Математичко списание СИГМА
за учениците од средните училишта

ISSN 1409-6803 **UDC51(497.17)**

СОПСТВЕНИК И ИЗДАВАЧ:

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Првиот број на СИГМА е отпечатен во јануари 1979 година.

Излегува во четири броја во текот на една учебна година.

Цената на еден примерок е 200 денари.
Претплатата за четирите броја е 480 денари.
Порачките треба да се направат на web страната на СММ, https://smm.org.mk, во делот *Списанија и книги*, со пополнување на податоците наведени во *формата*.

Жиро сметка 3000 0000 1276 071, ЕДБ 4030 99 11 21 596,
Депонент: Комерцијална банка - Скопје, СМ на Македонија, за СИГМА.

Сите коментари, забелешки, Ваши предлози (статии, занимливости, задачи, работа со талентирани ученици и друго) за објавување во СИГМА, и решенија на задачите, можете да ги испратите на e-mail: sigma.spisanie.smm@gmail.com.

Стево Ѓоргиев, Маја Танчевска
Природно-математички факултет, Скопје
АД Осигурителна Полиса, Скопје

ОСНОВНА КЛАСИФИКАЦИЈА НА МЕТОДИТЕ ЗА ИЗБОР НА ПРИМЕРОК

Множеството чијшто елементи задоволуваат одредени карактеристики кои се предмет на истражување во едно статистичко истражување се нарекува *популација*. Елементи на популацијата можат да бидат индивидуи, домаќинства, претпријатија, маркети, училишта и слично. На пример, кога би сакале да го истражиме придонесот на претпријатијата кои се занимаваат со трговија на мало во економијата на една држава, популацијата ќе ја сочинуваат сите претпријатија кои се занимаваат со трговија на мало. Спроведувањето на ова истражување со целосен опфат, односно со испитување на сите елементи од популацијата, бара ангажирање на голем број на ресурси и средства, што не е секогаш возможно. Заради тоа, најчесто се избира подмножество од популацијата кое го нарекуваме *примерок*.

Примерокот како подмножество од популацијата, потребно е на најдобар начин да ги претставува останатите елементи од популацијата кои не се вклучени во примерокот, односно да биде репрезентативен. Поголема репрезентативност на примерокот значи поголема точност на заклучоците од истражувањето и подобри резултати при генерализирање. Изборот на елементи од популацијата кои ќе бидат елементи на примерокот, може да се направи на повеќе начини, но според најосновната поделба на *методите за избор на примерок* можеме да ги поделиме во две групи:

- Веројатносни методи за избор на примерок
- Неверојатносни методи за избор на примерок

Веројатносни методи за избор на примерок

Примероците кои се избираат со помош на веројатносни методи за избор на примерок ги нарекуваме *веројатносни примероци*. Веројатносниот примерок уште се нарекува и *случаен* или *репрезентативен примерок*. При веројатносен примерок, секој елемент на популацијата има ненулта веројатност да биде вклучен во примерокот, која ја нарекуваме веројатност на избор. Придружувањето на веројатност на избор на секој елемент од популацијата треба да биде објективно и популацијата да биде прецизно дефинирана. Применувањето на овие техники, не е можно за популација која е добиена со општа категоризација, односно која се состои од одредена категорија на елементи кои можат да се најдат насекаде.

Ако предмет на истражување се вработени во трговија на мало, тоа значи дека секоја личност која е вработена во претпријатие кое се занимава со трговија на мало, е елемент на нашата популација. Но, доколку предмет на истражување се вработени во трговија на мало во една држава во текот на 2023 година, тоа значи дека популацијата ја сочинуваат оние вработени во трговија на мало, кои се вработени во претпријатијата кои се занимаваат со трговија на мало во државата во наведениот период. Во овој случај може да се примени веројатносен метод за избор на примерок, заради тоа што популацијата е прецизно дефинирана со познат број на елементи.

