
 \end{aligned}$$

□

Sei nun $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, |\cdot|)$ ein HILBERT-Raum. Für $v, w \in H$ gilt

$$\langle v - w, w \rangle = \frac{1}{2} (|v|^2 - |w|^2 + |v - w|^2) \geq \frac{1}{2} (|v|^2 - |w|^2).$$

Für $(w^{(n)})_{n=0}^N \subset H$ gilt

$$\left\langle \frac{w^{(n+1)} - w^{(n)}}{\Delta t}, w^{(n+1)} \right\rangle = \frac{1}{\Delta t} \langle w^{(n+1)} - w^{(n)}, w^{(n+1)} \rangle \geq \frac{1}{2\Delta t} (|w^{(n+1)}|^2 - |w^{(n)}|^2). \quad (74)$$

Als Übungsaufgabe zeigt man: Ist f dissipativ, so ist das implizite EULER-Verfahren auch für $L\Delta t > 1$ immer wohldefiniert.

SATZ 3.4.3: DAS IMPLIZITE EULER-VERFAHREN UND (STARK) DISSIPATIVE SYSTEME

Seien die rechte Seite f dissipativ mit Dissipativitätskonstante $\mu \geq 0$ und $(u^{(n)})_{n=0}^N$ sowie $(v^{(n)})_{n=0}^N$ Lösungen des impliziten EULER-Verfahrens zu den Anfangswerten $u^{(0)}$ beziehungsweise $v^{(0)}$.

① Es gilt

$$|u^{(n)} - v^{(n)}| \leq \overline{w_1}^n |u^{(0)} - v^{(0)}|.$$

② Ist u eine Lösung des Anfangswertproblems (26) und $u \in C^2([0, T]; X)$, so gilt für $e^{(n)} := u(t_n) - u^{(n)}$

$$|e^{(n)}| \leq \overline{w_1}^n \left(|e^{(0)}| + \Delta t \overline{w_1} \int_0^{t_n} |u''(t)| dt \right),$$

wobei $\overline{w_1} := \frac{1}{\sqrt{1+2\mu\Delta t}}$ ist.

Bemerkung 3.4.5 Es ist $\overline{w_1} < 1$ und somit auch $\overline{w_1}^n < 1$. Ferner ist

$$e^{-\mu\Delta t} \leq \overline{w_1} \leq e^{-\frac{\mu\Delta t}{1+2\mu\Delta t}},$$

also verhält sich $\overline{w_1}$ wie eine Exponentialfunktion mit negativem Exponenten.

Beweis. ① Sei $w^{(n)} := u^{(n)} - v^{(n)}$ für $n \in \{0, \dots, N\}$. Dann gilt

$$\frac{w^{(n+1)} - w^{(n)}}{\Delta t} = f(t_{n+1}, u^{(n+1)}) - f(t_{n+1}, v^{(n+1)})$$

Mit (74) folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t} (|w^{(n+1)}|^2 - |w^{(n)}|^2) &\leq \left\langle \frac{w^{(n+1)} - w^{(n)}}{\Delta t}, w^{(n+1)} \right\rangle \\ &= \left\langle f(t_{n+1}, u^{(n+1)}) - f(t_{n+1}, v^{(n+1)}), u^{(n+1)} - v^{(n+1)} \right\rangle \\ &\leq -\mu |w^{(n+1)}|^2 \end{aligned}$$

und somit

$$|w^{(n+1)}|^2 \leq \frac{1}{1 + 2\mu\Delta t} |w^{(n)}|^2 = \overline{w}_1^{-2} |w^{(n)}|^2 \leq \dots \leq \overline{w}_1^{-2(n+1)} |w^{(0)}|^2$$

② Nach Satz 3.4.2 gilt die Fehlergleichung

$$\frac{1}{\Delta t} (e^{(n+1)} - e^{(n)}) = -\frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n) u''(t) dt + f(t_{n+1}, u(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, u^{(n+1)}).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t} (|e^{(n+1)}|^2 - |e^{(n)}|^2) &\leq \left\langle \frac{e^{(n+1)} - e^{(n)}}{\Delta t}, e^{(n+1)} \right\rangle \\ &= \left\langle -\frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n) u''(t) dt, e^{(n+1)} \right\rangle \\ &\quad + \langle f(t_{n+1}, u(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, u^{(n+1)}), e^{(n+1)} \rangle \\ &\stackrel{\text{CS}}{\leq} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \underbrace{|t - t_n|}_{\leq \Delta t} |u''(t)| dt |e^{(n+1)}| - \mu |e^{(n+1)}|^2 \\ &\leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} |t - t_n| |u''(t)| dt |e^{(n+1)}| - \mu |e^{(n+1)}|^2. \end{aligned}$$

Auflösen nach $|e^{(n+1)}|$ ergibt

$$\begin{aligned} |e^{n+1}| &\leq \Delta t \overline{w}_1^{-2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} |u''(t)| dt + \sqrt{\left(\Delta t \overline{w}_1^{-2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} |u''(t)| dt \right)^2 + \overline{w}_1^{-2} |e^{(n)}|^2} \\ &\leq 2\Delta t \overline{w}_1^{-2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} |u''(t)| dt + \overline{w}_1^{-2} |e^{(n)}|^2, \end{aligned}$$

da für $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$ für $a, b \geq 0$ gilt. □

3.5 Stabilität und der Satz von Ljapunov, asymptotisches Verhalten

08.02.2021

Im Folgenden seien $M \subset X$ und $f: [0, \infty) \times M \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, welche einer LIPSCHITZ-Bedingung genügt. Dann besitzt das Anfangswertproblem (26) genau eine maximal fortgesetzte Lösung $u: [0, \infty) \supset I \rightarrow \mathbb{R}$.

Motivation. Wir erinnern uns an Beispiel 2.2.4. Es gibt mehrere Lösung, welche sich verschieden „gegen unendlich“ verhalten; die Nulllösung ist konstant, während $u(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ mit quadratischer Geschwindigkeit für alle nichttrivialen Lösungen $u: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gilt. Bei nicht eindeutig lösbaren Anfangswertproblemen kann das Verhalten „gegen unendlich“ also stark variieren und deswegen betrachten wir nur eindeutig lösbare Anfangswertprobleme.

DEFINITION 3.5.1 (((IN)STABILER) GLEICHGEWICHTSPUNKT)

- Ein $\tilde{u} \in M$ heißt **Gleichgewichtspunkt** von f (oder Ruhelage, kritischer / stationärer Punkt / Zustand), wenn $f(t, \tilde{u}) = 0$ für alle $t \geq 0$ gilt.
- Ein Gleichgewichtspunkt heißt **stabil**, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für beliebige Anfangswerte $u_0 \in B(\tilde{u}, \delta)$ das Anfangswertproblem (26) mit $t_0 = 0$ **genau** eine Lösung u für alle Zeiten $t \geq 0$ hat und

$$\|u(t) - \tilde{u}\| < \varepsilon$$

für alle $t \geq 0$ gilt.

- Ein Gleichgewichtspunkt heißt **instabil**, wenn er nicht stabil ist.

Gleichgewichtspunkt

Bemerkung 3.5.2 Ist \tilde{u} ein Gleichgewichtspunkt von f , so ist $u \equiv \tilde{u}$ die Lösung des Anfangswertproblems (26) mit $t_0 = 0$ und $u_0 = \tilde{u}$, da $u'(t) = \tilde{u}' = f(t, \tilde{u}) = f(t, u(t))$ gilt.

Wir betrachten meistens **autonome** Systeme, das heißt $f(t, v) = f(v)$. Dann sind die Gleichgewichtspunkte von f genau die Nullstellen von f . Autonome System sind frei von „äußeren Einflüssen“.

Bemerkung 3.5.3 (Normalisierung) Ist \tilde{u} ein Gleichgewichtspunkt von f , so setzen wir $g(t, v) := f(t, v + \tilde{u})$. Dann ist g auf $M - \tilde{u}$ definiert und da $\tilde{u} \in M$ ist, so ist $0 \in M - \tilde{u}$ und 0 ist ein Gleichgewichtspunkt von g .

Beispiel 3.5.4 (Das mathematische Pendel) Wir betrachten das **autonome** Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x''(t) + \sin(x(t)) = 0, \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = y_0, \end{cases}$$

welches ein **reibungsloses Pendel** modelliert: x_0 ist die Anfangsauslenkung und y_0 die Anfangsgeschwindigkeit. Wir können das Anfangswertproblem in ein System erster Ordnung umschreiben, indem wir wie auch im Fall linearer skalarer Differentialgleichungen die neuen Funktionen u_1, u_2 mit $u_1(t) := x(t)$ und $u_2(t) := x'(t)$ definieren. Dann folgt aus der Differentialgleichung

$$u_2'(t) = x''(t) = -\sin(x(t)) = -\sin(u_1(t)),$$



Abb. 23: Das mathematische Pendel.

also insgesamt

$$u'(t) = \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2(t) \\ -\sin(u_1(t)) \end{pmatrix} =: f(u(t)) \quad \text{und} \quad u(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} =: u_0$$

für $f: M := (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $v = (v_1, v_2)^T \mapsto (v_2, -\sin(v_1))^T$.

Die Gleichgewichtspunkte v sind die Nullstellen von f :

$$0 \stackrel{!}{=} f(v) = \begin{pmatrix} v_2 \\ -\sin(v_1) \end{pmatrix} \implies v_2 = 0 \quad \text{und} \quad v_1 = 0 \text{ oder } v_1 = \pi.$$

Um die Gleichgewichtspunkte $(0, 0)^T$ und $(\pi, 0)^T$ auf **Stabilität** zu untersuchen, müssen wir noch etwas arbeiten. Wir vermuten, dass der erste **stabil** und der zweite **instabil** ist. \diamond

DEFINITION 3.5.5 (ATTRAKTIV / ASYMPTOTISCH & EXPONENTIELL STABIL)

Ein **Gleichgewichtspunkt** \tilde{u} ist

- ① **attraktiv**, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $u_0 \in B(\tilde{u}, \delta)$ eine **eindeutige** Lösung auf ganz $[0, \infty)$ existiert und

$$\|u(t) - \tilde{u}\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

für alle $t \geq 0$ gilt.

- ② **asymptotisch stabil**, wenn er **attraktiv** und **stabil** ist.

- ③ **exponentiell stabil**, falls er **stabil** ist und ein $\delta > 0$ wie in ① sowie $c, \lambda > 0$ existieren mit

$$\|u(t) - \tilde{u}\| \leq ce^{-\lambda t}$$

für alle $t \geq 0$.

attraktiv

asymptotisch stabil

exponentiell stabil

Bemerkung 3.5.6 Für $\dim(X) = 1$ folgt die Stabilität aus der Attraktivität eines Gleichgewichtspunkts (Übungsaufgabe). Für $\dim(X) > 1$ ist dies im Allgemeinen falsch, was man in Abbildung 24 erkennen kann. Exponentielle Stabilität impliziert die asymptotische Stabilität eines Gleichgewichtspunkts (selber überlegen!).

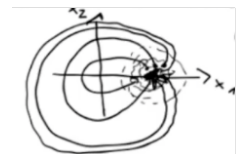


Abb. 24: TODO.

Beispiel 3.5.7 • Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = u(t), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Dann ist $f(v) = v$ und somit ist $\tilde{u} := 0$ der einzige Gleichgewichtspunkt. Ist $u_0 \neq 0$, so gilt für die Lösung $u(t) = e^t u_0$

$$\|u(t) - \tilde{u}\| = \|e^t u_0 - 0\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty.$$

Der Gleichgewichtspunkt ist also **instabil**, sogar „exponentiell“.

- Wir betrachten nun das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = -u(t), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\|u(t) - \tilde{u}\| = \|e^{-t} u_0 - 0\| = |u_0| e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

und somit ist der Gleichgewichtspunkt **exponentiell stabil**.

- Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u(t).$$

Dann ist $f(v_1, v_2) := (v_2, -v_1)^T$. Da die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ regulär ist, ist $\tilde{u} := 0 \in \mathbb{R}^2$ der einzige **Gleichgewichtspunkt**. Die Eigenwerte von A sind $\pm i$ und somit sind die Lösungen $e^{\pm it}$ Kreisbahnen. Dann gilt für die Lösung u zum Anfangswert $u_0 \in \mathbb{R}^2$ (nach Lemma 2.5.6 da \mathbb{R}^2 ein HILBERT-Raum ist),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t) - \tilde{u}|^2 &= |u'(t)|^2 = \langle u'(t), u(t) \rangle_{\mathbb{R}^2} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u(t), u(t) \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} u_2(t) \\ -u_1(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

und somit ist $|u(t) - \tilde{u}|$ für alle $t \geq 0$ konstant. Somit ist der Gleichgewichtspunkt **stabil** aber **nicht attraktiv**.

