„Zoom and enhance" geht wirklich Mit atomic norm minimization
(und ohne machine learning)

Bachelorarbeit von Viktor Stein, März 2021

Betreuung: Prof. Dr. Gabriele Steidl und Dr. Robert Beinert

AG Angewandte Mathematik

17. Dies Mathematicus, 25.11.2022

Institut für Mathematik, TU Berlin

„Zoom and enhance“-Klischee

– „Zoom“ unrealistisch: Computer kann Pixel nicht erfinden

„Zoom and enhance"-Klischee

- „Zoom" unrealistisch: Computer kann Pixel nicht erfinden
- **Mit ANM: „enhancen" = Auflösung verbessern**

„Zoom and enhance“-Klischee

- „Zoom“ unrealistisch: Computer kann Pixel nicht erfinden
- **Mit ANM: „enhancen“ = Auflösung verbessern**

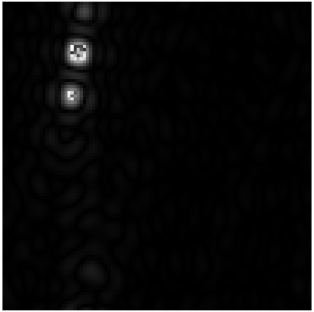


Abb. 1: **Links:** Bild mit niedriger Auflösung.

„Zoom and enhance“-Klischee

- „Zoom“ unrealistisch: Computer kann Pixel nicht erfinden
- **Mit ANM: „enhancen“ = Auflösung verbessern**

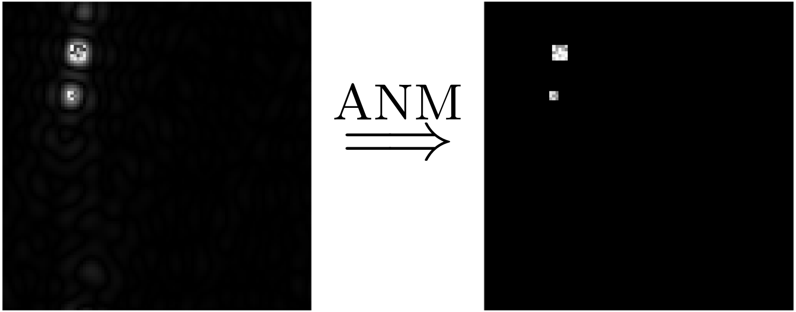


Abb. 1: **Links:** Bild mit niedriger Auflösung. **Rechts:** Das Original.

Das Modell in 2D und 1D

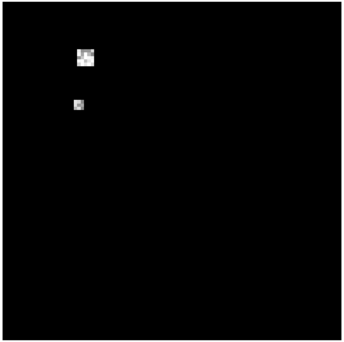
Simple Bilder

Das Modell in 2D und 1D

Simple Bilder $\rightsquigarrow$ Viele Pixel enthalten keine Infos.

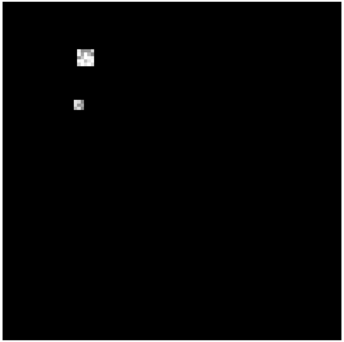
Das Modell in 2D und 1D

Simple Bilder $\rightsquigarrow$ Viele Pixel enthalten keine Infos.



Das Modell in 2D und 1D

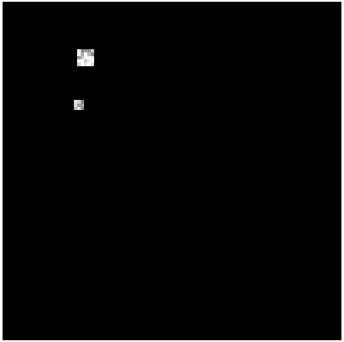
Simple Bilder $\rightsquigarrow$ Viele Pixel enthalten keine Infos.



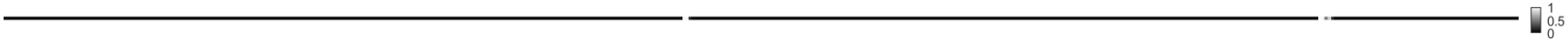
1-dimensionales Analogon zu Bildern:

Das Modell in 2D und 1D

Simple Bilder $\rightsquigarrow$ Viele Pixel enthalten keine Infos.

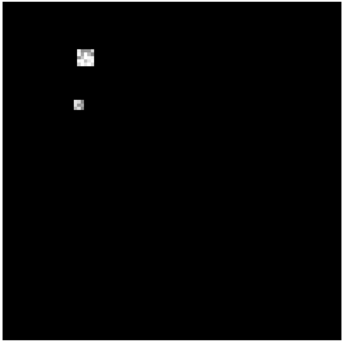


1-dimensionales Analogon zu Bildern:

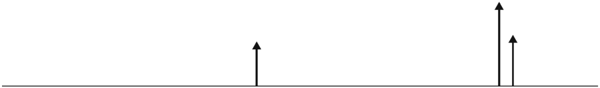


Das Modell in 2D und 1D

Simple Bilder $\rightsquigarrow$ Viele, viele Pixel enthalten keine Infos.



1-dimensionales Analogon im Grenzwert zu ∞ vielen Pixeln:



Das mathematische Modell - ein spike train

Modelliere Signal als **spike train** auf dem Einheitskreis $\mathbb{T}$:

$$x := \sum_{k=1}^{r} c_k \delta_{t_k}$$

Das mathematische Modell - ein spike train

Modelliere Signal als **spike train** auf dem Einheitskreis $\mathbb{T}$:

$$x := \sum_{k=1}^{r} c_k \delta_{t_k} \qquad \delta_t(A) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } t \in A, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

mit Amplituden $(c_k)_{k=1}^r \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und Positionen $(t_k)_{k=1}^r \subseteq \mathbb{T}$.

