ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Методические указания

Печатается по решению учебно-методического совета

Представлено кафедрой прикладной математики

Составители: Ю.В. Черных, ст.препод., канд. физ.-мат. наук А.М. Тивков, препод.

Предлагаемые методические указания призваны оказать помощь студентам 3-го и 4-го курсов математического факультета специальностей 0647-прикладная математика и 2013-математика при выполнении лабораторных работ по курсу “Практикум на ЭВМ” и на практических занятиях по курсу “Методы вычислений”.

Даются указания по применению основных методов, используемых при решении практических задач на приближение функций, приводятся примеры и задания для лабораторных работ.

Рецензенты: М.А.Корженко, канд.техн. наук, доц.

(СПКБ “Промавтоматика”)

Ю.В. Кольцов, канд.физ.-мат. наук (КубГу)

План выпуска учебно-методической литературы на 1986 г., № 4

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Тема 1. Интерполяционный многочлен. Основные представления и вычислительные схемы.

Рекомендуемая литература: 1,ч.1,гл.2; 5,гл.1; 6,ч.1,гл.2.

Пусть в различных точках $x_{i,}$, $i = \overline{1,n}$, действительной прямой Место для уравнения.известны значения $y_i = f(x_i)$ некоторой функции $f(x)$. Требуется найти приближение к значению функции f в точке x, отличной от точек x_i.

Обычно заменяют функцию $f(x)$ другой функцией $g(x)$, которая близка в определенном смысле к $f(x)$ и просто вычисляется. Если параметры $(a_1, \dots, a_n) = \bar{a}$ приближающей функции $g(x, \bar{a})$ определяют из условия

$$g(x_i, \bar{a}) = y_i,\ i = \overline{1,n}, \qquad (1.1)$$

то такой способ приближения называется интерполяцией.

Если при интерполяции приближение к функции f ищут в виде

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, \varphi_k(x), \qquad (1.2)$$

где$\{\varphi_k\}$ — линейно-независимая система известных функций, то такой способ интерполяции называется линейным. В случае линейной интерполяции коэффициенты a_k, $k = \overline{1,n}$, определяют из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\, \varphi_k(x_i) = y_i,\ i = \overline{1,n}, \qquad (1.3)$$

Пример 1.1. Пусть $\varphi(x) = a_1 + a_2 x$, т.е. $n = 2$, $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$. Для определения a_1 и a_2 записываем систему (1.3)

$$\begin{cases} a_1 + a_2 x_1 = y_1 \\ a_1 + a_2 x_2 = y_2 \end{cases}$$

из которой находим $a_1 = y_1 - x_1 \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, $a_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

Графиком полученной функции является прямая, проходящая через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Пример 1.2. Пусть $\varphi(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$, тогда коэффициенты a_1, a_2 и a_3 можно найти аналогично предыдущему примеру из системы (1.3), если взять $n = 3$, $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$, $\varphi_3(x) = x^2$.

Графиком полученной функции является парабола, проходящая через точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), если они не лежат на одной прямой.

Найдем явный вид этой функции, записав ее в форме

$$\varphi(x) = y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x) \tag{1.4}$$

где $l_k(x)$, $k = 1, 2, 3$ —многочлен второй степени, причем $l_1(x_1) = 1$, $l_1(x_2) = l_1(x_3) = 0$, $l_2(x_2) = 1$, $l_2(x_1) = l_2(x_3) = 0$, $l_3(x_3) = 1$, $l_3(x_1) = l_3(x_2) = 0$.

Так как числа x_2 и x_3 являются корнями квадратного трехчленами $l_1(x)$, то $l_1(x) = A(x - x_2)(x - x_3)$. Коэффициент при старшем члене многочлена $l_1(x)$ находим из условия $l_1(x_1) = 1$. Имеем $A = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$, $l_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$.

Аналогично получим $l_2(x)$ и $l_3(x)$:

$l_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$, $l_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$.

Наиболее изучена и чаще всего применяется интерполяция многочленами. Если в (1.2) положить $\varphi_k(x) = x^{k-1}$, $k = \overline{1, n}$, то получим многочлен степени $\leq n - 1$, коэффициенты которого можно найти из системы (1.3). Эта система во многих случаях плохо обусловлена, поэтому численно решать ее нецелесообразно. На практике используются явные формы представления интерполяционного многочлена. Отметим, что различные формулы для интерполяционных многочленов представляют один и тот же полином, если заданы узлы интерполяции x_i,, $i = \overline{1, n}$, и интерполируемая функция $f(x)$. Приведем наиболее употребительные представления интерполяционного многочлена.

1.Формула Лагранжа

Эту формулу нетрудно вывести методом из примера 1.2:

$$L_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k l_k(x), \tag{1.5}$$

где

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \quad l_k(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1, k = i \\ 0, k \neq i \end{cases}$$

2.Формула Ньютона

Представление интерполяционного многочлена в формуле Ньютона (1.6) является локальным обобщением формулы Тейлора. Имеем представление $P_{n-1}(x) = c_1 + c_2(x - x_1) + c_3(x - x_1)(x - x_2) + \dots + c_n(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$ (1.6)

где $c_1 = y_1$, $c_{k+1} = y(x_1, \dots, x_{k+1})$, $k = \overline{1, n-1}$, — разделение разности -го порядка, определяемые равенствами

$y(x_1, x_2) = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1), y(x_2, x_3) = (y_3 - y_2)/(x_3 - x_2),$

$y(x_1, x_2, x_3) = (y(x_2, x_3) - y(x_1, x_2))/(x_3 - x_1),\dots$ (1.7)

$y(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = (y(x_2, \dots, x_k, x_{k+1}) - y(x_1, \dots, x_k))/(x_{k+1} - x_k).$

Формулу (1.5) удобно применять для вычислений, когда система узлов x_i,, $i = \overline{1, n}$ и точка интерполяции x фиксированы. В этом случае можно один раз вычислить многочлены $l_k(x)$, а потом использовать их для получения значений $L_{n-1}(x)$ с различными функциями $f(x)$. При вычислении $l_k(x)$, могут появиться большие ошибки округления, поэтому лучше вычислять эти многочлены, используя схему Эйткена. Формула (1.5) удобна в теоретических исследованиях и в разработке методов, связанных с интерполированием, например при выводе квадратурных формул.