- Betrachte erneut Beispiel 3.2.3. Dann ist 0 ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt und 2 ein instabiler Gleichgewichtspunkt (selber überlegen!). \diamond

Stabilität endlichdimensionaler autonomer Systeme

Im Folgenden sei $X := \mathbb{R}^d$.

SATZ 3.5.1: STABILITÄT LINEARER AUTONOMER SYSTEME

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine Matrix ist. Dann ist die Nulllösung $\tilde{u} := 0 \in \text{Ker}(A) \subset \mathbb{R}^d$ ein Gleichgewichtspunkt. Er ist

- ① **stabil**, wenn $\Re(\lambda) \geq 0$ für alle Eigenwerte λ von A gilt und wenn alle Eigenwerte λ mit $\Re(\lambda) = 0$ **halbeinfach**^a sind.
- ② **exponentiell stabil**, wenn alle Eigenwerte von A positiven Realteil haben.
- ③ **instabil mit exponentiell wachsender Komponente**, wenn ein Eigenwert von A mit negativem Realteil existiert.
- ④ **instabil mit höchstens polynomiell wachsender Komponente**, wenn zwar alle Eigenwerte nichtnegativen Realteil haben, aber ein Eigenwert λ von A existiert, welcher nicht halbeinfach ist.

^aEin Eigenwert heißt halbeinfach, wenn seine algebraische und geometrische Vielfachheit identisch sind oder wenn der zugehörige Eigenraum eine Basis aus Eigenvektoren hat.

Bemerkung 3.5.8 Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$|e^{\lambda t}| = |e^{\Re(\lambda)t}| \underbrace{|e^{i\Im(\lambda)t}|}_{=1} = |e^{\Re(\lambda)t}|$$

und somit entscheidet das Vorzeichen von $\Re(\lambda)$ das Verhalten von $|e^{\lambda t}|$ für $t \rightarrow \infty$.

Beweis. Nach Satz 2.3.8 besitzt das Anfangswertproblem für beliebige Anfangswerte $u_0 \in \mathbb{R}^d$ genau eine Lösung der Form

$$u(t) = e^{-tA}u_0 = \sum_{j=1}^m e^{-\lambda_j t} \sum_{\ell=0}^{v_j-1} \frac{(-t)^\ell}{\ell!} (A - \lambda_j I)^\ell u_{0_j},$$

auf $[0, \infty)$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die verschiedenen Eigenwerte von A sind, welche die algebraischen Vielfachheiten v_1, \dots, v_m haben und $u_0 = \sum_{j=1}^m u_{0_j}$ mit $u_{0_j} \in \text{Ker}(A - \lambda_j I)^{v_j}$ ist.

- ① Gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\Re(\lambda_1) = 0$ und $\Re(\lambda_j) > 0$ für alle $j \in \{2, \dots, m\}$, und ist λ_1 halbeinfach, so existieren v_1 Eigenvektoren w_1, \dots, w_{v_1} zu λ_1 und somit ist $\text{ker}(A - \lambda_1 I)^{v_1} = \text{span}(w_1, \dots, w_{v_1})$. Damit ist $(A - \lambda_1 I)^\ell u_{0_1} = 0$ für $\ell \geq 1$, denn $u_{0_1} \in \text{span}(w_1, \dots, w_{v_1})$ und damit $u_{0_1} \in \text{ker}(A - \lambda_1 I)$. Es folgt $\sum_{\ell=0}^{v_1-1} \frac{(-t)^\ell}{\ell!} (A - \lambda_1 I)^\ell u_{0_1} = u_{0_1}$. Damit ist

$$\left| e^{-\lambda_1 t} \sum_{\ell=0}^{v_1-1} \frac{(-t)^\ell}{\ell!} (A - \lambda_1 I)^\ell u_{0_1} \right| = |e^{-\lambda_1 t} u_{0_1}| = |e^{-\Re(\lambda_1)t} u_{0_1}| = |u_{0_1}|.$$

Alle anderen Summanden fallen exponentiell ab (cf. ②), aber der erste ist konstant. Also haben wir Stabilität aber keine exponentielle Stabilität.

- ② Gilt $\Re(\lambda_j) > 0$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$, so folgt, da eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass

$$\left| \sum_{\ell=0}^{v_j-1} \frac{(-t)^\ell}{\ell!} (A - \lambda_j I)^\ell u_{0_j} \right| \leq C(1 + |t|^{v_j-1})$$

gilt, $|e^{-\lambda_j t} \sum_{\ell=0}^{v_j-1} \frac{(-t)^\ell}{\ell!} (A - \lambda_j I)^\ell u_{0_j}| \leq c_1 e^{-(\Re(\lambda_j) - \varepsilon)t}$ für ein $\varepsilon > 0$ und somit

$$|u(t)| \leq c \exp(-t \cdot (\min\{\Re(\lambda_j) : j \in \{1, \dots, m\}\} - \varepsilon)).$$

- ③ Sei nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\Re(\lambda_1) < 0$. Ist v_1 ein (normierter) Eigenvektor zu λ_1 , so wählen wir $u_0 := \delta v_1$ für ein $\delta > 0$. Dann ist die zugehörige Lösung $u(t) = \delta e^{-\lambda_1 t} u_0$, da die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht zueinander stehen: $u_{0_i} = 0$ für $i \geq 2$ und $(A - \lambda_i)^\ell u_{0_i} = 0$ für $\ell \geq 1$. Es folgt

$$|u(t)| \leq |e^{-\lambda_1 t} \cdot \delta v_1| = \delta e^{-\Re(\lambda_1)t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty.$$

- ④ Es gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\Re(\lambda_j) > 0$ für alle $j \in \{2, \dots, m\}$ und $\Re(\lambda_1) = 0$, wobei λ_1 nicht halbeinfach ist. Dann existiert ein Hauptvektor v_1 mit $|v_1| = 1$ und $(A - \lambda_1)v_1 \neq 0$ aber $(A - \lambda_1)^{v_1} v_1 = 0$. Damit ist die Lösung zum Anfangswert $u_0 := \delta u_{0_1}$ für ein $\delta > 0$ gegeben durch

$$u(t) = e^{-\lambda_1 t} \sum_{\ell=0}^{v_1-1} \frac{(-t)^\ell}{\ell!} (A - \lambda_1 I)^\ell v_1 = e^{-\lambda_1 t} \sum_{\ell=1}^{v_1-1} \frac{(-t)^\ell}{\ell!} (A - \lambda_1 I)^\ell v_1$$

Für $t \geq 1$ gilt

$$|u(t)| \leq \delta \underbrace{|e^{-\lambda_1 t}|}_{=1} \underbrace{\left| \sum_{\ell=1}^{v_1-1} \frac{(-t)^\ell}{\ell!} (A - \lambda_1 I)^\ell v_1 \right|}_{\geq ct}.$$

□

Bei nichtlinearen Systemen können wir lokal linearisieren und die JACOBI-Matrix betrachten.

SATZ 3.5.2: LJAPUNOV (1892)

Seien $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine reelle Matrix und $f: [0, \infty) \times B(0, R) \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Abbildung, welche für ein $R > 0$ stetig ist und einer lokalen LIPSCHITZ-Bedingung genüge. Ferner gelte $f(t, 0) = 0$ für alle $t \geq 0$. Gilt $f(t, v) = o(\|v\|)$ gleichmäßig in t^a und gilt $\Re(\lambda) > 0$ für alle Eigenwerte λ von A , so ist die Nulllösung von

$$u'(t) + Au(t) = f(t, u(t))$$

exponentiell stabil.

^adas heißt

$$\frac{|f(t, v)|}{|v|} \xrightarrow[v \rightarrow 0]{\text{gleichmäßig in } t} 0$$

(also schneller als linear), das heißt für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass $\frac{|f(t, v)|}{|v|} < \varepsilon$ für alle $t \geq 0$ und für alle $v \in B(0, R)$ mit $|v| < \delta$.

Bemerkung 3.5.9 Existiert mindestens ein Eigenwert λ von A mit $\Re(\lambda) < 0$, so ist der Gleichgewichtspunkt $\tilde{u} = 0$ instabil. Aber: Gilt $\Re(\lambda) \geq 0$ für alle Eigenwerte λ von A aber gibt es einen Eigenwert λ von A mit $\Re(\lambda) = 0$, so ist keine Aussage möglich.

Beweis. ① Es ist 0 ein Gleichgewichtspunkt der rechten Seite $f(t, u(t)) - Au(t)$, da $f(t, 0) - A(0) = 0$ ist.

② Nach Voraussetzung an A (exponentielle Stabilität des linearen Systems) existiert ein $\mu \geq 0$ und ein $c \geq 1$, so dass

$$\|e^{-tA}\|_{L(X)} \leq c \cdot e^{-\mu t} \quad (75)$$

für alle $t \geq 0$ gilt (cf. Abschätzung für den Propagator eines stark dissipativen Systems, selber überlegen).

③ Sei $\varepsilon \in (0, \frac{\mu}{c})$, dann existiert ein $\delta > 0$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\delta < R$, sodass aus $|v| < \delta$ folgt, dass $|f(t, v)| < \varepsilon|v|$ für alle $t \geq 0$ gilt.

Zu jedem $u_0 \in B(0, R)$ existiert genau eine maximal fortgesetzte Lösung u auf dem maximalen Existenzintervall $[0, \beta(u_0))$. Es sei zunächst $|u_0| < \frac{\delta}{c} \leq \delta$. Da die Lösung stetig ist, gilt zumindest in einem Teilintervall

$$I := [0, \beta'(u_0, \delta)) \subset [0, \beta(u_0)),$$

dass $|u(t)| < \delta$ für alle $t \in I$ gilt, weil $|u_0| \leq \frac{\delta}{c} \leq \delta$ gilt.

④ Für $t \in I$ (also solange $|u(t)| < \delta$ gilt) gilt wegen

$$u(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A}f(s, u(s)) \, ds$$

(cf. Formel von DUHAMEL) und (75) und der Abschätzung in ③ die Abschätzung

$$|u(t)| \stackrel{\Delta}{\leq} ce^{-\mu t}|u_0| + c \int_0^t e^{-\mu(t-s)}\varepsilon|u(s)| \, ds$$

und somit

$$e^{\mu t}|u(t)| \leq c|u_0| + c\varepsilon \int_0^t e^{\mu s}|u(s)| \, ds.$$

Seien $a(t) := e^{\mu t}|u(t)|$, $b \equiv c|u_0|$, $\lambda \equiv c\varepsilon > 0$. Dann folgt mit dem Lemma von GRONWALL

$$e^{\mu t}|u(t)| \leq c|u_0| \cdot e^{c\varepsilon t}$$

das heißt

$$|u(t)| \leq e^{-t(\mu - c\varepsilon)} |u_0|$$

für alle $t \in I$. Da $\varepsilon < \frac{\mu}{c}$ und somit $c\varepsilon < \mu$ gilt, zeigt die obige Ungleichung den exponentiellen Abfall von $u(t)$ auf I . Insbesondere folgt

$$u(t) \leq c|u_0| < c\frac{\delta}{c} = \delta < R. \quad (76)$$

- ⑤ Wir zeigen erst $\beta'(u_0, \delta) = \beta(u_0)$ und dann $\beta(u_0) = \infty$. Nach ⑤ folgt für $u_0 \in B(0, \eta)$ für ein $\eta < \frac{\delta}{c}$

$$|u(t)| \leq c|u_0| < \eta. \quad (77)$$

für alle $t \in [0, \beta'(u_0, \delta)]$. Hieraus folgt $\beta'(u_0, \delta) = \beta(u_0)$, denn andernfalls müsste

$$|u(\beta'(u_0, \delta))| = \delta > \eta$$

gelten und es würde ein $t^* \in [0, \beta'(u_0, \delta))$ mit $|u(t^*)| > \eta$ geben, da u stetig ist, welches einen Widerspruch zu (77) darstellt.

