

Hur stor är en atomkärna?

Andreas Ekström¹

Sammanfattning

I den här uppgiften ska du bestämma storleken på en atomkärna. Till din hjälp har du data från ett experiment där elektroner med 250 MeV total energi spreds elastiskt mot ^{40}Ca . Steg för steg introduceras metod och teori så att du på egen hand kan skriva en datorkod och genomföra en realistisk analys för att bestämma laddningsradien för ^{40}Ca .

¹Institutionen för Fysik, Chalmers Tekniska Högskola, Göteborg, Sverige

e-post: andreas.ekstrom@chalmers.se

I det här problemläret återfinns en kort sammanfattning av nödvändig teori¹, samt ett antal frågor som du behöver besvara i rapporten.

Problembeskrivning

Hur stor är en atomkärna? Det är en till synes enkel fråga som visar sig vara svår att besvara. Protodensiteten $\rho_{\text{ch}}(\mathbf{r})$ motsvaras till stor del av den elektriska laddningsfördelningen i en atomkärna, och denna kan mätas experimentellt med hjälp av elektronspridning [1]. Neutrodensiteten däremot är mycket svårare att mäta experimentellt eftersom de elektriskt neutrala neutronerna knappt växelverkar med elektroner².

I den här uppgiften fokuserar vi på den elektriska laddningsfördelningen. Vi antar en sfäriskt symmetrisk protodensitet enligt

$$\rho_{\text{ch}}(r; \mathbf{X}) = \frac{\rho_{\text{ch}}^0}{1 + e^{(r-a)/b}}, \quad (1)$$

och samlar alla tre okända parametrar i en vektor $\mathbf{X} = [\rho_{\text{ch}}^0, a, b]$.

Fråga: varför är det en rimlig approximation att använda en sfärisk protodensitet för ^{40}Ca ? (tips: Kom ihåg vad du lärt dig om skalmodellen.)

Din uppgift är att finna ett optimalt värde \mathbf{X}_* som bäst reproducerar en utvald mängd uppmätta differentiella spridningstvärnsnitt för den elastiska reaktionen $e^- + ^{40}\text{Ca} \rightarrow e^- + ^{40}\text{Ca}$ där elektroner inkommer med 250 MeV total energi i LAB-systemet. Strålmålet (eng. target), som endast består av ^{40}Ca , är fixerat i LAB-systemet. När du erhållit \mathbf{X}_* kan du beräkna ett kvadratisk medelvärde för laddningsradien enligt

$$\langle r^2 \rangle \equiv \frac{4\pi}{Ze} \int r^4 \rho_{\text{ch}}(r; \mathbf{X}_*) dr. \quad (2)$$

För att nå dit behöver du skriva ett datorprogram som anpassar parametervektorn \mathbf{X} så att modellen för protodensiteten i ekvation 1 på bästa sätt reproducerar spridningsdatan.

¹Kontext och ytterligare teori finns i kursboken.

²Däremot sker s.k. paritetsbrytande elektronspridning endast via den elektrosvaga kraften, och eftersom neutronen är elektrosvagt laddad kan man på så vis även mäta neutrodensiteten. Dock är tvärsnittet för elektrosvag spridning åtskilliga storleksordningar mindre än elektromagnetisk spridning.

Vi kommer att följa teori och approximationer enligt kursboken (avsnitt 2.2.1). Stegen du behöver genomföra är:

1. Läs in experimentell data med tillhörande mätfel.
2. Definiera en funktion som beräknar det elastiska spridningstvärnsnittet för en elektron med en viss totalenergi E och spridningsvinkel θ , givet ett värde på parametervektorn \mathbf{X} .
3. Sätta upp en enkel rutin för att hitta ett optimalt värde \mathbf{X}_* som på bästa sätt reproducerar den experimentella datan.
4. Generera: i) en egen figur som jämför experimentella och teoretiska värden för det differentiella spridningstvärnsnittet $d\sigma/d\Omega$ ii) en egen figur för den underliggande optimala protodensiteten $\rho_{\text{ch}}(r; \mathbf{X}_*)$, iii) en tabell med optimala värden $\mathbf{X}_* = [\rho_{\text{ch}}^0, a, b]$, och iv) extrahera den så kallade rms-laddningsradien $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ för ^{40}Ca . En samlad bild från flera noggranna mätningar ger $\langle r^2 \rangle^{1/2} = 3.4776(19)$ fm [2]. Ditt resultat borde komma i närheten.