Формула (1.6) удобна для вычислений в том случае, когда функция и узлы интерполирования заданы. Тогда мы вычисляем сначала разделенные разности c_i, $i = \overline{1, n}$, а потом получаем значения $P_{n-1}(x)$ в любой точке x. Многочлен (1.6) удобно вычислять, пользуясь оптимальной по быстроте вычислений схемой Горнера: $P_{n-1}(x) = c_1 + (x - x_1)(c_2 + (x - x_2)\Big(c_3 + (x - x_3)\big(\dots + (x - x_{n-2})\big(c_{n-1} + c_n(x - x_{n-1})\big) \dots\big)\Big).$

Пример 1.3. Фрагмент программы вычисления $P_{n-1}(x)$

$P = C(N)$

$NM1 = N - 1$

$DO\ 1\emptyset\ I = 1, NM1$

$1\emptyset \quad P = P * (XV - X(N - I) + C(N - I)).$

Здесь XV точка, в которой вычисляется полином.

Отметим, что для увеличения точности интерполяции можно к ранее взятым узлам добавить несколько новых. В этом случае при вычислении по формуле (1.6) нужно к уже найденной сумме добавить несколько слагаемых.

Для равноотстоящих узлов интерполирования многочлен (1.6) удобнее записывать через конечные разности. Пусть $x_i = x_1(i-1)h$, $i = \overline{1,n}$,

$\Delta^1 y_i = y_{i+1}$, $\Delta^m y_i = \Delta(\Delta^{m-1} y_i) = \Delta^{m-1} y_{i+1} - \Delta^{m-1} y_i$, $n = 2,3, \dots$

Используя связь между разделенными и конечными разностями

$f(x_i, x_i + h, x_i + kh) = \Delta^k y_i/(h^k k!)$, из (1.6) выводим формулу Ньютона для интерполирования вперед: $L_{n-1}(x) = L_{n-1}(x_1 + th) = y_1 + t\Delta y_1 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_1 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-(n-2))}{(n-1)!}\Delta^{n-1} y_1$, $t = (x - x_1)/h$ (1.8)

Если записать этот многочлен по системе узлов, взятых в обратном порядке: x_n, $x_{n-1}, \dots, x_1$, то получим формулу Ньютона для интерполирования назад:$L_{n-1}(x) = L_{n-1}(x_n + th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+(n-2))}{(n-1)!}\Delta^{n-1} y_1$, $t = (x - x_n)/h$.

Формулу (1.8) используют, если точка интерполирования находится вблизи начала интервала $[\min(x_i), \max(x_i)]$, формулу (1.9) — вблизи конца этого интервала.

Для вычисления конечных разностей удобно их расположить в таблице.

x_1	y_1						
x_2	y_2	$\Delta^1 y_1$					
x_3	y_3	$\Delta^1 y_2$	$\Delta^2 y_1$				
x_4	y_4	$\Delta^1 y_3$	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$			
x_5	y_5	$\Delta^1 y_4$	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_1$		
…	…	…	…	…	…		
x_n	y_n	$\Delta^1 y_{n-1}$	$\Delta^2 y_{n-2}$	$\Delta^3 y_{n-3}$	$\Delta^4 y_{n-4}$	…	$\Delta^n y_1$

Фрагмент программы для вычисления конечных разностей:

```
N1 = N − 1
    DO 1Ø  k = 1, N1
M = N − K
    DO 1Ø I = 1, M
1Ø Y(N + 1 − I) = Y(N + 1 − I) − Y(N − I).
```

Здесь Y — массив размерности N, содержащий на входе значения функции, а на выходе — значения конечных разностей.

3. Схема Эйткена

Обозначим через $L_{k,l,m,\dots}$ значение интерполяционного многочлена с узлами интерполяции $x_k, x_l, x_m, \dots$ в точке x. Для получения вычислительной схемы используем равенство $L_{1,2,\dots,m} = (L_{1,2,\dots,m-1}(x_m - x) - L_{2,3,\dots,m}(x_1 - x))/(x_m - x_1)$, которое позволяет найти в точке x значение интерполяционного многочлена степени $m-1$ с узлами $x_1, \dots, x_m$ через значения в этой же точке интерполяционных многочленов степени $m-2$ с узлами $x_1, \dots, x_{m-1}$ и $x_2, \dots, x_m$.

Вычисления проводим в следующем порядке:

$$
\begin{aligned}
&L_{1,2} = (y_1(x_2 - x) - y_2(x_1 - x))/(x_2 - x_1),\\
&L_{1,3} = (y_1(x_3 - x) - y_3(x_1 - x))/(x_3 - x_1),\\
&L_{1,2,3} = (L_{1,2}(x_3 - x) - L_{1,3}(x_2 - x))/(x_3 - x_2),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Вычислительную схему удобно представить в виде таблицы:

x_1	y_1					
x_2	y_2	$L_{1,2}$				
x_3	y_3	$L_{1,3}$	$L_{1,2,3}$			
x_4	y_4	$L_{1,4}$	$L_{1,2,4}$	$L_{1,2,3,4}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
x_n	y_n	$L_{1,n}$	$L_{1,2,n}$	$L_{1,2,3,n}$	$\cdots$	$L_{1,2,3,\dots,n}$

При добавлении новых узлов в эту схему нужно вычислять элементы только одной дополнительной строки. Кроме того, при такой организации вычислений не требуется дополнительная память ЭВМ — можно использовать только два массива: для узлов x_i, $i = \overline{1,n}$, а потом последовательно вычисляя элементы строки с номером k, получим на месте значения y_k значение $L_{1,2,\dots,k}$. При написании программы вычисления интерполяционного многочлена по схеме Эйткена организуются массивы узлов zx и значений функции y размерности N. После этого элементы строки с номером $k = 2,3,\dots$ в таблице (1.11) вычисляются последовательно в цикле:

$$DO\ 1\emptyset\ \ I = 1, k-1$$

$$1\emptyset\ y(k) = (y(I) * \left(x - zx(k)\right) - y(k) * (x - zx(I))/(zx(I) - zx(k))$$

и элемент $y(k)$ теперь будет иметь значение $L_{1,2,\dots,k}$.

Замечание. Учитывая, что разделение разности зависит от порядка аргументов, можно вычисление этих разностей вести по схеме (1.11), где выражения $L_{k,l,m,\dots}$ нужно заменить на $y(x_k, x_l, x_m)$, а вместо формул (1.10) применять формулы (1.7).

Тема 2. Погрешность сходимости интерполяции

Рекомендуемая литература: 5,гл.1, §3,7; 4,гл.2, §1; 6,гл.2, §3,4.