Das mathematische Modell - ein spike train

Modelliere Signal als **spike train** auf dem Einheitskreis $\mathbb{T}$:

$$x := \sum_{k=1}^{r} c_k \delta_{t_k} \qquad \delta_t(A) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } t \in A, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

mit Amplituden $(c_k)_{k=1}^r \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und Positionen $(t_k)_{k=1}^r \subseteq \mathbb{T}$.

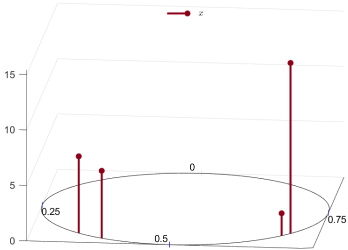


Abb. 2: Ein reeller spike train auf $\mathbb{T}$ mit $r = 4$ *spikes*.

Das niedrig aufgelöste Signal

Wegen Beugung: bildgebendes Gerät hat beschränkte Auflösung.
$\Longrightarrow$ das wirkliche empfangene, niedrig aufgelöste Signal ist

$$x_{\text{low}}\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}, \qquad t \mapsto (x * g)(t)$$

Das niedrig aufgelöste Signal

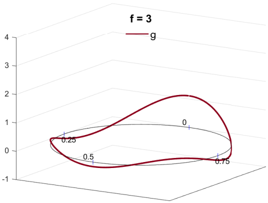
Wegen Beugung: bildgebendes Gerät hat beschränkte Auflösung.
$\implies$ das wirkliche empfangene, niedrig aufgelöste Signal ist

$$x_{\text{low}} \colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}, \qquad t \mapsto (x * g)(t)$$

wobei

$$g(t) := \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \le f} e^{2\pi \mathrm{i} t k}$$

für $f \in \mathbb{N}$.



Das niedrig aufgelöste Signal

Wegen Beugung: bildgebendes Gerät hat beschränkte Auflösung.

$\implies$ das wirkliche empfangene, niedrig aufgelöste Signal ist

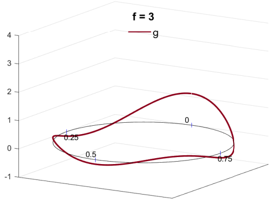
$$x_{\text{low}}\colon\ \mathbb{T} \to \mathbb{C}, \qquad t \mapsto (x * g)(t)$$

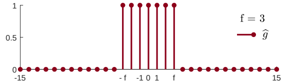
wobei

$$g(t) := \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \le f} e^{2\pi \mathrm{i} t k}$$

für $f \in \mathbb{N}$.

Die Fourier-Transformation von g ist $\hat{g} = \mathbb{1}_{\{-f,\dots,f\}}$.





Das niedrig aufgelöste Signal

Wegen Beugung: bildgebendes Gerät hat beschränkte Auflösung.

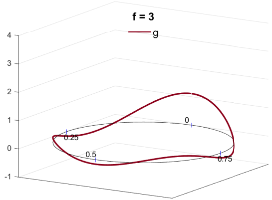
$\implies$ das wirkliche empfangene, niedrig aufgelöste Signal ist

$$x_{\text{low}}\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}, \qquad t \mapsto (x * g)(t) = \sum_{k=1}^{r} c_k g(t - t_k) \quad (* : \text{Faltung}).$$

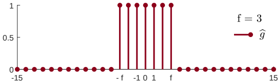
wobei

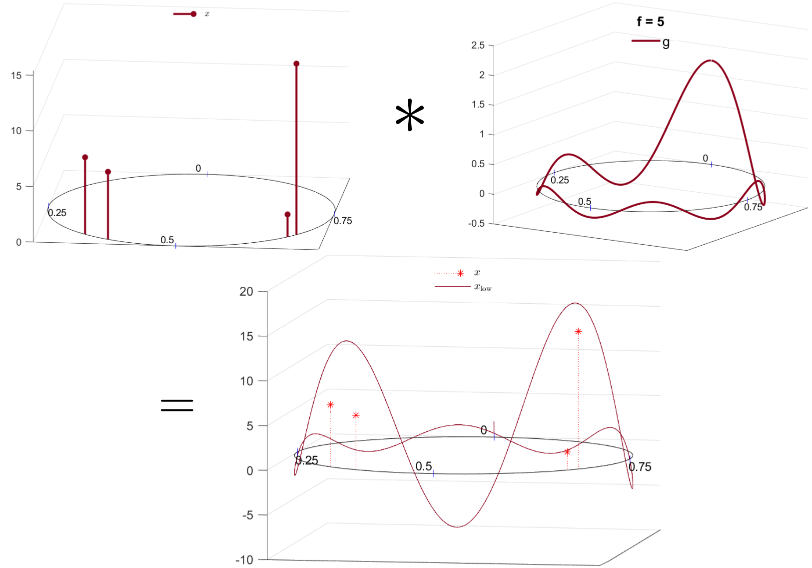
$$g(t) := \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \le f} e^{2\pi i t k}$$

für $f \in \mathbb{N}$.



Die Fourier-Transformation von g ist $\hat{g} = \mathbb{1}_{\{-f,\dots,f\}}$.