Du får använda det programmeringsspråk du helst föredrar. Det viktigaste är att du har tillgång till funktioner, programslingor (loopar), listor och vektorer, och möjligtvis en metod för minsta-kvadrat-optimering.

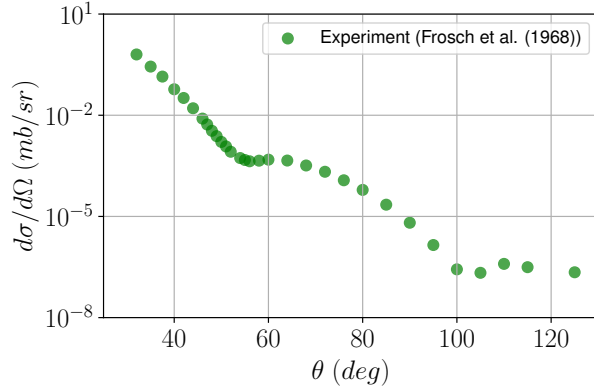
Differentiellt tvärsnitt och formfaktor

I ett experiment [3] uppmättes det differentiella stvärnsnittet $(d\sigma/d\Omega)_{\text{exp}}$ för att en elektron med total energi $E = 250$ MeV ska spridas en vinkel θ mot ett stillastående strålmål ^{40}Ca , se Figur 1.

Elektronerna har relativistisk energi och kvantmekaniskt spinn. Därför använder vi Mott-tvärsnittet

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \frac{Z_p^2 Z_t^2 \alpha^2 (c)^2}{4\beta^4 E^2 \sin^4(\theta/2)} [1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)], \quad (3)$$

där bakgrund och ingående variabler beskrivs i kursbokens avsnitt 2.2.1 (ekvation 2.24-2.25). Antal laddningar för (p)projektil



Figur 1. Uppmätt differentiellt tvärsnitt $d\sigma/d\Omega$ vid olika spridningsvinklar θ för den elastiska spridningsreaktionen $e^- + {}^{40}\text{Ca} \rightarrow e^- + {}^{40}\text{Ca}$ för elektroner med total energi $E = 250$ MeV. Notera att tvärsnitt och spridningsvinklar är för LAB-systemet.

och (t)arget är $Z_p = 1$ och $Z_t = 20$. Notera att energier, tvärsnitt, vinklar i ovanstående teoretiska uttryck är för CM-systemet.

Fråga: varför kan vi i det här fallet använda oss av oförändrade teoretiska uttryck angivna för energier, spridningstvärsnitt, och -vinklar som är formulerade för CM-systemet för att approximativt beskriva data för $e^- + {}^{40}\text{Ca} \rightarrow e^- + {}^{40}\text{Ca}$ reaktionen angivna i LAB-systemet? Det räcker med en tydlig argumentation som svar, ingen detaljerad beräkning eller härledning krävs.

I den här uppgiften använder vi den så kallade *Bornapproximation* där vi antar att elektronen och atomkärnan endast växelverkar en gång, vilket leder till följande uttryck för det teoretiska spridningstvärsnittet

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Theo}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} |F(\mathbf{q}^2)|^2. \quad (4)$$

där $F(\mathbf{q}^2)$ kallas för formfaktor. Den tar hänsyn till att atomkärnan inte är ett punktförmigt objekt. Detta är den i särklass viktigaste delen i vår teori för att kunna relatera Motttvärsnittet till experimentellt uppmätt data. Enligt kursboken så definierar vi formfaktorn som fouriertransformen av laddningsfördelningen (protondensiteten). Eftersom vi har en sfäriskt symmetrisk laddningsdensitet $\rho_{\text{ch}}(r)$ enligt ekvation (1) får vi

$$F(\mathbf{q}^2; \mathbf{X}) = \frac{4\pi}{Zeq} \int_0^\infty r \rho_{\text{ch}}(r; \mathbf{X}) \sin\left(\frac{qr}{2}\right) dr. \quad (5)$$

Rörelsemängden $\mathbf{q}^2 = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ är skillnaden mellan den inkommande och den elastiskt spridda elektronens rörelsemängder. Atomkärnan är förhållandevis tung så vi antar att den är statisk och inte rektylerar alls. Förändringen av den inkommande elektronens rörelsemängd kan vi därför relatera till dess spridningsvinkel enligt

$$\mathbf{q}^2 = 4p^2 \sin^2(\theta/2), \quad (6)$$

där $|\mathbf{q}| = q$ och beloppet av den inkommande elektronens rörelsemängd ges av $|\mathbf{p}| = p$.

