Математичко списание НУМЕРУС
за учениците од основното образование.

ISSN 1409-875X

Излегува во четири броја во текот на една учебна година.

Цената на еден примерок е 150 денари, а претплатата за 4 броја е 420 денари.

Порачките треба да се направат на web страната на СММ, https://smm.org.mk, во делот *Списанија и книги,* со пополнување на податоците наведени во *формата*.

Жиро сметка 300000001276071, ЕДБ 4030991121596, депонент на Комерцијална банка АД, СММ (со назнака за НУМЕРУС).

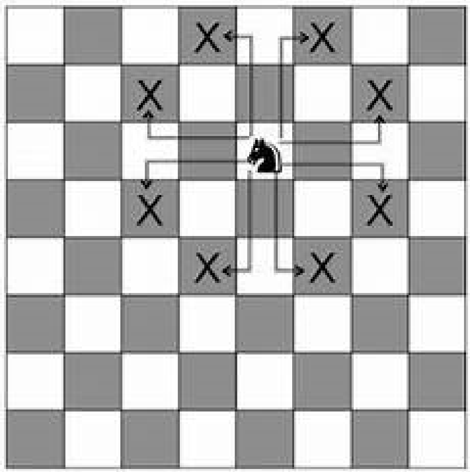
Електронска адреса за контакт, праќање прилози и решенија: numerus.smm@gmail.com

СОПСТВЕНИК И ИЗДАВАЧ Е СОЈУЗОТ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Весна Целакоска-Јорданова
Природно-математички факултет, Скопје

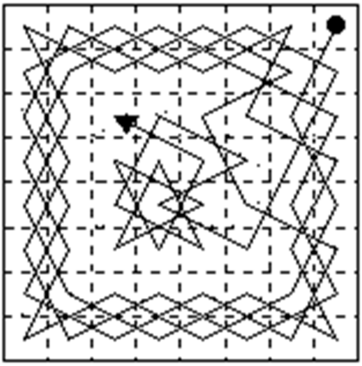
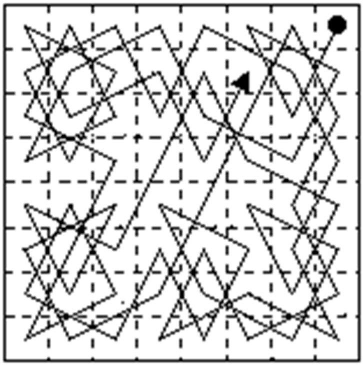
ЗАДАЧА ОД ШАХОВСКАТА ТАБЛА СО ФИГУРАТА КОЊ

Задачата што ќе ја разгледуваме е позната под името „Турнеја на витезот“. Витез претставува и се нарекува шаховската фигура коњ. И двете имиња „витез“ и „коњ“ се користат рамноправно, а ние, оваа шаховска фигура, ќе ја викаме коњ, додека нејзините скокови – коњски скокови. Таа се движи по шаховска (8×8) табла во вид на кириличната буква „Г“ и опфаќа 4 полиња заедно со почетната позиција. Тука се вклучени и сите ротации на „Г“ по подолгата страна (види го цртежот подолу, каде што со X се обележани полињата на кои смее да „скокне“ коњот).



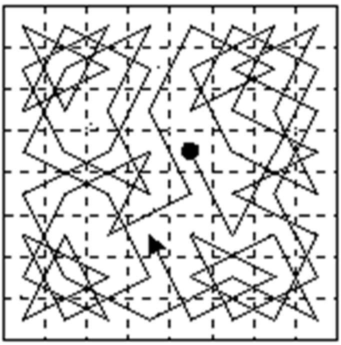
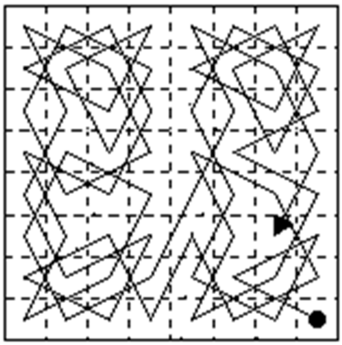
Задачата гласи: **Како со коњски скокови да се мине по сите 64 полиња од шаховската табла, така што секое поле да биде посетено само еднаш?**

Оваа задача е пронајдена во еден арапски ракопис од IX век напишан од Абу Закарија Јахја бен Ибрахим ал Хаим. Авторот дава опис на две турнеи, од кои едната (дијаграм А) е решение на Али Ц. Мани, непознат шахист, а другата – на ал-Адли ар-Руми, кој околу 840 година напишал една многу популарна книга за шах, од која се зачувани само делови, меѓу кои и едно решение на оваа задача (дијаграм Б).

А. Решение на Али Ц. Мани; **Б.** Решение на ал-Адли ар-Руми.

Турнеите коишто се прикажани на овие дијаграми се разликуваат по тоа што едната е отворена (дијаграмот А), а другата е затворена (дијаграмот Б). *Затворена турнеја* се нарекува онаа којашто со последниот потег го враќа коњот во почетната позиција. Големиот арапски шахист Абу-Бакр Мухамад б.Јахја ас-Сули дал две решенија на оваа задача со затворена турнеја (дијаграмите подолу).

В. Две затворени турнеи на коњ (решенија на ас-Сали).

Но, приказната не завршува овде, зашто можни турнеи на коњот на шаховска табла е неверојатно голем: се проценува дека тој број се движи меѓу 13 и 33 билиони, т.е. меѓу $13 \cdot 10^{12}$ и $33 \cdot 10^{12}$.

Задачава повторно станала многу популарна од почетокот на XVIII до крајот на XIX век. Многу математичари се занимавале со неа, независно и без познавање или увид во арапските ракописи. Најопшто решение дал Леонид Ојлер во 1759 година (кое било објавено дури во 1766 година). Сепак, тоа решение не е баш лесно, па затоа ние овде ќе разгледаме некои подеднакво интересни, но поедноставни решенија.

Метод на Моавр. Овој метод е познат и под името „рамков метод“ и потекнува од почетокот на XVIII век. Методот се состои во поделба на таблата на два дела: едниот дел е внатрешен (централен) и претставува 4×4 квадрат со 16 полиња, а другиот дел е во вид на рамка (или прстен) околу првиот и има 48 полиња. Коњот ги започнува скоковите од кое било поле од рамката и се движи по неа секогаш во иста насока, сé до нејзиното потполно пополнување, а во ватрешниот дел се влегува само ако е апсолутно потребно, т.е. ако се веќе пополнети местата каде што коњот може да скокне, но потоа веднаш се враќа во рамката. Кога ќе се пополнат сите полиња од рамката, се продолжува во внатрешноста на квадратот. Да ги означиме со броеви од 1 до 64 редоследот на скоковите на коњот по таблата. Скоковите лесно се следат од 1 до 24. Но, 25-тиот скок би се совпаднал со 13-тиот ако продолжиме во рамката, па затоа ќе излеземе од неа и ќе влеземе во внатрешниот дел. Потоа, 26-тиот скок ќе го продолжиме во рамката и сите останати, сè до 38-миот скок, кој мора повторно да влезе во внатрешниот дел, итн.

34	**49**	**22**	**11**	**36**	**39**	**24**	**1**
21	**10**	**35**	**50**	**23**	**12**	**37**	**40**
48	**33**	**62**	**57**	**38**	**25**	**2**	**13**
9	**20**	**51**	**54**	**63**	**60**	**41**	**26**
32	**47**	**58**	**61**	**56**	**53**	**14**	**3**
19	**8**	**55**	**52**	**59**	**64**	**27**	**42**
46	**31**	**6**	**17**	**44**	**29**	**4**	**15**
7	**18**	**45**	**30**	**5**	**16**	**43**	**28**

Едно решение според методот на Моавр.

Кога ќе завршиме со пополнување на рамката (а тоа се случува во 50-тиот чекор), продолжуваме во внатрешноста на рамката во истата насока како што правиме отпочеток, дури да завршиме со 64-тиот чекор.

Метод на Рожé. Овој метод е познат и под името метод на делење на четвртинки и потекнува од средината ма XIX век. Ова е најлесниот, но најмалку распространетиот начин за поминување на шаховската табла со коњски скокови. Шаховската табла ја делиме со крст по средината на четири еднакви делови, да ги наречеме квадранти. Во секој квадрант на 16 полиња се нанесуваат буквите a, b, c, d на начин како што е прикажан подолу.

a	b	c	d	a	b	c	d
c	d	a	b	c	d	a	b
b	a	d	c	b	a	d	c
d	c	b	a	d	c	b	a
a	b	c	d	a	b	c	d
c	d	a	b	c	d	a	b
b	a	d	c	b	a	d	c
d	c	b	a	d	c	b	a

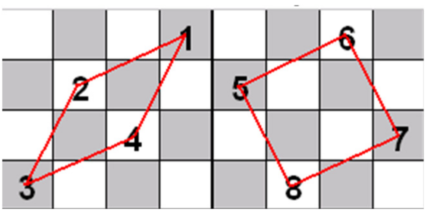
А. Означување на полињата кај методот на Рожé.

Скоковите започнуваат од која било буква. Се скока по ред и низ четирите полиња на таа буква во дадениот квадрант. Потоа се минува на истата буква во следниот квадрант и така се продолжува понатаму. Кога ќе се исцрпат 16-те полиња означени со една буква, коњот минува на следната буква за одново да ја помине во цик-цак целата табла. Така се продолжува понатаму, сè додека се поминат сите 64 полиња. Следната табла претставува еден таков пример, каде што тргнуваме од полето во квадрантот долу лево од горното лево ќоше со буква a, при што продолжуваме на буквата c, потоа на буквата d и на крајот, завршуваме со буквата b. Добиената турнеја е отворена.

7	54	21	40	9	58	19	42
22	39	8	55	20	41	10	59
53	6	37	24	57	12	43	18
38	23	56	5	44	17	60	11
1	52	25	36	13	64	31	46
26	35	4	49	32	45	16	61
51	2	33	28	63	14	47	30
34	27	50	3	48	29	62	15

Б. Едно решение според методот на Рожé.

Метод на Џорџ Колтановски (George Koltanowski) – американски шахист велемајстор со белгиско потекло. Овој метод, создаден во 1940 година, се состои од користење на две претходно познати форми: дијамант (т.е. ромб) и квадрат (примери на овие форми на шаховска табла се прикажани пополу), коишто првпат биле применети во метод создаден од францускиот композитор и шахист Франсоа-Андре Даникан Филидор во 1749 година.



1) Дијамант; 2) Квадрат.

Таблата се дели на 4 квадранти како кај методот на Рожé. Насоката на движење по квадранти е или во вид на латиничната буква U или во вид на буквата C.

Во првиот чекор се прави истата шема на дијамант во сите четири квадранти, користејќи ја шемата на движење U (сивите полиња).

Во вториот чекор, движејќи се на ист начин, се продолжува со коњски скокови по шема на квадрат (темно сивите полиња).

		18	1			30	15
19	2			31	16		
		4	17			14	29
3	20			13	32		
		24	5			28	11
21	6			25	12		
		8	23			10	27
7	22			9	26		

Во третиот чекор ја правиме повторно шемата на дијамант во сите четири квадранти, но движејќи се во обратна насока, т.е. во насока на буквата С (33-тиот чекор е во квадрантот долу десно). Во четвртиот чекор, го повторуваме третиот, но со шемата квадрат. Се добива затворена турнеја, како што се гледа на таблата подолу.

42	59	18	1	46	61	30	15
19	2	43	60	31	16	47	62
58	41	4	17	64	45	14	29
3	20	57	44	13	32	63	48
40	55	24	5	36	49	28	11
21	6	37	56	25	12	33	50
54	39	8	23	52	35	10	27
7	22	53	38	9	26	51	34

Метод на Џорџ Колтановски (Колти).

Користејќи ги шемите на дијамант и квадрат во секој квадрант, може да се добие решението на Рожѐ за затворена турнеја што го разгледаве на претходните страници, но може да се примени и на половина табла, секоја од шемите прво во една четвртинка, па потоа во другата. Потоа потезите треба симетрично да се пренесат на другата половина од таблата.

50	45	62	41	60	39	54	35
63	42	51	48	53	36	57	38
46	49	44	61	40	59	34	55
43	64	47	52	33	56	37	58
26	5	24	1	20	15	32	11
23	2	27	8	29	12	17	14
6	25	4	21	16	19	10	31
3	22	7	28	9	30	13	18

Метод на Рожѐ за половина табла.

Задачи за вежбање

1. Со методот на Рожѐ на делење на таблата на четвртинки помини ја шаховската табла со коњски скокови, тргнувајќи од некое поле означено со b.

2. Обиди се да направаш (затворена) турнеја на коњ на 5 × 5 шаховска табла.

Извори:

[1] Ш. Еленски, *Лилавати*, Издателство Техника, София, 1967.

[2] C. A. Colodro, *Euler and the "Knight's Tour",* Chess News, 2020 https://en.chessbase.com/post/euler-and-the-knights-tour

[3] W. W. Rouse Ball, *Mathematical recreations and essays*, Macmillan and co. limited, 10th edition, London, 1926.

Виолета Анѓелкоска
Американски универзитет на Европа – ФОН, Скопје

КРИПТОАРИТМОГОНИ

Криптоаритмогони се вид на математички загатки во кои се вклучени само аритметички операции (собирање, одземање, множење или делење) и во кои цифрите се заменети со букви. Еден криптоаритмогон се смета за решен кога секоја буква ќе биде заменета со цифра и при тоа се добива точно математичко тврдење. При решавањето важат следните правила:

- На различна буква ѝ соодветствува различна цифра;
- На првата буква од секој број не може да ѝ соодветствува 0.

Криптоаритмогони најчесто се решаваат по пат на обиди и грешки, со систематски приод во обидите, односно треба да се внимава да не се испушти некое решение. Во продолжение ќе разгледаме неколку примери на решавање на крипто-аритмогони.

Пример 1. Нека $АБ + БВ = ГДА$. Ако $А = 4$ и $В = 6$ определи ги вредностите кои соодветствуваат на буквите $Б$, $Д$ и $Г$.
Решение. При собирање на единиците имаме дека $Б + 6$ завршува на 4, од каде $Б = 8$, при што имаме пренос на една десетка т.е. $4 + 8 + 1 = 13$. Оттука, $Д = 3$ и $Г = 1$.

Пример 2. На местото од буквите стави цифри за да добиеш точно равенство

$$А + А + А + А + А = БА.$$

Решение. Прво ќе ја определиме вредноста на буквата $А$. Буквата $А$ мора да биде различна од 0 и од 1. Не смее за биде 0, заради правилото дека првата цифра на секој број не е нула, а за $А = 1$ се добива едноцифрен збир. Со непосредна проверка за цифрите од 2 до 9 добиваме:

- за $А = 2$ $\quad 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$,
- за $А = 3$ $\quad 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$,
- за $А = 4$ $\quad 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$,
- за $А = 5$ $\quad 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25$,
- за $А = 6$ $\quad 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$,
- за $А = 7$ $\quad 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35$,
- за $А = 8$ $\quad 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 40$, и
- за $А = 9$ $\quad 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 45$

Оттука, само за $\mathrm{А} = 5$ важи условот на задачата и во тој случај $\mathrm{Б} = 2$.

Пример 3. На местото од буквите стави цифри за равенството да биде точно

$$A\mathrm{Б} + \mathrm{ВБ} = \mathrm{ББ}A.$$

Решение. Во овој случај наједноставно е да се определи вредноста што соодветствува на буквата $\mathrm{Б}$. Знаејќи дека максималната вредност на збир на два двоцифрени броеви е 198 (истиот се добива кога двата собироци се еднакви на 99), ќе заклучиме дека мора $\mathrm{Б} = 1$. При собирање на единиците добиваме дека $\mathrm{Б} + \mathrm{Б} = 1 + 1 = 2$, т.е. $A = 2$. И на крај, вредноста што соодветствува на буквата В ја добиваме од збирот на десетките. Имено, $A + \mathrm{В} = 2 + \mathrm{В} = 11$, од каде $\mathrm{В} = 9$.