Рассмотрим представление погрешности интерполяции многочленом

$$R_n(x) = f(x) - L_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\omega_n(x), \tag{2.1}$$

где $\xi \in [y_1, y_2]$, $y_1 = \min(x_1, \dots, x_n, x)$, $y_2 = \max(x_1, \dots, x_n, x)$,

$\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$.

При фиксированном n величина погрешности зависит от расположения узлов интерполирования и точки x, в которой вычисляется значение интерполяционного многочлена.

Если точка x находится вне интервала $[\min(x_i), \max(x_i)]$ (в этом случае говорят, что имеет место экстраполяция), то на величину погрешности большое влияние будет оказывать величина $\omega_n(x)$, и в общем случае погрешность экстраполяции будет больше погрешности интерполяции. Это объясняется тем фактом, что вне интервала $[\min(x_i), \max(x_i)]$ не имеется информации об интерполируемой функции.

Если вычисляется значение интерполяционного многочлена в конкретной точке x, например, по схеме Эйткена (1.9), то для уменьшения погрешности нумеруют узлы таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$|x_i - x| > |x_j - x|,\ i > j \tag{2.2}$$

В этом случае вычисления проводим до тех пор, пока величина $\Delta_j = |L_{1,2,\dots,j-1} - L_{1,2,\dots,j}|$,которая при малых $|x - x_i|$ является приближением к $|R_j(x)|$, не станет меньше заданного $\varepsilon > 0$, $\Delta_j < \varepsilon$. Если же это неравенство не выполняется ни при каком j , (это может произойти из-за ошибок округления либо из-за недостатка информации) то находим $\Delta_k = min\Delta_j$ и полагаем $f(x) \approx L_{1,\dots,k}$. Таким образом, при условии сохранения степени интерполяционного многочлена и условия ограниченности n-й производной функции f погрешность R_n в заданной точке x, можно уменьшить, сгущая сетку и проводя нумерацию узлов интерполяции указанным выше способом.

Сложнее будет решаться вопрос, если мы хотим добиться равномерной оценки $|R_n(x)| < \varepsilon$ путем увеличения степени интерполяционного многочлена. В случае наиболее распространенного равномерного распределения узлов интерполирования даже для аналитических функций интерполяционный процесс может расходиться.

Для функции $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$, $|x| \le 1$, это впервые обнаружил Рунге.

Путем специального выбора узлов интерполяции можно добиться равномерного стремления $R_n(x)$ к нулю при $n \to \infty$ для некоторых классов функций. Это будет выполняться, например, если на отрезке $[-1,1]$ рассмотреть множество функций, удовлетворяющих условию Липшица, а в качестве узлов интерполирования взять корни многочлена Чебышева:

$$x_k = \cos((2(n-k)+1)\pi/(2n)),\ k = 1,2,\dots,n. \tag{2.3}$$

Однако такой путь уменьшения погрешности усложняет вычисления и к тому же добавляет проблему накопления ошибок округления с ростом степени многочлена. На практике для интерполяции используют многочлены невысокой степени и интерполируют функцию на небольших интервалах; можно также использовать кусочно-многочленные функции-сплайны, составленные из многочленов невысокой степени.

Тема 3. Интерполирование с кратными узлами

Рекомендуемая литература: 1,ч.1,гл.2, §6;4,гл.2, §1;5,гл.1§5.

Пусть в различных точках $x_i \in [a,b]$, $i=\overline{1,n}$, известны значения $f(x)$ и ее производных до (m_i-1)-го порядка:

$$f^{(j)}(x_i)=y_i^{(j)}, j=0,1,\dots,m_i-1; i=\overline{1,n}.$$

Существует единственный многочлен $H_{m-1}(x)$, степени $m-1$, где $m=m_1+m_2+\dots+m_n$, удовлетворяющий условиям

$$H_{m-1}^{(j)}(x_i)=y_i^{(j)}, j=0,1,\dots,m_i-1; i=\overline{1,n}. \quad (3.1)$$

Этот многочлен называется интерполяционным многочленом Эрмита, или интерполяционным многочленом с кратными узлами.

Представление этого многочлена в форме Лагранжа очень громоздко и пользоваться таким представлением практически невозможно. Приведем формулу для многочлена $H_{2n-1}(x)$:

$$H_{2n-1}(x_i)=y_i, H_{2n-1}'(x_i)=y_i', i=\overline{1,n}:$$

$$H_{2n-1}(x)=\sum_{i=1}^{n}[y_i+(x-x_i)(y_i'-2l_i'(x_i)y_i)], \quad (3.2)$$

где $l_i(x)$ — функция из (1.5).

При вычислениях с помощью ЭВМ интерполяционный многочлен Эрмита удобно представлять в форме Ньютона:

$$H_{m-1}(x)=y_1+\sum_{k=2}^{m}(x-z_1)\dots(x-z_{k-1})y(z_1,\dots,z_k). \quad (3.4)$$

Здесь (z_k) — последовательность не обязательно различных точек.

Таким образом, если точка x_i имеет кратность m_i, т.е. для нее справедливы равенства (3.1), то мы ее записываем в последовательность $(z_k) m_i$ раз. Если предположить, что точки интерполяции z_k упорядочены так, что повторяющиеся точки расположены рядом (равенство $z_k=z_{k+r}$ справедливо только тогда, когда $z_k=z_{k+1}=\dots=z_{k+r-1}=z_{k+r}$), то можно строить таблицу разделенных разностей по столбцам и главная диагональ таблицы будет содержать коэффициенты формы Ньютона (3.3).

При этом используется соотношение

$$y(z_k, \dots, z_{k+r}) = \begin{cases} \frac{f^{(r)}(z_k)}{r!}, z_k = z_{k+r} \\ \frac{y(z_{k+1},\dots,z_{k+r}) - y(z_k,\dots,z_{k+r-1})}{z_{k+r}+z_k}, z_k \neq z_{k+r} \end{cases} \tag{3.4}$$

с помощью которого каждая k -я разделенная разность может быть вычислена с помощью двух соседних элементов из столбца $(k-1)$-х разделенных разностей.

При вычислении многочлена $H_{m-1}(x)$ удобно использовать схему Горнера. Если обозначить $Q_k = y(z_1, \dots, z_k)$, $k = \overline{2, m}$, $a_1 = y_1$ и вычислить при $x = z_0$: $b_m = a_m$, $b_k = a_k + (z_0 - z_k)b_{k+1}$, $k = m-1, \dots, 1$, то получим, с одной стороны, $b_1 = H_{m-1}(z_0)$, а с другой стороны, величины b_k, $k = \overline{1, m}$, будут коэффициентами следующего разложения: $H_{m-1}(x) = c_1 + (x - z_0)b_2 + (x - z_0)(x - z_1)b_3 + \dots + (x - z_0) \dots (x - z_{m-2})b_m$.