Experimentell data

Den experimentella datan som du skall använda dig av är från referens [3], den finns även återgiven i figur 1 samt i nedanstående lista:

theta (grader)	tvärsnitt (mb/sr)	mätfel (mb/sr)
32.0	6.34E-1	0.45E-1
35.0	2.77E-1	0.20E-1
37.5	1.40E-1	0.10E-1
40.0	5.89E-2	0.35E-2
42.0	3.25E-2	0.30E-2
44.0	1.61E-2	0.10E-2
46.0	7.95E-3	0.80E-3
47.0	5.32E-3	0.50E-3
48.0	3.46E-3	0.25E-3
49.0	2.40E-3	0.25E-3
50.0	1.62E-3	0.15E-3
51.0	1.19E-3	0.10E-3
52.0	8.27E-4	0.40E-4
54.0	5.38E-4	0.40E-4
55.0	4.71E-4	0.50E-4
56.0	4.32E-4	0.30E-4
58.0	4.50E-4	0.45E-4
60.0	4.82E-4	0.30E-4
64.0	4.54E-4	0.30E-4
68.0	3.24E-4	0.25E-4
72.0	2.11E-4	0.15E-4
76.0	1.18E-4	0.10E-4
80.0	6.12E-5	0.40E-5
85.0	2.23E-5	0.15E-5
90.0	6.50E-6	0.45E-6
95.0	1.42E-6	0.10E-6
100.0	2.70E-7	0.35E-7
105.0	2.13E-7	0.25E-7
110.0	3.92E-7	0.45E-7
115.0	3.13E-7	0.55E-7
125.0	2.21E-7	0.30E-7

Numerisk optimering

Med hjälp av data och ekvationer från föregående avsnitt är det möjligt att hitta en optimal parametervektor \mathbf{X}_* som på bästa sätt samtidigt återger ovanstående data vid varje \mathbf{q}^2 , dvs spridningsvinkel θ . Du behöver sätta upp ett uttryck $\chi^2(\mathbf{X})$ för kvadratsumman av skillnaden mellan det teoretiska tvärsnittet \mathcal{T}_i enligt ekvation 4 och motsvarande experimentell data \mathcal{E}_i för varje spridningsvinkel θ_i

$$\chi^2(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{N_\theta} \left(\frac{\mathcal{T}_i(\mathbf{X}) - \mathcal{E}_i}{\delta_i} \right)^2, \quad (7)$$

där δ_i betecknar det experimentella mätfelet för datapunkt i . Vi antar att alla datapunkter okorrelerade, vilket inte är fallet. Detta kan innebära att vi underskattar felet i anpassningen,

men det går utanför uppgiften att försöka inkludera datakorrelationer. Vidare har vi $N_\theta = 31$ experimentella datapunkter. För att evaluera $\chi^2(\mathbf{X})$ för ett val \mathbf{X} måste du för varje term i summan beräkna integralen i ekvation (5). Här kan du välja att uttrycka integralen som en enkel Riemannsumma som du beräknar numeriskt. Var noga med att ställa in diskretiseringen så att den numeriska beräkningen är konvergerad. Nästa steg är att lösa optimeringsproblemet

$$\mathbf{X}_* = \operatorname{argmin} \chi^2(\mathbf{X}) \quad (8)$$

med bivillkoret

$$Z_t = \frac{4\pi}{e} \int_0^\infty r^2 \rho_{\text{ch}}(r; \mathbf{X}) dr. \quad (9)$$

Ett enkelt sätt att inkludera bivillkoret är att komplettera $\chi^2(\mathbf{X})$ med ytterligare en term

$$\left(\frac{Z_t - \frac{4\pi}{e} \int_0^\infty r^2 \rho_{\text{ch}}(r; \mathbf{X}) dr}{\varepsilon} \right)^2, \quad (10)$$

där vi nu använder $Z_t = 20$ och väljer $\varepsilon = 10^{-6}$ för att säkerställa att villkoret uppfylls.

Fråga: Vad är poängen med ovanstående bivillkor, och vad händer om du inte tar med det?

För att lösa ovanstående optimeringsproblem kan du använda lämplig och befintlig optimeringsalgoritm i t.ex. Matlab, Python, eller gnu scientific library. När du funnit ett optimum bör du kunna reproducera figur 2. Glöm inte bort att nämna och referera till de externa algoritmer som du använder och varför du valde just dessa.