Пример 4. На местото од буквите стави цифри за равенството да биде точно

$$\mathrm{АБА} \cdot \mathrm{А} = \mathrm{БВБА}.$$

Решение. Последната цифра на производот на двата броја завршува на иста цифра на која што завршува производот $\mathrm{А} \cdot \mathrm{А}$. Оттука, на буквата A може да ѝ соодветствува една од цифрите 1, 5 или 6 (A не може да е 0 бидејќи е почетна цифра на број). Но A не може да е 1, бидејќи нема да се добие производ кој е четирицифрен број. Останува да се разгледаат случаите кога A е 5 или 6. За $A = 5$ имаме $5\mathrm{Б}5 \cdot 5 = \mathrm{БВБ}5$. За да ја определиме цифрата која што соодветствува на буквата $\mathrm{Б}$ треба да најдеме цифра $\mathrm{Б}$ која при множење со 5 и преносот на две десетки дава производ што завршува на цифрата $\mathrm{Б}$. Со непосредна проверка за цифрите $1, 2, 3, 4, 6, 7, 8$ и 9 (не ја провeруваме цифрата 0 затоа што производот е број кој започнува на цифрата $\mathrm{Б}$), се добива дека бројот $\mathrm{Б} \cdot 5 + 2$ завршува на $\mathrm{Б}$, само за $\mathrm{Б} = 2$ и за $\mathrm{Б} = 7$. За $\mathrm{Б} = 2,$ со замена во равенството добиваме дека $525 \cdot 5 = 2\mathrm{В}25$. Од $525 \cdot 5 = 2625$ добиваме дека $\mathrm{В} = 6$. Ако замениме $\mathrm{Б} = 7$, се добива дека $575 \cdot 5 = 7\mathrm{В}75$. Но $575 \cdot 5 = 2875 \neq 7\mathrm{В}75$.

Проверката дека $\mathrm{А} \neq 6$ му ја оставаме на читателот.

Пример 5. Збирот

$$\mathrm{М} + \mathrm{А} + \mathrm{Р} + \mathrm{А} + \mathrm{М} + \mathrm{А},$$

претставува збир на редоследно запишани цифри на еден шестцифрен број. Определи го бројот, така што збирот на неговите цифри да е максимален.

Решение. Во збирот буквата A се појавува 3 пати, буквата M се појавува 2 пати, додека буквата P се појавува еднаш. Збирот ќе биде максимален ако буквата која што најчесто се појавува добие вредност 9, буква со следна помала честота добие вредност 8, итн. Според тоа, $\mathrm{A} = 9$, $\mathrm{M} = 8$ и $\mathrm{P} = 7$, а бројот е 897989. Максималната вредност на збирот е

$$8 + 9 + 7 + 9 + 8 + 9 = 50.$$

Пример 6. Бројот $6250\mathrm{A}7\mathrm{Б}$ е број со различни цифри. Определи ја вредноста на буквите A и $\mathrm{Б}$ за бројот да биде делив со 18. (**Упатство**: Еден број е делив со 18 ако е делив со 2 и до 9. Еден број е делив со 2, ако е парен, а е делив со 9, ако збирот на неговите цифри се дели со 9).

Решение. Најпрво ќе ја определиме цифрата која што содветствува на буквата $\mathrm{Б}$. Бидејќи бројот $6250\mathrm{A}7\mathrm{Б}$ треба да биде парен број со различни цифри, $\mathrm{Б}$ може да биде 4 или 8. Истовремено, збирот на цифрите на бројот $6250\mathrm{A}7\mathrm{Б}$ треба да се дели со 9. Со непосредна проверка добиваме дека:

- за $\mathrm{Б} = 4$ имаме дека $6 + 2 + 5 + 0 + \mathrm{A} + 7 + 4 = 24 + \mathrm{A}$, од каде $\mathrm{A} = 3$, и
- за $\mathrm{Б} = 8$ имаме дека $6 + 2 + 5 + 0 + \mathrm{A} + 7 + 8 = 28 + \mathrm{A}$ од каде за да збирот е делив со 9 треба $\mathrm{A} = 8$. Но, цифрите A и $\mathrm{Б}$ треба да се различни, па овој случај не е можен.

Значи, условите на задачата се исполнети за $\mathrm{A} = 3$ и $\mathrm{Б} = 4$.

Задачи за самостојна работа

Задача 1. На местото од буквите стави цифри за да добиеш точно равенство

$$AA + \mathrm{ББ} = \mathrm{ВБВ}.$$

Задача 2. На местото од буквите стави цифри за да добиеш точно равенство

$$\mathrm{ААБА} \cdot \mathrm{А} = \mathrm{ГБВВА}.$$

Задача 3. На местото од буквите стави цифри за да добиеш точно равенство

$$\mathrm{АБВ} + \mathrm{АБВ} = \mathrm{ВГГБ}$$

Задача 4. Збирот

$$\mathrm{A} + \mathrm{H} + \mathrm{A} + \mathrm{H} + \mathrm{A} + \mathrm{C}$$

претставува збир на редоследно запишани цифри на еден шестцифрен број. Определи го бројот, така што збирот на неговите цифри да е минимален.

Извори:

[1] Maxey Brooke, *150 Puzzles in Crypt-Arithmetic*, 1963.

Благоја Нојков
Природно-математички факултет, Скопје

ТАНГЕНТНИ И ТЕТИВНИ ЧЕТИРИАГОЛНИЦИ

Одредени својства на тетивните и тангентните четириаголници се изучуваат во основното образование. Целта на овој текст е низ неколку задачи и основни теореми да им се доближат на учениците суштинските својства на тетивниот и тангентниот четириаголник. На самиот почеток ќе бидат дадени некои дефиниции и теореми за овој вид четириаголници, кои се неизбежни за природно совладување на материјата.

ТАНГЕНТНИ ЧЕТИРИАГОЛНИЦИ

Дефиниција. Четириаголник се нарекува тангентен ако постои кружница која ги допира сите негови страни.

Теорема 1. Четириаголникот е тангентен ако и само ако симетралите на неговите внатрешни агли се сечат во иста точка.

Доказ. Нека $ABCD$ е тангентен четириаголник и O е центар на впишаната кружница. Точката O е еднакво оддалечена од страните AB и AD, од што следува дека точката O лежи на симетралата на аголот кај темето A на четириаголникот $ABCD$. Истото ова важи и за симетралите на аглите кај темињата B, C и D.

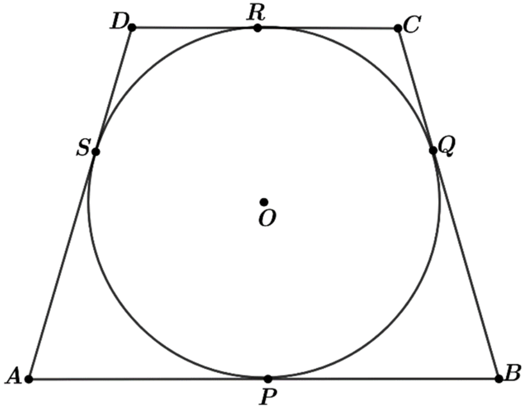
За да го покажеме обратното тврдење, нека симетралите на внатрешните агли на четириаголникот $ABCD$ се сечат во точката O. Тоа значи дека точката O е еднакво оддалечена од страните на четириаголникот, односно од краците на внатрешните агли. Ако ова растојание го означиме со r, тогаш кружницата со центар во точката O и радиус r ги допира страните на четириаголникот $ABCD$. Со тоа доказот на теоремата е комплетиран.

Во суштина, доволно е само три симетрали на внатрешните агли да минуваат низ една точка од четириаголникот за тој да биде тангентен.

Теорема 2. Четириаголникот $ABCD$ е тангентен ако и само ако

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}.$$

Доказ. Нека четириаголникот $ABCD$ е тангентен и нека впишаната кружница ги допира страните AB, BC, CD и DA во точките P, Q, R, и S, соодветно (црт. 1). Бидејќи тангентните отсечки повлечени од една иста точка кон дадена кружница се еднакви, следува дека важат равенствата: $\overline{BP} = \overline{BQ}$, $\overline{AS} = \overline{AP}$, $\overline{CQ} = \overline{CR}$, $\overline{DR} = \overline{DS}$.



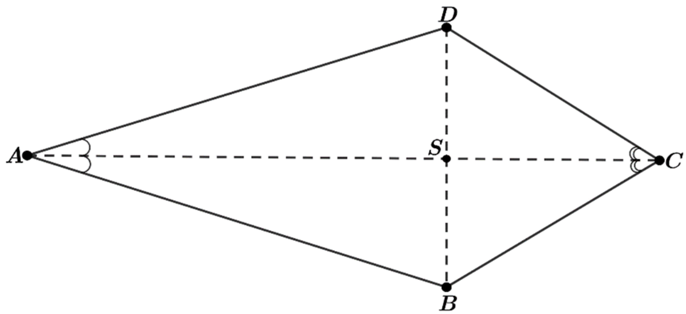
Цртеж 1. Тангентен четириаголник

Според дадените равенства се добива,

$$\overline{AB} + \overline{CD} = (\overline{AP} + \overline{PB}) + (\overline{CR} + \overline{RD}) =$$
$$= \overline{AS} + \overline{BQ} + \overline{CQ} + \overline{DS} = (\overline{AS} + \overline{SD}) + (\overline{BQ} + \overline{QC}) =$$
$$= \overline{AD} + \overline{BC}.$$

За обратната насока, ќе претпоставиме дека за четириаголникот $ABCD$ важи $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$. Ќе ги разгледаме следниве два случаја: 1) $\overline{AB} = \overline{AD}$ и 2) $\overline{AB} \neq \overline{AD}$.

Најпрво ќе го покажеме случајот 1). Ако $\overline{AB} = \overline{AD}$, тогаш $\overline{BC} = \overline{CD}$, па следува дека четириаголникот $ABCD$ е делтоид (цртеж 2). Триаголниците ACB и ACD се складни според признакот ССС и осно-симетрични во однос на AC. Затоа важи дека $\angle BAC = \angle DAC$, $\angle ACB = \angle ACD$ па добиваме дека дијагоналата AC е симетрала на аглите BAD и ADC. Исто така симетралите на аглите ABC и ADC се сечат во иста точка S на дијагоналата AC. Следствено, симетралите на внатрешните агли на делтоидот $ABCD$ се сечат во една точка, па користејќи ја теоремата 1, следува дека делтоидот е тангентен четириаголник.

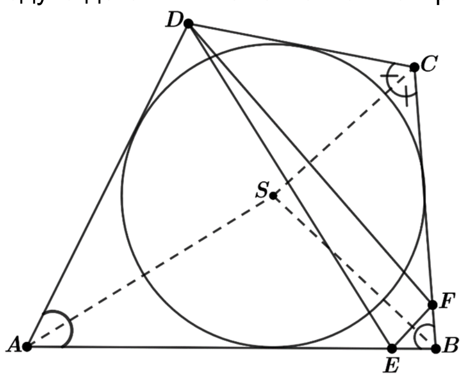


Цртеж 2. Случај 1) Делтоид

Сега ќе го покажеме и случајот 2). Без губење на општоста ќе претпоставиме дека $\overline{AB} \neq \overline{AD}$ и $\overline{AB} > \overline{AD}$. Од равенството $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$, следува дека $\overline{BC} > \overline{CD}$. Избираме точки E и F на страните AB и BC, соодветно, такви што $\overline{AE} = \overline{AD}$ и $\overline{CF} = \overline{CD}$ (цртеж 3). Триаголниците AED и CDF се рамнокраки, а бидејќи важи

$$\overline{BE} = \overline{AB} - \overline{AE} = \overline{AB} - \overline{AD} = \overline{BC} - \overline{CD} = \overline{BC} - \overline{CF} = \overline{BF}$$

следува дека и триаголникот EBF е рамнокрак. Значи, симетралите на аглите кај темињата A, B и C на четириаголникот $ABCD$ се совпаѓаат со симетралите на страните на триаголникот DEF.Додека симетралите на страните на триаголникот DEF се сечат во точка S која е центар на опишаната кружница околу триаголникот DEF, па во таа точка се сечат и симетралите на аглите кај темињата A, B и C на четириаголникот $ABCD$. Користејќи ја теоремата 1, следува дека $ABCD$ е тангентен четириаголник.



Цртеж 3. Случај 2)

Задача 1. Докажи дека во тангентен четириаголник со страни a,b,c,d важи равенството $a+c=b+d=\frac{L}{2}$ каде што L е периметарот на тој четириаголник.

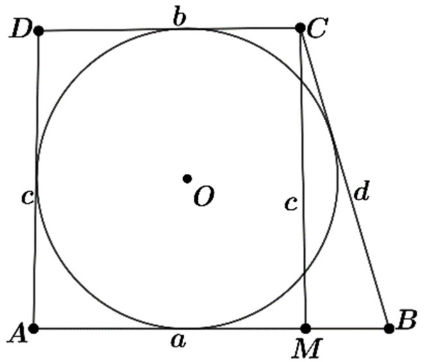
Решение: Нека $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$, $\overline{DA}=d$. Имаме дека $L=a+b+c+d$. Од $a+c=b+d$, се добива дека

$L=(a+c)+(b+d)=2(a+c)$. Слично добиваме дека $L=2(b+d)$ од каде што $a+c=b+d=\frac{L}{2}$.

Задача 2. Докажи дека плоштината на правоаголен трапез во кој може да се впише кружница е еднаква на производот на должините на основите на трапезот.

Решение. Повлекуваме отсечка CM паралелна со DA, и пресечната точка на CM со AB ја означуваме со M. Нека $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=d$, $\overline{CD}=b$, $\overline{DA}=e$, $\overline{MC}=c$, $\overline{MB}=x$ (како на црт. 4). Од Питагоровата теорема за ΔMBC добиваме:

$$x^2=d^2-c^2 \qquad (1)$$



Цртеж 4.

Бидејќи $x=a-b$, добиваме

$$(a-b)^2=d^2-c^2=(d-c)(d+c) \qquad (2)$$

По претпоставка, $ABCD$ е тангентен, па важи $a+b=c+d$, од каде $d=a+b-c$. Со замена во (2) добиваме

$(a-b)^2=(d-c)(a+b)$ од каде $d-c=\frac{(a-b)^2}{a+b}$. Ако од последниот израз го изразиме c, добиваме $c=d-\frac{(a-b)^2}{a+b}$. Заради $d=a+b-c$, имаме $c=a+b-c-\frac{(a-b)^2}{a+b}$ односно,

$$2c=a+b-\frac{(a-b)^2}{a+b}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{a+b}=\frac{4ab}{a+b}, \text{ т.е. } c=\frac{2ab}{a+b}.$$

Плоштината на трапезот е $P=\frac{a+b}{2}\cdot c$ и со замена на претходниот израз за c, се добива дека $P=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}=ab$.

ТЕТИВНИ ЧЕТИРИАГОЛНИЦИ

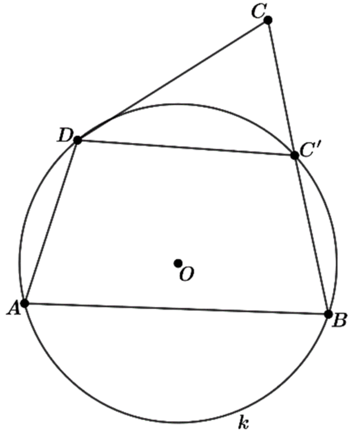
Тетивен четириаголник е четириаголник чии темиња лежат на кружница. Притоа, неговите страни се тетиви на кружницата, а аглите му се периферни агли во кружницата.

Најпвин ќе дадеме некои елементарни дефиниции и теореми, а потоа ќе преминеме на конкретни примери каде што ќе се увиди нивната примена.