- ⑥ Für $u_0 \in B(0, \frac{\eta}{c})$ ist also die eindeutige Lösbarkeit auf $[0, \beta(u_0))$ gezeigt und für $t \in [0, \beta(u_0))$ gilt (76). Dies impliziert $\beta(u_0) = \infty$. Da f auf $[0, \infty) \times B(0, R)$ definiert ist, gilt $\text{dist}(u(t), \partial B(0, R)) > R - \delta > 0$ für alle $t \in [0, \beta(u_0))$ und somit kann $\lim_{t \nearrow \beta(u_0)} \text{dist}(u(t), \partial B(0, R)) = 0$ nicht gelten. Nach den Aussagen zum Randverhalten folgt $\beta = \infty$. Somit existiert die Lösung zu u_0 auf $[0, \infty)$ und dort gilt $|u(t)| < ce^{-(\mu - c\varepsilon)t} |u_0|$. \square

SATZ 3.5.3: LINEARISIERTE STABILITÄT

Seien $M \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f: M \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine stetige Funktion, die einer lokalen LIPSCHITZ-Bedingung genügt und in $\tilde{u} := 0$ differenzierbar ist mit $f(\tilde{u}) = 0$ (cf. Bemerkung 3.5.3). Besitzt die JACOBI-Matrix $f'(\tilde{u})$ nur Eigenwerte mit negativem Realteil, so ist der Gleichgewichtspunkt \tilde{u} **exponentiell stabil**.

Beweis. Da f in 0 differenzierbar ist, können wir f in einer Umgebung des Gleichgewichtspunkts \tilde{u} mittels der TAYLOR-Formel linearisieren:

$$u'(t) = f(u(t)) = f(\tilde{u}) + f'(\tilde{u})(u(t) - \tilde{u}) + o(|u(t) - \tilde{u}|)$$

und somit

$$((u(t) - \tilde{u})' - f'(\tilde{u})(u(t) - \tilde{u})) = o(|u(t) - \tilde{u}|)$$

oder $u'(t) - f'(\tilde{u})u(t) = o(|u(t)|)$. Dies ist genau die Situation von Satz 3.5.2 mit $A = -f'(\tilde{u})$. \square

Bemerkung 3.5.10 Ebenso gilt: Wenn $f'(\tilde{u})$ einen Eigenwert mit positivem Realteil hat, so ist \tilde{u} instabil. Gilt $\Re(\lambda) \geq 0$ für alle Eigenwerte λ von A , so kann alles passieren, das heißt im gestörten Fall ist keine Aussage möglich: Der Gleichgewichtspunkt 0 von

- $u' = u^2$ ist instabil.
- $u' = -u^3$ ist asymptotisch stabil, aber nicht exponentiell stabil.
- $u' = 0$ ist stabil aber nicht asymptotisch stabil.

Beispiel 3.5.11 (Pendel II: Untersuchen der Gleichgewichtspunkte) Es war $f(v_1, v_2) = (v_2, -\sin(v_1))^T$ und somit

$$f' \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(v_1) & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit folgt

$$f' \left(\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: A.$$

Die Matrix A hat die Eigenwerte ± 1 , also ist dieser Gleichgewichtspunkt instabil.

Jedoch gilt

$$f' \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =: A'.$$

Die Matrix A' hat die Eigenwerte $\pm i$, es gilt $\Re(\pm i) = 0$ und somit können wir noch keine Aussage über die Stabilität dieses Gleichgewichtspunkt treffen. \diamond

Lemma 3.5.12

Ist u eine Lösung des autonomen Systems mit rechter Seite $f: M \rightarrow \mathbb{R}^d$ und gilt $u(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \tilde{u}$, so ist \tilde{u} eine Gleichgewichtspunkt.

Beweis. Nach dem Mittelwertsatz existiert für jedes $i \in \{1, \dots, d\}$ ein $\theta_i \in (0, 1)$ mit

$$0 = \tilde{u} - \tilde{u} \xleftarrow{n \rightarrow \infty} u(n+1) - u(n) = u'_i(n + \theta) = f_i(u(n + \theta)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_i(\tilde{u})$$

Somit gilt $f(\tilde{u}) = 0$. \square

LJAPUNOV-Funktionen

Im vorherigen Abschnitt haben wir Fälle kennengelernt, in denen wir keine Aussage treffen können. Dem wollen wir nun mittels **LJAPUNOV-Funktionen** Abhilfe schaffen.

DEFINITION 3.5.13 (SCHWACHE UND STARKE LJAPUNOV-FUNKTIONEN)

Seien $M \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Teilmenge, $f: M \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine stetige Abbildung, welche einer lokale LIPSCHITZ-Bedingung genügt und \tilde{u} ein Gleichgewichtspunkt von f . Dann heißt eine **stetig differenzierbare** Funktion $V: U \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $U \subset M$ eine offene Teilmenge mit $\tilde{u} \in U$ ist,

- ① **schwache LJAPUNOV-Funktion** zu f um \tilde{u} , wenn für alle $u \in U$

$$\langle \nabla V(u), f(u) \rangle \leq 0.$$

- ② **starke LJAPUNOV-Funktion** zu f um \tilde{u} , wenn die obigen Ungleichung für alle $u \in U \setminus \{\tilde{u}\}$ strikt ist.

- ③ **erstes Integral** (beziehungsweise **Erhaltungsgröße**), wenn die obige Ungleichung für alle $v \in U$ eine Gleichung ist.

LJAPUNOV-Funktion

erstes Integral

Erste Integrale sind schwache LJAPUNOV-Funktionen.

Bemerkung 3.5.14 Mit der LJAPUNOV-Funktion wollen wir **Größen entlang von Lösungskurven messen**. Eine LJAPUNOV-Funktion ordnet jedem Zustand $u(t)$ den Skalar $V(u(t))$ zu, zum Beispiel eine Energie. Ist $u: I \rightarrow U$ eine Lösung des Anfangswertproblems (26) mit

$u_0 \in U$ und V eine (starke) LJAPUNOV-Funktion beziehungsweise erstes Integral, so ist $V \circ u$ (streng) monoton fallend beziehungsweise konstant: Mit der Kettenregel gilt

$$\frac{d}{dt}V(u(t)) = \langle \nabla V(u(t)), u'(t) \rangle = \langle \nabla V(u(t)), f(u(t)) \rangle.$$

SATZ 3.5.4: SCHWACHE LJAPUNOV-FUNKTIONEN

Seien f wie in Definition 3.5.13 und $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine schwache LJAPUNOV-Funktion mit isoliertem Minimum \tilde{u} :

$$V(\tilde{u}) < V(u) \quad \forall u \in U \setminus \{\tilde{u}\}.$$

Dann ist der Gleichgewichtspunkt \tilde{u} von f stabil.

Beweis. ① Wir können nach Bemerkung 3.5.3 annehmen, dass $\tilde{u} = 0$ ist. Ferner gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit $V(0) = 0$. Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B}(0, \varepsilon) \subset M$ gilt. Wir setzen

$$m_\varepsilon := \min_{\|u\|=\varepsilon} \{V(u)\}.$$

Das Minimum wird angenommen, da V stetig ist und die Menge $\{u \in \mathbb{R}^d : \|u\| = \varepsilon\}$ kompakt ist. Nach Voraussetzung ist $m_\varepsilon > 0$, da \tilde{u} ein **isoliertes Minimum** ist. Da die Abbildung V stetig ist und $V(0) = 0$ gilt, existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $u \in \overline{B}(0, \delta)$

$$0 \leq V(u) \leq \frac{m_\varepsilon}{2}$$

gilt.

② Sei nun $u_0 \in B(0, \delta)$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)), \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

genau eine maximal fortgesetzte Lösung. Sei

$$T^* := \sup\{T > 0 : \|u(t)\| < \varepsilon \forall t \in [0, T]\}$$

die erste Stelle, an der die Lösung $u(t)$ aus der ε -Kugel heraustritt.

③ Wir zeigen, dass $T^* = \infty$ ist, indem wir $T^* < \infty$ annehmen. Da u stetig ist, folgt $\|u(T^*)\| = \varepsilon$. Da jedoch die Abbildung $t \mapsto V(u(t))$ monoton fallend ist, folgt

$$m_\varepsilon \leq V(u(T^*)) \leq V(u(0)) = V(u_0) \leq \frac{m_\varepsilon}{2},$$

weil $u_0 \in B(0, \delta)$ gilt, welches einen Widerspruch darstellt.

④ Also gilt $T^* = \infty$ und somit existiert die Lösung u auf $[0, \infty)$ und es gilt $|u(t)| < \varepsilon$ für alle $t \in [0, \infty)$. \square

Beispiel 3.5.15 (Pendel III: Gleichgewichtspunkt 0 untersuchen)

Wir nutzen **Energieerhaltung**: es war v_1 der Winkel und v_2 die Geschwindigkeit. Definiere das Energiefunktional

$$E \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \frac{1}{2}v_2^2 - \cos(v_1), \quad (78)$$

wobei $\frac{1}{2}v_2^2$ die **kinetische Energie** mit Masse $m = 1$ und $-\cos(v_1) = \int \sin(v_1)dv_1$ die **potentielle Energie** ist. Dann gilt

$$\left\langle \nabla E \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \sin(v_1) \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 \\ -\sin(v_1) \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Also ist das Energiefunktional E ein erstes Integrale und somit insbesondere eine schwache LJAPUNOV-Funktion.

Nach Satz 3.5.4 genügt es also zu zeigen, dass der Gleichgewichtspunkt $(0,0)^T$ ein isoliertes Minimum ist. Es gilt

$$E \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{2}0^2 - \cos(0) = -1, & \text{wenn } v_1 = v_2 = 0, \\ \frac{v_2^2}{2} - \cos(v_1) \geq 0 - 1 = -1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

und $E(v) > -1$ wenn $v \neq 0$ und $v_1 \in (-\pi, \pi)$. Somit ist der Gleichgewichtspunkt stabil.

Da E ein erstes Integral ist, ist der Gleichgewichtspunkt stabil aber nicht asymptotisch stabil (selber überlegen: nutze Stetigkeit von V und, dass $V(u(t))$ konstant ist.) \diamond

SATZ 3.5.5: STARKE LJAPUNOV-FUNKTIONEN

Unter den Voraussetzungen des letzten Satzes sei V eine **starke** LJAPUNOV-Funktion. Dann ist \tilde{u} **asymptotisch stabil**.

Beweis. ① Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien wieder $\tilde{u} = 0$ und $V(0) = 0$.

Da wir nach 3.5.4 bereits wissen, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ entsprechend der Stabilität existiert, bleibt nur noch die Attraktivität zu zeigen.

② Seien nun $u_0 \in B(0, \delta)$ und u die entsprechende Lösung des Anfangswertproblems. Da die Abbildung $t \mapsto V(u(t))$ streng monoton fällt und $V(v) \geq 0$ für alle $v \in U$ gilt, existiert ein $V_\infty \geq 0$ mit $V(u(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} V_\infty$.

③ Wir zeigen, dass $v_\infty = 0$ gilt, indem wir $v_\infty > 0$ annehmen. Da V stetig ist und $V(0) = 0$ gilt, existiert ein $\sigma \in (0, \delta)$, sodass $0 \leq V(v) \leq V_\infty$ für alle $v \in U$ mit $\|v\| < \sigma$ gilt. Somit folgt für $t > 0$

$$\sigma \leq \|u(t)\| \leq \varepsilon.$$

Wir definieren die kompakte Kugelschale

$$K_{\sigma, \varepsilon} := \{v \in \mathbb{R}^d : \|v\| \in [\sigma, \varepsilon]\} \subset U.$$

Da die Abbildung $v \mapsto \langle \nabla V(v), f(v) \rangle$ als Komposition stetiger Funktionen stetig ist, nimmt sie ein Maximum

$$M := \max_{v \in K_{\sigma, \varepsilon}} \langle \nabla V(v), f(v) \rangle < 0$$

an. Damit folgt für alle $t \geq 0$, da $u(t) \in K_{\sigma, \varepsilon}$,

$$V(u(t)) - V(u_0) = \int_0^t \frac{d}{ds} V(u(s)) ds = \int_0^t \underbrace{\langle \nabla V(v), f(v) \rangle}_{\leq M} ds \leq Mt \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty,$$

aber auch $V(u(t)) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\textcircled{2}} V_\infty \geq 0$ und $V(u_0)$ ist konstant. Somit ist $V_\infty = 0$.

- ④ Da die Kugel $\overline{B}(0, \varepsilon)$ kompakt ist und $\{u(t) : t \geq 0\} \subset \overline{B}(u, \varepsilon)$ gilt, ist $\{u(t) : t \geq 0\}$ relativ kompakt. Somit besitzt jede Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $t_n \rightarrow \infty$ eine Teilfolge $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, sodass $u(t_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u_\infty$ konvergiert. Es folgt aufgrund der Stetigkeit von V

$$V(u(t_{n_k})) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} V(u_\infty) \quad \text{und} \quad V(u(t_{n_k})) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} V_\infty = 0.$$

Es folgt $V(u_\infty) = 0$ und aufgrund der Eigenschaft des **isolierten Minimums** $u_\infty = 0$.