Можно еще раз применить алгоритм к исходным точкам $z_0, z_1, \dots, z_m$ коэффициентам $b_1, \dots, b_m$ и дополнительной точке z_{-1}. При этом получим величины $c_1, c_2, \dots, c_m$, которые служат коэффициентами при разложении $H_{m-1}(x) = c_1 + (x - k_{-1})c_2 + \dots + (x - z_{-1}) \dots (x - z_{m-3})c_m$.

Таким образом можно вычислять значения производных от H_{m-1} в точках интерполяции, так как величины $H_{m-1}^{(j)}(z)/j!$ являются $(j+1)$-ми коэффициентами формулы Ньютона, для которой первые $(j+1)$ точек интерполяции равны z.

Тема 4. <u>Сплайн – интерполяция</u>

Рекомендуемая литература: 3,гл.3, §1;6,ч.1,гл.3, §3;10,гл.4.

Трудности построения интерполяционных многочленов высоких степеней удается преодолеть путем введения кусочно-многочленных функций-сплайнов. Приведем схему построения кубической сплайн-функции. Последовательность кубических сплайнов на равномерной сетке узлов всегда сходится к интерполируемой непрерывной функции. Алгоритм построения кубических сплайнов эффективно реализуется и дает малые ошибки округления.

Пусть на действительной оси задано множество точек $x_{i,}$, $i = x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Кубический сплайн $S(x)$ на каждом отрезке $i = \overline{1, n-1}$ $[x_i, x_{i+1}]$, является кубическим полиномом:

$$S(x) = S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \tag{4.1}$$

и в точках x_i непрерывную первую и вторую производные, т.е. $S(x) \epsilon c^2[x_1, x_n]$.

Если сплайн $S(x)$ интерполирует функцию $f(x)$ в узлах x_i, то из условий интерполяции $S(x_i) = f(x_i) = y_i$, получим $a_i = y_i$, $i = \overline{1, n-1}$, $S_{n-1}(x_n) = y_n$. Условия гладкости во внутренних узлах x_i, $i = \overline{2, n-1}$ имеют вид

$$S^{(m)}(x_i - 0) = S^{(m)}(x_i + 0), \text{ или } S_{i-1}^{(m)}(x_i) = S_i^{(m)}(x_i), m = 1,2,3. \qquad (4.2)$$

Таким образом для определения $4(n-1)$ параметров a_i, b_i, c_i, d_i мы имеем $n + 3(n-2) = 4n - 6$ соотношений. Два дополнительных условия обычно задаются в виде ограничений на значения сплайна в его производных точках x_1 и x_n. Эти условия называются краевыми. Можно, например, задавать значения первых производных:

$$S'(x_1) = f'(x_1), S'(x_n) = f'(x_n). \qquad (4.3)$$

Вместо представления (4.1) в задачах интерполяции удобнее применять представления сплайна через другие параметры. Пусть $h_i = x_{i+1} - x_i$, $t = (x_i - x)/h_i$, $t_1 = 1 - t$, тогда положим

$$S_i(x) = ty_{i+1} + t_1 y_{i+1} + h_i^2((t^3 - t)\sigma_{i+1} + (t_1^3 - t)\sigma_i), \qquad (4.4)$$

где σ_i — параметры, которые требуется определить. Первые два члена этого выражения представляют линейную интерполяцию на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, а коэффициент при h_i^2 дает кубическую поправку, которая обеспечивает дополнительную гладкость.

Коэффициенты представления (4.1) легко выражаются через σ_i.

$$b_i = (y_{i+1} - y_i)/h_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i), c_i = 3\sigma_i, d_i = (\sigma_{i+1} - \sigma_i)/h_i. \qquad (4.5)$$

Кроме того, $\sigma_i = S''(x_i)/6$, поэтому величина $6\sigma_i$ аппроксимируют значения $f''(x_i)$, и этим можно воспользоваться для проверки вычислений.

Представление (4.4) дает выполнение условий (4.2) для $m = 0,2$.

Условия (4.2) с $m = 1$ записываются в виде

$$h_{i-1}\sigma_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\sigma_i + h_i\sigma_{i+1} = \Delta_i - \Delta_{i-1}, i = \overline{2, n-1}, \qquad (4.6)$$

где $\Delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$.

Краевые условия введем следующим образом. Пусть $c_1(x)$и $c_n(x)$ – кубические кривые, проходящие соответственно через четыре первые и четыре последние заданные точки, тогда положим $s'''(x_1) = c_1'''$, $s'''(x_n) = c_n'''$. Константы c_1'''и c_n''' можно определить по значениям функции y_i. Для этого вычисляем разности:

$$\Delta_i^{(2)} = \frac{\Delta_{i+1} - \Delta_i}{x_{i+2} - x_i}, \qquad \Delta_i^{(3)} = \frac{\Delta_{i+1}^{(2)} - \Delta_i^{(2)}}{x_{i+2} - x_i}.$$

При этом величины $2\Delta_i^{(2)}$и $6\Delta_i^{(3)}$ аппроксимируют вторую и третью производные соответственно. Отсюда получим $c_1''' = 6\Delta_1^{(3)}$, $c_n''' = 6\Delta_{n-3}^{(3)}$ и так как $s'''(x) = \frac{6(\sigma_{i+1} - \sigma_i)}{h_i}$, то будем иметь дополнительные краевые условия:

$$-h_1\sigma_1 + h_1\sigma_2 = h_1^2\Delta_1^{(3)},$$

$$h_{n-1}\sigma_{n-1} - h_{n-1}\sigma_n = -h_{n-1}^2\Delta_{n-3}^{(3)}. \qquad (4.7)$$

Равенства (4.6) и (4.7) образуют систему n – линейных уравнений для определения коэффициентов σ_i. Матрица этой системы симметрична и трехдиагональна, имеет доминирующую главную диагональ, следовательно система невырождена и метод Гаусса без выбора ведущих элементов даст хорошую точность. В случае систем с трехдиагональными матрицами с диагональным преобладанием метод Гаусса представляет собой известный метод прогонки.