Теорема 3. Четириаголникот е тетивен ако и само ако збирот на неговите спротивни агли е еднаков на 180°.

Доказ. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник и нека темињата A, B, C и D лежат на кружницата k. Дијагоналата BD е тетива во оваа кружница, а темињата A и C лежат на различни страни од оваа тетива, па според тоа добиваме дека аглите BAD и BCD се сумплементни.

За доказ на обратната насока, да претпоставиме дека аглите BAD и BCD се сумплементни, т.е. $\angle BAD+\angle BCD=180°$. Нека кружницата опишана околу триаголникот ABD е k, како на цртежот 6. Ако точката C лежи на кружницата k, тогаш доказот на теоремата е завршен.



Цртеж 5.

Во спротивно, точката C лежи или во внатрешноста или во надворешноста на кружницата. Нека C е во надворешноста на кружницата. Отсечката BC ја сече кружницата k во точка C', па $\angle BAD + \angle BC'D = 180°$. Значи, $\angle BCD = \angle BC'D$. Бидејќи $\angle BC'D$ е надворешен за триаголникот $CC'D$, следува дека $\angle BC'D = \angle BCD + \angle C'DC$ од каде $\angle BC'D > \angle BCD$, што претставува контрадикција со претпоставката дека $\angle BCD = \angle BC'D$ па точката C не може да лежи надвор од кружницата k. Потполно аналогно се докажува случајот кога точката C лежи надвор од кружницата. Со ова тврдењето е докажано во целост.

Последица. Еден четириаголник е тетивен ако и само ако надворешниот агол во едно негово теме е еднаков со внатрешниот агол кај противположното на него теме.

Теорема 4. Четириаголникот е тетивен ако и само симетралите на неговите страни се сечат во една точка.

Доказ. Директното тврдење е очигледно: ако четириаголникот е тетивен, тогаш симетралите на страните минуваат низ центарот на кружницата.

Обратно, нека симетралите на три страни од четириаголникот $ABCD$ минуваат низ иста точка. Следува дека растојанијата од таа точка до темињата на четириаголникот се еднакви. Значи, пресечната точка на симетралите на страните е центарот на опишана кружница околку дадениот четириаголник, па добиваме дека четири-аголникот $ABCD$ е тетивен, што и требаше да се докаже.

Задача 3. Одреди ги аглите на тетивен четириаголник ако важи дека $\alpha:\gamma = 4:5$ и $\beta:\delta = 1:2$.

Решение. Важи $\alpha + \gamma = 180°$ и $\beta + \delta = 180°$. Од условот на задачата имаме дека $\alpha:\gamma = 4:5 = k$, од каде $\alpha = 4k$ и $\gamma = 5k$. Следува дека $4k + 5k = 180°$ од каде $k = 20°$ и добиваме дека $\alpha = 80°$ и $\gamma = 100$. Аналогно, ако ставиме $\beta:\delta = 1:2 = m$, добиваме дека $\beta + \delta = 1 \cdot m + 2m = 180°$ од каде $m = 60°$ па $\beta = 1 \cdot m = 60°$ и $\delta = 2m = 120°$.

Задача 4. Нека M е пресечната точка на дијагоналите AC и BD на тетивниот четириаголник $ABCD$. Ако $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{AD} = 5\mathrm{cm}$, $\overline{BM} = 12\mathrm{cm}$, и $\overline{DM} = 3\mathrm{cm}$, определете го $\angle BCD$.

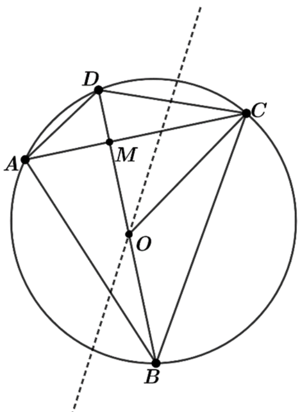
Решение. Ако симетралата CD ја сече BD во точка O, тогаш

$$\angle COD = 180° - 2\angle ODC = 180° - 2\angle BAC = \angle ACB = ADO.$$

Оттука добиваме дека $AD||CO$. Следува,

$$\frac{\overline{OM}}{3} = \frac{\overline{CO}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{OM} + 3}{5}$$

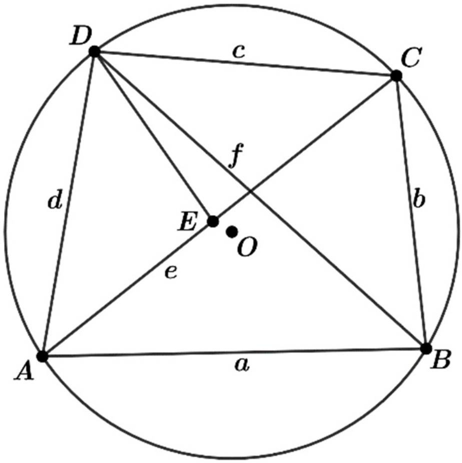
односно $\overline{OM} = \frac{9}{2}$, па следува дека O е средина на BD. Значи, $\angle BCD = 90°$.



Цртеж 6.

***Задача 5. (Теорема на Птоломеј)** Ако a, b, c и d се страни, а e и f се дијагонали на тетивен четириаголник, тогаш $ac + bd = ef$.

Решение: Да претпоставиме дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен. Нека $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d$ се страни, а $\overline{AC} = e$, $\overline{BD} = f$ се дијагонали на четириаголникот. Нека k е опишаната кружница околу четириаголникот $ABCD$ и E е точка од дијагоналата AC таква што $\angle ADE = \angle BDC$. Бидејќи $\angle DAC = \angle DBC$ како периферни агли над лакот CD, добиваме дека $\triangle DAE \sim \triangle DBC$ како триаголници со исти агли. Следува, $\overline{DA}:\overline{AE} = \overline{DB}:\overline{BC}$, т.е. $bd = f \cdot \overline{AE}$. (1)



Цртеж 7.

Важи дека $\angle ADB = \angle EDC$ и $\angle ABD = \angle ECD$ (како периферни агли над иста тетива). Затоа $\triangle ABD \sim \triangle ECD$ од каде добиваме дека $\overline{AB}:\overline{BD} = \overline{EC}:\overline{CD}$, односно, $ac = f \cdot \overline{EC}$. Ако ги собереме последното равенство и (1), добиваме:

$$bd + ac = f \cdot \overline{AE} + f \cdot \overline{EC} = f(\overline{AE} + \overline{EC}) = f\overline{AC} = ef.$$

Забелешка: Напоменуваме дека важи и обратното тврдење. Ве охрабруваме да пробате него самостојно да го докажете!

Задачи за самостојна работа

1. На тангентниот четириаголник $ABCD$ познати се должините на три негови страни: $\overline{AB} = 8$cm, $\overline{BC} = 13$ cm и $\overline{AD} = 6$ cm. Одреди ја должината на четвртата страна.
2. Докажи дека околу правоаголен трапез не може да се опише кружница.
   (Упатство: повикај се на теорема 3.)
3. Докажи дека средната линија на тангентен трапез е еднаква на $\frac{1}{4}$ од неговиот периметар.
   (Упатство: искористи дека збирот на должините на спторивните страни во тангентен четириаголник е еднаков, т.е. теорема 2.)
4. Дали четириаголникот е тетивен, ако за неговите агли важи $\alpha:\beta:\gamma:\delta = 2:5:7:6$? Одговорот да се образложи!

Извори:

[1] Костадин Тренчевски, Глигор Тренчевски „Математика 7 одделение“, Скопје, 2008

[2] Јово Стефановски, Наум Целакоски, „Математика за осмо одделение“, Скопје, 2011

[3] Живко Мадевски, Александар Самарџиски, Наум Целакоски, „Геометрија“, Скопје, 1981

[4] Живко Мадевски, Александар Самарџиски, Наум Целакоски, „Збирка задачи по геометрија“, Скопје, 1981

[5] Боривоје Миладиновиќ, Никола Петрески, „Математика III година“, Скопје, 2003

[6] Josefsson, M., „More characterizations of tangential quadrilaterals“, Geom., 2011

Делчо Лешковски

ПРИНЦИП НА КРАЕН ЕЛЕМЕНТ

Принципот на краен елемент е често користен метод при решавање задачи. Тој се применува кога во условите на задачата се дадени броеви, точки или други објекти, кои што не се разликуваат, односно имаат исти својства. Тогаш е згодно да се разгледа или најголемиот, или најмалиот, или најлевиот и.т.н. објект, т.е., во зависност од задачата да се избере објект со некакво *крајно* својство. Понекогаш, кога станува збор за броеви, е згодно не само да се избере најголемиот или најмалиот, туку и броевите да се подредат по големина.

Пример 1. Во 10 кутии има моливи (најмалку по еден). Во различни кутии има различен број моливи и во секоја кутија моливите се со различна боја (во ниту една кутија нема моливи со иста боја). Докажете дека од секоја кутија може да се избере по еден молив, т.ш. сите избрани моливи се со различна боја.

Решение. Да ги подредиме кутиите според бројот на моливи што ги содржат (во растечки редослед). Јасно е дека во *n*-тата кутија има најмалку *n* моливи, т.е., најмалку *n* бои. Од првата кутија земаме еден молив, од втората – молив со друга боја, од третата –молив со боја различна од бојата на двата веќе избрани и.т.н.

Пример 2. На кружница се запишани *n* броеви, така што секој број е еднаков на аритметичката средина на неговите два соседни. Докажи дека сите броеви запишани на кружницата се еднакви.

Решение. Бидејќи имаме конечно многу броеви, можеме да го избереме најголемиот од нив (ако има неколку најголеми, избираме произволен од нив). Ако избраниот број е a, а двата негови соседни броеви се b и c, тогаш од условот следува дека:

$$a = \frac{b+c}{2} \Leftrightarrow 2a = b + c \qquad (1)$$

Но, поради изборот на a како најголем број, имаме дека

$$\left.\begin{array}{l} a \geq b \\ a \geq c \end{array}\right\} \Rightarrow 2a \geq b + c.$$

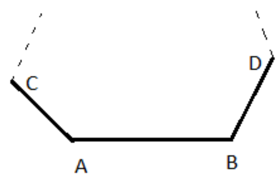
Тогаш, равенството (1) е возможно ако и само ако $a = b = c.$ Продолжуваме на истиот начин и добиваме дека соседните броеви на b и c се еднакви на a, нивните соседни се еднакви на a и.т.н. На тој начин добиваме дека сите броеви на кружницата се еднакви.

Пример 3. Нека *M* е множество од точки што лежат на иста права. Познато е дека секоја точка од *M* е средина на отсечка чии крајни точки припаѓаат исто така во *M*. Докажете дека множеството *M* е бесконечно.

Решение. Да претпоставиме дека множеството М не е бесконечно. Тогаш можеме да ја избереме најдесната точка *X* од множеството М на правата. Точката *X* не е внатрешна за ниту една отсечка со крајни точки во множеството *M*, од каде што следува дека *X* не е средина на таква отсечка. На овој начин добивме контрадикција, т.е., почетната претпоставка не е добра. Следува дека множеството *M* е бесконечно.

Пример 4. Во рамнина се дадени неколку точки (најмалку три), така што сите растојанија од точка до точка се различни. Секоја од тие точки е поврзана со отсечка со најблиската точка до неа. Дали на овој начин може да се добие затворена искршена линија?

Решение. Да претпоставиме дека е возможно да се добие затворена искршена линија. Нека AB е најголемата отсечка на таа линија, а AC и BD се соседните отсечки на AB. Тогаш AC<AB, т.е. B не е најблиската точка до A и BD<AB, т.е. A не е најблиската точка до B. Следува дека точките A и B не се поврзани со отсечка. Значи добивме противречност со претпоставката.



Пример 5. 2*n* војници се наредени во два реда од по *n* војници, така што секој војник од првиот ред не е повисок од војникот од вториот ред што стои точно позади него. После тоа, во секој ред војниците се подредени по висина. Докажете дека после подредувањето, повторно секој војник од првиот ред не е повисок од војникот што стои позади него во вториот ред.

Решение. Да ги означиме со $a_1, a_2, ..., a_n$ висините на војниците од првиот ред (во опаѓачки редослед) и со $b_1, b_2, ..., b_n$ висините на војниците од вториот ред (во опаѓачки редослед). Ако тврдењето на задачата не е исполнето, тогаш за некое *k* имаме $a_k > b_k$. Тоа означува дека пред подредувањето, војникот со висина a_k стоел пред некој од (*k* − 1)-те војници $b_1, b_2, ..., b_{k-1}$. Пред нив стоеле и војниците со висини $a_1, a_2, ..., a_{k-1}$, кои не се пониски од a_k. Добивме дека *k* војници от првиот ред стоеле пред *k* − 1 војници од вториот ред, контрадикција.

Пример 6. Дадени се девет броја, такви што, збирот на секои четири од нив е помал од збирот на петте останати. Докажете дека броевите се позитивни.

Решение. Нека $a_1 \le a_2 \le ... \le a_9$. Од условот на задачата имаме

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 > a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \ge a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

Оттука, $a_1 > 0$.

Пример 7. Во круг со радиус 1 лежат 8 точки. Докажете дека меѓу нив постојат две чие меѓусебно растојание е помало од 1.

Решение. Најмалку 7 од точките не се совпаѓаат со центарот на кругот O. Најмалиот од аглите A_iOA_j, каде A_i и A_j се дадените точки, не надминува $\frac{1}{7} \cdot 360^\circ < 60^\circ$. Нека A и B се точките што соодветствуваат на најмалиот агол. Тогаш $AB < 1$, бидејќи $AO < 1, BO < 1$ и $\angle AOB$ не е најголемиот агол во ΔAOB.

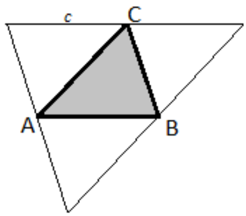
Пример 8. Во рамнината се дадени $n > 3$ точки, не сите на една права. Докажете дека постои кружница што минува низ три од нив, а во чија внатрешност нема ниту една друга од дадените точки.

Решение. Од сите отсечки што се формираат од дадените n точки, ја земаме онаа со минимална должина. Нека *A* и *B* се нејзините краеви. Во кружницата со дијаметар *AB* не лежат точки од дадените. Ја разгледуваме најмалата од кружниците низ *A*, *B* и точка *C* от дадените. Тоа е бараната кружница.

Пример 9. Во рамнината се дадени *n* точки, такви што, површината на секој триаголник со темиња во тие точки не е поголема од 1. Докажете дека сите точки можат да се покријат со триаголник со површина 4.

Решение. Од сите триаголници што можат да се формираат со темиња во дадените точки, го избираме оној со најголема плоштина. Нека тоа е триаголникот *ABC*. Низ *C* повлекуваме права *c*, паралелна на *AB*. Јасно е дека секоја друга точка *X* от дадените и отсечката AB лежат во една иста полурамнина определена со правата *c*, инаку плоштината на триаголникот *ABX* би била поголема од плоштината на триаголникот ABC.

Аналогно, низ *B* и *A* повлекуваме прави *b* (паралелна на *AC*) и *a* (паралелна на *BC*). Трите прави образуваат триаголник со плоштина помала од 4, што ги покрива сите точки.



Задачи за самостојна работа

1. Во полињата на бесконечна шаховска табла се запишани броеви, т.ш., секој број е еднаков на аритметичката средина на четирите негови соседни броеви. Докажете дека сите броеви запишани на таблата се еднакви.

2. Докажете дека од седум различни природни броеви со збир 100, можат да се изберат три броја со збир не помал од 50.

3. Во рамнината се дадени конечен број точки, обоени во сина или црвена боја, така што има најмалку три точки од секоја боја и никои три точки од иста боја не лежат на иста права. Докажете дека постојат три истобојни точки кои образуваат триаголник, т. ш., на неговите страни вкупно лежат не повеќе од две точки од другата боја.