- ⑤ Mit dem **Teilfolgenprinzip** folgt die Aussage: Sei $(u(t_{n_\ell}))_{\ell \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Teilfolge von $(u(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Nach ④ existiert eine Teilfolge $(u(t_{n_{\ell_k}}))_{k \in \mathbb{N}}$, welche unabhängig von der Wahl der Folge gegen 0 konvergiert. Damit folgt, dass die gesamte Folge $(u(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert. **Teilfolgenprinzip** □

Randwertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung

15.02.2021

Wir betrachten jetzt nicht mehr Anfangswertprobleme mit Anfangswerten, deren Verlauf und (lokale) Lösbarkeit wir untersuchten, sondern (eindimensionale **semilineare**) Randwertprobleme (zweiter Ordnung), bei denen das Verhalten am Rand festgelegt ist.

4.1 | Grundbegriffe und elementare Aussagen

DEFINITION 4.1.1 (SYMMETRISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNG, L)

Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist **semilinear**, wenn sie von der Form

$$-u''(x) = f(x, u(x), u'(x))$$

und **linear**, wenn sie von der Form

$$(Lu)(x) := -u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u(x) = f(x)$$

für $x \in (a, b)$ ist, und **symmetrisch**, wenn $c \equiv 0$ ist und homogen, wenn $f \equiv 0$ ist.

Wir betrachten eine solche Differentialgleichung auf einem Intervall $[a, b]$ und stellen **zwei Randbedingungen** (RBen) der Form

$$G_i(a, b, u(a), u(b), u'(a), u'(b)) = 0, \quad i \in \{1, 2\}.$$

DEFINITION 4.1.2 (ARTEN VON RANDBEDINGUNGEN)

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $c_a, c_b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- **DIRICHLET**: $u(a) = \alpha, u(b) = \beta$,
- **NEUMANN**: $u'(a) = \alpha, u'(b) = \beta$,
- **periodische**: $u(a) = u(b), u'(a) = u'(b)$,
- **ROBINSche**: $c_a u(a) + u'(a) = \alpha, c_b u(b) + u'(b) = \beta$.
- Treten in a und in b verschiedene Typen von Randbedingungen auf, so spricht man von **gemischten Randbedingungen**.
- Die Randbedingungen heißen **homogen**, wenn $\alpha = \beta = 0$ gilt.

Bemerkung 4.1.3 (Physikalische Interpretation der Randbedingungen)

- **DIRICHLET**: Modelliert man die Strömung einer Flüssigkeit durch ein Rohr, ist die Geschwindigkeit der Flüssigkeit am Rand genau die Geschwindigkeit des Rohrs, also meistens Null.
- **NEUMANN**: Modelliert man die Wärmeleitung in einem isolierten Behälter, so muss $u'(a) = u'(b) = 0$ gelten. Man hat somit weniger Informationen über die Lösungen aber auch weniger Restriktionen für sie.
- **periodisch**: Modelliert man zum Beispiel Wärmeleitung in einem Torus, so muss an der Stelle, an welcher der Zylinder „zusammengeklebt“ wurde, um einen Torus zu erhalten, die Funktion die gleichen Werte annehmen.

DEFINITION 4.1.4 (KLASSISCHE LÖSUNG, $\mathfrak{C}([a, b]; \mathbb{R})$)

Eine (klassische) Lösung eines semilinearen Randwertproblem zweiter Ordnung mit DIRICHLET Randbedingungen ist eine Funktion $u \in \mathfrak{C}([a, b]; \mathbb{R}) := \mathcal{C}^2((a, b); \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$, welche die Differentialgleichung und die Randbedingungen erfüllt.

Bemerkung 4.1.5 Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit immer das Intervall $[0, 1]$ betrachten, in dem man die Transformation $t \mapsto \frac{t-a}{b-a}$ verwendet.

Bei linearen Randwertproblemen können inhomogene DIRICHLET Randbedingungen in die rechte Seite transformiert werden.

Bemerkung 4.1.6 (Homogenisieren von DIRICHLET Randbedingungen)

Bei dem linearen inhomogenen Randwertproblem mit inhomogenen DIRICHLET Randbedingungen

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u(x) = f(x), \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \end{cases} \quad (79)$$

können wir die Randbedingungen „in die rechte Seite transformieren“: Sei $r \in \mathfrak{C}([a, b]; \mathbb{R})$ eine beliebige Funktion mit $r(a) = \alpha$ und $r(b) = \beta$, zum Beispiel die Gerade durch die Punkte (a, α) und (b, β)

$$r: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta], \quad x \mapsto \beta \frac{x-a}{b-a} + \alpha \frac{b-x}{b-a}.$$

In höheren Dimensionen ist dies jedoch erheblich schwieriger so eine Funktion r zu finden.

Ist $u \in \mathfrak{C}([a, b]; \mathbb{R})$ eine Lösung von (79), so setzen wir $\tilde{u} := u - r \in \mathfrak{C}([a, b]; \mathbb{R})$. Dann gilt $\tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0$. Aus $Lu = b$ auf (a, b) (das heißt: u löst die Differentialgleichung) folgt aufgrund der Linearität von L

$$L\tilde{u} = L(u - r) = Lu - Lr = f - Lr =: \tilde{f}.$$

Also löst \tilde{u} genau dann das Randwertproblem

$$\begin{cases} L\tilde{u} = \tilde{f}, \\ \tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0. \end{cases} \quad (80)$$

mit homogenen DIRICHLET Randbedingungen, wenn u das Randwertproblem (79) löst.

Bemerkung 4.1.7 („Symmetrisieren“ der Differentialgleichung)

Ist c hinreichend glatt, so kann (79) in ein symmetrisches Randwertproblem überführt werden. Die Funktion u ist genau dann eine Lösung von (79), wenn

$$\tilde{u}(x) = u(x) \exp \left(-\frac{1}{2} \int_a^x c(s) \, ds \right)$$

eine Lösung von

$$\begin{cases} -\tilde{u}''(x) + \tilde{d}(x)\tilde{u}(x) = \tilde{f}(x), \\ \tilde{u}(a) = \alpha, \quad \tilde{u}(b) = \beta \exp \left(-\frac{1}{2} \int_a^b c(s) \, ds \right) \end{cases} \quad (81)$$

mit

$$\tilde{d}(x) := d(x) + \frac{1}{4}c^2(x) - \frac{1}{2}c'(x) \quad \text{und} \quad \tilde{f}(x) := f(x) \exp \left(-\frac{1}{2} \int_a^x c(s) \, ds \right)$$

ist (selber nachrechnen!).

4.2 Randwertprobleme für homogene lineare Differentialgleichungen mit inhomogenen Dirichlet Randbedingungen

Wir betrachten das homogene Randwertproblem mit inhomogenen DIRICHLET Randbedingungen

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u(x) = 0, \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \end{cases} \quad (82)$$

Die homogene lineare Differentialgleichung hat nach Satz 2.3.5 einen **zweidimensionalen Lösungsraum** mit einem Fundamentalsystem aus zwei linear unabhängigen Lösungen u_1 und u_2 , das heißt jede Lösung der Differentialgleichung ist von der Form $u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Erinnerung: Sind u_1 und u_2 (nicht notwendigerweise linear unabhängige) Lösungen der Differentialgleichungen, so ist die WRONSKI-Determinante

$$w(x) := \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix}$$

Dann sind u_1 und u_2 genau dann linear unabhängig, wenn $w(x_0) \neq 0$ für irgendein $x_0 \in (a, b)$.

Beispiel 4.2.1 (Motivation: Anzahlen von Lösungen) Wir betrachten die Differentialgleichung $-u''(x) - u(x) = 0$. Sie hat die allgemeine Lösung $u(t) := c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t)$ für Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, das Fundamentalsystem ist $(u_1(x), u_2(x)) := (\sin(x), \cos(x))$.

- ① Seien das Intervall $[a, b] := [0, \frac{\pi}{2}]$ und die Randbedingungen $u(0) = 1 = u(\frac{\pi}{2})$. Dann gilt $c_1 = c_2 = 1$ und es existiert genau eine Lösung.
- ② Seien das Intervall $[0, \pi]$ und $u(0) = u(\pi) = 1$. Dann folgt $u(0) = c_2 = 1$ aber $1 \stackrel{!}{=} u(\pi) = -c_2 = -1$, welches einen Widerspruch darstellt; es gibt keine Lösung.
- ③ Seien das Intervall $[0, \pi]$ und $u(0) = 1$ und $u(\pi) = -1$. Dann ist $c_2 = 1$ und $c_1 \in \mathbb{R}$ beliebig; es gibt unendlich viele Lösungen. \diamond

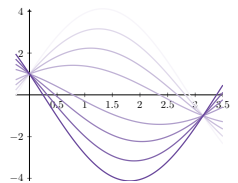


Abb. 25: Es gilt $u(0) = 1$ und $u(\pi) = -1$ für $u(t) := \cos(t) + a \sin(t)$ für alle $a \in \mathbb{R}$. (Geplottet sind $a \in \{-4, \dots, 4\}$).

SATZ 4.2.1: KONSTANTE KOEFFIZIENTEN (INHOMOGENE D-RBEN)

Wir betrachten das homogene Randwertproblem mit inhomogenen DIRICHLET Randbedingungen und konstanten Koeffizienten $c, d \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} -u''(x) + cu'(x) + du(x) = 0, \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \end{cases}$$

und seine DISKRIMINANTE $D := \frac{c^2}{4} + d$. Das Problem hat

- ① genau eine Lösung, wenn die $D \geq 0$ ist.
- ② für $D < 0$
 - a) genau eine Lösung, falls $\sqrt{-D}(b-a)$ kein ganzzahliges Vielfaches von π ist.
 - b) unendlich viele Lösungen, wenn ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $\sqrt{-D}(b-a) = k\pi$ und $\beta = (-1)^k \alpha \exp\left(\frac{c}{2} \frac{k\pi}{\sqrt{-D}}\right)$ gilt.
 - c) keine Lösungen in allen anderen Fällen.

Bemerkung 4.2.2 (Interpretation der Bedingungen bezogen auf Beispiel 4.2.1)

In Beispiel 4.2.1 ist $D = \frac{0^2}{4} - 1 = -1 < 0$. Wäre $D \geq 0$, so tauchten keine Sinus- oder Kosinusterme auf, welche oszillieren und deshalb zum Beispiel am Rand verschwinden können. Ist $D < 0$, kann das jedoch passieren, wenn die Intervalllänge genau richtig ist und die Anfangswerte genau richtig gewählt sind (cf. ③).

Beweis. Wir lösen die charakteristische Gleichung $-\lambda^2 + c\lambda + d = 0$ und erhalten

$$\lambda_{1,2} := \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} + d} = \frac{c}{2} \pm \sqrt{D}.$$

- ① Ist $D > 0$, so gilt $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $(u_i(x) := e^{\lambda_i x})_{i=1}^2$ bildet ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung. Somit ist die allgemeine Lösung $u := c_1 u_1 + c_2 u_2$ für Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Damit diese Konstanten die Randbedingungen erfüllen, muss

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 a} & e^{\lambda_2 a} \\ e^{\lambda_1 b} & e^{\lambda_2 b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (83)$$

gelten. Das Randwertproblem genau dann eindeutig lösbar, wenn (83) eindeutig lösbar ist, also wenn die Matrix regulär ist, das heißt

$$0 \neq \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 a} & e^{\lambda_2 a} \\ e^{\lambda_1 b} & e^{\lambda_2 b} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 a + \lambda_2 b} - e^{\lambda_1 b + \lambda_2 a}$$

gilt. Da $a \neq b$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (da $D > 0$) gilt, ist $(\lambda_1 - \lambda_2)a \neq (\lambda_1 - \lambda_2)b$ und somit $\lambda_1 a + \lambda_2 b \neq \lambda_1 b + \lambda_2 a$. Daher sind die Exponenten verschieden und die Behauptung folgt.

Ist $D = 0$, so ist $\lambda = \frac{c}{2}$ eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms und $u(x) := e^{\frac{cx}{2}}(c_1 + xc_2)$ ist die allgemeine Lösung. Die Behauptung folgt auf dem selben Weg wie im obigen Fall.