Применение метода прогонки даст нам значения параметров σ_i. После этого можно вычислить b_i, c_i, d_iпо формулам (4.5) и получить значение сплайна и его производных $s'(x)$и $s'''(x)$ в любой точке отрезка $[x_1, x_n]$. При этом используются формулы (4.4) или (4.1). Отметим, что перед вычислением сплайна и его производных требуется определить номер интервала, в котором находится точка x. Для поиска нужного интервала можно применять двоичный поиск. Если в массивах B, C, D хранятся значения коэффициентов b_i, c_i, d_i, массивы X и Y содержат значения аргументов x_i и функции y_i, то значение сплайна в точке XV дает фрагмент программы, в которой реализован двоичный поиск:

//код.

Если же сетка, на которой строится сплайн равномерная, т.е. $h_i = h$,

$i = \overline{1, n-1}$, то номер интервала I, содержащего XV, находится проще: $I = \frac{XV - X(1)}{H} + 1$.

Тема 5. <u>Многомерная интерполяция</u>

Рекомендуемая литература : 1,ч.1,гл.3; 4,гл.2, §1.

Задача многомерной интерполяции ставится аналогично задаче одномерной интерполяции. Пусть в некоторой области m–мерного пространства $D \in R^m$ заданы точки $P_1, P_2, \dots, P_n$ и значения функции f в этих точках. Требуется найти такую функцию $g(p; \bar{a})$, $p \in D$, $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$, что $g(p_i; \bar{a}) = f(p_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Увеличение числа переменных в интерполируемой функции (увеличение размера задачи) существенно усложняет её решение. Можно переносить методы, разработанные для одномерного случая, на многомерный случай, но тогда получаются громоздкие формулы, неудобные для вычислений, поэтому в многомерной интерполяции используются многочлены невысоких степеней.

Например, в случае треугольной сетки на плоскости можно внутри каждого треугольника с вершинами $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ и $P_3(x_3, y_3)$ функцию $f(x, y)$ заменить линейной функцией $L(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$. Тогда функция, составленная из линейных полиномов, интерполирующих функцию f на треугольнике разбиения будет непрерывной кусочно-линейной функцией.

Аналогично (1.4) на треугольнике $P_1 P_2 P_3$нетрудно написать эту линейную функцию:

$$L(x, y) = \varphi_1(x, y) f_1 + \varphi_2(x, y) f_2 + \varphi_3(x, y) f_3 , \qquad (5.1)$$

где $f_i = f(P_i)$, $\varphi_i(x, y) = (a_i + b_i x + c_i y)/(2\Delta)$, $i = 1,2,3$;

$a_i = x_j y_k - x_k y_j,\ b_i = y_i - y_k, c_i = x_k - x_j;\ j = 2,\ k = 3$ при $i = 1;\ j = 3,\ k = 1$ при $i = 2;\ j = 1,\ k = 2$ при $i = 3;\ 2\Delta$ - площадь треугольника $P_1 P_2 P_3$,$2\Delta = b_1 c_2 - b_2 c_1$. Функции φ_i определяются из условий: $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1,2,3$, при этом $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 1$.

Непрерывная кусочно-квадратичная функция получается, если на каждом треугольнике $P_1 P_2 P_3$ разбиения задать квадратичную функцию:

$$Q(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2.$$

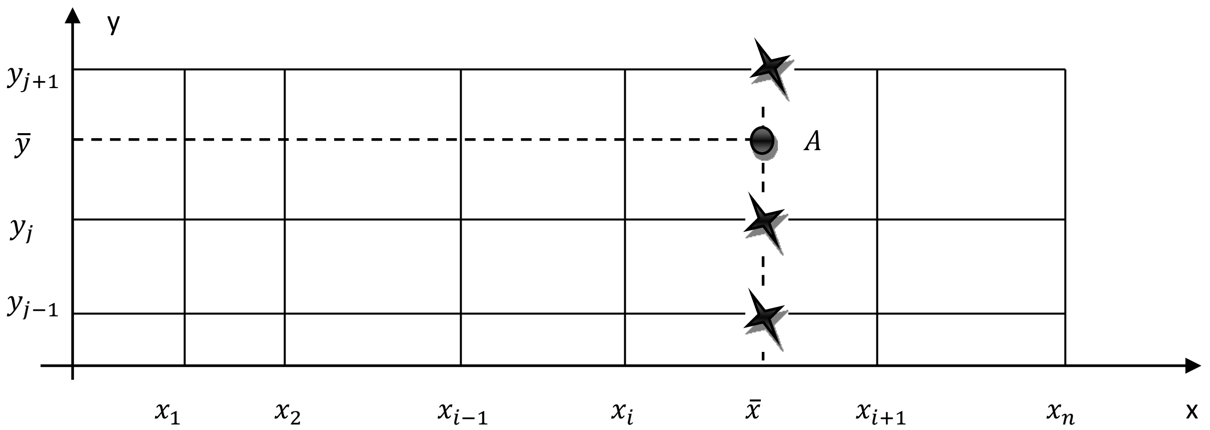
Эту функцию также можно представить через значения функции f в точках P_i , $i = \overline{1,6}$, где точки $P_4 P_5 P_6$ являются серединами сторон P_1P_2, P_2P_3 и P_1P_3соответственно. Имеем

$$Q(x, y) = \sum_{i=1}^{6} f_i \, \Psi_i(x, y), \tag{5.2}$$

где $\Psi_i = \varphi_i(2\varphi_i - 1)$ при $i = 1,2,3$; $\Psi_4 = 4\varphi_1\varphi_2, \Psi_5 = 4\varphi_2\varphi_3, \Psi_6 = 4\varphi_3\varphi_4$ функции Ψ_i также удовлетворяют условиям
$\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$; $i, j = \overline{1,6}$; $\sum_{i=1}^{6} \Psi_i = 1$.

Часто решение многомерных задач можно свести к решению одномерных. Приведем простой способ многомерной интерполяции на прямоугольной сетке узлов, называемый последовательной интерполяцией.

Пусть в узлах (x_i, y_j), $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, прямоугольной сетки заданы значения функции двух переменных $Z = f(x, y)$ (см. рис.) и требуется найти приближение к значению f в точке A, отличной от узлов (x_i, y_j) интерполяции.



Сначала проводим одномерную интерполяцию по переменной на прямых $y = y_i$, $j = \overline{1, m}$, по значениям функции f в узлах (x_i, y_j), лежащих на этих прямых. При этом мы найдем приближения к значениям функции f в точках с координатами $(\bar{x}, y_j)$, $j = \overline{1, m}$ (на рисунке эти точки отмечены крестиками). Далее проводим интерполяцию по переменной y на прямой $x = \bar{x}$, используя найденные приближения. Таким образом, мы получим приближение к функции f в точке $(\bar{x}, \bar{y})$.