Решенија на задачите за самостојна работа од XLVIII-2

1. Докажи дека постои природен број што е делив со 2022, а првите десет цифри му се 1234567890.

Решение. Нека a_1 е бројот 1234567890. Нека за секој $k \ge 1$, a_k е бројот $12345678901234567890...1234567890$, при што низата цифри 1234567890 се повторува k пати. Од **Пример 3** следува дека меѓу броевите $a_1, a_2, ..., a_{2023}$ постојат два $a_p > a_q$, такви што $a_p - a_q$ е делив со 2022. Но, првите десет цифри на $a_p - a_q$ се 1234567890.

2. Во одделение со n ученици, секој ученик се ракува со произволен број на негови соученици. Докажи дека во одделението има најмалку двајца ученици кои направиле еднаков број ракувања.

Решение. Нека ученикот $i, i = 1, 2, ..., n$, се ракувал со точно a_i соученици. Јасно, $a_i \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ и уште повеќе, ако постои ученик j што се ракувал со сите останати $n-1$ ($a_j = n-1$), тогаш не постои ученик кој што се нема ракувано со никого, т.е., не постои k таков што $a_k = 0$. Следува дека множеството $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ содржи најмногу $n-1$ различни елементи, од каде што според Принципот на Дирихле следува дека постојат $p, q \in \{1, 2, ..., n\}$, $p \ne q$, такви што $a_p = a_q$. Со последното докажавме дека постојат двајца ученици кои направиле еднаков број ракувања.

3. Врз една права се нанесени 2008 отсечки. Пресекот на секои 10 од нив претставува празно множество. Дали можеме да избереме 224 отсечки т.ш. никои две од нив немаат заеднички точки?

Решение. Да претпоставиме дека правата е бројна оска, а отсечките се интервали $[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_{2008}, b_{2008}]$. Без губење од општото можеме да претпоставиме дека b_1 е најмалиот од сите десни краеви на интервалите. Тогаш, на лево од него има не повеќе од 9 леви краеви на отсечки (можеме да претпоставиме дека се тоа $a_1, a_2, ..., a_9$), во спротивно b_1 ќе биде заедничка точка на најмалку 10 отсечки. Ако на лево има помалку од 9 леви краеви, додаваме произволни a_k за да ги дополниме до 9. Без ограничувања можеме да земеме дека b_{10} е најмалиот од десните краеви на останатите отсечки. Тогаш, на лево од него има не повеќе од 9 леви краеви на тие отсечки (нека се тоа $a_{10}, a_{11}, ..., a_{18}$), во спротивно b_{10} ќе биде заедничка точка на најмалку 10 отсечки. Продолжувајќи на овој начин, добиваме низа од 224 дисјунктни отсечки $[a_1, b_1], [a_{10}, b_{10}], [a_{19}, b_{19}], [a_{28}, b_{28}], ..., [a_{2008}, b_{2008}]$.

Извори:

[1] Емил Колев, Невена Събева, Математика за напреднали, Школа по математика за 5., 6., 7. клас, 2016.

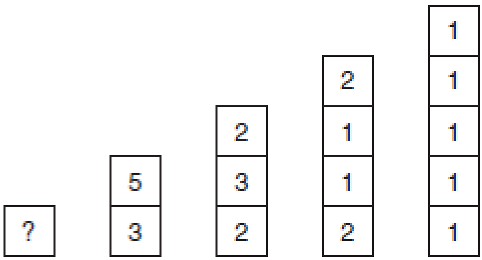
[2] Емил Колев, Невена Събева, Математика за напреднали, Комбинаторика и теория на числата за 5.-8. клас, 2018.

[3] Ивайло Кортезов, Светлозар Дойчев, Състезателни задачи по математика за 7. - 8. клас, 2010.

[4] Highlight Дончо Димовски, Костадин Тренчевски, Ристо Малчески, Борис Јосифовски, Практикум по елементарна математика, 1992.

МАТЕМАТИЧКА ЗАГАТКА 1

Кој број треба да стои на местото од прашалникот?



Извор:

[1] P. Carter, *The Complete Book of Intelegence Tests*, Wiley & Sons Ltd., 2005.

Петар Филиповски
ООУ „Кузман Јосифовски-Питу“, Кисела Вода, Скопје

XVI СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Белград, 31.05.2022 година

1. Докажи дека за сите позитивни реални броеви a и b важи неравенството

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\frac{2ab}{a+b}\geq\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Нека со K, A, G и H ги означуваме квадратната, аритметичката, геометриската и хармониската средина на броевите a и b, соодветно. Тогаш, јасно $K=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, $A=\frac{a+b}{2}$, $G=\sqrt{ab}$ и $H=\frac{2ab}{a+b}$. Знаеме дека важи следново неравенство

$$K\geq A\geq G\geq H\ ,$$

додека бараното неравенство е од облик

$$K+H\geq A+G\,.$$

Аритметичката средина ќе ја изразиме преку квадратната и геометриската средина на следниов начин

$$\frac{K^2+G^2}{2}=\frac{\frac{a^2+b^2}{2}+ab}{2}=\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=A^2\ ,$$

т.е. $A=\sqrt{\frac{K^2+G^2}{2}}$.

Слично, хармониската средина може да се изрази преку квадратната е геометриската средина, т.е.

$$H=\frac{2G^2}{\sqrt{2(K^2+G^2)}}\,.$$

Според тоа, за да докажеме дека $K+H\geq A+G$, доволно е да докажеме дека $K-G\geq A-H$.

Од

$$A-H=\sqrt{\frac{K^2+G^2}{2}}-\frac{2G^2}{\sqrt{2(K^2+G^2)}}=\frac{K^2+G^2-2G^2}{\sqrt{2(K^2+G^2)}}=\frac{K^2-G^2}{\sqrt{2(K^2+G^2)}}$$

доволно е да докажеме дека важи $K-G\geq\frac{K^2-G^2}{\sqrt{2(K^2+G^2)}}$.

Бидејќи $K\geq H$, последното неравенство е еквивалетно со

$$\sqrt{2(K^2+G^2)}\geq K+G,$$

а ова е еквивалентно со $\sqrt{\frac{K^2+G^2}{2}}\geq\frac{K+G}{2}$, а тоа е неравентвото помеѓу квадратната и аритметичка средина на броевите K и G, со што доказот е завршен.
Равенство важи ако и само ако $K=G$, односно $a=b$.

2. Нека I е центар на впишаната кружница, а A_1 и B_1 се средишните точки на страните BC и AC, соодветно на $\triangle ABC$. Нека M и N се средишни точки на $\overset{\frown}{AC}$ и $\overset{\frown}{BC}$, соодветно на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ кои го содржат останатото теме на триаголникот. Ако точките M, I и N се колинеарни, докажи дека

$$\angle B_1IA=\angle BIA_1=90^\circ.$$

Решение. Ќе докажеме дека $MN\perp CI$. Нека K е пресекот на правите MN и CI. Тогаш, од

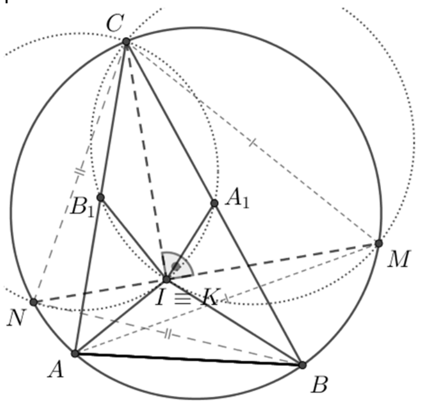
$$\angle KNC\equiv\angle MNC=\angle MAC=90^\circ-\frac{\angle CMA}{2}=90^\circ-\frac{\beta}{2}$$

и

$$\begin{aligned}\angle NCK&\equiv\angle NCI=\angle NCB-\angle ICB\\&=90^\circ-\frac{\angle BNC}{2}-\frac{\gamma}{2}=90^\circ-\frac{\alpha}{2}-\frac{\gamma}{2}=\frac{\beta}{2},\end{aligned}$$

следува $\triangle NKC$ е правоаголен. Бидејќи точките M, I и N се колинеарни добиваме дека $K\equiv I$, т.е. $\angle MIC=\angle CIN=90^\circ$. Од $MB_1\perp AC$ и $NA_1\perp BC$, добиваме дека четириаголниците CA_1IN и CB_1IM се тетивни ($\angle CA_1N=\angle CIN=90^\circ$, односно $\angle MIC=\angle MB_1C=90^\circ$), со опишани кружници чии што дијаметри се

CN и CM, соодветно.



Тогаш имаме

$$\angle A_1IC = \angle A_1NC = \frac{\angle BNC}{2} = \frac{\angle BAC}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

и

$$\angle CIB_1 = \angle CMB_1 = \frac{\angle CMA}{2} = \frac{\angle CBA}{2} = \frac{\beta}{2}.$$

Бидејќи I е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$ добиваме

$$\angle CIA = 90^\circ + \frac{\beta}{2}, \text{ а } \angle BIC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Од $\angle A_1IC = \frac{\alpha}{2}$ и $\angle BIC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$, односно од $\angle CIB_1 = \frac{\beta}{2}$ и $\angle CIA = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$ добиваме дека $\angle B_1IA = \angle BIA_1 = 90^\circ$.

3. Одреди ги сите природни броеви n кои ги задоволуваат следните 5 услови:

1) Бројот n не е делив со ниту еден квадрат на природен број поголем од 1.
2) Бројот n има само еден прост делител од обликот $4k+3$, $k \in \mathbb{N}_0$.
3) Ако со $S(n)$ го означиме збирот на цифрите на бројот n, а со $d(n)$ бројот на природни делители на бројот n, тогаш важи $S(n)+2=d(n)$.
4) Бројот n зголемен за 3 е квадрат на природен број.

5) Бројот n нема прости делители кои имаат 4 или повеќе цифри.

Решение. Од условот $1)$ имаме дека $n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_s$, т.е. n е производ на $s \in \mathbb{N}$ различни прости броеви ($n \neq 1$, бидејќи, тогаш нема да се исполнети условите $2)$ и $3)$). Тогаш $d(n) = 2^s$, па

$$n \equiv S(n) \equiv 2^s - 2 \equiv 0, 2 \pmod{3}.$$

Од друга страна, од условот $4)$, важи $n + 3 = m^2$ за некое $m \in \mathbb{N}$, па

$$n \equiv n + 3 = m^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}.$$

Следува $3 \mid n$ и $3 \mid m$. Од ова и од $m^2 \equiv 0 \pmod{9}$ следува $n \equiv 6 \pmod{9}$. Оттука добиваме

$$2^s \equiv S(n) + 2 \equiv 8 \pmod{9},$$

од каде што следува $s \equiv 3 \pmod{6}$.

Ако n е непарен, од условот $2)$ следува $n \equiv 3 \pmod{4}$, па $m^2 \equiv 2 \pmod{4}$, а тоа не е можно, бидејќи квадрат на природен број при делење со 4 дава остаток 0 или 1. Следува $2 \mid n$. Од условот $5)$, го имаме неравенството $n < 6 \cdot 10^{3(s-2)}$. Според тоа,

$$S(n) \leq 5 + 9 \cdot 3(s-2) = 27s - 49,$$

од каде го добиваме неравенството

$$2^s \leq 27s - 47.$$

Со индукција се проверува дека за $s \geq 8$ важи обратното неравенство, т.е. $2^s > 27s - 47$, од каде се добива дека $s \leq 7$, па од $s \equiv 3 \pmod{6}$ имаме $s = 3$, т.е. $n = 6p$ за некој прост број $p < 1000$. Следува

$$d(n) = 8, \ S(n) = 6.$$

Бидејќи $n > 6$ е парен број, заклучуваме дека последната цифра на бројот n мора да биде 0, 2 или 4, а од $n + 3 = m^2$, мора $n \equiv 2$ (mod 10). Тогаш $5 \mid m$ и ако m е непарен имаме

$$m^2 \equiv 25 \pmod{100}, \ n \equiv 22 \pmod{100}.$$

Ако $n < 6000$ и $S(n) = 6$, тогаш $n \in \{222, 1122, 2022\}$, и со директна проверка утврдуваме дека $n = 1122$ отпаѓа, па решенија се $n = 222$ и $n = 2022$.

4. Во секое поле од табла 5×5 е впишан бројот 0. Во еден чекор дозволено е произволно да се избере едно поле и да се зголеми за 1 бројот запишан во тоа поле и сите негови соседни полиња (две полиња се соседни доколку имаат заеднички раб). После конечно многу чекори, во сите полиња на табелата е впишан природен број n. Одреди ги сите можни вредности за n.

Решение. Сите 25 полиња од таблата ги означуваме со A, B, C, D, E и F, како што е прикажано на првата слика. Нека a, b, c, d, e и f е вкупниот број на потези кои се извршени на полињата A, B, C, D, E и F, соодветно. Јасно е дека секој потег на поле од

- A влијае на точно две соседни полиња означени со B;
- B влијае по едаш на секое соседно поле означено со A, C и D;
- C влијае по два пати на соседните полиња означени со B и E;
- D влијае по два пати на соседните полиња означени со B и едаш на соседното поле означено со E;
- E влијае по два пати на полиња означени со C и по едаш на секое соседно поле означено со D и F;
- F влијае на четири пати на соседни полиња означени со E;

A	B	D	B	A
B	C	E	C	B
D	E	F	E	D
B	C	E	C	B
A	B	D	B	A

3	4	3	3	4
4	1	1	1	4
3	1	5	2	2
3	1	2	1	3
4	4	2	3	5

Според тоа, важат следните равенства

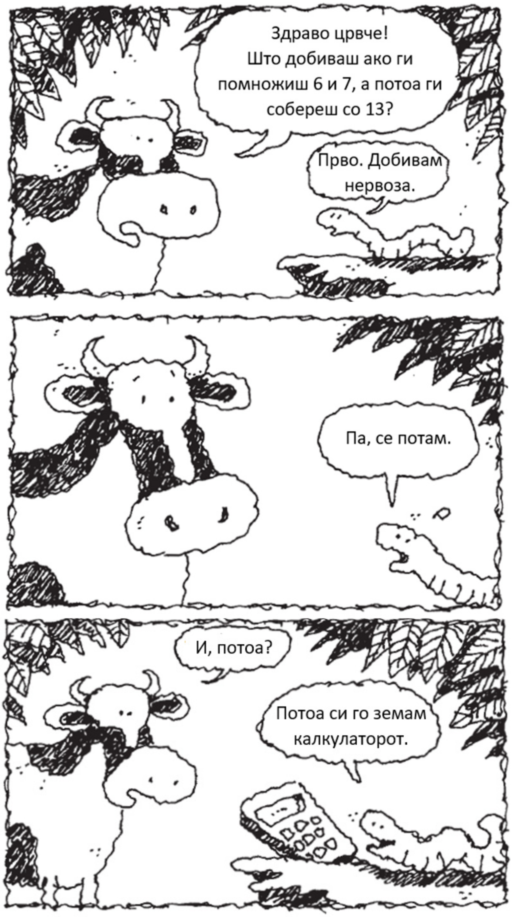
$$A: a+b=4n, \qquad B: b+2a+2c+2d=8n,$$
$$C: c+b+2e=4n, \qquad D: d+b+e=4n,$$
$$E: e+2c+d+4f=4n, \qquad F: f+e=n.$$

Со решавање на системот добиваме

$$a=\frac{16}{11}n,\ b=\frac{28}{11}n,\ c=\frac{4}{11}n,\ d=\frac{10}{11}n,\ e=\frac{6}{11}n,\ e=\frac{5}{11}n.$$

Бидејќи n природен број, потребен услов е n да е делив со 11, т.е. да е од облик $n=11k$, $k\in\mathbb{N}$.
Овој услов е доволен, бидејќи го покажува бројот на потези на секое поле прикажан на втората слика, кога $k=1$ (за произволно $k>1$, прикажаниот број на потези се множи со k). Секако постојат и други можности да се постигни бројот $n=11k$ во секое поле.