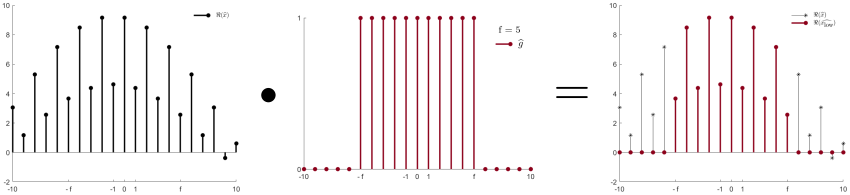



x
15
10
5
0
0.25
0.5
0
0.75
f = 5
g
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0.25
0.5
0
0.75
x
x_low
20
15
10
5
0
-5
-10
0.25
0.5
0
0.75

Messung: Fourier-Transformation des niedrig aufgelösten Signals

Die Fourier-Transformation von x_{low} ist

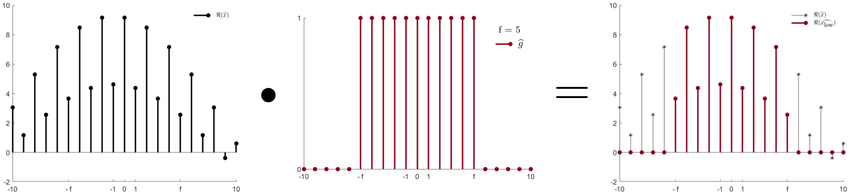
$$\widehat{x_{\text{low}}}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \qquad j \mapsto \hat{x}(j)\hat{g}(j) = \left(\sum_{k=1}^{r} c_k e^{-2\pi \mathrm{i} j t_k} \right) \mathbb{1}_{|j| \le f}(j).$$



Messung: Fourier-Transformation des niedrig aufgelösten Signals

Die Fourier-Transformation von x_{low} ist

$$\widehat{x_{\text{low}}}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \qquad j \mapsto \hat{x}(j)\hat{g}(j) = \left(\sum_{k=1}^{r} c_k e^{-2\pi \mathrm{i} j t_k}\right) \mathbb{1}_{|j| \le f}(j).$$



$\rightsquigarrow$ Faltung von x mit g löscht die hohen Frequenzen von x.

Niederfrequente Messungen als Vektor

Da $\hat{g} = \mathbb{1}_{|\cdot| \leq f}$, bleiben $d := 2f + 1$ Messungen

Niederfrequente Messungen als Vektor

Da $\hat{g} = \mathbb{1}_{|\cdot| \le f}$, bleiben $d \coloneqq 2f + 1$ Messungen

$$\tilde{x} \coloneqq \left(\widehat{x_{\text{low}}}(j)\right)_{|j| \le f} = \left(\sum_{k=1}^{r} c_k e^{-2\pi \mathrm{i} j t_k}\right)_{|j| \le f} = \sum_{k=1}^{r} c_k \psi(e^{-2\pi \mathrm{i} t_k}) \in \mathbb{C}^d,$$

wobei $\psi(z) \coloneqq (z^j)_{|j| \le f}$.

Niederfrequente Messungen als Vektor

Da $\hat{g} = \mathbb{1}_{|\cdot| \le f}$, bleiben $d := 2f + 1$ Messungen

$$\tilde{x} := \left(\widehat{x_{\text{low}}}(j)\right)_{|j| \le f} = \left(\sum_{k=1}^{r} c_k e^{-2\pi \mathrm{i} j t_k}\right)_{|j| \le f} = \sum_{k=1}^{r} c_k \psi(e^{-2\pi \mathrm{i} t_k}) \in \mathbb{C}^d,$$

wobei $\psi(z) := (z^j)_{|j| \le f}$.

Zwischenbilanz:

$$x = \sum_{k=1}^{r} c_k \delta_{t_k}$$

Niederfrequente Messungen als Vektor

Da $\hat{g} = \mathbb{1}_{|\cdot| \le f}$, bleiben $d := 2f + 1$ Messungen

$$\tilde{x} := \left(\widehat{x_{\text{low}}}(j)\right)_{|j| \le f} = \left(\sum_{k=1}^{r} c_k e^{-2\pi \mathrm{i} j t_k}\right)_{|j| \le f} = \sum_{k=1}^{r} c_k \psi(e^{-2\pi \mathrm{i} t_k}) \in \mathbb{C}^d,$$

wobei $\psi(z) := (z^j)_{|j| \le f}$.

Zwischenbilanz:

$$x = \sum_{k=1}^{r} c_k \delta_{t_k} \xrightarrow[\text{Messung}]{\text{ergibt die}} \tilde{x} = \underbrace{\sum_{k=1}^{r} |c_k| e^{-2\pi \mathrm{i} \varphi_k} \psi(e^{-2\pi \mathrm{i} t_k})}_{\substack{\text{nichtnegative Linearkombination} \\ \text{von Vektoren vom Typ} \\ e^{-2\pi \mathrm{i} \varphi} \psi(e^{-2\pi \mathrm{i} t}) \in \mathbb{C}^d,\ \varphi, t \in \mathbb{T}}}.$$

Niederfrequente Messungen als Vektor

Da $\hat{g} = \mathbb{1}_{|\cdot| \le f}$, bleiben $d := 2f + 1$ Messungen

$$\tilde{x} := \left(\widehat{x_{\text{low}}}(j)\right)_{|j| \le f} = \left(\sum_{k=1}^{r} c_k e^{-2\pi \mathrm{i} j t_k}\right)_{|j| \le f} = \sum_{k=1}^{r} c_k \psi(e^{-2\pi \mathrm{i} t_k}) \in \mathbb{C}^d,$$

wobei $\psi(z) := (z^j)_{|j| \le f}$.

Zwischenbilanz:

$$x = \sum_{k=1}^{r} c_k \delta_{t_k} \xrightarrow[\text{Messung}]{\text{ergibt die}} \tilde{x} = \underbrace{\sum_{k=1}^{r} |c_k| e^{-2\pi \mathrm{i} \varphi_k} \psi(e^{-2\pi \mathrm{i} t_k})}_{\substack{\text{nichtnegative Linearkombination} \\ \text{von Vektoren vom Typ} \\ e^{-2\pi \mathrm{i} \varphi} \psi(e^{-2\pi \mathrm{i} t}) \in \mathbb{C}^d,\ \varphi, t \in \mathbb{T}}}.$$

Wie erhalten wir x aus $\tilde{x}$ zurück?

Sparsame Zerlegung von Signalen

- Ziel: gegeben ein dictionary $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{C}^d$, zerlege Signal $\tilde{x} \in \mathbb{C}^d$ in endliche nichtnegative Linearkombination bezüglich $\mathcal{A}$:

$$\tilde{x} = \sum_{a \in A \subset \mathcal{A}} c_a a, \qquad c_a \geq 0, \ |A| < \infty.$$

Sparsame Zerlegung von Signalen

- Ziel: gegeben ein dictionary $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{C}^d$, zerlege Signal $\tilde{x} \in \mathbb{C}^d$ in endliche nichtnegative Linearkombination bezüglich $\mathcal{A}$:

$$\tilde{x} = \sum_{a \in A \subset \mathcal{A}} c_a a, \qquad c_a \geq 0, \ |A| < \infty.$$

- $\exists$ sehr viele Zerlegungen von $\tilde{x}$. Welche sind „gut“?

