Теория вероятностей и математическая статистика

Задание 1.

Случайная непрерывная величина A имеет равномерное распределение на промежутке (200, 800]. Найдите ее среднее значение и дисперсию.

Подсказка № 1

В равномерном распределении на интервале (a,b], параметры a и b определяют нижнюю и верхнюю границы интервала. Обратите внимание, что в данном распределении aaa не включен в интервал, а b включен.

Подсказка № 2

Среднее значение (математическое ожидание) равномерного распределения на интервале (a,b] рассчитывается по формуле a+b/2. Это дает вам середину интервала, которая является центром распределения.

Подсказка № 3

Дисперсия равномерного распределения на интервале (a,b] определяется формулой $\frac{(b-a)^2}{12}$. Эта формула учитывает, насколько широко распределены данные относительно среднего значения.

Эталонное решение:

```
# Задача 1: Равномерное распределение на промежутке (200, 800]


# Параметры распределения

a = 200

b = 800


# Среднее значение

mean = (a + b) / 2
```

```
# Дисперсия
variance = ((b - a) ** 2) / 12


print(f"Среднее значение: {mean:.2f}")
print(f"Дисперсия: {variance:.2f}")
```

Задача 2.

О случайной непрерывной равномерно распределенной величине B известно, что ее дисперсия равна 0.2. Можно ли найти правую границу величины B и ее среднее значение зная, что левая граница равна 0.5? Если да, найдите ее.

Подсказка № 1

Дисперсия для равномерного распределения на интервале (a,b] вычисляется по формуле $\frac{(b-a)^2}{12}$. Используйте эту формулу для вычисления разности между правой и левой границами интервала.

Подсказка № 2

Для нахождения правой границы bbb преобразуйте формулу дисперсии так, чтобы выразить bbb. Это дает формулу: b=$a + \sqrt{12 \cdot variance}$. Убедитесь, что правильно используете корень квадратный и множитель 12.

Подсказка № 3

В Python для вычисления квадратного корня используйте функцию `math.sqrt()`. Это обеспечит точность и корректность расчета. Убедитесь, что импортировали нужные функции из библиотеки `math`.

Эталонное решение:

```
import math


# Задача 2: Равномерное распределение с дисперсией 0.2


# Параметры
```

```
variance_B = 0.2
a = 0.5


# Найдем правую границу b
b = a + math.sqrt(12 * variance_B)


# Среднее значение
mean_B = (a + b) / 2


print(f"Правая граница: {b:.2f}")
print(f"Среднее значение: {mean_B:.2f}")
```

Задача 3.

Непрерывная случайная величина X распределена нормально и задана плотностью распределения f(x) = (1 / (4 * sqrt(2pi))) * exp((-(x+2)**2) / 32)
Найдите:
а). M(X)
б). D(X)
в). std(X) (среднее квадратичное отклонение)

Подсказка № 1

Идентификация параметров нормального распределения. В функции плотности нормального распределения f(x), которая задана как $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\Pi}} exp(\frac{-(x+2)^2}{32})$, сравните её с общей формой нормального распределения $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} exp(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$. Из этого можно определить, что σ^2=16 и σ=4, а μ=−2.

Подсказка № 2

В нормальном распределении X, μ (среднее значение) и σ (стандартное отклонение) определяют форму распределения. Параметр μ это центр распределения, а σ это стандартное отклонение, которое используется для расчета дисперсии и стандартного отклонения.

Подсказка № 3

Среднее значение M(X) для нормально распределенной величины X равно параметру μ. Используйте это значение напрямую без дополнительных расчетов.

Подсказка № 4

Дисперсия D(X) равна квадрату стандартного отклонения σ. Поэтому если σ=4, то дисперсия D(X)=σ2=16. Убедитесь, что правильно возводите σ^2.

Подсказка № 5

Среднее квадратичное отклонение (или стандартное отклонение) std(X) – это просто σ. Если дисперсия известна, вы можете найти стандартное отклонение, взяв квадратный корень из дисперсии..

Эталонное решение:

```
import math


# Задача 3: Нормальное распределение


# Параметры распределения

mu = -2

sigma = 4


# Среднее значение

mean_X = mu


# Дисперсия

variance_X = sigma ** 2


# Среднее квадратичное отклонение

stddev_X = sigma
```

```
print(f"Среднее значение: {mean_X:.2f}")

print(f"Дисперсия: {variance_X:.2f}")

print(f"Среднее квадратичное отклонение: {stddev_X:.2f}")
```

Задача 4.

Рост взрослого населения города X имеет нормальное распределение. Причем, средний рост равен 174 см, а среднее квадратичное отклонение равно 8 см. Какова вероятность того, что случайным образом выбранный взрослый человек имеет рост:
а). больше 182 см
б). больше 190 см
в). от 166 см до 190 см
г). от 166 см до 182 см
д). от 158 см до 190 см
е). не выше 150 см или не ниже 190 см
ё). не выше 150 см или не ниже 198 см
ж). ниже 166 см.