МАТЕМАТИЧКИ СТРИП



Извор:

[1] D. Greenberg, *Comic-strip Math Problem Solving*, 2010.

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

4 одделение

3997. Жабата Жапче скокала по нумерирана патека како на цртежот. Ако се наоѓа на поле со парен број, тогаш таа прескокнува на поле со број за еден помал од него. Ако се наоѓа на поле со непарен број, тогаш таа прескокнува на поле со број за три поголем од него. Со колку најмалку скокови жабата Жапче ќе стигне до полето со број 10, ако на почеток се наоѓа на полето со број 2?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

3998. Подот на една просторија има облик на квадрат. Како треба да се распоредат 16 столови на подот во таа просторија, така што покрај секој ѕид да има по 5 столови?

3999. Каква меѓусебна положба имаат 6 различни точки кои определуваат точно 10 прави?

4000. Семејството Петровски тргнале на годишен одмор со автомобил во 5:45 наутро. Стасале во 14:20. Колку време поминале во возење ако направиле две паузи, една од 10 минути и една од половина час?

4 – 5 одделение

4001. Мајката на Ана и Нина има 54 години. Ана е 7 години помлада од Нина, а 3 пати помлада од мајка ѝ. Колку години мајката е постара од Нина?

4002. На минатогодишната математичка олимпијада беа освоени 46 медали. Притоа, освоени се 27 златни и сребрени, а 35 сребрени и бронзени медали. Одреди го бројот на поединечно освоените златни, сребрени и бронзени медали.

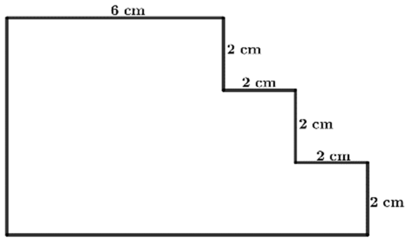
4003. Јан и Лука купиле кеса бонбони. Прво изеле $\frac{2}{3}$ од бонбоните, а подоцна изеле уште по една бонбона. Другиот ден изеле уште $\frac{1}{2}$ од остатокот и им останале уште 3 бонбони. Колку бонбони имало во кесата?

4004. Разликата на два броја е 1876. Една третина од поголемиот број е еднаква на една половина од помалиот. Определи ги броевите.

5-6 одделение

4005. Колку трицифрени броеви имаат збир на цифри еднаков на 6?

4006. Пресметај ги плоштината и периметарот на фигурата на цртежот.



4007. Колку цифри се потребни за да се нумерираат 425 страници од една книга?

4008. Дали збирот на првите 1000 природни броја е делив со 10? Образложи го одговорот!

6-7 одделение

4009. Група од 12 ученици ја додаваат кутијата со 160 карамели еден на друг. Првиот ученик зема две карамели. Секој нареден ученик зема од кутијата три карамели повеќе од тоа што зел претходниот ученик. Ако бројот на карамели во кутијата е помал од бројот на карамели кои треба да ги земе ученикот кај кој е кутијата, тогаш прекинува додавањето и карамелите остануваат во кутијата. Колку ученици од групата зеле карамели и колку карамели останале во кутијата?

4010. Во една библиотека има 4 полици. На првата полица има 936 книги. На втората полица има 3 пати повеќе книги од првата полица. На третата полица има половина од вкупниот број на книги на првата и втората полица. Бројот на книги на четвртата полица е $\frac{2}{3}$ од бројот на книги што ги има на третата полица. Колку книги има во библиотеката?

4011. Одреди ги сите делители на бројот 2023, а потоа одреди ги најмалиот и најголемиот петцифрен број делив со 2023.

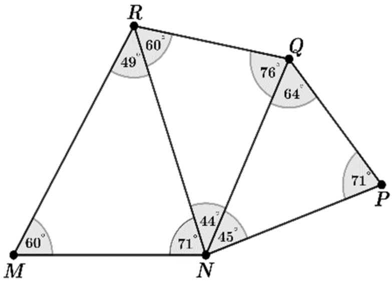
4012. Почнувајќи од една фиксна точка A, Лана нацртала три квадрати на кои единствена заедничка точка им е темето A. Првиот нацртан квадрат има плоштина 1cm^2, вториот 9cm^2 и третиот 25cm^2. Пресметај ја должината на линијата која ја нацртала Лана, цртајќи ги трите квадрати, ако цртањето на секој од квадратите почнува и завршува во точката A?

7-8 одделение

4013. Три парчиња ткаенина имаат вкупна должина 14,5 m. Ако од првото парче одземеме половина од неговата должина, од второто парче третина од неговата должина, а од третото парче четвртина од неговата должина, тогаш сите парчиња ќе имаат еднакви должини. Определи ја должината на секое од трите парчиња ткаенина?

4014. Аглите α и β се комплементни агли, а аглите β и γ се суплементни агли. Одреди ја големина на аглите α, β и γ, ако аголот γ е петпати поголем од аголот β.

4015. Отсечките $\overline{MN}$, $\overline{NP}$, $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RM}$, $\overline{NR}$ и $\overline{NQ}$ формираат три триаголници како на цртежот. Која од отсечките има најголема должина?



4016. Група работници за 4 дена ја провериле сообраќајната сигнализација на еден магистрален пат. Првиот ден провериле вдолж $\frac{1}{17}$ од патот, вториот ден трипати повеќе од првиот ден, третиот ден за 60km повеќе од вториот ден, а четвртиот ден провериле онолку километри од патот колку што провериле првиот и вториот ден заедно. Определи ја должината на магистралниот пат.

8-9 одделение

4017. Збирот на должините на катетите на даден правоаголен триаголник е 38cm. Ако едната катета се намали за 8cm, а другата се зголеми за 4cm се добива правоаголен триаголник чија плоштина е еднаква со плоштината на дадениот правоаголен триаголник. Одреди ги должините на катетите на дадениот триаголник.

4018. Одреди ги сите природни броеви $n \in \mathbb{N}$ за кои дропката $\frac{5n+23}{n+3}$ е цел број.

4019. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C. Нека D е подножјето на висината спуштена од темето C кон страната AB и точката F е пресек на страната AB со тежишната линија повлечена од темето C. Ако аголот помеѓу висината CD и тежишната линија CF е 20°, одреди ја големината на аголот помеѓу симетралата на аголот во темето C и тежишната линија CF.

4020. Нека $n \in \mathbb{N}$ е природен број кој при делење со 7 дава остаток a и при делење со 19 дава остаток b. Докажи дека $95a+42b-4n$ е делив со 133.

9 одделение

4021. Колку броеви поголеми од 402, а помали од 994 даваат остаток 5 при делење со бројот 17?

4022. Господинот Денарко имал во банка одредена сума на пари во денари. После првата година сумата на пари се намалила за 25%, а за време на втората година сумата што останала во банката се зголемила за 20%. За време на третата година сумата што останала во банката после втората година се намалила за 10%. За време на четвртата година сумата што останала во банката после третата година се зголемила за 20%. Дали сумата на пари на

Денарко се зголемила или се намалила за време на овие четири години и за колку проценти?

4023. Нека $ABCD$ е паралелограм. Нека E и F се две точки на страните $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$, содветно. Ако $\overline{CE}=3\cdot\overline{BE}$, $\overline{CF}=\overline{DF}$, DE ја сече AF во точка K и $\overline{KF}=6\text{ cm}$, пресметај ја должината на отсечката $\overline{AK}$.

4024. Нека $a,b\in\mathbb{N}$ се природни броеви, такви што $90<a+b<99$ и $0,9<\frac{a}{b}<0,91$. Пресметај го производот ab.

Изготвиле: Елена Павлов, Анкица Талеска, Лена Миловановиќ, Милена Мицковска, Соња Чаламани, Стево Ѓоргиев, Јасмина Костова – Папалазова, Зоран Штерјов.

МАТЕМАТИЧКА ЗАГАТКА 2

Во Влакноград постои закон за жителство кој вели:

1) Никои два жители не смее да имаат еднаков број влакна на главата.
2) Ниеден жител не смее да има 999 влакна на главата.
3) Ниеден жител не смее да има повеќе или еднаков број влакна на главата како и бројот на жители на градот.

Градот достигнал максимален број на жители. Кој е тој број?

Извор:

[1] *Математика +*, https://matematika-plus.weebly.com/.

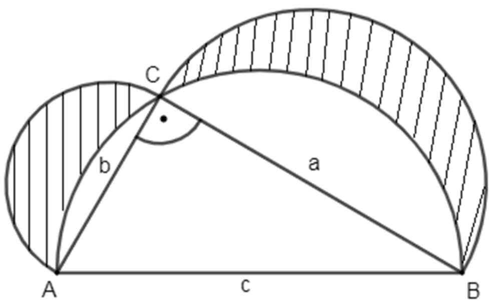
Трајче Ѓорѓијевски

НАГРАДНИ ЗАДАЧИ

1. Нека $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_3 a_2 a_1 a_0}$ е природен број со цифри $a_0, a_1, a_2, a_{3,} \dots, a_n$,тогаш докажи дека

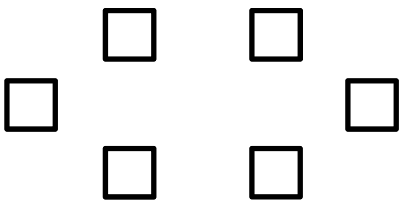
$$13 | \overline{a_1 a_0} + 9 \cdot \overline{a_3 a_2} + 9^2 \cdot \overline{a_5 a_4} + 9^3 \cdot \overline{a_7 a_6} + \cdots$$

2. Докажи дека збирот на плоштините од штрафираните полумесечини е еднаков со плоштината на правоаголниот триаголник.



МАТЕМАТИЧКА ЗАГАТКА 3

Покажи дека секој од шесте градови може да се поврзе со директен пат со секој од останатите пет града, така да патиштата се сечат само три пати и во пресеците се пресекуваат точно два патишта. Почетокот на патиштата во градовите не се смета за сечење на патишта.



Извор:

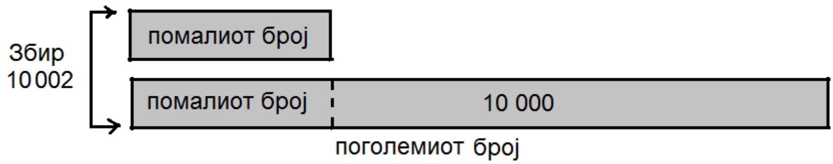
[1] *Leningrad Mathematical Olympiad,* Grade Five, 1987.

РЕШЕНИЈА НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ ЗА НУМЕРУС XLVIII-2

4 одделение

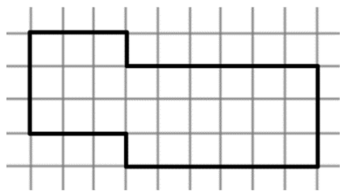
3969. Збирот на два броја е за 2 поголем од десет илјади, а нивната разлика е десет илјади. Кои се броевите?

Решение. Прв начин: Бидејќи разликата на двата броја е 10000, тоа значи поголемиот број е еднаков на помалиот број зголемен за 10 000. Бидејќи нивниот збир е за 2 поголем од 10 000, бројот 2 е двојната вредност на помалиот број, па помалиот број е 1. Тогаш поголемиот број е 10 001.



Втор начин: Со x го означуваме помалиот број. Тогаш поголемиот број е $x+10000$. Нивниот збир е $x+(x+10000)=10002$. Со решавање на равенката добиваме $2\cdot x=2$, па $x=1$. Другиот број е за 10000 поголем од 1, па тој е 10001.

3970. Секое квадратче во мрежата има страна со должина $1\,\text{cm}$. Определи ги периметарот (обиколката) и плоштината на фигурата.



Решение. Периметарот на фигурата може да биде пресметан на различни начини. Наведени се два од нив:

Прв начин: Периметарот на фигурата е збир на должините на сите страни. Бидејќи четири страни имаат должина $3\,\text{cm}$, две страни имаат должина $6\,\text{cm}$ и две страни имаат должина $1\,\text{cm}$, добиваме дека $L=4\cdot 3+2\cdot 6+2\cdot 1=26\,\text{cm}$.

Втор начин: Периметарот на фигурата е еднаков на периметарот на минималниот правоаголник во кој може да се смести фигурата. Тој правоаголник има страни со должини 9 cm и 4 cm, па $L=2\cdot 9+2\cdot 4=26\,\text{cm}$.

Плоштината на фигурата може да биде пресметана на различни начини. Наведени се 3 од нив:

Прв начин: Со пребројување на квадратчињата од кои е составена фигурата, $P=27\ \text{cm}^2$.

Втор начин: Со собирање на плоштините на квадратот со страна 3 cm и правоаголникот со страни 3 cm и 6 cm од кои е составена фигурата,

$$P = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 27 \text{ cm}^2.$$

Трет начин: Со одземање на плоштините на двете правоаголничиња од плоштината на минималниот правоаголник во кој може да се смести фигурата,

$$P = 4 \cdot 9 - (1 \cdot 3 + 1 \cdot 6) = 27 \text{ cm}^2.$$

3971. Андреј секогаш кажува по две реченици од кои едната е вистинита, а другата е невистинита. Еднаш тој рекол: „Вчера беше среда. Задутре ќе биде вторник.“ Потоа малку размислил и рекол: „Денес е среда. Вторник беше завчера.“
Во кој ден од седмицата Андреј ги изговорил овие реченици?
Решение. Тврдењата „Вчера беше среда“ и „Денес е среда“ не можат истовремено да бидат вистинити. Исто така, тврдењата „Задутре ќе биде вторник“ и „Вторник беше завчера“ не можат да бидат истовремено вистинити. Останува да ги испитаме следните можности:
1) првиот пат да кажал вистинита, па невистинита реченица, а вториот пат да кажал невистинита па вистинита реченица;
2) првиот пат да кажал невистинита, па вистинита реченица, а вториот пат да кажал вистинита па невистинита реченица.
1) Ако тврдењето „Вчера беше среда“ е вистинито, тогаш тврдењето „Задутре ќе биде вторник“ е невистинито. Бидејќи тврдењето „Денес е среда“ е невистинито, мора тврдењето „Вторник беше завчера“ да е вистинито. Тоа е во согласност со појдовната претпоставка дека вчера беше среда. Значи, денес е четврток.
2) Ако тврдењето „Вчера беше среда“ е невистинито, а тврдењето „Денес е среда“ е вистинито, тоа значи дека вчера беше вторник. Тогаш тврдењето „Задутре ќе биде вторник“ е невистинито, што е спротивно на тврдењето дека од двете реченици што ги кажува Андреј едната мора да е вистинита. Значи, овој случај не е можен.
Ова значи дека Андреј ги изговорил овие реченици во четврток.

3972. Јана имала собрано одредена сума пари во касичката. Прво таа потрошила една третина од парите за да си купи книга, а со преостанатите 320 денари од касичката купила подарок за сестра си. Колку пари имала Јана во касичката на почетокот?

Решение. Откако Јана потрошила $\frac{1}{3}$ од парите во касичката ѝ останале 320 денари, а тоа се $\frac{2}{3}$ од почетната сума. Тоа значи $\frac{1}{3}$ од сумата е половина од 320 денари, што е 160 денари, па целата сума е $3\cdot160=480$ денари.

4 – 5 одделение

3973. Стави загради во бројниот израз $54+369:9-3\cdot2$ така што вредноста на добиениот израз да биде: а) 177   б) 130.

Решение.

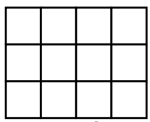
а) $54+369:(9-3\cdot2)=54+369:(9-6)=54+369:3=54+123=177$

б) $54+(369:9-3)\cdot2=54+(41-3)\cdot2=54+38\cdot2=54+76=130.$

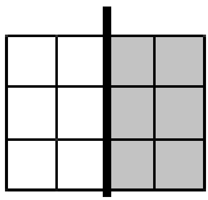
3974. Никола замислил еден природен број. Тој број е за 1 помал од количникот при делењето на најголемиот четирицифрен и најголемот двоцифрен број. Кој број го замислил Никола?