Аналогично проводится последовательная интерполяция и в случае большего числа измерений.

Тема 6. Применения интерполяции

Рекомендуемая литература: 1, гл.2, §17; 4, гл.3, гл.5, §2.

1. Интерполяционные методы решения уравнений

Пусть $x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-n}$ — набор $n+1$ приближения к нулю функции $f(x), f(\alpha)=0$. В качестве очередного приближения выбираем нуль интерполяционного многочлена $P(x)$ с узлами интерполяции $x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-n}$, причем допускается интерполяция с кратными узлами. Затем эту процедуру повторяем для узлов $x_{k+1}, \dots, x_{k-n}, x_{k-n+1}$ и т.д. К недостаткам данного метода следует отнести, во-первых, то, что на каждом шаге приходится решать алгебраическое уравнение, а, во-вторых, - многочлен будет иметь несколько нулей, из которых требуется выбрать один.

Чтобы избежать этих трудностей, можно интерполировать обратную к f функцию $\tilde{f}$ в узлах $y_{k-i} = f(x_{k-i}),\ i = \overline{0,n}$, а затем вычислять значение интерполяционного многочлена $Q(y)$ в нуле: $x_{k+1} = Q(0)$.

В результате применения методов прямой и обратной интерполяции мы получим последовательность $x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots$ Заканчивать вычисления можно при выполнении неравенств

$$|x_{k+1} - x_k| \le \varepsilon \max(1, |x_{k+1}|), |f(x_{k+1})| \le 100\varepsilon;$$

где ε - заданное положительное число, характеризующее точность приближения x_k к корню α уравнения $f(x) = 0$.

Приведем примеры.

Пример 6.1. Метод секущих

Используя прямую или обратную линейную интерполяцию, т.е. проводя прямую через две точки (x_{k-1}, y_{k-1}) и (x_k, y_k), получим

$$x_{k+1} = x_k - y_k \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}}, \qquad k = 1,2, \dots$$

Пример 6.2. Метод Ньютона

Этот метод получается с помощью построения интерполяционного многочлена с узлом x_k кратности два. (Проводим касательную к кривой $f(x)$ в точке (x_k, y_k).) Имеем $p(x) = f(x_k) + (x - x_k) f'(x_k)$, поэтому $x_{k+1} = x_k - u_k, u_k = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\ \ k = 0,1, \dots$

Если уравнение $f(x) = 0$ решается на отрезке $[a, b]$, то в качестве начального приближения в итерационном процессе можно взять один из концов этого отрезка, например, $x_0 = a$, и при этом должно выполняться равенство $sign\big(f(a)\big) = sign(f''(a))$

Пример 6.3. Прямая параболическая интерполяция

Строим интерполяционный многочлен по трем узлам x_{k-2}, x_{k-1}, x_k в форме Ньютона:

$P(x) = y_k + (x - x_k)y(x_k; x_{k-1}) + (x - x_k)(x - x_{k-1})y(x_k; x_{k-1}; x_{k-2})$.
Решая квадратное уравнение $P(x) = 0$, выберем в качестве нового приближения $x_{\mathrm{k}+1}$тот его корень, который ближе к x_{k}. Получим

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2y_k}{\omega + \big(\omega^2 - 4y_k y(x_k; x_{k-1}; x_{k-2})\big)^{\frac{1}{2}}}\ , k = 2,3, \ldots$$

где $\omega = y(x_k; x_{k-1}) + (x_k - x_{k-1})y(x_k; x_{k-1}; x_{k-2})$.

Если $f(x)$ – многочлен, то из практики известно, что этот метод всегда сходится к какому-нибудь корню этого многочлена.

Пример 6.4. Обратная параболическая интерполяция

Строим интерполяционный метод многочлен $Q(y)$ в форме Ньютона для функции $\bar{f}$ обратной к f по узлам y_{k-2}, y_{k-1}, y_k:

$Q(y) = x_k + (y - y_k)\bar{f}(y_k; y_{k-1}) + (y - y_k)(y - y_{k-1})\bar{f}(y_k; y_{k-1}; y_{k-2})$,

где $\bar{f}(y_k; y_{k-1})$ и $\bar{f}(y_k; y_{k-1}; y_{k-2})$ - разделенные разности первого и второго порядка соответственно. Имеем тогда $x_{k+1} = \ Q(0)$, или

$$x_{k+1} = x_k - \frac{y_k}{y(x_k; x_{k-1})} + \frac{y_k y_{k-1}}{(y_k - y_{k-1})}\left(\frac{1}{y(x_k; x_{k-1})} - \frac{1}{y(x_{k-1}; x_{k-2})}\right), k = 2,3, \ldots \qquad (6.1)$$

Для уменьшения ошибок округления вычислительный процесс организуют следующим образом. Вводя обозначения

$$s_k = y_k / y_{k-1}, \qquad p_k = y_k / y_{k-2}, \quad q_k = y_{k-1} / y_{k-2},$$

Из (6.1) получим

$$x_{k+1} = x_k + \frac{A_k}{B_k},\ k = 2,3, \ldots \qquad (6.2)$$

где $A_k = s_k((x_k - x_{k-1})(q_k - 1)(q_k - p + 1) - (x_k - x_{k-2})q_k(p_k - q_k))$,

$$B_k = (s_k - 1)(p_k - 1)(q_k - 1).$$

2. Численное дифференцирование

Пусть функция $f(x)$ задана таблично или имеет сложное аналитическое выражение. Тогда, для вычисления ее производной, $f(x)$ приближают легко дифференцируемой функцией $\varphi(x)$ и полагают $f^k(x) \approx \varphi^k(x)$, где k - порядок производной.

Рассматривая в качестве аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ интерполяционные многочлены, получают простейшие формулы численного дифференцирования. Например, используя многочлен Ньютона (1.6), получим

$$f^k(x) = P_{n-1}^k(x) + R_{n-1}^k(x), \tag{6.3}$$

где порядок погрешности R_{n-1}^k по отношению к шагу сетки есть $\max|x - x_i|^{n-k}$; т.е. он равен числу узлов интерполяции минус порядок производной. Минимальное число узлов, необходимое для вычисления k- й производной, равно $k + 1$. Формулы, обеспечивающие первый порядок точности, имеют вид:

$$f'(x) \approx y(x_1; x_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

$$\frac{f''(x)}{2} \approx y(x_1; x_2; x_3) = \frac{\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}}{x_1 - x_3},$$

$$\frac{f''(x)}{2} \approx y(x_1; \dots; x_2) = \sum_{j=1}^{k+1} y_j \prod_{i=1}^{k+1} (x_j - x_i)^{-1}, \ i \neq j \tag{6.4}$$

Заметим, что по приведенным формулам нельзя с удовлетворительной точностью вычислить производные порядка выше четвертого. Для вычисления производных более высокого порядка можно использовать, например, сплайны высоких порядков.