Sparsame Zerlegung von Signalen

- Ziel: gegeben ein dictionary $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{C}^d$, zerlege Signal $\tilde{x} \in \mathbb{C}^d$ in endliche nichtnegative Linearkombination bezüglich $\mathcal{A}$:

$$\tilde{x} = \sum_{a \in A \subset \mathcal{A}} c_a a, \qquad c_a \geq 0, \ |A| < \infty.$$

- $\exists$ sehr viele Zerlegungen von $\tilde{x}$. Welche sind „gut“?
- Bilder simpel $\implies$ Gut = sparsam $\iff$ $c_a = 0$ für viele $a \in \mathcal{A}$.

Sparsame Zerlegung von Signalen

- Ziel: gegeben ein dictionary $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{C}^d$, zerlege Signal $\tilde{x} \in \mathbb{C}^d$ in endliche nichtnegative Linearkombination bezüglich $\mathcal{A}$:

$$\tilde{x} = \sum_{a \in A \subset \mathcal{A}} c_a a, \qquad c_a \geq 0, \ |A| < \infty.$$

- $\exists$ sehr viele Zerlegungen von $\tilde{x}$. Welche sind „gut“?
- Bilder simpel $\implies$ Gut = sparsam $\iff$ $c_a = 0$ für viele $a \in \mathcal{A}$.

$\rightsquigarrow$ Gegeben $\tilde{x}$ und $\mathcal{A}$ löse

$$\min_{(c_a)_{a \in \mathcal{A}} \subset [0,\infty)} \|c\|_0 \quad \text{sodass} \quad \tilde{x} = \sum_{a \in \mathcal{A}} c_a a, \qquad (P_0)$$

wobei $\|c\|_0 := \#\{a \in \mathcal{A} : c_a \neq 0\}$.

Sparsame Zerlegung von Signalen

– Ziel: gegeben ein dictionary $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{C}^d$, zerlege Signal $\tilde{x} \in \mathbb{C}^d$ in endliche nichtnegative Linearkombination bezüglich $\mathcal{A}$:

$$\tilde{x} = \sum_{a \in A \subset \mathcal{A}} c_a a, \qquad c_a \geq 0, \ |A| < \infty.$$

– $\exists$ sehr viele Zerlegungen von $\tilde{x}$. Welche sind „gut“?

– Bilder simpel $\implies$ Gut = sparsam $\iff$ $c_a = 0$ für viele $a \in \mathcal{A}$.

$\rightsquigarrow$ Gegeben $\tilde{x}$ und $\mathcal{A}$ löse

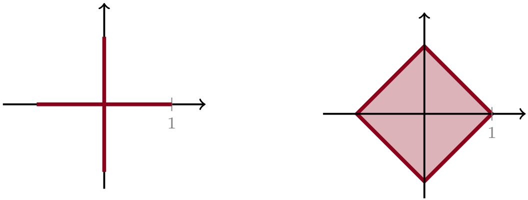
$$\min_{(c_a)_{a \in \mathcal{A}} \subset [0,\infty)} \|c\|_0 \quad \text{sodass} \quad \tilde{x} = \sum_{a \in \mathcal{A}} c_a a, \qquad (P_0)$$

wobei $\|c\|_0 := \#\{a \in \mathcal{A} : c_a \neq 0\}$.

☹ $\|\cdot\|_0$ ist nicht konvex, nicht „robust“. (P_0) ist NP-schwer.

Konvexifizierung: ℓ_1-Minimierung

Was ist die nächstbeste konvexe Zielfunktion?



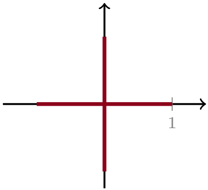
(a) Der $\|\cdot\|_0$-„Einheitsball“, $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_0 \leq 1,\ |x_1|, |x_2| \leq 1\}$.

(b) Der $\|\cdot\|_1$- Einheitsball.

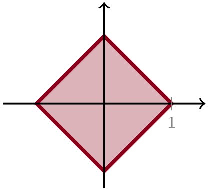
Abb. 3: Die konvexe Hülle von (a) ist (b).

Konvexifizierung: ℓ_1-Minimierung

Was ist die nächstbeste konvexe Zielfunktion?



(a) Der $\|\cdot\|_0$-„Einheitsball“, $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_0 \leq 1, \ |x_1|, |x_2| \leq 1\}$.



(b) Der $\|\cdot\|_1$- Einheitsball.

Abb. 3: Die konvexe Hülle von (a) ist (b).

$\rightsquigarrow$löse stattdessen

$$\min_{(c_a)_{a\in\mathcal{A}}\subset[0,\infty)} \|c\|_1 := \sum_{a\in\mathcal{A}} |c_a| \quad \text{sodass} \quad \tilde{x} = \sum_{a\in\mathcal{A}} c_a a. \tag{P_1}$$

Das Minkowski-Funktional

Seien X ein normierter Raum und $\inf(\emptyset) := \infty$.

Das Minkowski-Funktional

Seien X ein normierter Raum und $\inf(\emptyset) := \infty$.

Definition

Das Minkowski-Funktional einer Menge $A \subseteq X$ ist

$$p_A \colon X \to [0, \infty],$$
$$x \mapsto \inf\{r > 0 : x \in rA\}.$$

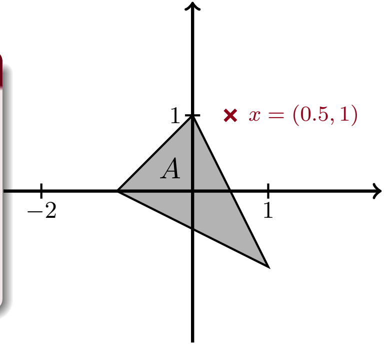
Das Minkowski-Funktional

Seien X ein normierter Raum und $\inf(\emptyset) := \infty$.