- ② Ist $D < 0$, so gilt $\lambda_{1,2} = \frac{c}{2} \pm i\sqrt{-D}$ und ein Fundamentalsystem ist durch $u_1(x) := e^{\frac{cx}{2}} \sin(\sqrt{-D}x)$ und $u_2 := e^{\frac{cx}{2}} \cos(\sqrt{-D}x)$ gegeben. Für die Randbedingungen lösen wir

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e^{\frac{ca}{2}} \sin(\sqrt{-D}a) & e^{\frac{ca}{2}} \cos(\sqrt{-D}a) \\ e^{\frac{cb}{2}} \sin(\sqrt{-D}b) & e^{\frac{cb}{2}} \cos(\sqrt{-D}b) \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Dann gilt nach dem [Additionstheorem für den Sinus](#)

$$\begin{aligned} \det(A) &= e^{\frac{c(a+b)}{2}} \left(\sin(\sqrt{-D}a) \cos(\sqrt{-D}b) - \sin(\sqrt{-D}b) \cos(\sqrt{-D}a) \right) \\ &= \underbrace{e^{\frac{c(a+b)}{2}}}_{\neq 0} \cdot \sin(\sqrt{-D}(b-a)). \end{aligned}$$

Und somit ist $\det(A) = 0$ genau dann wenn $\sqrt{-D}(b-a)$ ein ganzzahliges Vielfaches von π ist. Dann hat das lineare Gleichungssystem unendliche viele Lösungen, wenn $(\alpha, \beta)^T$ im Bild von A ist, was die angegebene Bedingung ist (selber überlegen). \square

Wir werden später sehen ([FREDHOLMSche Alternative](#)), dass es genügt, Probleme der folgenden Form zu untersuchen, um die Lösbarkeit inhomogener Randprobleme zu untersuchen. Offenbar ist die Nulllösung stets eine Lösung des folgenden Systems. Deshalb interessiert uns nur, ob das die [einzige](#) Lösung ist.

SATZ 4.2.2: NICHTKONSTANTE KOEFFIZIENTEN (HOMOGENE D-RBEN)

Für $c \in \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R})$ und $d \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ betrachten wir

$$\begin{cases} (Lu)(x) = 0, \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \quad (84)$$

Ist $\tilde{d}(x) := d(x) + \frac{1}{4}c(x)^2 - \frac{1}{2}c'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, so hat das Problem **genau** eine Lösung, und zwar nur die Nulllösung.

Sind c und d konstant, so ist $\tilde{d} = D$ aus Satz 4.2.1.

Beweis. („Energimethode“) Sei u eine Lösung. Dann ist $\tilde{u}(x) := u(x) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_a^x c(s) ds\right)$ eine Lösung des transformierten Systems (81) mit $\tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0$. Wir zeigen $\tilde{u} \equiv 0$, woraus direkt $u \equiv 0$ folgt.

Wir multiplizieren die Differentialgleichung mit \tilde{u} („Testen mit der Lösung“, cf. Differentialgleichungen II A):

$$-\tilde{u}''(x)\tilde{u}(x) + \tilde{d}(x)\tilde{u}^2(x) = 0$$

und integrieren über $[a, b]$:

$$-\int_a^b \tilde{u}''(x)\tilde{u}(x) dx + \int_a^b \tilde{d}(x)\tilde{u}^2(x) dx = 0.$$

Partielle Integration des ersten Integrals (der höchsten Ableitung!) liefert

$$\underbrace{\int_a^b \tilde{u}'(x)^2 dx}_{\geq 0} + \underbrace{\tilde{u}'(x)\tilde{u}(x) \Big|_{x=a}^b}_{=0 \text{ (RBen)}} + \underbrace{\int_a^b \tilde{d}(x)\tilde{u}^2(x) dx}_{\geq 0} = 0$$

und somit

$$\int_a^b \underbrace{(\tilde{u}'(x))^2 + \tilde{d}(x)(\tilde{u}(x))^2}_{\geq 0} dx = 0 \implies (\tilde{u}'(x))^2 + \tilde{d}(x)(\tilde{u}(x))^2 = 0$$

für alle $x \in [a, b]$. Somit ist insbesondere $\tilde{u}'|_{(a,b)} = 0$ also ist \tilde{u} konstant und aus den Randwertbedingungen folgt $\tilde{u} \equiv 0$. \square

Bemerkung 4.2.3 (Begriffsmotivation: Symmetrisches Randwertproblem)

Für $u, v \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ mit homogenen DIRICHLET Randbedingungen betrachte

$$\langle Lu, v \rangle_{L^2([a, b])} = \int_a^b (Lu)(x)v(x) dx = \int_a^b -u''(x)v(x) + c(x)u'(x)v(x) + d(x)u(x)v(x) dx$$

Ist L symmetrisch und somit $c \equiv 0$, so folgt mit zweifacher partielle Integration der höchsten Ableitung aufgrund der Randbedingungen

$$\begin{aligned} \langle Lu, v \rangle_{L^2([a, b])} &= \int_a^b -u''(x)v(x) + d(x)u(x)v(x) dx \\ &= \int_a^b -(-1)^2 u(x)v''(x) + d(x)u(x)v(x) dx = \langle u, Lv \rangle_{L^2([a, b])}. \end{aligned}$$

4.3 | Die Greensche Funktion

Wir betrachten das lineare Randwertproblem mit homogenen DIRICHLET Randbedingungen

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \quad (85)$$

welche durch zweifaches Integrieren einfach zu lösen ist. Der folgende Ansatz funktioniert auch für komplizierte semilineare Probleme der Art $-u''(x) = f(x, u(x), u'(x))$.

DEFINITION 4.3.1 (GREENSCHE FUNKTION)

Die GREENSCHE Funktion ist

$$G: [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, \xi) \mapsto \frac{1}{b-a} \begin{cases} (\xi - a)(b - x), & \xi \leq x, \\ (x - a)(b - \xi), & x \leq \xi. \end{cases}$$

Bemerkung 4.3.2 Für allgemeine lineare Randwertprobleme wird die GREENSCHE Funktion in der Regel als die Funktion definiert, die die Eigenschaft aus Lemma 4.3.4 (siehe unten) erfüllt.

Korollar 4.3.3 (Eigenschaften der GREENSCHEN Funktion)

Die GREENSCHE Funktion G ist

- stetig auf $[a, b]^2$, da $G(x, x) = (b - x)(x - a)$ ist,
- nicht stetig differenzierbar auf $[a, b]^2$,
- symmetrisch in x und ξ , nichtnegativ und beschränkt,
- auf den Regionen $\{(x, \xi) \in [a, b]^2 : \xi < x\}$ und $\{(x, \xi) \in [a, b]^2 : x < \xi\}$ glatt.

Ferner gilt $G(a, \xi) = G(b, \xi) = 0$ für alle $\xi \in [a, b]$.

Lemma 4.3.4 (Explizite Lösung für (85))

Eine stetige Funktion $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ löst genau dann das Randwertproblem (85), wenn

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

gilt.

Beweis. „ \Leftarrow “: Nach Korollar 4.3.3 gilt

$$u(a) = \int_a^b \underbrace{G(a, \xi)}_{=0} f(\xi) d\xi = 0$$

und analog $u(b) = 0$. Nach Definition 4.3.1 gilt

$$u(x) = \frac{b-x}{b-a} \int_a^x (\xi - a) f(\xi) d\xi + \frac{x-a}{b-a} \int_x^b (b - \xi) f(\xi) d\xi.$$

und somit

$$\begin{aligned} u'(x) &= -\frac{1}{b-a} \int_a^x (\xi - a) f(\xi) d\xi + \frac{b-x}{b-a} (x - a) f(x) \\ &\quad + \frac{1}{b-a} \int_x^b (b - \xi) f(\xi) d\xi - \frac{b-x}{b-a} (x - a) f(x) \end{aligned}$$

GREENSCHE
Funktion

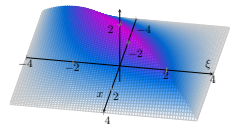


Abb. 26: Die GREENSCHE Funktion für $a = -4, b = 4$.

$$u''(x) = -\frac{x-a}{b-a}f(x) - \frac{b-x}{b-a}f(x) = -f(x) \left(\frac{x-a+b-x}{b-a} \right) = -f(x).$$

„ \implies “: Siehe den Beweis von Lemma 4.3.5 □

Wir betrachten nun das etwas allgemeinere semilineare Problem

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x, u(x)), \\ u(a) = 0 = u(b). \end{cases} \quad (86)$$

Lemma 4.3.5

Eine stetige Funktion $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ löst das Randwertproblem (86) genau dann wenn

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi \quad (87)$$

gilt.

Beweis. „ \Leftarrow “: Siehe den Beweis von Lemma 4.3.4.

„ \implies “: Für eine Lösung u von (86) gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b G(x, \xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi &\stackrel{(86)}{=} - \int_a^b G(x, \xi) u''(\xi) d\xi \\ &= -\frac{b-x}{b-a} \int_a^x (\xi-a) u''(\xi) d\xi - \frac{x-a}{b-a} \int_x^b (b-\xi) u''(\xi) d\xi \\ &= \frac{b-x}{b-a} \int_a^x u'(\xi) d\xi - \left[\frac{b-x}{b-a} (\xi-a) u'(\xi) \right]_{\xi=a}^x \\ &\quad - \left[\frac{x-a}{b-a} (b-\xi) u'(\xi) \right]_{\xi=x}^b - \frac{x-a}{b-a} \int_x^b u'(\xi) d\xi \\ &\stackrel{\text{RB}}{=} \frac{b-x}{b-a} u(x) + \frac{x-a}{b-a} u(x) = u(x). \end{aligned} \quad \square$$

Auf die [Fixpunktgleichung](#) (87) können wir die Fixpunktsätze aus dem zweiten Kapitel anwenden. Es folgt eine beispielhafte Anwendung.

SATZ 4.3.1: EINDEUTIGE LÖSBARKEIT MIT LIPSCHITZ-BEDINGUNG

Seien $f: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, welche einer L -[LIPSCHITZ-Bedingung](#) im zweiten Argument genügt. Ist $L < \frac{8}{(b-a)^2}$, so ist das Randwertproblem (86) [eindeutig lösbar](#).

Bemerkung 4.3.6 (zum Beweis) Im Kontrast zu vielen Sätzen im zweiten Kapitel ist f im zweiten Argument nicht auf einer Kugel definiert. Das liegt daran, dass wir Randwertprobleme betrachten: bei Anfangswertproblemen existiert eine Lösung bis zu dem Punkt, an dem sie die Kugel verlässt, bei Randwertproblemen gibt es aber nur Lösungen auf ganz $[a, b]$. Ist L klein, so steigt die Funktion nur gering und somit können wir garantieren, dass es keinen *blow-up* gibt und somit die Lösung tatsächlich auf $[a, b]$ existiert.

Beweis. Wie definieren den [Fixpunktoperator](#)

$$T: \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R}), \quad u(x) \mapsto \int_a^b G(x, \xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi, \quad (88)$$

welcher aufgrund der Stetigkeit und Beschränktheit von f und G wohldefiniert ist. Da $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ ein BANACH Raum ist, bleibt nur noch die Kontraktionseigenschaft zu zeigen: Für $v, w \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned} \|Tv - Tw\|_{\infty} &\stackrel{\Delta}{\leq} \sup_{x \in [a, b]} \int_a^b G(x, \xi) |f(\xi, v(\xi)) - f(\xi, w(\xi))| d\xi \\ &\leq \sup_{x \in [a, b]} L \int_a^b G(x, \xi) |v(\xi) - w(\xi)| d\xi = \sup_{x \in [a, b]} L \|v - w\|_{\infty} \int_a^b G(x, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Da für $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \int_a^b G(x, \xi) d\xi &= \frac{b-x}{b-a} \int_a^x \xi - a d\xi + \frac{x-a}{b-a} \int_x^b b - \xi d\xi \\ &= \frac{b-x}{b-a} \frac{(x-a)^2}{2} + \frac{x-a}{b-a} \frac{(b-x)^2}{2} \\ &= \frac{(b-x)(x-a)}{2(b-a)} ((x-a) + (b-x)) = \frac{(b-x)(x-a)}{2}, \end{aligned}$$

eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt $\frac{a+b}{2}$, an welchem sie ihr Maximum annimmt, ist, gilt

$$\max_{x \in [a, b]} \int_a^b G(x, \xi) d\xi = \frac{1}{2} \left(b - \frac{a+b}{2} \right) \left(\frac{a+b}{2} - a \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{8}.$$

Mit dem Fixpunktsatz von BANACH folgt die Behauptung. \square

Lemma 4.3.7 (Bessere Konstante)

Die Bedingung $L < \frac{8}{(b-a)^2}$ kann durch $L < \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$ abgeschwächt werden, welche scharf ist.

Bemerkung 4.3.8 • Wir betrachten das symmetrische lineare Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) + d(x)u(x) = f(x), \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

Sind b und d stetige Funktionen, so hat das Randwertproblem wegen

$$|f(x, v) - f(x, w)| = |d(x)(v - w)| \leq \|d\|_{\infty} |v - w|$$

mit $f(x, u(x)) := f(x) - d(x)u(x)$ genau eine Lösung nach Satz 4.3.1, wenn $\|d\|_{\infty} < \frac{8}{(b-a)^2}$ gilt, unabhängig von dem Vorzeichen von d .