На равномерных сетках вид формул численного дифференцирования упрощается, а точность для симметричных формул повышается. Например,

$$f'(x) = \frac{1}{2h}\big(f(x+h) - f(x-h)\big) - \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \tag{6.5}$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\big(f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)\big) - \frac{h^2}{12} f^{(IV)}(\xi), \tag{6.6}$$

где $\xi \in [x - h; x + h]$.

Приведем также односторонние формулы численного дифференцирования:

$$f'(x) = \frac{1}{2h}(-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)) + \frac{h^2}{3}f'''(\xi), \qquad (6.7)$$
$$f'(x) = \frac{1}{2h}(f(x-2h) - 4f(x-h) + 3f(x)) + \frac{h^2}{3}f'''(\xi)$$

Отметим, что при численном дифференцировании приходится вычитать друг из друга близкие значения функции, которые вычисляются с некоторыми погрешностями. Это приводит к потере значащих цифр в разности и большей относительной погрешности результата. Пусть, например, мы вычисляем первую производную по формуле из (6.4). Тогда полная погрешность расчета будет состоять из остаточного члена $r_1 = -\frac{f''(\xi)h}{2}, h = x_1 - x_2,$ и дополнительного слагаемого r_2, связанного с погрешностями ε_i вычисляемых значений функции y_i. Пусть $|f''(\xi)| \le M$ и $|\varepsilon_i| \le \varepsilon$, тогда $|r_1 + r_2| \le |r_1| + |r_2| \le \frac{Mh}{2} + \frac{|\varepsilon_1+\varepsilon_2|}{h} \le \frac{Mh}{2} + \frac{2\varepsilon}{h}$.

Из этого видно, что в общем случае нельзя добиться уменьшением шага сколь угодно высокой точности вычисления производной из-за роста второго слагаемого в оценке погрешности. Минимум в этой оценке погрешности достигается при $h_0 = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}$ и равен $2\sqrt{\varepsilon M}$. Поэтому в общем случае результат точнее чем $\sqrt{\varepsilon}$ получить этим методом нельзя, при $h < h_0$ можно получить искажение результата.

В случае применения формул более высокого порядка точности погрешность вычисления производной можно уменьшить. Если остаточный член формулы численного дифференцирования есть $O(h^4)$ и вычисляется производная порядка k, то оптимальным шагом в этом случае будет $h_0 = O(\varepsilon^{\frac{1}{n+k}})$, а минимум оценки полной погрешности равен $O(\varepsilon^{\frac{n}{n+k}})$.

Если функция задана таблично, то на практике часто такую функцию сначала сглаживают, т.е. заменяют ее близкой достаточное число раз дифференцируемой функцией, а после этого проводят дифференцирование. Для сглаживания обычно строится многочлен невысокой степени методом наименьших квадратов.

Практически оценить погрешность вычисленного значения производной и одновременно уточнить полученный результат можно нижеприведенным методом, называемым методом Рунге. Рассмотрим, например, вычисление первой производной. Формулу для вычисления получим, применяя формулу Тейлора. Имеем

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + O(h^4)\text{ , следовательно,}$$

$$f'(x) = \frac{1}{h}\big(f(x+h) - f(x)\big) - \frac{f''(x)}{2!}h - \frac{f'''(x)}{3!}h^2 + O(h^3)$$

Отсюда получим представление погрешности:

$$f'(x) - \psi(x;h) = c_1 h + c_2 h^2 + O(h^3)\ , \qquad (6.8)$$

где $\psi(x;h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ - приближение к $f'(x)$, $c_1 = \frac{f''(x)}{2!}h$, $c_2 = -\frac{f'''(x)}{3!}h^2$.

Отметим, что коэффициенты c_1, c_2 в разложении погрешности не зависят от шага вычисления h.

Проведем еще раз вычисление по той же формуле в точке x, но с шагом rh. Получим

$$f'(x) - \psi(x;rh) = c_1 rh + c_2 r^2 h^2 + O(h^3)\ , \qquad (6.9)$$

Теперь нетрудно оценить величину погрешности. Для этого вычитаем (6.8) из (6.9) и получаем

$$c_2 h = \frac{\psi(x;h) - \psi(x;rh)}{(r-1) - c_2 h^2 (r+1) + O(h^3)}$$

Отсюда имеем представление главного члена погрешности через вычисленные значения производной

$$R = \frac{\psi(x;h) - \psi(x;rh)}{r-1} \qquad (6.10)$$

Обычно выбирают $r = \frac{1}{2}$, вычисляют R, используя шаги $h_1 = h\ и\ h_2 = \frac{h}{2}$ затем сравнивают R с заданной точностью $\varepsilon > 0$. Если неравенство $|R| < \varepsilon$ не выполняется, то берут шаг $h_3 = \frac{h_2}{2} = \frac{h}{4}$ и повторяют вычисления с шагами h_2 и h_3 и т.д. Если же неравенство $|R| < \varepsilon$ справедливо для каких-нибудь шагов $h_k, h_{k+1} = \frac{h_k}{2}$, то в качестве приближения к производной берем величину $\psi(x;h_k)$.

Найденное значение производной можно уточнить, использовав вычисленное значение главного члена погрешности. Для этого (6.10) подставим в (6.8) и получим

$$f'(x) = \psi(x;h_k) + \frac{\psi(x;h_k) - \psi(x;h_{k+1})}{r-1} + O(h^2).$$

Таким образом, в качестве приближения к производной можно взять уточнение $\psi + R$.

Аналогично применяется метод Рунге к другим формулам численного дифференцирования и другим вычислительным методам, погрешность которых допускает разложение по шагу h вычислений с коэффициентами, не зависящими от этого шага.

С помощью этого метода можно получать также формулы численного дифференцирования высокой точности из формул низкой точности. Например, применим к формуле (6.8) метод уточнения Рунге с $r = 2$. Получим

$$f'(x) = \psi(x;h) + \big(\psi(x;h) - \psi(x;2h)\big) + O(h^2) = \frac{4f(x+h) - 3f(x) - f(x+2h)}{2h} + O(h^2) .$$

Таким образом, мы пришли к первой из формул (6.7).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Цели заданий

1. Изучение методов приближения функций.
2. Получение практических навыков решения задач приближения на ЭВМ, обработка и оформление результатов.
3. Практика использования алгоритмических языков.