Решение. Најголемиот четирицифрен број е 9999, а најголемиот двоцифрен број е 99. При делењето на 9999 со 99 се добива количник 101. Никола го замислил бројот $101-1=100$.

3975. Правоаголникот на цртежот расечи го на две фигури вдолж некои линии на мрежата така што добиените две фигури да имаат еднаква обиколка, а различна плоштина. Обој една од фигурите.

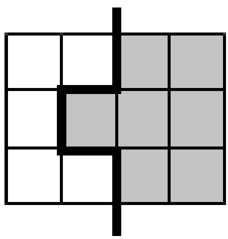


Решение. Квадратчињата од кои е составен правоаголникот ќе ги нарекуваме еднични кавдратчиња, а нивните страни ќе ги викаме единични отсечки.



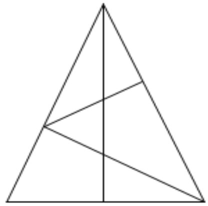
Ако правоаголникот се расече на половина, двете половини ќе имаат еднаква обиколка и еднаква плоштина. Тоа не е во согласност со барањето за различни плоштини.

За да им биде плоштината различна треба барем едно квадратче од едната половина да се додели на другата половина, а притоа треба да се зачува обиколката.

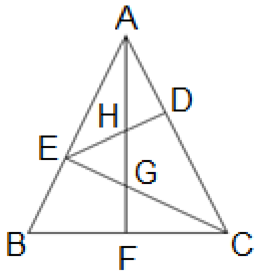


Белата и обоената фигура имаат обиколка еднаква на должината на искршената линија составена од 12 единични отсечки. Разликата меѓу плоштината на обоената и плоштината на белата фигура е плоштината на 2 единични квадратчиња.

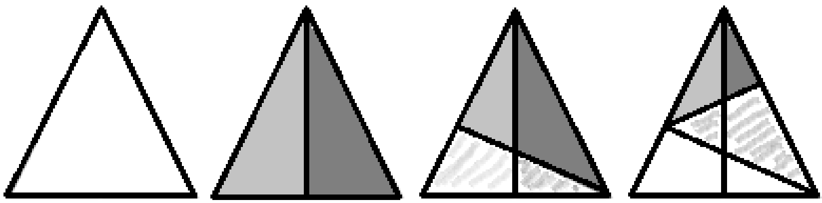
3976. Колку триаголници има на цртежот?



Решение. Ќе ги означиме темињата на триаголниците како на цртежот. Ги имаме триаголниците: ABC, ABF, ACE, ACF, ACG, ADE, ADH, AEG, AEH, BCE, CDE, CFG, EGH. Вкупно се 13 триаголници.



Дали може да смислиш стратегија? Еве една идеја за бројот на триаголници:



1 | 1 + 2 = 3 | 3 + 3 + 2 =8 | 8 + 3 + 2 =13

5-6 одделение

3977. Збирот на броевите $34,76$ и $29,89$ намали го за $18,33$, а добиената разлика зголеми ја 2,3 пати. Кој број го доби?

Решение. Збирот на броевите $34,76$ и $29,89$ намален за $18,33$ е еднаков на $(34,76+29,89)-18,33=64,65-18,33=46,32$. Добиената разлика $46,32$, зголемена за $2,3$ пати е еднаква на $46,32\cdot 2,3=106,536$. Добиениот број е $106,536$.

3978. Определи ги сите рамнокраки триаголници со должини на страни цел број сантиметри и периметар 24 cm?

Решение. Нека a и b се должината на основата и должината на кракот на триаголникот, соодветно. Од формулата за периметар на рамнокрак триаголник која гласи $L=a+2b$, следува дека a е парен број, бидејќи $2b$ и 24 се парни броеви. Збирот на должините на кои било две страни на триаголникот мора да биде поголем од должината на третата страна. Според тоа, мора да важи $2b > a$, па ја добиваме следната табела:

Должина/cm					
a	10	8	6	4	2
b	7	8	9	10	11

Да забележиме дека триаголникот со страни $a = b = 8\text{cm}$ е рамностран триаголник кој го вбројуваме во можните решенија на задачата како специјален случај на рамнокрак триаголник. Значи, постојат пет различни рамнокраки триаголници кои го задоволуваат условот на задачата.

3979. Марија спакувала 4 подарока во една кутија и ја испратила по пошта во која примаат пратки до 5 kg. Едниот подарок има маса 1,8 kg, другиот 950 g, а третиот 1030 g. Колку најмногу килограми може да биде масата на четвртиот подарок?

Решение. Вкупната маса на трите подарока е еднаква на 1,8 kg + 950 g + 1030 g = 1800 g + 950 g + 1030 g = 3780 g. Ако масата на пратката смее да биде најмногу 5000g, тогаш четвртиот подарок има маса најмногу 5000g–3780g = 1220g, односно 1,22 kg.

3980. Даден е квадрат со должина на страна 4. Пресметај го периметарот на правоаголникот на кој должината на едната страна е за два помала од должината на страната на квадратот, а плоштината еднаква на плоштината на дадениот квадрат.

Решение. Страната на квадратот ја означуваме со a, а страните на правоаголникот со b и c. Од условот на задачата $a = 4$. Нека b е страната на правоаголникот која е за два помала од должина од страната на квадратот. Тогаш, $b = a - 2$, односно $b = 4 - 2$, па $b = 2$. Од формулата за плоштина на квадрат која гласи $P_{\text{квадрат}} = a \cdot a$, добиваме дека $P_{\text{квадрат}} = 4 \cdot 4 = 16$. Од условот на задачата $P_{\text{правоаголник}} = P_{\text{квадрат}}$, па $P_{\text{правоаголник}} = 16$. Според тоа, од формулата за плоштина на правоаголник која гласи $P_{\text{правоаголник}} = b \cdot c$, добиваме дека $2 \cdot c = 16$, односно $c = 8$. Значи, правоаголникот е со страни $b = 2$ и $c = 8$. Тогаш, со помош на формулата за периметар на правоаголник која гласи $L = 2b + 2c$, добиваме дека $L = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 8$ односно $L = 4 + 16$. Па периметарот на правоаголникот е $L = 20$.

6-7 одделение

3981. Пресметај ја вредноста на изразот

$$1-\frac{100}{101}+\frac{99}{101}-\frac{98}{101}+\frac{97}{101}-...-\frac{2}{101}+\frac{1}{101}.$$

Решение. Бидејќи $1=\frac{101}{101}$, изразот може да се запише

$$\left(\frac{101}{101}-\frac{100}{101}\right)+\left(\frac{99}{101}-\frac{98}{101}\right)+\left(\frac{97}{101}-\frac{96}{101}\right)+...+\left(\frac{3}{101}-\frac{2}{101}\right)+\frac{1}{101}=$$

$=50\cdot\frac{1}{101}+\frac{1}{101}=\frac{51}{101}$, па добиваме дека вредноста на изразот е еднаква на $\frac{51}{101}$.

3982. Одреди ја цифрата a за која бројот $\overline{7438a}$ при делење со 5 дава ист остаток како и при делење со 9.

Решение. Ако бројот $\overline{7438a}$ е делив со 5, тогаш цифрата a е 0 или 5. Ако бројот $\overline{7438a}$ е делив со 9, тогаш треба $7+4+3+8+a=22+a$ да биде делив со 9, односно $a=5$. Така, за бројот $\overline{7438a}$ да биде делив со 5 и со 9, цифрата a треба да биде еднаква на 5. Заклучуваме дека бројот 74386, кој што е за 1 поголем од 74385, при делење со 5 и со 9 дава остаток 1. Исто така и броевите 74387, 74388 и 74389 при делење со 5 и со 9 даваат остаток 2, 3 и 4, соодветно. Заклучуваме дека цифрата a може да биде 5,6,7,8 или 9.

3983. Определи ја дропката која е еквивалентна со дропката $\frac{5}{7}$ и збирот на броителот и именителот ѝ е еднаков на 60.

Решение. Од тоа што бараната дропка е еквивалентна со дропката $\frac{5}{7}$, треба дропката $\frac{5}{7}$ да се прошири со некој број $k,\ k\neq 0$, односно $\frac{5}{7}=\frac{5k}{7k}$. Според тоа и од условот на задачата дека збирот на броителот и именителот на бараната дропка е еднаков на 60 добиваме дека $5k+7k=60,$ односно $12k=60,$ од каде $k=5$. Бараната дропка е $\frac{25}{35}$.

3984. Филип го запишал производот на првите 37 природни броја при што две цифри ги заменил со буквите a и b и го добил записот:

$$1376a7530912263450463159795815809024b0000000.$$

Кои цифри ги заменил Филип?

Решение. Во производот на првите 37 броеви бројот 5 како прост множител се јавува во броевите 5, 10, 15, 20, 25, 30 и 35, односно 8 пати. Од друга страна, бројот 2 како прост множител сигурно се јавува барем 8 пати. Тоа значи дека производот на првите 37 природни броја завршува на 8 нули, па $b=0$. Производот на првите 37 природни броеви е делив со 9, па збирот на неговите цифри е делив со 9. Збирот на цифрите на производот е еднаков на $150+a$, а тој делив со 9 ако $a=3$. Значи, цифрите кои ги заменил Филип се $a=3$ и $b=0$.

7-8 одделение

3985. Разликата на најголемиот и најмалиот внатрешен агол во еден рамнокрак триаголник е $8°$. Определи ја големината на внатрешните агли на триаголникот.

Решение: Ако аголот при врвот е најголем, тогаш аглите при основата се еднакви на $(180°-8°):3=57°20'$, а аголот при врвот е $65°20'$. Ако аглите при основата се поголеми од аголот при врвот, тогаш аголот при врвот е еднаков на $(180°-16°):3=54°40'$, а аглите при основата се 62°40’.

3986. Во едно училиште има точно три паралелки во 7 одделение: 7а, 7б и 7в. Во 7а одделение учат 36% од вкупниот број на учениците од сите три одделенија. Бројот на ученици во 7б одделение е еднаков на $\frac{5}{9}$ од бројот на ученици во 7а. Колку ученици учат во секое од одделенијата, ако во 7а има 6 ученици помалку од 7в одделение?

Решение. Нека x е вкупниот број на ученици од сите три одделенија. Во 7а одделение има $0,36=\frac{9}{25}$, во 7б има $\frac{5}{9}\cdot\frac{9}{25}=\frac{1}{5}$, додека пак во 7в има $1-\left(\frac{9}{25}+\frac{1}{5}\right)=\frac{11}{25}$ од вкупниот број на ученици од сите три одделенија. Од условот на задачата дека во 7а има 6 ученици помалку од 7в одделение имаме дека $\frac{11}{25}x-\frac{9}{25}x=6$ односно $\frac{2}{25}x=6$, од каде следува дека $x=75.$ Според тоа, добиваме дека во 7а одделение има 27 ученици, во 7б има 15 ученици, а во 7в има 33 ученици.

3987. Претстави го бројот 208 како збир на четири различни природни броеви, такви што првиот намален за $3,$ вториот зголемен за $3,$ третиот намален трипати, а четвртиот зголемен трипати, даваат еден ист број.

Решение. Да ги означиме бараните природни броеви со $x,\ y,\ z,\ t.$ Од условот на задачата имаме дека $x+y+z+t=208$ и уште важат следниве четири равенства $x-3=u$, $y=u-3$, $z=3u$, $t=\frac{u}{3},$ од каде следува дека $x=u+3$, $y+3=u$, $\frac{z}{3}=u$ и $3t=u$. Ако замениме во равенството $x+y+z+t=208$, добиваме дека

$$u+3+u-3+3u+\frac{u}{3}=208.$$

Според тоа, решавајќи по u добиваме дека $5u+\frac{u}{3}=208,$ односно $16\cdot u=624$, па $u=39.$ Со замена за $u=39$ во $x-3=u$, $y=u-3$, $z=3u$, $t=\frac{u}{3}$ добиваме дека $x=39+3=42,$ $z=3\cdot 39=117,$ $y=39-3=36,$ $t=\frac{39}{3}=13.$ Значи, бараните броеви се $42,\ 36,\ 117,\ 13.$

3988. Мартин е постар од своите три сестри Ана, Ивана и Елена за 8, 10 и 13 години, соодветно. После една година, збирот на годините на сестрите на Мартин ќе биде за 39 поголем од годините на Мартин. Колку години има Мартин денес?

Решение: Со x ги означуваме годините на Мартин денес. Тоа значи дека неговите сестри, денес имаат $x-8, x-10$ и $x-13$ години, соодветно. По една година, Мартин ќе има $x+1$ година и неговите сестри соодветно ќе имаат $x-7, x-9$ и $x-12$ години. Од условот на задачата имаме

$$x-7+x-9+x-12=x+1+39 \Leftrightarrow 2x-28=40 \Leftrightarrow 2x=68 \Leftrightarrow x=34.$$

Значи, Мартин денес има 34 години.

8-9 одделение

3989. За која вредност на x е исполнето равенството

$$111111\cdot\left(\frac{11}{10101}-\frac{10}{3\cdot7\cdot13\cdot37}-\frac{5}{2442x}\right)=\frac{17}{2}\ ?$$

Решение: Бидејќи $10101=3\cdot7\cdot13\cdot37$ и $2442=2\cdot3\cdot11\cdot37$, равенката може да ја запише како

$$111111\cdot\left(\frac{11}{3\cdot7\cdot13\cdot37}-\frac{10}{3\cdot7\cdot13\cdot37}-\frac{5}{2\cdot3\cdot11\cdot37x}\right)=\frac{17}{2}$$

$$111111\cdot\left(\frac{1}{3\cdot7\cdot13\cdot37}-\frac{5}{2\cdot3\cdot11\cdot37x}\right)=\frac{17}{2}$$

$$\frac{111111}{3\cdot7\cdot13\cdot37}-\frac{5\cdot111111}{2\cdot3\cdot11\cdot37x}=\frac{17}{2}.$$

Бидејќи $111111=3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37$, добиваме дека

$$\frac{3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37}{3\cdot7\cdot13\cdot37}-\frac{5\cdot3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37}{2\cdot3\cdot11\cdot37x}=\frac{17}{2}$$

По кратење на дропките добиваме $11-\frac{5\cdot7\cdot13}{2x}=\frac{17}{2}$, односно

$11-\frac{17}{2}=\frac{5\cdot7\cdot13}{2x}$, од каде следува $\frac{5}{2}=\frac{5\cdot7\cdot13}{2\cdot x}$.

Според тоа, бараната вредност е $x=7\cdot13=91$.

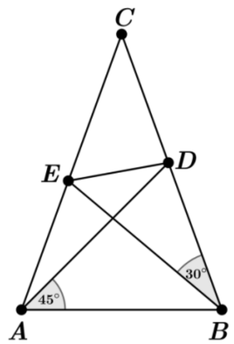
3990. Конструираме опаѓачка низа од сите природни броеви, делители на бројот 707070. Кој број се наоѓа на седмото место во низата?

Решение: Бројот 707070 се дели со 1 и со 707070, па првиот член во низата е бројот 707070, а последен е бројот 1. Бројот 707070 завршува на 0, па се дели со 10, 2 и 5. Збирот на цифрите на бројот 707070 е 21, па тој се дели и со 3, но не се дели со 9. Следува дека 707070 се дели и со 6. Бројот не се дели со 4, па не се дели ни со 8. Со проверка добиваме дека 707070 се дели со 7. Значи, најмалите седум делители на бројот 707070 се броевите 1, 2, 3, 5, 6, 7 и 10. Низата гласи $\frac{707070}{1}$, $\frac{707070}{2}$, $\frac{707070}{3}$, $\frac{707070}{5}$, $\frac{707070}{6}$, $\frac{707070}{7}$, $\frac{707070}{10}$, ..., $\frac{707070}{707070}$, односно

707070, 353535, 235690, 141414, 117845, 101010, 70707, ..., 1.