- Auch hier können die inhomogenen DIRICHLET Randbedingungen in die rechte Seite transformiert werden: Sei $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine hinreichend differenzierbare Funktion, die a auf α und b auf β abbildet. Ist u eine Lösung von (86), so setzen wir $\tilde{u} := u - r$. Dann gilt $\tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0$ und

$$\begin{aligned} -\tilde{u}''(x) &= -u''(x) + r''(x) \stackrel{(86)}{=} f(x, u(x)) + r''(x) \\ &= f(x, \tilde{u}(x) + r(x)) + r''(x) =: \tilde{f}(x, \tilde{u}(x)) \end{aligned}$$

Dann ist \tilde{f} genau dann stetig und erfüllt die L -LIPSCHITZ-Bedingung, wenn f stetig ist und eine L -LIPSCHITZ-Bedingung erfüllt: für $x \in [a, b]$ und $v, w \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(x, v) - \tilde{f}(x, w)| &= |f(x, v + r(x)) - f(x, w + r(x))| \\ &\leq L|v + r(x) - (w + r(x))| = L|v - w|. \end{aligned}$$

4.4 Greensche Funktion für inhomogene lineare Randwertprobleme

Wir betrachten das inhomogene Randwertproblem mit homogenen DIRICHLET-Bedingungen

$$\begin{cases} (Lu)(x) = f(x), & x \in (a, b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad (89)$$

wobei $c, d \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ stetige Funktionen sind. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit homogene Randbedingungen wählen, da wir sie sonst in die rechte Seite transformieren könnten.

Wir suchen eine GREENSche Funktion für die linke Seite L . Dafür betrachten wir zunächst die homogene Differentialgleichung $Lu = 0$. Diese ist eindeutig lösbar und besitzt ein Fundamentalsystem $\{u_1, u_2\} \subset \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$. Wieder sei

$$W(x) := \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Da $\{u_1, u_2\}$ ein Fundamentalsystem ist, gilt nach Satz 2.3.6 $W(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$.

Wir setzen

$$A(x) := \begin{vmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1(x) & u_2(x) \end{vmatrix}, \quad B(x) := \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1(b) & u_2(b) \end{vmatrix}, \quad R := \begin{vmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1(b) & u_2(b) \end{vmatrix},$$

wobei $|\cdot|$ die Determinante ist. Dann ist $u(x) := c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$ die eindeutige Lösung des zugehörigen homogenen Randwertproblems (84), wenn das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1(b) & u_2(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nur die Lösung hat, das heißt wenn $R \neq 0$.



Resultat

Das homogene Randwertproblem (84) ist also genau dann eindeutig lösbar, das heißt hat nur die triviale Lösung, wenn $R \neq 0$ ist.

DEFINITION 4.4.1 (VERALLGEMEINERTE GREENSCHE FUNKTION)

Die verallgemeinerte GREENSche Funktion ist

$$G(x, \xi) := \frac{1}{RW(\xi)} \begin{cases} A(\xi)B(x), & \text{wenn } a \leq \xi \leq x \leq b, \\ A(x)B(\xi), & \text{wenn } a \leq x \leq \xi \leq b. \end{cases}$$

verallgemeinerte
GREENSche
Funktion

Die verallgemeinerte GREENSche Funktion ist stetig, da A und B und die WRONSKI-Determinante stetig ist. Es gilt $G(a, \xi) = G(b, \xi) = 0$ für alle $\xi \in [a, b]$ (selber nachrechnen!) und G ist symmetrisch.

Beispiel 4.4.2 (Verallgemeinerte GREENsche Funktion) Für $c \equiv d \equiv 0$, d.h. $Lu = -u''$, ist ein Fundamentalsystem von $Lu = 0$ gegeben durch $u_1 \equiv 1$ und $u_2(x) = x$. Dann gilt

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A(x) = x - a, \quad B(x) = b - x, \quad \text{und} \quad R = b - a,$$

somit erhalten wir genau die GREENsche Funktion von oben. \diamond

Lemma 4.4.3

Die Lösung des Randwertproblems (89) ist genau gegeben durch

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (90)$$

Beweis. Übungsaufgabe. \square

Korollar 4.4.4

Hat das homogene Problem (84) nur die triviale Lösung, so hat für beliebige $f \in \mathcal{C}([a, b])$ das inhomogene Problem (89) die eindeutige Lösung (90).

Bemerkung 4.4.5 Die Eindeutigkeit der Lösung des inhomogenen Systems folgt auch sofort aus dem **Superpositionsprinzip**: Sind u und \tilde{u} Lösungen des inhomogenen Problems mit $u \neq \tilde{u}$, so wäre aufgrund der Linearität $u - \tilde{u} \neq 0$ eine nichttriviale Lösung des homogenen Problems, was einen Widerspruch darstellt.

Die Umkehrung gilt ebenfalls: Ist das inhomogene Problem immer eindeutig lösbar, so hat das homogene Problem nur die triviale Lösung: Ist $u \neq 0$ eine nichttriviale Lösung des homogenen Systems und u_p eine Lösung des inhomogenen Systems, so ist aufgrund der Linearität der Differentialgleichung $u + u_p$ eine weitere Lösung des inhomogenen Systems mit $u + u_p \neq u_p$, was wieder einen Widerspruch darstellt.

Also gilt die



FREDHOLMsche Alternative

Entweder ist das inhomogene Problem mit inhomogenen DIRICHLET Randbedingungen (79) mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ für beliebige $f \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ **eindeutig lösbar** oder das homogene Problem (84) hat eine (und damit unendlich viele) **nichttriviale** Lösung(en).

Bemerkung 4.4.6 (Andere Randbedingungen) Der Beweis der FREDHOLMsche Alternative beruht auf dem **Superpositionsprinzip**, somit gilt die FREDHOLMsche Alternative auch für alle anderen **linearen** Randbedingungen. Hierbei ist die Linearität wieder wie beim Differentialoperator zu verstehen, also als Linearität in der gesuchten Lösung u und ihren Ableitungen.

Damit erhalten wir zum Beispiel den folgenden Satz.

SATZ 4.4.1

Sind $c \in \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R})$ und $d(x) + \frac{1}{4}c(x)^2 - \frac{1}{2}c'(x) \geq 0$, so hat die inhomogene Version

des Randwertproblems (84), also das Randwertproblem

$$\begin{cases} (Lu)(x) = f(x), \\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta, \end{cases}$$

für beliebiges $f \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ und beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung.

Beweis. Kombiniere die vorherigen Lemmata.

□

4.5 | Das Maximumprinzip

22.02.2021

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einer Fragestellung, die wir auch im Kontext von Anfangswertproblemen gestellt haben: stetige Abhängigkeit von den Daten.

Das Maximumprinzip ermöglicht es uns, Aussagen über die Werte der Lösung auf (a, b) zu treffen, wenn wir die Werte bei a und b kennen.

Lemma 4.5.1 (Differentialungleichung für $d = 0$)

Seien $c \in \mathcal{C}([a, b])$, $d \equiv 0$ und $u \in \mathfrak{C}([a, b]; \mathbb{R})$.

- Ist $Lu|_{(a,b)} \leq 0$, so gilt $u|_{[a,b]} \leq \max\{u(a), u(b)\}$.
- Ist $Lu|_{(a,b)} \geq 0$, so gilt $u|_{[a,b]} \geq \min\{u(a), u(b)\}$.

Beispiel 4.5.2 Betrachte $(Lu)(x) := -u''(x)$. Dann ist $-u''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$ impliziert, dass u konvex ist (zum Beispiel $x^2 + ax + b$ oder $u(x) = e^x$). Dann ist $u(x) \geq \min(u(a), u(b))$. \diamond

Beweis. ① Durch Anwendung der ersten Aussage auf $-u$ folgt die zweite Aussage, also genügt es, die erste Aussage zu zeigen.

- ② Sei zunächst $(Lu)(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$. Da die Funktion u auf dem Kompaktum $[a, b]$ stetig ist, nimmt sie dort ihr Maximum an. Angenommen, u nimmt ihr Maximum in $x_0 \in (a, b)$ an. Dann folgt $u'(x_0) = 0$ und somit

$$0 > (Lu)(x_0) = -u''(x_0) + c(x_0)u'(x_0) = -u''(x_0)$$

und somit $u''(x_0) > 0$. Also nimmt u in x_0 ein isoliertes Minimum an, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

- ③ Für positive Konstanten $\lambda, \delta > 0$ setzen wir $w(x) := \delta e^{\lambda x}$. Dann gilt für alle $x \in [a, b]$

$$(Lw)(x) = -\delta \lambda^2 e^{\lambda x} + c(x) \delta \lambda e^{\lambda x} = \underbrace{\delta \lambda e^{\lambda x}}_{>0} (c(x) - \lambda) < 0,$$

wenn $\lambda > \|c\|_\infty$ ist. Da nun (für hinreichend groß gewähltes λ) für $x \in (a, b)$

$$(L(u + w))(x) = \underbrace{(Lu)(x)}_{\leq 0} + \underbrace{(Lw)(x)}_{< 0} < 0,$$

also folgt mit ② für alle $\delta > 0$

$$(u + w)(x) \leq \max(u(a) + w(a), u(b) + w(b))$$

und somit

$$\begin{aligned} u(x) &\leq \max\{u(a) + \delta e^{\lambda a}, u(b) + \delta e^{\lambda b}\} - \underbrace{\delta e^{\lambda x}}_{>0} \\ &\leq \max\{u(a) + \delta e^{\lambda a}, u(b) + \delta e^{\lambda b}\}. \end{aligned}$$

Mit den Grenzübergang $\delta \searrow 0$ folgt die Behauptung. \square

SATZ 4.5.1: MAXIMUMPRINZIP

Seien $c, d \in \mathcal{C}([a, b])$, $d|_{[a,b]} \geq 0$ und $u \in \mathfrak{C}([a, b]; \mathbb{R})$.

- Ist $Lu|_{(a,b)} \leq 0$, so gilt $u(x) \leq \max\{u(a), u(b), 0\}$ für alle $x \in (a, b)$.

- Ist $Lu|_{(a,b)} \geq 0$, so gilt $u(x) \geq \min\{u(a), u(b), 0\}$ für alle $x \in (a, b)$.

Beweis. ① Wieder genügt es, die erste Aussage zu zeigen.

② Sei

$$M^+ := \{x \in (a, b) : u(x) > 0\}$$

die Menge der „interessanten“ Punkte: ist $u(x) \leq 0$, so ist auch $u(x) \leq \max\{u(a), u(b), 0\}$. Ist also $M^+ = \emptyset$, sind wir fertig. Da u stetig ist, ist M^+ die Vereinigung offener Intervalle. Genauer ist M^+ die Vereinigung von offenen Intervallen der Form $(a_0, b_0) \subset (a, b)$, wobei $a_0 = a$ oder $u(a_0) = 0$ und analog $b_0 = b$ oder $u(b_0) = 0$ gilt.

③ Ist $I_0 := (a_0, b_0) \subset M^+$ ein offenes Intervall. Für $x \in I_0$ gilt

$$0 \geq (Lu)(x) = -u''(x) + c(x)u'(x) + \underbrace{d(x)u(x)}_{\geq 0} \geq -u''(x) + c(x)u'(x).$$

Wir wenden Lemma 4.5.1 auf I_0 und $(Lu)(x) := -u''(x) + c(x)u'(x)$ an und erhalten $u|_{I_0} \leq \max\{u(a_0), u(b_0)\}$ auf I_0 . Somit ist wegen $a_0 = a$ oder $u(a_0) = 0$ und analog $b_0 = b$ oder $u(b_0) = 0$ für alle $x \in I_0$

$$u(x) \leq \max\{u(a), u(b), 0\}.$$

Damit folgt $u(x) \leq \max\{u(a), u(b), 0\}$ für alle $x \in M^+$ und auch für alle $x \in [a, b]$. \square

Korollar 4.5.3 ($d \geq 0$ genügt für eindeutige Lösbarkeit von (84))

Ist $d \geq 0$ und erfüllt $u \in \mathfrak{C}([a, b]; \mathbb{R})$ die homogene Gleichung $(Lu)(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so folgt für alle $x \in (a, b)$

$$\min\{u(a), u(b), 0\} \leq u(x) \leq \max\{u(a), u(b), 0\}.$$

Zusammen mit homogenen DIRICHLET Randbedingungen ist die einzige Lösung $u \equiv 0$.