Подсказка № 1

Преобразование нормального распределения в стандартное. Поскольку вы используете нормальное распределение с произвольными параметрами, вам нужно преобразовать исходные значения в стандартное нормальное распределение Z. Это делается с помощью преобразования $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$, где μ — среднее значение, а σ — стандартное отклонение. `scipy.stats.norm.cdf` работает с стандартным нормальным распределением, поэтому преобразуйте X в Z перед использованием этой функции.

Подсказка № 2

Использование функции кумулятивного распределения (CDF). Функция `norm.cdf(x, mu, sigma)` вычисляет вероятность того, что случайная величина с нормальным распределением с параметрами μ и σ будет меньше или равна x. Для нахождения вероятности того, что случайная величина больше x, используйте 1−norm.cdf(x,μ,σ).

Подсказка № 3

Вычисление вероятностей для интервалов. Чтобы найти вероятность того, что случайная величина попадает в интервал [a,b], используйте разность между функцией кумулятивного распределения в точке bbb и aaa: norm.cdf(b,μ,σ)−norm.cdf(a,μ,σ).

Подсказка № 4

Для расчета вероятности, что случайная величина находится вне заданного интервала (например, меньше 150 см или больше 190 см), вычислите вероятность нахождения в обоих частях интервала и затем суммируйте их. Убедитесь, что вы учитываете обе части, так как это объединение вероятностей для двух независимых событий.

Эталонное решение:

```
from scipy.stats import norm


# Задача 4: Нормальное распределение с mu = 174 и sigma = 8

mu = 174

sigma = 8


# Вероятность, что рост больше 182 см

prob_gt_182 = 1 - norm.cdf(182, mu, sigma)


# Вероятность, что рост больше 190 см

prob_gt_190 = 1 - norm.cdf(190, mu, sigma)


# Вероятность, что рост от 166 см до 190 см

prob_166_to_190 = norm.cdf(190, mu, sigma) - norm.cdf(166, mu, sigma)


# Вероятность, что рост от 166 см до 182 см

prob_166_to_182 = norm.cdf(182, mu, sigma) - norm.cdf(166, mu, sigma)


# Вероятность, что рост от 158 см до 190 см

prob_158_to_190 = norm.cdf(190, mu, sigma) - norm.cdf(158, mu, sigma)
```

```
# Вероятность, что рост не выше 150 см или не ниже 190 см

prob_leq_150_or_ge_190 = norm.cdf(150, mu, sigma) + (1 -
norm.cdf(190, mu, sigma))



# Вероятность, что рост не выше 150 см или не ниже 198 см

prob_leq_150_or_ge_198 = norm.cdf(150, mu, sigma) + (1 -
norm.cdf(198, mu, sigma))



# Вероятность, что рост ниже 166 см

prob_lt_166 = norm.cdf(166, mu, sigma)



print(f"Вероятность, что рост больше 182 см: {prob_gt_182:.5f}")

print(f"Вероятность, что рост больше 190 см: {prob_gt_190:.5f}")

print(f"Вероятность, что рост от 166 см до 190 см:
{prob_166_to_190:.5f}")

print(f"Вероятность, что рост от 166 см до 182 см:
{prob_166_to_182:.5f}")

print(f"Вероятность, что рост от 158 см до 190 см:
{prob_158_to_190:.5f}")

print(f"Вероятность, что рост не выше 150 см или не ниже 190 см:
{prob_leq_150_or_ge_190:.5f}")

print(f"Вероятность, что рост не выше 150 см или не ниже 198 см:
{prob_leq_150_or_ge_198:.5f}")

print(f"Вероятность, что рост ниже 166 см: {prob_lt_166:.5f}")
```

Задача 5.

На сколько сигм (средних квадратичных отклонений) отклоняется рост человека, равный 190 см, от математического ожидания роста в популяции, в которой M(X) = 178 см и D(X) = 25 кв.см?

Подсказка № 1

Стандартное отклонение (σ) является квадратным корнем из дисперсии (D(X)). Используйте `math.sqrt(variance)` для вычисления стандартного отклонения из дисперсии. Это необходимо для правильного преобразования дисперсии в стандартное отклонение.

Подсказка № 2

Z-оценка (или Z-скор) вычисляется как $\frac{X-\mu}{\sigma}$, где X — наблюдаемое значение, μ\muμ — среднее значение, а σ — стандартное отклонение. Убедитесь, что вы правильно применяете эту формулу, чтобы получить количество стандартных отклонений, на которые отклоняется значение X.

Эталонное решение:

```
# Задача 5: Нормальное распределение с M(X) = 178 см и D(X) = 25 кв.см


# Параметры

mu = 178

variance = 25

sigma = math.sqrt(variance)


# Рост 190 см

X = 190


# На сколько сигм отклоняется рост

z_score = (X - mu) / sigma


print(f"Рост 190 см отклоняется от среднего на {z_score:.2f} сигм")
```