Во минатото, кога сè уште не била толку развиена технологијата, се користел метод на лотарија за избор на елементи на примерокот. Овој метод се состоел во тоа што елементите на популацијата биле нумерирани со бројчиња од 1 до вкупниот број на елементи на популацијата, без повторување на ниту еден од броевите. Потоа, секој од тие бројчиња се запишувале на посебен лист хартија, се виткале ливчињата и се ставале во кутија или сад за мешање. Откако ќе била завршена оваа постапка, се влечеле ливчиња од кутијата, сè додека не се извлечат онолку ливчиња, колку што е предвидениот број на елементи за примерокот. Доколку бројот при нумерацијата на елементите на популацијата се наоѓа во извлечените ливчиња, тогаш тој елемент од популацијата е вклучен во примерокот. Но овој метод е застарен и со денешната напредна технологија, оваа постапка се врши компјутерски со генерирање на случајна низа од броеви или на некој друг пософистициран начин.

Веројатносните методи за избор на примерок имаат свои предности и недостатоци. Како предности при овие методи за избор на примерок можеме да ги наведеме:

- Намалување на систематската грешка, односно намалување на грешката за избор на несоодветен примерок;
- Непристрасност при изборот, односно изборот на елементите на примерокот се врши на случаен начин, а не по субјективна проценка на одредено лице;
- Поголема репрезентативност на примерокот, што значи дека заклучоците донесени врз основа на примерокот одговараат на реалната ситуација при генерализирање на ниво на популацијата.

Како недостатоци при овие методи за избор на примерок можеме да ги наведеме:

- Потребно е повеќе време за работа;
- Поскапи се во однос на други методи;
- Потребни се повеќе анализи.

Неверојатносни методи за избор на примерок

Примероците кои се избираат со помош на неверојатносни методи за избор на примерок уште ги нарекуваме и *неслучајни примероци* или *намерни (со проценка) примероци*. При неслучаен примерок, секој елемент од популацијата нема можност да учествува при изборот на примерокот врз основа на кој ќе се спроведе истражувањето. Изборот на елементи за примерокот од популацијата е врз основа на субјективна проценка на лицето кое го спроведува истражувањето. На пример, доколку спроведуваме истражување за карактеристиките на луѓето кои посетуваат театар, и притоа испраќаме лице кои ќе ги анкетира посетителите во одреден ден. Затоа што не знаеме кои лица во текот на тој ден ќе посетат театар, изборот на лицата кои ќе бидат анкетирани е врз основа на проценка на анкетарот кој го спроведува истражувањето, што всушност е субјективна проценка. На тој начин се доведува во прашање релевантноста на примерокот, затоа што анкетарот може да анкетира само одредена група на луѓе со која смета дека може да стапи во контакт. За разлика од случајниот примерок, неслучајниот примерок не бара популацијата да е прецизно дефинирана. Според тоа, применувањето на техники од неверојатносни методи за избор на примерок е можно и во случај на општа категоризација на популацијата и во случај кога е специјална категоризација на популацијата.

Всушност, овие техники можеме да ги користиме и во истражување кое сакаме да го спроведеме на вработени во претпријатија кои се занимаваат со трговија на мало и во истражување кое се спроведува за вработени во претпријатија во трговија на мало во одредена држава во текот на 2023 година. Во првиот случај, елементи на популацијата се сите вработени во претпријатија кои се занимаваат со трговија на мало, односно бројот на елементи во популацијата е „бесконечен“. Во вториот случај, елементи на популацијата се сите вработени во претпријатија кои се занимаваат со трговија на мало со конкретно определена држава, во текот на 2023 година, односно со ваквата спецификација сме се ограничиле на популација која се состои од конечен број на елементи.

Техниките кои се користат при неверојатносни методи за избор на примерок ни овозможуваат да избере примерок од популација која се состои од „бесконечен“ број на елементи. Овие начини за избор на примерок, најчесто се користат за спроведување на пилот истражувања, односно истражувања кои се прават со цел да се добијат некои нови идеи и начини на истражување, кои ќе бидат предмет на тестирање за тоа дали можат и како можат во иднина да се имплементираат во системот на истражување.