Korollar 4.5.4 (Monotonie)

Gilt für zwei Lösungen $u, v \in \mathfrak{C}([a, b]; \mathbb{R})$ $u(a) \leq v(a)$, $u(b) \leq v(b)$ und

$$(Lu)(x) \leq (Lv)(x),$$

für alle $x \in (a, b)$, so folgt $u \leq v$ auf $[a, b]$.

Beweis. Wir setzen $w := u - v$. Dann ist $Lw = Lu - Lv \leq 0$. Mit dem Maximumprinzip erhalten wir für alle $x \in [a, b]$

$$u(x) - v(x) \leq \max\{0, u(a) - v(a), u(b) - v(b)\} = 0$$

und somit $u(x) \leq v(x)$. \square

SATZ 4.5.2: STABILITÄTSSAUSSAGE

Sei $u \in \mathfrak{C}([a, b]; \mathbb{R})$ die Lösung von (79) mit $d \geq 0$. Dann gibt es ein $\Lambda := \Lambda(a, b, c, d) > 0$ mit

$$\|u\|_\infty \leq \Lambda \|f\|_\infty + \max(|\alpha|, |\beta|).$$

Auch hieraus folgt sofort, dass (84) nur die Nulllösung besitzt, wenn $d \geq 0$ ist.

Bemerkung 4.5.5 Seien $u, v \in \mathfrak{C}([a, b]; \mathbb{R})$ Lösungen zu den Randwertproblemen mit rechten Seiten f beziehungsweise g mit den selben Randbedingungen $u(a) = v(a) = \alpha$ und $u(b) = v(b) = \beta$ sowie $w := u - v$ deren Differenz. Dann gilt $Lw = Lu - Lv = f - g$ und $w(a) = w(b) = 0$. Nach Satz 4.5.2 folgt

$$\|u - v\|_\infty \leq \Lambda \|f - g\|_\infty,$$

wir erhalten also eine **LIPSCHITZ-stetige Abhängigkeit** von der rechten Seite und analog von α, β .

Beweis. ① Für $\lambda, A, B > 0$ setzen wir

$$w: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto Be^{\lambda(x-a)} - A.$$

Dann gilt

$$w'(x) = \lambda Be^{\lambda(x-a)} \quad \text{und} \quad w''(x) = \lambda^2 Be^{\lambda(x-a)}$$

und somit

$$(Lw)(x) = Be^{\lambda(x-a)} (-\lambda^2 + \lambda c(x) + d(x)) - \underbrace{Ad(x)}_{\geq 0} \leq B \underbrace{e^{\lambda(x-a)}}_{\geq 1} (-\lambda^2 + \lambda c(x) + d(x))$$

für $x \in [a, b]$. Sei nun $\lambda > 0$ so groß, dass

$$e^{\lambda(x-a)} (-\lambda^2 + \lambda c(x) + d(x)) \leq -1$$

für alle $x \in [a, b]$ ist. Damit folgt

$$(Lw)(x) \leq -B$$

für alle $x \in (a, b)$.

Damit folgt

$$(L(w \pm u))(x) = (Lw)(x) \pm (Lu)(x) = (Lw)(x) \pm f(x) \leq -B \pm f(x)$$

und somit $(L(w \pm u))(x) \leq |f(x)| - B \leq 0$ für alle $x \in [a, b]$, da wir $B := \|f\|_\infty$ wählen.

② Nach dem Maximumprinzip folgt

$$\pm u(x) + w(x) \leq \max(\pm u(a) + w(a), \pm u(b) + w(b), 0) = \max(\pm \alpha + w(a), \pm \beta + w(b), 0)$$

Da $w(x) \geq B - A$ für alle $x \in [a, b]$, $w(a) = B - A$ und $w(b) = Be^{\lambda(b-a)} - A$ ist, folgt

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \max(|\alpha| + B - A, |\beta| + Be^{\lambda(b-a)} - A, 0) - \underbrace{w(x)}_{\geq B-A} \\ &\leq \max(|\alpha| + B - A, |\beta| + Be^{\lambda(b-a)} - A, 0) + A - B \\ &\leq \max(|\alpha|, |\beta| + B(e^{\lambda(b-a)} - 1), A - B) \\ &= \max(|\alpha|, |\beta| + \|f\|_\infty(e^{\lambda(b-a)} - 1), A - \|f\|_\infty). \end{aligned}$$

Wir setzen $\Lambda := e^{\lambda(b-a)}$, $A := \Lambda \|f\|_\infty + \max(|\alpha|, |\beta|)$. Dann folgt

$$|u(x)| \leq A$$

□

Es gilt noch das **starke Maximumprinzip**.

Lemma 4.5.6

Sei $d(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und $v \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$. Gilt $(Lv)(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, so kann v *kein nichtnegatives Maximum* in (a, b) annehmen.

Beweis. Angenommen, es gibt ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$0 \leq v(x_0) = \max_{x \in [a, b]} v(x).$$

Wieder gilt $v'(x_0) = 0$ und somit

$$0 > (Lv)(x_0) = -v''(x_0) + c(x_0) \underbrace{v'(x_0)}_{=0} + \underbrace{d(x_0)v(x_0)}_{\geq 0} \geq -v''(x_0).$$

Es folgt $v''(x_0) > 0$, also nimmt v in x_0 ein lokales Minimum an. \square

SATZ 4.5.3: STARKES MAXIMUMPRINZIP

Sei $d(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Besitzt $v \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ in nichtnegatives Maximum in (a, b) besitzt und $(Lv) \leq 0$ auf (a, b) gilt, so ist v konstant.

Beweis. ① Angenommen, es gibt ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$0 \leq v(x_0) = \max_{x \in [a, b]} v(x).$$

und v ist nicht konstant. Somit gibt es $x_1 \in (a, b)$ mit $v(x_1) < v(x_0)$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_1 > x_0$.

② Für $\lambda, \delta > 0$ setzen wir

$$w: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \delta \left(e^{\lambda(x-x_0)} - 1 \right).$$

Dann gilt $w(x) < 0$ für $x < x_0$, $w(x) > 0$ für $x > x_0$ und $w(x_0) = 0$ sowie

$$w'(x) = \delta \lambda e^{\lambda(x-x_0)} \quad \text{und} \quad w''(x) = \delta \lambda^2 e^{\lambda(x-x_0)}$$

und somit

$$(Lw)(x) = \delta e^{\lambda(x-x_0)} \left(-\lambda^2 + c(x)\lambda + d(x) \right) - \underbrace{\delta d(x)}_{\geq 0} \leq \delta e^{\lambda(x-x_0)} \left(-\lambda^2 + c(x)\lambda + d(x) \right).$$

für $x \in [a, x_1]$. Wir wählen $\lambda > 0$ so groß, dass $(-\lambda^2 + c(x)\lambda + d(x)) < 0$ für alle $x \in [a, x_1]$ gilt und somit folgt

$$(Lw)(x) < 0$$

für alle $x \in [a, x_1]$.

Also gilt $L(v+w) < 0$ auf $[a, x_1]$, also nimmt $v+w$ nach Lemma 4.5.6 auf $[a, x_1]$ kein nichtnegatives Maximum an.

③ Es gilt aber $(v+w)(x_0) = v(x_0) \geq 0$ und $(v+w)(x) < v(x) \leq v(x_0)$ für alle $x \in [a, x_0]$. Wir wählen $\delta > 0$ so klein, dass $(v+w)(x_1) = v(x_1) + \delta(e^{\lambda(x_1-x_0)} - 1) < v(x_0)$ gilt. Somit nimmt $v+w$ auf $[a, x_1]$ ein nichtnegatives Maximum an, was ein Widerspruch zur Annahme ist. \square

4.6 | Allgemeine semilineare Randwertprobleme

Wir betrachten das gesamte inhomogene semilineare Randwertprobleme mit homogenen DIRICHLET Randbedingungen

$$\begin{cases} (Lu)(x) = f(x, u(x), u'(x)), & x \in (a, b), \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \quad (91)$$

Bemerkung 4.6.1 Natürlich umfasst dies den Fall $-u''(x) = f(x, u(x), u'(x))$ ($c, d \equiv 0$), für welches wir die GREENSche Funktion schon kennen. Auch hier können inhomogene DIRICHLET Randbedingungen in die rechte Seite transferiert werden.

Der Unterschied der folgenden Sätze, welche Anwendungen der Fixpunktsätze von BANACH und SCHAUDER sind, zu ähnlichen Sätzen in den vorangegangenen Kapiteln ist, dass wir in $\mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R})$ anstatt in $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ arbeiten.

SATZ 4.6.1: EINDEUTIGE LÖSBARKEIT

Sei $f: [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und genüge einer LIPSCHITZ-Bedingung im zweiten und dritten Argument: es existieren $L, L' > 0$, sodass

$$|f(x, v, v') - f(x, w, w')| \leq L|v - w| + L'|v' - w'|$$

für alle $x \in [a, b]$ und alle $v, v', w, w' \in \mathbb{R}$ gilt. Besitzt das zugehörige homogene Problem (84) nur die triviale Lösung und gilt

$$\max_{x \in [a, b]} \int_a^b L|G(x, \xi)| + L' \left| \frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi) \right| d\xi < 1, \quad (92)$$

so besitzt (91) genau eine Lösung.

Bemerkung 4.6.2 Sind $c, d \equiv 0$, das heißt $(Lu)(x) = -u''(x)$, so ist die GREENSche Funktion gegeben durch

$$G(x, \xi) = \frac{1}{b-a} \begin{cases} (\xi - a)(b - x), & \xi \leq x, \\ (x - a)(b - \xi), & x \leq \xi, \end{cases}$$

Die Bedingung (92) wird dann

$$L \frac{(b-a)^2}{8} + L' \frac{b-a}{2} < 1,$$

je größer die Intervalllänge ist, desto kleiner müssen die LIPSCHITZ-Konstanten sein.

Beweis. ① Wir setzen wieder

$$(Tu)(x) := \int_a^b G(x, \xi) f(\xi, u(\xi), u'(\xi)) d\xi.$$

Ganz analog zu oben kann man zeigen, dass $u \in \mathcal{C}^1([a, b])$ genau dann eine Lösung des Randwertproblems (91) ist, wenn u ein Fixpunkt von T ist.

② Wir zeigen $T: \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R})$. Es ist schon bekannt, dass $Tu \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$

für $u \in \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R})$ gilt. Es ist

$$\begin{aligned}(Tu)'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{B(x)}{R} \int_a^x \frac{A(\xi)}{W(\xi)} f(\xi, u(\xi), u'(\xi)) d\xi + \frac{A(x)}{R} \int_a^x \frac{B(\xi)}{W(\xi)} f(\xi, u(\xi), u'(\xi)) d\xi \right] \\&= \frac{B'(x)}{R} \int_a^x \frac{A(\xi)}{W(\xi)} f(\xi, u(\xi), u'(\xi)) d\xi + \frac{B(x)}{R} \frac{A(x)}{W(x)} f(x, u(x), u'(x)) \\&\quad - \frac{A(x)}{R} \frac{B(x)}{W(x)} f(x, u(x), u'(x)) + \frac{A'(x)}{R} \int_a^x \frac{B(\xi)}{W(\xi)} f(\xi, u(\xi), u'(\xi)) d\xi \\&= \frac{B'(x)}{R} \int_a^x \frac{A(\xi)}{W(\xi)} f(\xi, u(\xi), u'(\xi)) d\xi + \frac{A'(x)}{R} \int_a^x \frac{B(\xi)}{W(\xi)} f(\xi, u(\xi), u'(\xi)) d\xi.\end{aligned}$$

Da A und B als Determinante von Matrizen, in denen die differenzierbaren Fundamentallösungen stehen sind, sind sie stetig differenzierbar und somit ist $(Tu)'$ stetig.

- ③ Auf $\mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R})$ betrachten wir die Norm

$$\|u\| := \max_{x \in [a, b]} L|u(x)| + L'|u'(x)|.$$

Dann ist $\|\cdot\|$ zu $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}$ äquivalent und somit $(\mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|)$ ein BANACH-Raum.