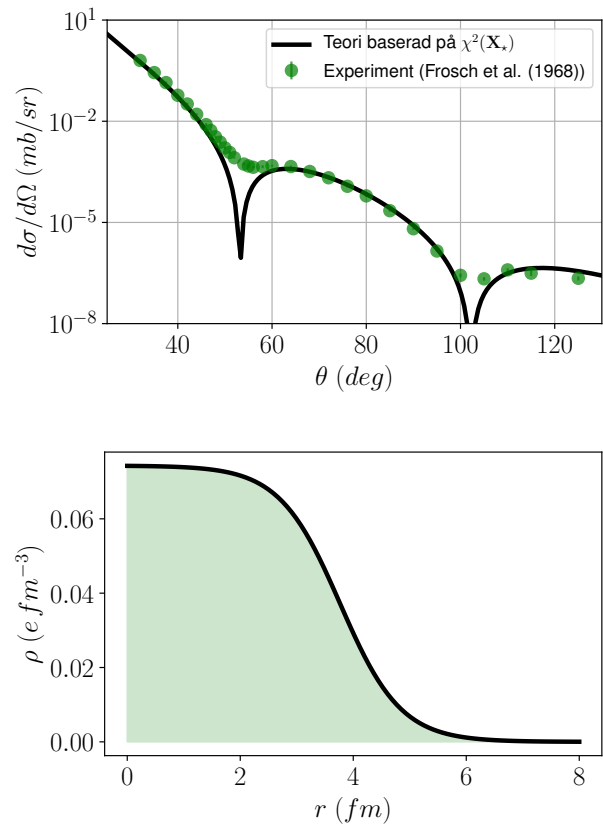
Fråga: hur stor är rms-laddningsradien för ^{40}Ca enligt din analys? Kan du förklara skillnaden mellan ditt resultat och det vedertagna värdet $\langle r^2 \rangle^{1/2} = 3.4776(19) \text{ fm}$?

Uppgifter att lösa

Du ska nu skriva en egen kod i valfritt språk (Matlab, Python, C, Fortran, ...) för att finna optimala värden för ρ_{ch}, a, b , och producera en egen version av figur 2. Försök även att svara på alla frågor i det här problemlädet. Tänk på enheterna!

Om rapporten

- Uppgiften utförs förslagsvis i par. Rapporten skall skrivas i TeX/LaTeX och varje par lämnar in en gemensam rapport. Fler än två författare godkänns inte. Inlämning sker via Canvas senast 2021-05-31.
- Rapporten skall inte omfatta mer än **två sidor** inklusive era figurer, dock exklusive försättsblad. Bifoga er källkod, och eventuell input data, i ett appendix (räknas ej med i sidantalet), samt som en separat fil. Begränsningen till endast 2 sidor huvudtext är en del av utmaningen i den här uppgiften. Det är viktigt att öva upp en god förmåga att presentera material i skrift på ett begränsat antal sidor.



Figur 2. (Övre panel) Teoretisk beskrivning av det uppmätta tvärsnittet för elastisk spridning av 250 MeV elektroner mot ^{40}Ca . (Undre panel) Motsvarande laddningstäthet i ^{40}Ca enligt ekvation 1. Resultat baserade på ett optimalt \mathbf{X}_* .

- Rapporten skall innehålla beskrivande text som på ett relevant och kortfattat sätt introducerar problemställningen, vald lösningsmetod, ert resultat, och lämpliga figurer och tabeller.
- Numeriska värden på erforderliga konstanter (med enheter och källangivelse) måste anges i rapporten. Glöm inte storheter och enheter på alla axlar i varje figur! Stor vikt läggs vid fysikförståelse och omsorgsfulla och noggranna numeriska beräkningar.
- Viktiga resultat som skall ingå: i) Svaren på alla frågor i texten, ii) din egen reproduktion av figur 2, iii) appendix och fil med egenutvecklad kod, iv) tabell över dina optimala värden på parametervektorn \mathbf{X}_* , och v) en diskussion som sätter dina resultat i en relevant kontext.
- Använd vilka källor ni vill, men kom ihåg att referera till dessa i er text.

Lycka Till!

Referenser

- [1] R. Hofstadter, “Electron scattering and nuclear structure,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 28, pp. 214–254, Jul 1956.
- [2] I. Angeli and K. Marinova, “Table of experimental nuclear ground state charge radii: An update,” *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, vol. 99, no. 1, pp. 69 – 95, 2013.
- [3] R. F. Frosch, R. Hofstadter, J. S. McCarthy, G. K. Nöldeke, K. J. van Oostrum, M. R. Yearian, B. C. Clark, R. Herman, and D. G. Ravenhall, “Electron scattering studies of calcium and titanium isotopes,” *Phys. Rev.*, vol. 174, pp. 1380–1399, Oct 1968.