Како и веројатносните, така и неверојатносните методи за избор на примерок имаат свои предности и недостатоци. Како предности на неверојатносните методи за избор на примерок можеме да ги наведеме:

- Не е потребно вложување на големи напори при изборот на примерокот;
- Потребно е помалку време за спроведување на истражувањето;
- Трошоците за истражување се помали.

Како недостатоци на неверојатносните методи за избор на примерок можеме да ги наведеме:

- Склони кон појавување на систематска грешка и губење на непристрасноста;
- За примерокот не може со сигурност да се каже дека е добар репрезент за популацијата;
- Заклучоците донесени врз основа на овој примерок, не е пожелно да се генерализираат за популацијата.

Покрај сите недостатоци, иако на прв поглед изгледа безцелно постоењето на неверојатносните примероци, сепак тоа не е така. Неверојатносните примероци се од големо значење кога сакаме да собереме одредени информации за тоа во која насока сакаме да го насочиме истражувањето со веројатносен примерок. На пример, во веројатносните примероци, при поделба на елементите на популацијата во групи по одредени карактеристики кои ги задоволуваат, потребна е поширока анализа за точно определување на групите. Во тој случај одреден неверојатносен примерок е добра алатка за прибирање на прелиминарни информации за утврдување на карактеристиките на популацијата и класифицирање на истите, па со нивна помош и креирање на групите. Неверојатносните примероци се погодни за користење во случај кога е скоро невозможно креирањето на листа од сите елементи на популацијата со сите потребни карактеристики за истражувањето. На пример, да претпоставиме дека сакаме да направиме истражување за лицата кои посетуваат театар во текот на една недела. Јасно е дека во овој случај мора да се користи неверојатносен примерок, затоа што ние немаме информации за лицата кои ќе го посетат театарот во текот на таа недела, а со тоа невозможно е креирањето на листа од сите елементи на популацијата со сите потребни карактеристики за истражувањето од која ќе се избира случајниот примерок.

Неверојатносен примерок	**Веројатносен примерок**
Изборот на примерок е врз база на субјективна проценка на анкетарот	Примерокот се избира на случаен начин
Секој елемент на популацијата нема еднаква веројатност на избор	Секој елемент на популацијата има иста веројатност на избор
Не се зема предвид пристрасноста при изборот	Се користи кога сакаме да ја редуцираме пристрасноста
Примерокот не е репрезентативен	Се користи за да се креира репрезентативен примерок
Лесно се наоѓаат испитаници	Тешко е наоѓањето на соодветни испитаници

Табела 1.1. Разлики помеѓу веројатносни и неверојатносни примероци

Извори:

[1] J. Cornfield, On samples from finite population, Journal of the American Statistical Association, 39, 1944

[2] Probability sampling: What it is, Examples & Steps, https://www.questionpro.com/blog/probability-sampling/

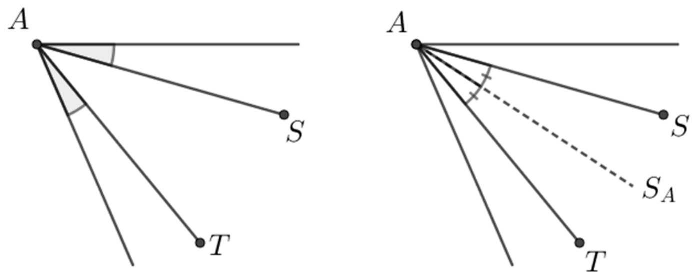
[3] McCombes, S. Sampling Methods | Types, Techniques & Examples, Dec 1, 2022, https://www.scribbr.com/methodology/sampling-methods/

Мирко Петрушевски, Петар Филиповски

ИЗОГОНАЛНИ ПАРОВИ ПРАВИ И ТОЧКИ

Во оваа статија ќе стане збор за спарување на прави што минуваат низ темето на даден агол, и за спарување на точки во однос на даден триаголник.