Definition

Das Minkowski-Funktional einer Menge $A \subseteq X$ ist

$$p_A \colon X \to [0, \infty],$$
$$x \mapsto \inf\{r > 0 : x \in rA\}.$$



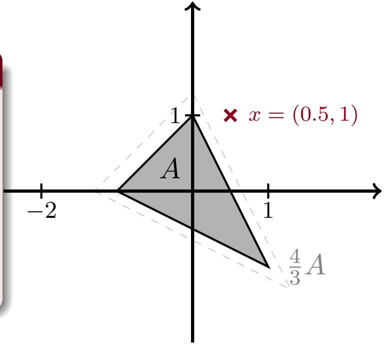
Das Minkowski-Funktional

Seien X ein normierter Raum und $\inf(\emptyset) := \infty$.

Definition

Das Minkowski-Funktional einer Menge $A \subseteq X$ ist

$$p_A \colon X \to [0, \infty],$$
$$x \mapsto \inf\{r > 0 : x \in rA\}.$$



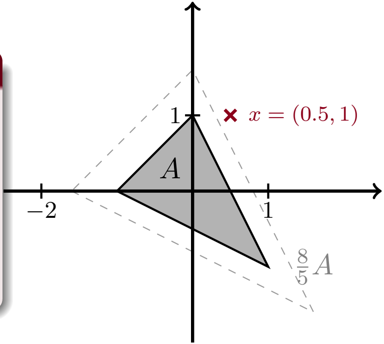
Das Minkowski-Funktional

Seien X ein normierter Raum und $\inf(\emptyset) := \infty$.

Definition

Das Minkowski-Funktional einer Menge $A \subseteq X$ ist

$$p_A\colon X \to [0, \infty],$$
$$x \mapsto \inf\{r > 0 : x \in rA\}.$$



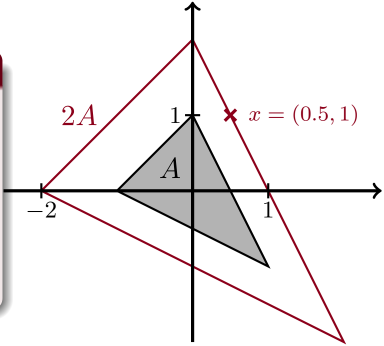
Das Minkowski-Funktional

Seien X ein normierter Raum und $\inf(\emptyset) := \infty$.

Definition

Das Minkowski-Funktional einer Menge $A \subseteq X$ ist

$$p_A \colon X \to [0, \infty],$$
$$x \mapsto \inf\{r > 0 : x \in rA\}.$$



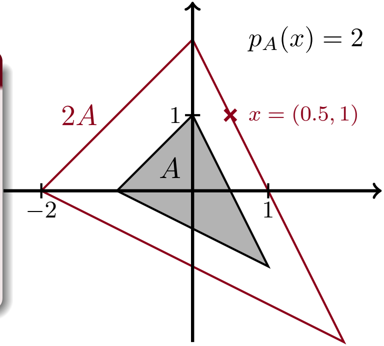
Das Minkowski-Funktional

Seien X ein normierter Raum und $\inf(\emptyset) := \infty$.

Definition

Das Minkowski-Funktional einer Menge $A \subseteq X$ ist

$$p_A \colon X \to [0, \infty],$$
$$x \mapsto \inf\{r > 0 : x \in rA\}.$$



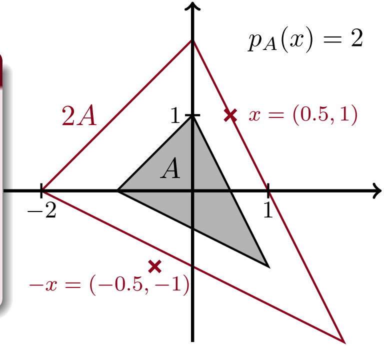
Das Minkowski-Funktional

Seien X ein normierter Raum und $\inf(\emptyset) := \infty$.

Definition

Das Minkowski-Funktional einer Menge $A \subseteq X$ ist

$$p_A \colon X \to [0, \infty],$$
$$x \mapsto \inf\{r > 0 : x \in rA\}.$$



Beispiel. Wenn $B := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, dann $p_B = \|\cdot\|$.

Wann ist p_A eine Norm?

Satz (Normeigenschaften)

Ist $A \subseteq X$ eine nichtleere,

Menge, dann ist p_A eine Norm auf X.

Wann ist p_A eine Norm?

Satz (Normeigenschaften)

Ist $A \subseteq X$ eine nichtleere, konvexe, beschränkte, symmetrische, volldimensionale Menge, dann ist p_A eine Norm auf X.

Wann ist p_A eine Norm?

Satz (Normeigenschaften)

Ist $A \subseteq X$ eine nichtleere, konvexe, beschränkte, symmetrische, volldimensionale Menge, dann ist p_A eine Norm auf X.

symmetrisch: $rA = A \; \forall |r| = 1$.

Wann ist p_A eine Norm?

Satz (Normeigenschaften)

Ist $A \subseteq X$ eine nichtleere, konvexe, beschränkte, symmetrische, volldimensionale Menge, dann ist p_A eine Norm auf X.

symmetrisch: $rA = A \ \forall |r| = 1$.

volldimensional: A enthält offene Umgebung von 0.

Die atomische Norm

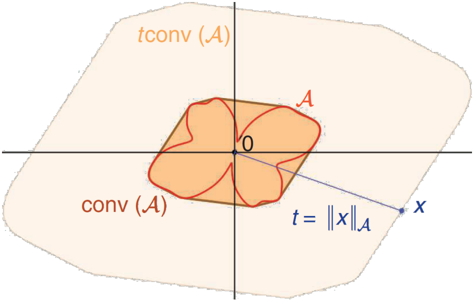
Definition (Atomische Norm)

Die von $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{C}^d$ induzierte atomische Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ ist $p_{\operatorname{conv}(\mathcal{A})}$, das Minkowski-Funktional von $\operatorname{conv}(\mathcal{A})$.