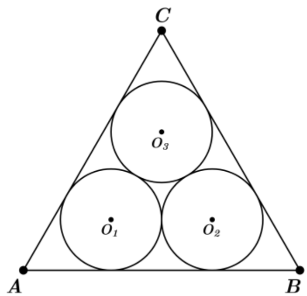
На седмото место во низата се наоѓа бројот 70707.

3991. На цртежот е даден рамнокрак триаголник ABC $\left(\overline{AC}=\overline{BC}\right)$ со агол при врвот од 40°. На краците AC и BC се избрани точките E и D, соодветно, така што $\measuredangle BAD=45^\circ$ и $\measuredangle EBD=30^\circ$. Пресметај го збирот на аглите $\measuredangle BED$ и $\measuredangle EDA$.

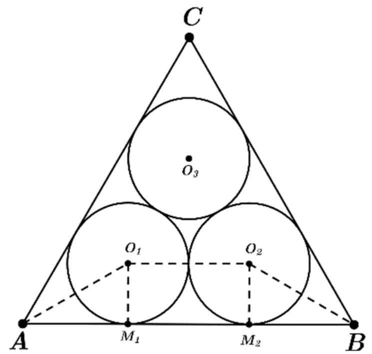


Решение. Триаголникот ABC е рамнокрак со агол при врвот $\measuredangle ACB=40^\circ$. Тогаш аглите при основата се 70°, односно $\measuredangle ABC=\measuredangle BAC=70^\circ$. Според тоа, $\measuredangle ABE=70^\circ-30^\circ=40^\circ$. Аголот $\measuredangle DHB$ како надворешен агол на триаголникот ABH е еднаков на $\measuredangle DHB=\measuredangle BAH+\measuredangle ABH=45^\circ+40^\circ=85^\circ$. Исто така, аголот $\measuredangle DHB$ е надворешен агол на триаголникот EHD, па $\measuredangle BED+\measuredangle EDA=\measuredangle DHB=85^\circ$.

3992. Во рамностраниот триаголник ABC со должина на страна a, се впишани три кружници со радиус r (како на цртежот). Изрази ги периметарот и плоштината на триаголникот преку радиусот на кружниците.



Решение. Дадениот триаголник ABC е рамнокрак триаголник со должина на страна a, па неговата плоштина е еднаква на $P=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а неговиот периметар е еднаков на $L=3a$. Значи, страната a треба да ја изразиме преку радиусот r. Нека M_1 е допирната точка на правата AB и кружницата со центар во точката O_1 (како на



цртежот). Јасно, триаголникот AM_1O_1 е правоаголен триаголник со прав агол во темето M_1, и притоа $\overline{O_1M_1} = r$ и $\measuredangle M_1AO_1 = 30^\circ$. Според тоа, $\overline{AO_1} = 2r$, па од $\overline{AM_1}^2 + \overline{M_1O_1}^2 = \overline{AO_1}^2$, добиваме дека $\overline{AM_1}^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2$, односно $\overline{AM_1} = r\sqrt{3}$. На ист начин од триаголникот BM_2O_2 добиваме дека $\overline{M_2B} = r\sqrt{3}$. Бидејќи $\overline{M_1M_2} = \overline{O_1O_2} = 2r$ и $\overline{AB} = \overline{AM_1} + \overline{M_1M_2} + \overline{M_2B}$, добиваме дека

$$a = r\sqrt{3} + 2r + r\sqrt{3} = 2r\left(1+\sqrt{3}\right).$$

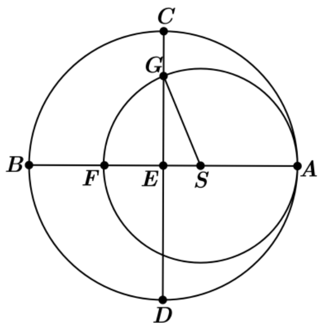
Па, со замена на $a = 2r\left(1+\sqrt{3}\right)$ во $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ добиваме дека

$$P = \frac{\left(2r\left(1+\sqrt{3}\right)\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4r^2\left(1+\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 2r^2\left(3+2\sqrt{3}\right),$$

а со замена во $L = 3a$ добиваме дека $L = 6r\left(1+\sqrt{3}\right)$.

9 одделение

3993. Две кружници се допираат одвнатре во точката A. Нека AB и CD се два заемно нормални дијаметри на поголемата кружница кои ја сечат помалата кружница во точки F и G, соодветно и S е центарот на помалата кружница (како на цртежот). Определи ја плоштината на делот ограничен со двете кружници, ако $\overline{BF} = 5\,\mathrm{cm}$ и $\overline{CG} = 3\,\mathrm{cm}$.



Решение. Нека S е центарот на помалата кружница, а r и R се радиусите на помалата и поголемата кружница, соодветно. Триаголникот GES е правоаголен, па од Питагоровата теорема

$$\overline{GS}^2 = \overline{EG}^2 + \overline{ES}^2 \Leftrightarrow r^2 = (R-3)^2 + (R-r)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^2 = R^2 - 6R + 3^2 + R^2 - 2Rr + r^2 \Leftrightarrow 2R^2 - 6R - 2Rr + 9 = 0.....(1).$$

Од друга страна,

$$\overline{BF} + \overline{FS} + \overline{SA} = \overline{BA} \Leftrightarrow 5 + r + r = 2R \Leftrightarrow 2r = 2R - 5.....(2).$$

Со замена на (2) во (1) добиваме дека

$$2R^2-6R-R(2R-5)+9=0 \Leftrightarrow 2R^2-6R-2R^2+5R+9=0$$

односно $R=9\,\mathrm{cm}$. Следува дека $2r=2\cdot 9-5$, т.е. $r=\frac{13}{2}\mathrm{cm}$. Ако со P_1 и P_2 ги означиме плоштините на поголемиот и помалиот круг соодветно, тогаш нивната разлика е

$$P_1-P_2=R^2\pi-r^2\pi=(R^2-r^2)\pi==\left(9^2-\left(\frac{13}{2}\right)^2\right)\pi=\frac{155}{4}\pi\,\mathrm{cm}^2.$$

Заклучуваме дека плоштината на делот ограничен со двете кружници е еднаква на $\frac{155}{4}\pi\,\mathrm{cm}^2$.

3994. Нека $2n=2+2^2+2^3+...+2^{2022}$. Докажи дека $n=2^{2022}-1$ и дека n е делив со 21.

Решение: Равенството $2n=2+2^2+2^3+...+2^{2022}$ го делиме со 2, па добиваме $n=1+2+2^2+...+2^{2021}$. Сега, ги одземаме двете равенства и добиваме

$$2n-n=(2+2^2+2^3+...+2^{2022})-(1+2+2^2+...+2^{2021}).$$

Од ова се добива дека $n=2^{2022}-1$, што требаше да се докаже. За да докажеме дека n е делив со 21 доволно е да докажеме дека е делив со 3 и 7, бидејќи $21=3\cdot 7$ и НЗД(3,7)=1. Забележуваме дека 1+2+2^2=1+2+4=7. Па, за $n=1+2+2^2+...+2^{2021}$ добиваме дека

$$n=(1+2+2^2)+(2^3+2^4+2^5)+(2^6+2^7+2^8)+...+(2^{2019}+2^{2020}+2^{2021})=$$
$$=(1+2+2^2)+2^3(1+2+2^2)+2^6(1+2+2^2)+...+2^{2019}(1+2+2^2)=$$
$$=7+2^3\cdot 7+2^6\cdot 7+...+2^{2019}\cdot 7=7(1+2^3+2^6+...+2^{2019}),$$

од каде следува дека n делив со 7. Забележуваме и дека 1+2=3. Според тоа, за $n=1+2+2^2+...+2^{2021}$ добиваме

$$n=(1+2)+(2^2+2^3)+(2^4+2^5)+...+(2^{2018}+2^{2019})+(2^{2020}+2^{2021})=$$
$$=(1+2)+2^2(1+2)+2^4(1+2)+...+2^{2018}(1+2)+2^{2020}(1+2)=$$
$$=3+2^2\cdot 3+2^4\cdot 3+...+2^{2018}\cdot 3+2^{2020}\cdot 3=3\left(1+2^2+2^4+...2^{2018}+2^{2020}\right)$$ од

каде следува дека n е делив со 3. Значи, n е делив со 21.

3995. Пресметај ја вредноста на изразот $a^5b^2+a^2b^5+2ab$, ако $a+b=1$ и $a^2+b^2=2$.

Решение. Дадениот израз $a^5b^2+a^2b^5+2ab$ може да се запише во облик $a^5b^2+a^2b^5+2ab=a^2b^2\left(a^3+b^3\right)+2ab$. Со квадрирање на левата и десната страна на равенството $a+b=1$, користејќи го равенствто $a^2+b^2=2$ добиваме дека

$$\left(a+b\right)^2=1^2 \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2=1 \Leftrightarrow 2+2ab=1 \Leftrightarrow ab=-\frac{1}{2}.$$

Ако ги помножиме левите и десните страни на равенствата $a+b=1$ и $a^2+b^2=2$ добиваме дека

$$\left(a+b\right)\left(a^2+b^2\right)=2 \Leftrightarrow a^3+ab^2+a^2b+b^3=2 \Leftrightarrow$$

$$a^3+b^3+ab\left(a+b\right)=2 \Leftrightarrow a^3+b^3-\frac{1}{2}\cdot 1=2 \Leftrightarrow a^3+b^3=\frac{5}{2}.$$

Според тоа, вредноста на изразот е еднаква на

$$a^5b^2+a^2b^5+2ab=a^2b^2\left(a^3+b^3\right)+2ab=\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{5}{2}+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}.$$

3996. Дијагоналите на трапезот $ABCD$ имаат должини $3\,\mathrm{cm}$ и $5\,\mathrm{cm}$, а должината на отсечката што ги поврзува средините на основите е $2\,\mathrm{cm}$. Пресметај ја плоштината на трапезот.

Решение. Нека S_1 и S_2 се средините на основите на трапезот AB и CD, соодветно. Трапезот $A'B'C'D'$ е централно симетрична фигура на трапезот $ABCD$ со центар на симетрија во точката S_1. Тогаш $C'D'CD$ е паралелограм, па $C'D \parallel CD'$, а бидејќи S_2 е средина на DC, S_1 е средина на AB и S е пресек на дијагоналите важи $C'D \parallel CD' \parallel S_1S_2$, па $\overline{CD'}=2\overline{S_1S_2}$. Тогаш триаголникот $AD'C$ е правоаголен триаголник со страни $\overline{AC}=3\,\mathrm{cm}$, $\overline{CD'}=4\,\mathrm{cm}$, $\overline{AD'}=5\,\mathrm{cm}$ и $\measuredangle ACD'=90^\circ$. Го конструираме паралелограмот $AMCM'$. Според тоа, важи

$$P_{AMCM'}=2P_{\triangle AMC}=P_{\triangle AD'C}.$$

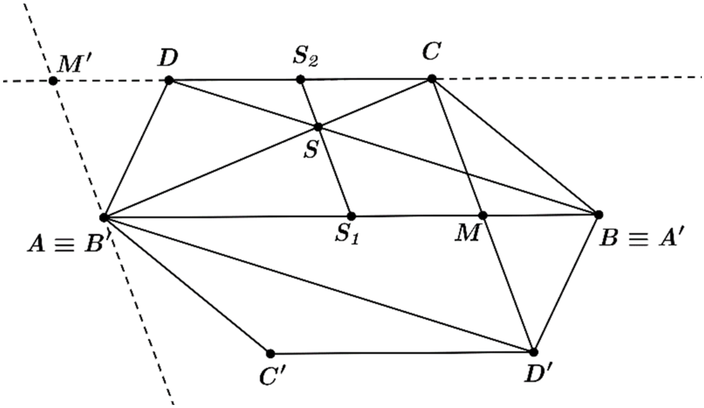
Од друга страна, $\triangle ADM' \cong \triangle D'A'M$, бидејќи $M'D \parallel MA'$, $M'A \parallel MD'$ и уште $\overline{AD}=\overline{D'B}$. Тогаш, $P_{\triangle ADM'}=P_{\triangle MBD'}$, па

$$P_{\triangle AD'C}=P_{AMCM'}=P_{\triangle ADM'}+P_{AMCD}=$$

$$=P_{\triangle MBD'}+P_{AMCD}=P_{\triangle MBC}+P_{AMCD}=P_{ABCD}.$$

Бидејќи триаголникот $AD'C$ е правоаголен триаголник со катети $\overline{AC}=3\,\mathrm{cm}$ и $\overline{CD'}=4\,\mathrm{cm}$, добиваме дека $P_{\triangle AD'C}=6\ \mathrm{cm}^2$, па

$P_{ABCD} = P_{\triangle AD'C} = 6\ \text{cm}^2$.



Изготвиле: Елена Павлов, Анкица, Талеска, Лена Миловановиќ, Милена Мицковска, Соња Чаламани, Стево Ѓоргиев, Јасмина Костова – Папалазова, Зоран Штерјов, Борче Јошевски.

МАТЕМАТИЧКА ЗАГАТКА 4

Еден патник сретнал стар човек кој пред себе имал три карти од стандарден шпил со карти, свртени со лицето надолу. Сакајќи да започне разговор, го прашал кои се картите.

Старецот одговорил: „Лево од кралицата (Q) има еден или два џандари (J). Десно од џандарот има еден или два џандари. Десно од листот (♠) има едно или две кароа (♦). Лево од карото има едно или две кароа.“

Кои се трите карти?

Извор:

[1] *Math is Fun,* https://www.mathsisfun.com.

Трајче Ѓорѓијевски

РЕШЕНИЈА НА НАГРАДНИТЕ ЗАДАЧИ ОД ПРЕТХОДНИОТ БРОЈ

1. Нека $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_3 a_2 a_1 a_0}$ е природен број со цифри $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Докажи дека

$$7|2^0 \cdot \overline{a_1 a_0} + 2^1 \cdot \overline{a_3 a_2} + 2^2 \cdot \overline{a_5 a_4} + 2^3 \cdot \overline{a_7 a_6} + \cdots$$

Доказ. Со примена на конгруенции имаме

$$\begin{array}{lcl}
1 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 7) \ /\cdot a_0 & & a_0 \equiv 1 \cdot a_0 \ (\mathrm{mod}\ 7) \\
10 \equiv 10 \ (\mathrm{mod}\ 7) \ /\cdot a_1 & & 10a_1 \equiv 10a_1 \ (\mathrm{mod}\ 7) \\
10^2 \equiv 1 \cdot 2 \ (\mathrm{mod}\ 7) \ /\cdot a_2 & & 10^2 a_2 \equiv 1 \cdot 2a_2 \ (\mathrm{mod}\ 7) \\
10^3 \equiv 10 \cdot 2 \ (\mathrm{mod}\ 7) \ /\cdot a_3 & \Rightarrow & 10^3 a_3 \equiv 10 \cdot 2a_3 \ (\mathrm{mod}\ 7) \\
10^4 \equiv 1 \cdot 2^2 \ (\mathrm{mod}\ 7) \ /\cdot a_4 & & 10^4 a_4 \equiv 1 \cdot 2^2 a_4 \ (\mathrm{mod}\ 7) \\
10^5 \equiv 10 \cdot 2^2 \ (\mathrm{mod}\ 7) \ /\cdot a_5 & & 10^5 a_5 \equiv 10 \cdot 2^2 a_5 \ (\mathrm{mod}\ 7) \\
10^6 \equiv 1 \cdot 2^3 \ (\mathrm{mod}\ 7) \ /\cdot a_6 & & 10^6 a_6 \equiv 1 \cdot 2^3 a_6 \ (\mathrm{mod}\ 7) \\
10^7 \equiv 10 \cdot 2^3 \ (\mathrm{mod}\ 7) \ /\cdot a_7 & & 10^7 a_7 \equiv 10 \cdot 2^3 a_7 \ (\mathrm{mod}\ 7) \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

Добиваме дека:

$$7|a \ \Leftrightarrow a \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 7)$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + 10^3 a_3 + \cdots + 10^n a_n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 7)$$

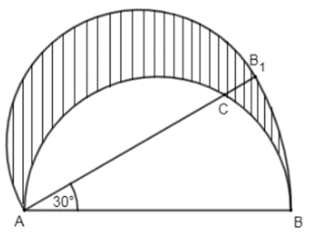
$$\Leftrightarrow a_0 + 10a_1 + 2a_2 + 2 \cdot 10a_3 + 2^2 a_4 + 2^2 \cdot 10a_5 + 2^3 a_6 + 2^3 \cdot 10a_7 + \cdots \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 7)$$

$$\Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} + 2\overline{a_3 a_2} + 2^2\overline{a_5 a_4} + 2^3\overline{a_7 a_6} + \cdots \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 7)$$

$$\Leftrightarrow 7|\overline{a_1 a_0} + 2\overline{a_3 a_2} + 2^2\overline{a_5 a_4} + 2^3\overline{a_7 a_6} + \cdots$$

2. Полукруг со радиус $\sqrt{3}\ cm$ ротира околу една крајна точка од својот дијаметар за агол од 30^0. Пресметај ја плоштината на 2Д-формата која се добива при опишувањето на полукружницата.