Содержание заданий

1. Оценить априорно сложность реализации методов и их погрешность.
2. Построить алгоритм решения задачи.
3. Написать и отладить программы, реализующие данные методы. Написать программу для решения поставленной задачи, использующую эти программы или подпрограммы из пакета прикладных программ (ППП).
4. Сделать анализ численных результатов.

Методы интерполяции

(Здесь указываются номера формул и тем из раздела 1)

1. Формула Лагранжа – (1.5).
2. Формула Ньютона с разделенными разностями – (1.6).
3. Формула Ньютона с конечными разностями для интерполирования вперед – (1.8) и назад – (1.9).
4. Схема Эйткена – (1.12).
5. Многочлен Эрмита: представление в форме Лагранжа – (3.2) представление в форме Ньютона – (3.3).
6. Сплайн – интерполяция – тема 4.
7. Кусочно-линейная – (5.1) и кусочно-квадратичная – (5.2) треугольная интерполяция.
8. Последовательная интерполяция – тема 5.
9. Решение уравнений – тема 6, п.1.
10. Численное дифференцирование – тема 6, п.2.

<u>Задания</u>

1. Практическое сравнение точности алгоритмов.
   1.1. Вычислить значения интерполяционного многочлена для заданной функции. Вычислить погрешность интерполяции $R_n(x)$ и значения функции $\omega_n(x)$на множестве равномерно распределенных точек внутри и вне промежутка$[x_1, x_n]$, построить графики этих функций. Для сравнения использовать методы (3.1) и (3.2); (3.1) и (3.3); (3.1) и (3.4); (3.2) и (3.4).
   1.2. Проследить за изменением погрешности и функции$\omega_n(x)$, меняя число точек интерполяции.
   1.3. Упорядочить узлы в соответствии с (2.2) и выполнить пункты 1.2 и 1.3.
2. Экспериментальная проверка сходимости интерполяционных процессов.
   2.1. Выполнить пункты 1.1 и 1.2, увеличивая число точек интерполяции и используя для контроля только внутренние точки.
   2.2. Использовать для интерполяции корни многочленов Чебышева (тема 2, формула (2.3)), переведя их с отрезка $[-1,1]$ на данный отрезок $[x_1, x_n]$ линейным преобразованием, и выполнить п. 4.2.1.
3. Вычисление производных.
   3.1. Используя представление интерполяционного многочлена в форме Ньютона, вывести формулу для приближения первой и второй производных функции$f(x)$.

3.2. Выполнить пункты 1.1, 1.2 и 2.2, заменяя функцию и многочлен их первыми и вторыми производными и рассматривая только величину погрешности $R'_n(x)$и$R''_n(x)$.

4. Численное дифференцирование с использованием правила Рунге.

4.1. Применить правило Руне (тема 6) для вычисления производных функции $f(x)$с заданной точностью. Исследовать влияние ошибок округления.

4.2. Вывести правило Рунге для вычисления третьей и четвертой производных и выполнить п.4.1.

5. Интерполяция с кратными узлами.

5.1. Вычислить по формулам (3.2) и (3.3) значения многочлена Эрмита и сравнить погрешности интерполяции.

5.2. Вычислить коэффициенты Тейлора для многочлена, используя схему Горнера (тема 3) и сравнить с точными значениями.

6. Вычисление сплайнов и их производных.

6.1. Выполнить пункты 1.1 и 1.2, заменяя интерполяционный многочлен сплайном и его первой и второй производными.

6.2. Выполнить п.2.1 для сплайна.

7. Двумерная интерполяция.

7.1. Реализовать алгоритм последовательной интерполяции, используя методы (3.2) – (3.4). Выполнить п. 1.2.

7.2. Реализовать методы 3.7 и сравнить погрешности.

8. Численное решение уравнений.

8.1. Решить уравнения методами из примеров 6.1 – 6.4.

<u>Указания к выполнения заданий</u>

Традиционная последовательность численного решения задач следующая: постановка задачи, анализ ее, выбор метода решения, построение алгоритма, реализация алгоритма на ЭВМ, анализ результатов. Выполнение всей этой программы в полной мере на лабораторных занятиях достаточно сложно, поэтому студентам предлагаются задания, в которых главная роль отводится выполнению двух или трех пунктов рассмотренной последовательности. Рекомендуется давать одно задание на группу 2-х – 3-х студентов.

В качестве точек, где вычисляется погрешность, можно брать точки $\overline{x_i} = \frac{x_i+x_{i+1}}{2}, i = \overline{1,n}$, внутри отрезка $[x_1, x_n]$ и 4-5 точек вне этого отрезка, например, можно взять точки $x_1 - h_1,\ x_1 - 2h_1, h_1 = x_2 - x_1$слева от x_1и аналогично справа от x_n: $x_n + h_{n-1}, x_n - 2h_{n-1},\ldots,\ \ h_{n-1} = x_n - x_{n-1}$.

Для отладки программ проще всего использовать полином. При этом, если число точек интерполяции равно n, а полином имеет степень $k < n - 1$, то разделенные и конечные разности порядка $> k$ будут нулями.

В качестве тестовых примеров можно рассматривать следующие функции:

1. $f(x) = \begin{cases} 1, x \leq 0 \\ e^{\alpha x}, x > 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \sin(\pi x)$

3. $f(x) = e^{-10x}$

4. $f(x) = \sqrt{x}$

5. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

6. $f(x) = \frac{1}{1+ax^2}, a = 1,10,25,$

7. $f(x) = |x|$

8. $f(x) = \ln(x) - \frac{x-1}{x}$

9. $f(x,y) = \sqrt{x+y}$

10. $f(x) = |x+y|$

11. $f(x,y) = \frac{1}{(1+ax^2)(1+bx^2)}, \quad a,b = 1,10,25,50$

Рекомендуемая литература

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. М., 1973.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М.,1966.Т.1.
3. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М., 1980.
4. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.,1978.
5. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.Н. Вычислительные методы. М.,1976.Т.1.
6. Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробогатько А.А. Методы вычислений. Киев,1977.
7. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.,1980.
8. Плис А.И., Сливина Н.А. Лабораторный практикум по высшей математике. М.,1983.
9. Светозарова Г.И., Сигитов Е.В., Козловский А.В. Практикум по программированию на алгоритмических языках. М.,1980.
10. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.,1980.