Die atomische Norm

Definition (Atomische Norm)

Die von $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{C}^d$ induzierte atomische Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ ist $p_{\mathrm{conv}(\mathcal{A})}$, das Minkowski-Funktional von $\mathrm{conv}(\mathcal{A})$.



Quelle: Fig. 1 aus: Y. Chi, M. Da Costa: *Harnessing Sparsity Over the Continuum: Atomic Norm Minimization for Superresolution*. IEEE Signal Process. Mag., 37(2):39–57, 2020.

Die atomische Norm für superresolution

Erinnerung: $\tilde{x} = \sum_{k=1}^{r} |c_k| e^{-2\pi \mathrm{i} \varphi_k} \psi(e^{-2\pi i t_k})$.

Die atomische Norm für Superresolution

Erinnerung: $\tilde{x} = \sum_{k=1}^{r} |c_k| e^{-2\pi \mathrm{i} \varphi_k} \psi(e^{-2\pi i t_k})$.

$\implies$ Wir wählen $\mathcal{A} := \{e^{-2\pi \mathrm{i} \varphi} \psi(e^{-2\pi i t}) : \varphi, t \in \mathbb{T}\} \subset \mathbb{C}^d$.

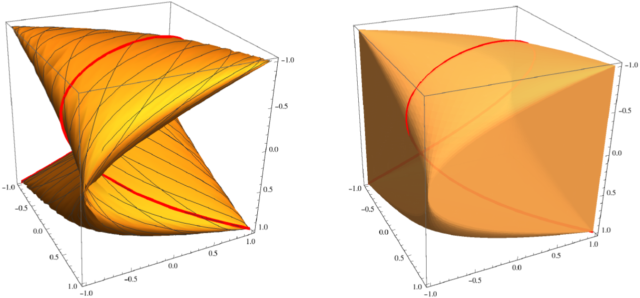


Abb. 4: $\Re(\mathcal{A})$ und $\Re(\operatorname{conv}(\mathcal{A}))$ für $d = 3$.

Die atomische Norm für Superresolution

Erinnerung: $\tilde{x} = \sum_{k=1}^{r} |c_k| e^{-2\pi \mathrm{i} \varphi_k} \psi(e^{-2\pi i t_k})$.

$\Longrightarrow$ Wir wählen $\mathcal{A} := \{e^{-2\pi\mathrm{i}\varphi} \psi(e^{-2\pi i t}) : \varphi, t \in \mathbb{T}\} \subset \mathbb{C}^d$.

$\xRightarrow{\text{Satz}}$ $\| \cdot \|_{\mathcal{A}}$ ist eine Norm.

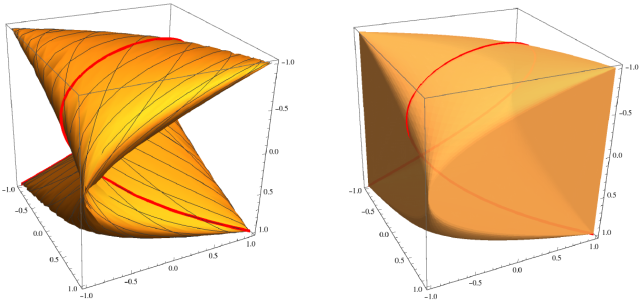


Abb. 4: $\Re(\mathcal{A})$ und $\Re(\operatorname{conv}(\mathcal{A}))$ für $d = 3$.

$\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ UND (P_1)

Die atomische Norm löst das sparsame Zerlegungsproblem (P_1):

$\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ und (P_1)

Die atomische Norm löst das sparsame Zerlegungsproblem (P_1):

Satz (Darstellung der atomischen Norm)

Für eine atomische Menge $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{C}^d$ *und* $\tilde{x} \in \mathbb{C}^d$ *gilt*

$$\|\tilde{x}\|_{\mathcal{A}} = \min \left\{ \|c\|_1 : \tilde{x} = \sum_{a \in \mathcal{A}} c_a a, \; c_a \geq 0 \right\}.$$

$\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ und (P_1)

Die atomische Norm löst das sparsame Zerlegungsproblem (P_1):

Satz (Darstellung der atomischen Norm)

Für eine atomische Menge $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{C}^d$ und $\tilde{x} \in \mathbb{C}^d$ gilt

$$\|\tilde{x}\|_{\mathcal{A}} = \min\left\{ \|c\|_1 : \tilde{x} = \sum_{a \in \mathcal{A}} c_a a, \ c_a \geq 0 \right\}.$$

Wie finden wir die Anzahl der Spikes r, die Positionen $(t_k)_{k=1}^r$ und die Amplituden $(c_k)_{k=1}^r$?

Das duale Problem - Positionen finden

Duale Problem

$$\|\tilde{x}\|_{\mathcal{A}} = \max_{p \in \mathbb{C}^d} \Re(\langle \tilde{x}, p \rangle) \quad \text{sodass} \quad \max_{t \in \mathbb{T}} \left| \langle \psi(e^{2\pi \mathrm{i} t}), p \rangle \right| \leq 1 \quad (D_{\mathcal{A}})$$

Das duale Problem - Positionen finden

Duale Problem

$$\|\tilde{x}\|_{\mathcal{A}} = \max_{p \in \mathbb{C}^d} \Re(\langle \tilde{x}, p \rangle) \quad \text{sodass} \quad \max_{t \in \mathbb{T}} \left| \langle \psi(e^{2\pi i t}), p \rangle \right| \leq 1 \quad (D_{\mathcal{A}})$$

hat semidefinite Formulierung $\rightsquigarrow$ schnell lösbar.

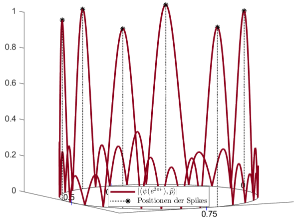
Das duale Problem - Positionen finden

Duale Problem

$$\|\tilde{x}\|_{\mathcal{A}} = \max_{p \in \mathbb{C}^d} \Re(\langle \tilde{x}, p \rangle) \quad \text{sodass} \quad \max_{t \in \mathbb{T}} \left| \langle \psi(e^{2\pi i t}), p \rangle \right| \leq 1 \quad (D_{\mathcal{A}})$$

hat semidefinite Formulierung $\rightsquigarrow$ schnell lösbar.