- ④ Wir zeigen, dass T eine Kontraktion bezüglich $\|\cdot\|$ ist. Für $v, w \in \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R})$ und $x \in [a, b]$ gilt

$$\begin{aligned}|(Tv)(x) - (Tw)(x)| &\stackrel{\Delta \neq}{\leq} \int_a^b |G(x, \xi)| |f(\xi, v(\xi), v'(\xi)) - f(\xi, w(\xi), w'(\xi))| d\xi \\&\leq \int_a^b |G(x, \xi)| (L|v(\xi) - w(\xi)| + L'|v'(\xi) - w'(\xi)|) d\xi \\&\leq \int_a^b |G(x, \xi)| d\xi \|v - w\|\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}|(Tv)'(x) - (Tw)'(x)| &\stackrel{\Delta \neq}{\leq} \int_a^b \left| \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi) \right| |f(\xi, v(\xi), v'(\xi)) - f(\xi, w(\xi), w'(\xi))| d\xi \\&\leq \int_a^b \left| \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi) \right| d\xi \|v - w\|.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\|Tv - Tw\| &= \max_{x \in [a, b]} L|(Tv)(x) - (Tw)(x)| + L'| (Tv)'(x) - (Tw)'(x) | \\&\leq \underbrace{\max_{x \in [a, b]} \int_a^b L|G(x, \xi)| + L' \left| \frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi) \right| d\xi}_{< 1} \|v - w\|.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt mit dem **Fixpunktsatz von BANACH**. □

SATZ 4.6.2: GIUSEPPE SCORZA DRAGONI (1935)

Sei $f: [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Besitzt das zugehörige homogene Problem (84) nur die triviale Lösung, so besitzt (91) mindestens eine Lösung.

Beweis. ① Seien $M > 0$, sodass $|f(x, s, s')| \leq M$ für alle $x \in [a, b]$ und $s, s' \in \mathbb{R}$ gilt und

$$\gamma := \max_{x \in [a, b]} \int_a^b |G(x, \xi)| + \left| \frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi) \right|$$

und $r := M\gamma > 0$. Wir setzen wieder (cf. vorheriger Beweis)

$$T: \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R}), \quad u(x) \mapsto \int_a^b G(x, \xi) f(x, u(\xi), u'(\xi)) d\xi.$$

und verstehen $\mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R})$ mit der zu $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}$ äquivalenten Norm

$$\|u\| := \max_{x \in [a, b]} |u(x)| + |u'(x)|.$$

② Wir setzen

$$A := \{u \in \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R}) : \|u\| \leq r\} = \overline{B^{\|\cdot\|}}(0, r) \subset \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R}).$$

Dann ist T eine Selbstabbildung auf A : Für $u \in A$ gilt

$$\begin{aligned} \max_{x \in [a, b]} |(Tu)(x)| + |(Tu)'(x)| &\leq \max_{x \in [a, b]} \int_a^b \left(|G(x, \xi)| + \left| \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi) \right| \right) |f(\xi, u(\xi), u'(\xi))| d\xi \\ &\leq \max_{x \in [a, b]} \int_a^b |G(x, \xi)| + \left| \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi) \right| d\xi M = \gamma M = r. \end{aligned}$$

③ Wir zeigen nun die Kompaktheit von T und dafür zunächst die Stetigkeit von T . Sei $\varepsilon > 0$. Wir zeigen, dass dann ein $\delta > 0$ existiert, sodass $\|v - w\| < \delta$ impliziert, dass $\|Tv - Tw\| < \varepsilon$. Nun ist f auf der kompakten Menge $\{(x, s, s') \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |s| + |s'| \leq r\}$ gleichmäßig stetig, es gibt also ein $\delta > 0$, sodass für $x \in [a, b]$

$$|f(x, s, s') - f(x, t, t')| < \frac{\varepsilon}{\gamma}$$

wenn $|s - t| + |s' - t'| < \delta$ und $|s| + |s'|, |t| + |t'| \leq r$ gelten.

Sind $v, w \in A$ mit $\|v - w\| < \delta$, so folgt

$$\begin{aligned} \|Tv - Tw\| &\stackrel{\triangle}{\leq} \max_{x \in [a, b]} \int_a^b \left(|G(x, \xi)| + \left| \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi) \right| \right) \\ &\quad \cdot |f(\xi, v(\xi), v'(\xi)) - f(\xi, w(\xi), w'(\xi))| d\xi \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\gamma} \cdot \max_{x \in [a, b]} \int_a^b |G(x, \xi)| + \left| \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi) \right| d\xi \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

da $|v(\xi) - w(\xi)| + |v'(\xi) - w'(\xi)| < \delta$ gilt.

Wir zeigen nun, dass T beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen überführt. Da A beschränkt ist, genügt es zu zeigen, dass $T(A) \subset \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R})$ relativ kompakt ist. Da wir in $\mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R})$ arbeiten, können wir den Satz von ARZELÀ-ASCOLI nicht direkt anwenden. Deshalb wenden wir ihn zweimal an: einmal auf die Funktionenfolge und dann auf die Folge ihrer Ableitungen.

Ⓐ Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ ein Folge. Dann ist $(Tu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt, da $\|Tu_n\|_\infty \leq \|Tu_n\| \leq r$ gilt und gleichgradig stetig: für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} |(Tu_n)(x) - (Tu_n)(y)| &\stackrel{\triangle}{\leq} \int_a^b |G(x, \xi) - G(y, \xi)| |f(\xi, u_n(\xi), u_n'(\xi))| d\xi \\ &\leq M \int_a^b \int_a^b |G(x, \xi) - G(y, \xi)| d\xi. \end{aligned}$$

Da G gleichmäßig stetig auf $[a, b]^2$ ist, folgt die gleichgradige Stetigkeit von $(Tu_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (b) Nach dem Satz von ARZELÀ-ASCOLI existiert eine Teilfolge $(Tu_{n'})_{n' \in \mathbb{N}}$, die gleichmäßig (das heißt bezüglich $\|\cdot\|_\infty$) konvergiert. Wir brauchen aber Konvergenz bezüglich der \mathcal{C}^1 -Norm.
- (c) Wir wollen den Satz von ARZELÀ-ASCOLI auf $((Tu_{n'})')_{n' \in \mathbb{N}}$ anwenden. Die Folge $((Tu_{n'})')_{n' \in \mathbb{N}}$ ist gleichmäßig beschränkt, da für $n' \in \mathbb{N}$

$$\|(Tu_{n'})'\|_\infty \leq \|Tu_{n'}\| \leq r$$

gilt. Ferner gilt für $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} (Tu_{n'})(x) &= \frac{B(x)}{R} \int_a^x \frac{A(\xi)}{W(\xi)} f(\xi, u_{n'}(\xi), u'_{n'}(\xi)) d\xi \\ &\quad + \frac{A(x)}{R} \int_x^b \frac{B(\xi)}{W(\xi)} f(\xi, u_{n'}(\xi), u'_{n'}(\xi)) d\xi \end{aligned}$$

und somit (wie im Schritt ② im Beweis von Satz 4.6.1)

$$\begin{aligned} (Tu_{n'})'(x) &= \frac{B'(x)}{R} \int_a^x \frac{A(\xi)}{W(\xi)} f(\xi, u_{n'}(\xi), u'_{n'}(\xi)) d\xi \\ &\quad + \frac{A'(x)}{R} \int_x^b \frac{B(\xi)}{W(\xi)} f(\xi, u_{n'}(\xi), u'_{n'}(\xi)) d\xi. \end{aligned}$$

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x < y$ für $x, y \in [a, b]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |(Tu_{n'})'(x) - (Tu_{n'})'(y)| &\leq \frac{|B'(x) - B'(y)|}{R} \int_a^x \left| \frac{A(\xi)}{W(\xi)} \right| |f(\xi, u_{n'}(\xi), u'_{n'}(\xi))| d\xi \\ &\quad + \int_x^y \frac{|A'(x)B(\xi) - B'(x)A(\xi)|}{R|W(\xi)|} |f(\xi, u_{n'}(\xi), u'_{n'}(\xi))| d\xi \\ &\quad + \frac{|A'(x) - A'(y)|}{R} \int_y^b \frac{|B(\xi)|}{|W(\xi)|} |f(\xi, u_{n'}(\xi), u'_{n'}(\xi))| d\xi \\ &\leq M \frac{|B'(x) - B'(y)|}{R} \int_a^x \left| \frac{A(\xi)}{W(\xi)} \right| d\xi \\ &\quad + M \int_x^y \frac{|A'(x)B(\xi) - B'(x)A(\xi)|}{R|W(\xi)|} d\xi \\ &\quad + M \frac{|A'(x) - A'(y)|}{R} \int_y^b \frac{|B(\xi)|}{|W(\xi)|} d\xi. \end{aligned}$$

Da A, B, A', B' und W gleichmäßig stetig sind (cf. oben), so folgt die gleichgradige Stetigkeit. Nach dem Satz von ARZELÀ-ASCOLI existiert eine Teil-Teilfolge $(u_{n''})_{n'' \in \mathbb{N}}$, sodass $((Tu_{n''})')_{n'' \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert.

- ④ Somit existieren $g, h \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ mit $Tu_{n''} \rightarrow g$ und $(Tu_{n''})' \rightarrow h$, jeweils gleichmäßig für $n'' \rightarrow \infty$. Nach einem Satz aus der Analysis folgt $h = g'$. Dies impliziert, dass $Tu_{n''} \rightarrow g$ in $\mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R})$ gilt. Somit ist $T(A)$ relativ kompakt und somit T ein kompakter Operator. Die Behauptung folgt aus dem Fixpunktsatz von SCHAUDER. \square

Abbildungsverzeichnis

1	Das SIR-Modell.	3
2	Durchbiegung einer Platte.	3
3	Eine Lösungsfamilie einer partiellen Differentialgleichung im $(t, x, u(t, x))$ - Koordinatensystem.	11
4	Die Charakteristiken sind Geraden mit Steigung $\lambda := 2$	11
5	Die Charakteristiken von (20).	12
6	Eine schwingende Saite und eine anfängliche Auslenkung.	13
7	Die D’ALEMBERT-Lösung für $v_0 \equiv 0$	15
8	Visuelle Interpretation der D’ALEMBERT-Lösung.	15
9	Die Funktion $u \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ und die Treppenfunktion $u^{(4)}$	18
10	Die blaue Menge ist die konvexe Hülle der roten Menge.	20
11	Veranschaulichung von Lemma 2.1.9 mit zwei verschiedenen Funktionen. . . .	21
12	Das Anfangswertproblem (26).	25
13	Vier verschiedene Lösung von (29).	27
14	TODO	29
15	Die Lösung von (30) ist der Tangens.	30
16	TODO	58
17	Der Fall 2a.	64
18	TODO: (★) verdeutlichen	66
19	Die Funktion (47).	67
20	Man kann die Funktion f nicht zeichnen, sonst nur approximieren, da sie „rekursiv“ definiert ist.	67
21	[Quelle: WolframAlpha]	86
22	[Quelle: WolframAlpha]	86
23	Das mathematische Pendel.	96
24	TODO.	97
25	Es gilt $u(0) = 1$ und $u(\pi) = -1$ für $u(t) := \cos(t) + a \sin(t)$ für alle $a \in \mathbb{R}$. . .	108
26	Die GREENSche Funktion für $a = -4, b = 4$	111

Index

A	
absolut stetig	68
asymptotisch stabil	97
attraktiv	97
C	
CARATHÉODORY-Bedingung	76
D	
Daten	83
differenzierbar	23
dissipativ	86
E	
elliptisch	12
erstes Integral	102
Exponentialansatz	7
exponentiell stabil	97
F	
Fixpunktsatz von BANACH ...	26–28, 113, 122
Fixpunktsatz von SCHAUDER ..	50, 54, 56, 79, 124
Formel von LIOUVILLE	45
Fortsetzung	62
Fundamentalsystem	45
G	
Gleichgewichtspunkt	96
gleichgradig stetig	49
Graph	62
GREENSche Funktion	111
verallgemeinert	114
H	
homogen	6
hyperbolisch	12
K	
kompakt	51

L	
LJAPUNOV-Funktion	102
M	
Majoranten-Bedingung	76
maximal fortgesetzt	62
N	
NEMYZKI-Operator	24
O	
Ordnung	4
P	
parabolisch	12
Propagator	35
Q	
quasilinear	4
R	
Randbedingung	3
relativ kompakt	21
S	
semilinear	4
Superpositionsprinzip	6
T	
Teilfolgenprinzip	105
Totalvariationsfunktion	74
V	
Variation der Konstanten	9
vollständig nichtlinear	5
W	
Wellengleichung	13
WRONSKI-Determinante	45
Wärmegleichung	13

Literatur

- [1] [https : / / de . wikipedia . org / wiki / Durchbiegung # /media / Datei :
Biegemoment_Balken_Mittenlast.svg](https://de.wikipedia.org/wiki/Durchbiegung#/media/Datei:Biegemoment_Balken_Mittenlast.svg)
- [2] <https://de.wikipedia.org/wiki/SIR-Modell#/media/Datei:SIR-Modell.svg>
- [3] NPTEL Course: Wave Propagation in Continuous Media
- [4] https://en.wikipedia.org/wiki/Convex_hull#/media/File:Extreme_points.svg
- [5] <https://math.stackexchange.com/a/3308631/545914>