Решение.



Според скицата имаме:

$$P_{2D} = P_{is} + P_{pk} - P_{pk} = P_{is} = \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2 \pi \cdot 30^0}{360} = \pi\ cm^2.$$

УЧЕНИЦИ КОИ ИСПРАТИЈА ТОЧНИ РЕШЕНИЈА НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ ОД НУМЕРУС XLVIII–2, 2022/2023

Задачи	**Ученик**	**Одд.**	**Училиште**	**Место**
3969-3972	Олег Мирчески	4	Блаже Конески	Скопје
3977-3980 3981-3983	Никола Савов	6	Димитар Македонски	Скопје
3985-3988 3989-3992	Софија Ѓорчева	8	Тошо Велков – Пепето	Кавадарци
3989-3992 3993-3996	Марија Муканова	9	Александар Македонски	Скопје

*Дополнување на списокот ученици што испратија точни решенија на Конкурсните задачи од Нумерус XLVIII–2, 2022/2023:
Зад.3941–3944, Максим Здравковски, 4 одд.

ЧИТАТЕЛИ КОИ ИСПРАТИЈА ТОЧНИ РЕШЕНИЈА НА НАГРАДНИТЕ ЗАДАЧИ ОД НУМЕРУС XLVIII–2, 2022/2023

Задача	**Ученик**	**Одд.**	**Училиште**	**Место**
Ред.бр. 2	Марија Муканова	9	Александар Македонски	Скопје
Ред. бр.1	Панче Крстев			

Мирјана Тасевска
Весна Велеска

МАТЕМАТИКАТА ВО ОУ „ДАМЕ ГРУЕВ“ – БИТОЛА

Се чини дека математичкиот јазик многу убаво се зборува во нашето училиште - ОУ „Даме Груев“ од Битола кое се наоѓа во еден убав дел од градот и претставува синоним за наука, синоним за просвета и блескава иднина. Основното училиште „Даме Груев“ – Битола е основано во 1948 година со седиште на ул. Ѓорче Петров бр. 7 во населбата Јени Маало во Битола. Името го носи според Дамјан Јованов Груев или само Даме Груев (Смилево, 19 јануари 1871 – Русиново, 23 декември 1906) македонски револуционер, основач и еден од најистакнатите членови на Македонската револуционерна организација.

Иднината на светот е во мојата училница денес.

Не можеме да се надеваме дека многу од децата ќе научат математика, ако самите ние не најдеме начин да го споделиме со нив нашето задоволство од математиката, да им ја предочиме нејзината убавина и корисност.

Не верувам дека секој треба да стане математичар, но верувам дека многу ученици не ѝ даваат вистински шанси на математиката. Без возбудувања математиката, како и секоја друга работа, може да изгледа бесмислена и ладна. Математиката својата убавина им ја открива само на нејзините најстрпливи следбеници. Не постои ниеден дел од науките каде не може да се примени некоја од математичките дисциплини, или кој не е во релација со некоја математичка област.

Децата треба да прават тоа што го прават вистинските математичари – да истражуваат и откриваат целиот свој живот, како што го прават тоа учениците од математичката секција од нашето училиште.

Математичката секција е омилената активност на многу ученици од нашето училиште. За своите достигнувања и љубовта кон математиката ни говорат Дамјан Талевски, Јована Крајческа, Елена Георгиева, Петар Богоевски и Деа Ивановска, ученици во осмо одделение.

Дамјан Талевски: „Ја сакам играта со броевите, ја сакам логиката, решавањето на математички проблеми ме опушта, а лесно го поднесувам и стресот што го добивам пред секоја писмена работа. Ме исполнува алгебрата, бројните изрази, текстуалните задачи, но и натпреварот. Се натпреварувам уште од прво одделение. Тогаш на Кенгур освоив награда за освоено прво место. Од тогаш секоја година учествувам и на натпреварот и на натпреварот Дабар во второ, четврто, петто одделение и осмо одделение.

Од шестто одделение мојата класна раководителка е и наставничка по математика. „Нумеруси“ многу, безброј задачи и многу логика со мојата драга наставничка Мирјана. Математиката и натпреварите по математика се на врвот на моите приоритети и секогаш ќе бидат!"

Елена Георгиева: „Ја сакам математиката бидејќи е интересна и секогаш те држи во неизвесност додека не стигнеш до решението.“

Петар Богоевски: „Ме исполнува решавањето на математичките проблеми и ми создава желба за прифаќање на нови предизвици.“

Деа Ивановска: „Имам голема желба да напредувам во математиката што ми претставува задоволство. Уште како ученик во второ одделение учествував на натпревар по предлог даден од одделенскиот наставник. Првиот успех ме поттикна за уште повеќе работење кога почнав повеќе да ги разбирам математичките задачи. Во овој мој напредок значајно влијае и стручниот наставник по математика кој ме насочува и ми помага, што резултира со повеќе награди.“

Јована Крајческа: „Што мислам јас за математиката:

Чудесна е таа секогаш
мистериозна понекогаш.
Да те буни многу сака,
ако вежбаш нема мака,
задачи еден рој,
запиши правилен број.
Лесни,тешки ги има
добро загрејсе во зима
и геометрија малку реши
цртај,немој да грешиш
Во срцето таа ми стои
математиката успеси ми брои.“

Секој вложен труд и секоја активност во математиката заслужува некакво признание и не нè остава рамнодушни. Така што, гледано низ призмата на броевите, нашето училиште може да се издвои и пофали со многубројни успеси кои се гледаат од повеќето освоени награди на општинските, регионалните и државните натпревари по математика. Ќе наведеме само некои од нив кои се освоени во минативе две години:

Општински натпревар 2020/21: Елена Георгиева I награда, Деа Ивановска I награда, Јована Крајческа II награда, Петар Богоевски II награда, Дамјан Талевски II награда.

Регионален натпревар 2020/21: Елена Георгиева I награда, Деа Ивановска I награда, Јована Крајческа I награда, Петар Богоевски I награда, Дамјан Талевски II награда.

Пи - ден 2020.21: Петар Богоевски I награда.

Општински натпревар 2021/22: Елена Георгиева II награда, Деа Ивановска II награда, Јована Крајческа II награда.

Регионален натпревар 2021/22: Деа Ивановска I награда, Јована Крајческа I награда.

Државен натпревар 2021/22: Јована Крајческа III награда, Деа Ивановска III награда.

Математиката ни помага да одиме во длабочините на нештата. За тоа е доказ и нашата ученичка Деа Ивановска, која работеше на проект од областа на Теоријата на хаосот и беше учесник во научно истражувачката станица Петница во Србија.

Нашите ученици имаат светла иднина. Нивната посветеност и знаење ги носи до многу големи успеси. Тоа може да се види од примерот на нашата поранешна ученичка Мила Ивановска која ја замоливме да сподели со читателите на „Нумерус“ дел од своето искуство и нејзините сфаќања за учењето на математиката.

„Основно образование учев во ОУ „Даме Груев“ во Битола и тогаш започнав да одам на натпревари по математика - уште во четврто одделение почнувајќи со регионален натпревар. Можам да кажам дека уште пред тоа, од прилично мала возраст, многу ја сакав математиката и не само математиката туку генерално решавањето на задачи и проблеми. Потешко ми беше да учам други теоретски работи, но кога требаше да се решаваат задачи, јас тоа сакав да го правам со задоволство. Во четврто одделение освоив прва награда на регионалниот натпревар по математика, и за таа возраст не постоеше државен натпревар по математика. Понатаму продолжив да учествувам на натпревари и во седмо одделение освоив прва награда на државниот натпревар по математика. Потоа, на крајот на моето основно образование, поточно после деветто одделение се пласирав во јуниорскиот тим за Јуниорската балканска математичка олимпијада (ЈБМО) во 2017 година која се одржа во Варна, Бугарија. На истата олимпијада освоив бронзен медал, а тој успех го повторив во 2018 година на ЈБМО која се одржа во Родос Грција.

По овие интернационални успеси и достојно претставување на националниот тим, сфатив дека почнуваат сè повеќе да ме интересираат и природните науки. Не сакав да ја оставам математиката во ниеден момент, но сакав уште повеќе да ја искусам нејзината примена во другите полиња – па затоа почнав со физика, а потоа продолжив и со хемија. И ден денес она што најмногу ме влечи од академски аспект е решавањето на задачи, а тие задачи се основаат на многу голема примена на математиката. Моментално студирам на факултетот Харвард во САД. Студирам физика и компјутерски науки, но во секој семестар (полугодие) имам најмалку по еден предмет што е од областа на математиката, а во последно време и статистика која јас ја гледам како применета математика.

Како математиката ми помогна да стигнам тука, каде што сум сега? Можам да речам дека од моето искуство без математика многу е тешко (да не речам речиси невозможно) да успееш во која било природна наука. Математиката, исто така, од мое лично искуство, многу помага во логичното размислување, па и во креативното мислење. Овие две особини се многу ценети во секоја кариера.

Би сакала да посочам еден цитат: „Математиката е вратата и клучот кон сите науки“. Од моето досегашно искуство не можам повеќе да се сложам со тоа, затоа што според мене ако знаеш математика и си добар во неа многу полесно ќе успееш во животот, а не само во науката. Затоа, ниедна решена задача не е напразно загубено време туку напротив секоја една решена задача те качува едно скалило погоре на патот кон успехот.“

Ако децата не можат да научат на начинот на кој ги подучуваме, можеби треба да подучуваме на начин на кој тие учат. Капацитетот за учење е дарба, можноста за учење е вештина, но желбата за учење е избор. Многу често, учениците кои се обидувате да ги инспирирате се оние кои на крајот вас ќе ве инспирираат. Математиката гледана на вистинскиот начин, не само што поседува вистина, туку и врвна убавина. Секој ученик може да научи, само можеби не во ист ден и не на ист начин. Децата треба да се учат како да размислуваат, а не што да размислуваат.

ОДГОВОРИ/РЕШЕНИЈА

Решенија на задачите за самостојна работа од ЗАДАЧА ОД ШАХОВСКАТА ТАБЛА СО ФИГУРАТА КОЊ

1. Еве едно решение (се разбира, има и други):

26	1	42	63	24	5	38	51
43	64	25	4	39	50	23	6
2	27	62	41	8	21	52	37
61	44	3	28	49	40	7	22
30	15	48	57	20	9	36	53
45	60	29	16	33	56	19	10
14	31	58	47	12	17	54	35
59	46	13	32	55	34	11	18

2.

21	10	15	4	19
6	5	20	9	14
11	22	1	18	3
6	17	24	13	8
23	12	7	2	25

Решенија на задачите за самостојна работа од КРИПТОАРИТМОГОНИ

Задача 1. А=9, Б=2 и В=1.

Задача 2. А=5, Б=7, В=8 и Г=2.

Задача 3. А=7, Б=2, В=1 и Г=4.

Задача 4. Збирот ќе биде минимален за А=1,Н=0 и С=2. Бројот е 101012, а збирот на неговите цифри е 5.

Решенија на задачите за самостојна работа од ТАНГЕНТНИ И ТЕТИВНИ ЧЕТИРИАГОЛНИЦИ

1. Со директна примена на теорема 2, добиваме $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$ или заменувајќи ги вредностите на познатите страни $8+\overline{CD}=6+13$ од каде $\overline{CD}=6\text{cm}+13\text{cm}-8\text{cm}=11\text{cm}.$

2. Нека $ABCD$ правоаголен трапез. Ако претпоставиме дека околу него може да се опише кружница, добиваме дека тој е тетивен. Од теорема 3, мора збирот на неговите спротивни агли е еднаков на 180°. Спротивните агли на правоаголниот трапез не се сумплементни (нацртајте), од каде следува дека тој не може да биде тетивен.

3. Нека $ABCD$ е тангентен трапез. Тогаш важи $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$, а неговиот периметар е $L=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}$. Од двете равенства добиваме, $L=2(\overline{AB}+\overline{CD})$. Одовде следува дека $\overline{AB}+\overline{CD}=\frac{L}{2}$. Ако m е должината на средната линија во трапезот, имаме $m=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{CD}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{2}=\frac{L}{4}$.

4. Нека за аглите во четириаголникот важи дека $\alpha:\beta:\gamma:\delta = 2:5:7:6 = k$, т.е. $\alpha = 2k$, $\beta = 5k$, $\gamma = 7k$, $\delta = 6k$. Збирот на аглите во секој четириаголник изнесува 360°, т.е. $2k + 5k + 7k + 6k = 360°$ или $20k = 360°, k = 18°$. Аглите на четириаголникот се $\alpha = 2 \cdot 18° = 32°$, $\beta = 5 \cdot 18 = 90°$, $\gamma = 7 \cdot 18 = 126°$, $\delta = 6 \cdot 18 = 108°$. Но, сега имаме дека
$\alpha + \beta = 126°$, $\alpha + \gamma = 162°$, $\alpha + \delta = 144°$ па никои два од аглите не се сумплементни и четириаголникот не е тетивен.

ОДГОВОР НА МАТЕМАТИЧКА ЗАГАТКА 1

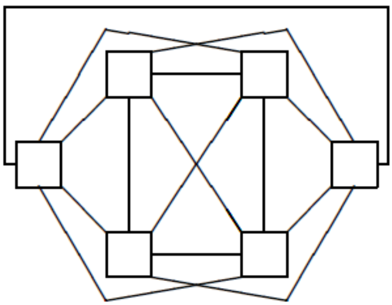
На местото од прашалникот треба да стои бројот 9. Имено, збирот на броевите во столпчињата редоследно е: 9, 8, 7, 6 и 5.

ОДГОВОР НА МАТЕМАТИЧКА ЗАГАТКА 2

Максималниот број на жители е 999 и тие имаат 0, 1, 2, ..., 998 влакна на главата соодветно.

ОДГОВОР НА МАТЕМАТИЧКА ЗАГАТКА 3

Едно можно поставување на патишата е следното:



ОДГОВОР НА МАТЕМАТИЧКА ЗАГАТКА 4

Од првите две реченици, заклучуваме дека во трите карти има една кралица и два џандара. Од вторите две реченици, заклучуваме дека во трите карти има еден лист и две кароа. Не може да има кралица лист, бидејќи тогаш ќе треба да има два џандара каро. Значи, картите се: кралица каро (Q♦), џандар каро (J♦) и џандар лист (J♠). Редоследот по кој биле наредени е: J♠, J♦, Q♦ или J♦, J♠, Q♦ или J♠, Q♦, J♦.

СОДРЖИНА