Sei $\tilde{p} \in \mathbb{C}^d$ Lösung von $(D_{\mathcal{A}})$.



Das duale Problem - Positionen finden

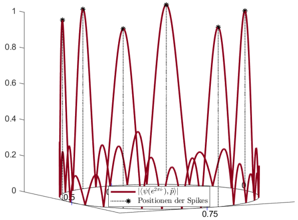
Duale Problem

$$\|\tilde{x}\|_{\mathcal{A}} = \max_{p \in \mathbb{C}^d} \Re(\langle \tilde{x}, p \rangle) \quad \text{sodass} \quad \max_{t \in \mathbb{T}} \left| \langle \psi(e^{2\pi i t}), p \rangle \right| \leq 1 \qquad (D_{\mathcal{A}})$$

hat semidefinite Formulierung $\rightsquigarrow$ schnell lösbar.

Sei $\tilde{p} \in \mathbb{C}^d$ Lösung von $(D_{\mathcal{A}})$. Dann

$$\{t_k\}_{k=1}^r = \{t \in \mathbb{T} : |\langle \psi(e^{2\pi i t}), \tilde{p} \rangle| = 1\}.$$



Das duale Problem - Positionen finden

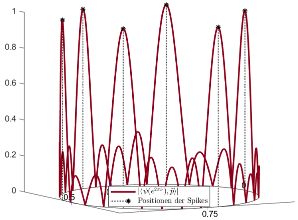
Duale Problem

$$\|\tilde{x}\|_{\mathcal{A}} = \max_{p \in \mathbb{C}^d} \Re(\langle \tilde{x}, p \rangle) \quad \text{sodass} \quad \max_{t \in \mathbb{T}} \left| \langle \psi(e^{2\pi i t}), p \rangle \right| \leq 1 \quad (D_{\mathcal{A}})$$

hat semidefinite Formulierung $\rightsquigarrow$ schnell lösbar.

Sei $\tilde{p} \in \mathbb{C}^d$ Lösung von $(D_{\mathcal{A}})$. Dann

$$\{t_k\}_{k=1}^r = \{t \in \mathbb{T} : |\langle \psi(e^{2\pi i t}), \tilde{p} \rangle| = 1\}.$$

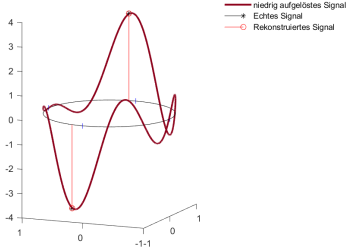


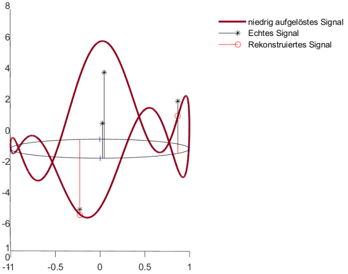
$\rightsquigarrow$ Positionen $(t_k)_{k=1}^r$ sind Extrema des Betrages des trigonometrischen Polynoms $t \mapsto \langle \psi(e^{2\pi i t}), \tilde{p} \rangle$ mit Koeffizientenvektor $\tilde{p}$.

Amplituden finden

Mithilfe der Positionen (nährungsweise bestimmt) $(t_k^{\text{est}})_{k=1}^r \subset \mathbb{T}$, finden wir die Amplituden $(c_k)_{k=1}^r$ durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^{r} c_k e^{-2\pi \mathrm{i} j t_k^{\text{est}}} = \tilde{x}_j, \qquad |j| \le f.$$





Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit.

Quellen

Venkat Chandrasekaran, Benjamin Recht, Pablo Parrilo, and Alan Willsky.
The Convex Geometry of Linear Inverse Problems.
Foundations of Computational Mathematics, 12(6):849, Oct 2012.

Yuejie Chi and Maxime Ferreira Da Costa.
Harnessing Sparsity Over the Continuum: Atomic Norm Minimization for Superresolution.
IEEE Signal Processing Magazine, 37(2):39–57, 2020.

Gongguo Tang, Badri Narayan Bhaskar, Parikshit Shah, and Benjamin Recht.
Compressed sensing off the grid.
IEEE Transactions on Information Theory, 59(11):7465–7490, 2013.

Diese Folien $\rightsquigarrow$ `viktorajstein.github.io`.

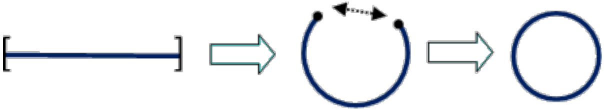
Die Masstheoretische Perspektive

Unendlich-dimensionales lineares inverses Problem mit sparsamkeitsauswählender Zielfunktion: gegeben Messung $\tilde{x} \in \mathbb{C}^d$, löse

$$\inf_{\mu \in M(\mathbb{T})} \|\mu\|_{\mathrm{TV}} \qquad \text{s.d.} \qquad \tilde{x} = \int_0^1 \psi(e^{-2\pi \mathrm{i} t}) \, \mathrm{d}\mu(t).$$

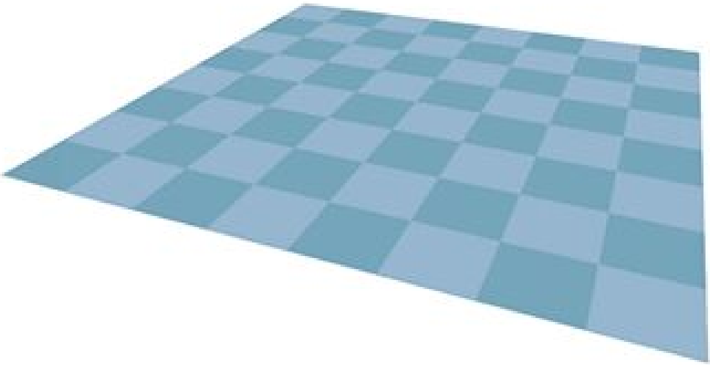
(U. a) weil die Extrempunkte des Einheitsballs in $M(\mathbb{T})$ aus spike trains bestehen, können wir stattdessen das endlich-dimensionale lineare inverse Problem $\inf_{c \in \mathbb{C}^d} \|c\|_1$ s.d. $\tilde{x} = Fc$, wobei F die partielle Fourier-Matrix ist, lösen.

Der zwei-dimensionale Fall



Der zwei-dimensionale Fall

Anstatt $\mathbb{T}$: der (2-)Torus $\mathbb{T}^2$



Der zwei-dimensionale Fall

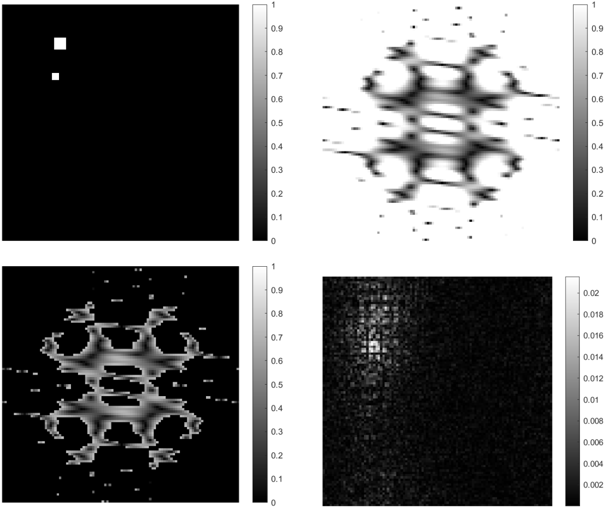


Abb. 5: Oben: x, $\hat{x}$. Unten: $\widehat{x_{\mathrm{low}}}$, x_{low}.

Der zwei-dimensionale Fall

Extreme points of convex sets

Definition (Extreme point of a convex set)

A point $x \in C$ in a *convex* subset $C \subseteq X$ is an extreme point of C and we write $x \in \operatorname{extr}(C)$ if there does not exist an open line segment contained in C that contains x, that is, the relations $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ for $y, z \in C$, $y \neq z$ and $\lambda \in [0,1]$ imply that $\lambda = 0$ or $\lambda = 1$ and thus $x = y$ or $x = z$.

Extreme points of convex sets

Definition (Extreme point of a convex set)

A point $x \in C$ in a *convex* subset $C \subseteq X$ is an extreme point of C and we write $x \in \operatorname{extr}(C)$ if there does not exist an open line segment contained in C that contains x, that is, the relations $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ for $y, z \in C$, $y \neq z$ and $\lambda \in [0,1]$ imply that $\lambda = 0$ or $\lambda = 1$ and thus $x = y$ or $x = z$.

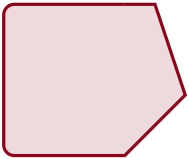


Abb. 6: The black dotes are some extreme points of the set.

Extreme points of convex sets

Definition (Extreme point of a convex set)

A point $x \in C$ in a *convex* subset $C \subseteq X$ is an extreme point of C and we write $x \in \operatorname{extr}(C)$ if there does not exist an open line segment contained in C that contains x, that is, the relations $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ for $y, z \in C$, $y \neq z$ and $\lambda \in [0, 1]$ imply that $\lambda = 0$ or $\lambda = 1$ and thus $x = y$ or $x = z$.

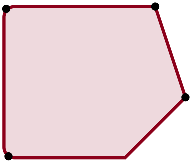


Abb. 6: The black dotes are some extreme points of the set.

Semidefinite formulation for $\|p\|_{\mathcal{A}}^* \leq 1$

Satz (Nonnegative trigonometric polynomials and Hermitian Gram matrices)

For $p \in \mathbb{C}^d$, the following are equivalent.

Semidefinite formulation for $\|p\|_{\mathcal{A}}^{*} \leq 1$

Satz (Nonnegative trigonometric polynomials and Hermitian Gram matrices)

For $p \in \mathbb{C}^d$, the following are equivalent.

1. *We have $\left|\langle \psi(e^{2\pi \mathrm{i} w}), p \rangle_{\Re}\right| \leq 1$ for all $w \in \mathbb{T}$.*

Semidefinite formulation for $\|p\|_{\mathcal{A}}^{*} \leq 1$

Satz (Nonnegative trigonometric polynomials and Hermitian Gram matrices)

For $p \in \mathbb{C}^d$, the following are equivalent.

1. *We have* $\left|\langle \psi(e^{2\pi i w}), p\rangle_{\Re}\right| \leq 1$ *for all* $w \in \mathbb{T}$.
2. *There exists a* Hermitian *matrix* $Q \in \mathbb{C}^{d \times d}$ *such that*

$$\begin{pmatrix} Q & p \\ p^{\mathsf{H}} & 1 \end{pmatrix} \succeq 0 \qquad \text{and} \qquad T^*(Q) = e_0,$$

Semidefinite formulation for $\|p\|_{\mathcal{A}}^{*} \leq 1$

Satz (Nonnegative trigonometric polynomials and Hermitian Gram matrices)

For $p \in \mathbb{C}^d$, the following are equivalent.

1. *We have $\left|\langle \psi(e^{2\pi i w}), p\rangle_{\Re}\right| \leq 1$ for all $w \in \mathbb{T}$.*
2. *There exists a Hermitian matrix $Q \in \mathbb{C}^{d \times d}$ such that*

$$\begin{pmatrix} Q & p \\ p^{\mathsf{H}} & 1 \end{pmatrix} \succeq 0 \qquad \text{and} \qquad T^*(Q) = e_0,$$

where $T^*(Q)_k = \operatorname{Tr}[\Theta_k Q]$ and Θ_k is the Toeplitz matrix whose first row is the k-th unit vector e_k, where $k \in \{0, \dots, d-1\}$.

$\rightsquigarrow$ Dual problem can easily be solved by convex solvers

Grenzen von Superresolution

Abb. 7: Superresolution ist nicht unbegrenzt möglich.
Quelle: `phdcomics.com/comics.php?f=1156`