Дефиниција 1. За две прави AS и AT што минуваат низ темето A на даден агол велиме дека формираат **изогонален пар**, односно дека се **изогонално конјугирани**, доколку зафаќаат еднакви агли со краците на $\angle A$, или еквивалентно, со симетралата S_A на $\angle A$ (Цртеж 1).



Цртеж 1

Со други зборови, мерејќи од краците (односно на симетралата) на $\angle A$, аголот на наведнување на SA кон едниот крак (односно кон S_A) е спротивен на аголот на наведнување на TA кон другиот крак (односно кон S_A). Вообичаено, фактот дека прави a и b формираат изогонален пар во однос на $\angle A$ го означуваме со: $b = isog_{\angle A}(a)$; се разбира, притоа важи и $a = isog_{\angle A}(b)$.

Вежба 2. Кои прави a низ темето A на даден агол се неподвижни при трансформацијата $a \to isog_{\angle A}(a)$, т.е., задоволуваат $a = isog_{\angle A}(a)$?

Сугестија. Има точно две такви прави, и тие се заемно нормални.

Вежба 3. Во рамнина се дадени агол со теме A и две точки P и P'. Нека x и y се растојанијата од точката P до краците на $\angle A$, и нека x', y' се дефинирани аналогно за точката P'. Докажете дека:

точките A, P и P' се колинеарни ако и само ако $\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$.

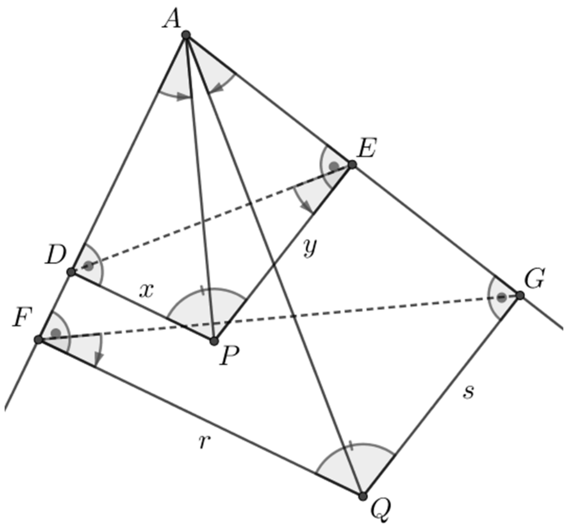
Претходната вежба кажува дека односот на растојанијата од променлива точка P до краците на $\angle A$ е инваријанта (т.н. **наклон**) за секоја права низ темето A.

Својство 4. Две точки P и Q лежат на изогонално конјугирани прави во однос на $\angle A$ ако и само ако парот растојанија од точката P до краците на $\angle A$ е обратно-пропорционален на соодветниот пар растојанија од точката Q; со други зборови, со ознаките од Цртеж 2, потребно и доволно е да важи

$$\frac{x}{y} = \frac{s}{r}.$$

Доказ. Да забележиме дека секоја од четворките A, D, P, E и A, F, Q, G е конциклична (т.е. споменатите четири точки се на кружница). Следствено, $\angle\overline{DAP} = \angle\overline{DEP}$ и $\angle\overline{GAQ} = \angle\overline{GFQ}$, а важи и дека $\angle\overline{DPE} = \angle\overline{FQG}$.

Оттаму, ги имаме следните еквиваленции: $\angle\overline{DAP} = -\angle\overline{GAQ}$ ако и само ако $\triangle\overline{DPE} \sim -\triangle\overline{GQF}$ (наведените триаголници се слични, но спротивно ориентирани) ако и само ако $\dfrac{DP}{EP} = \dfrac{GQ}{FQ}$. □



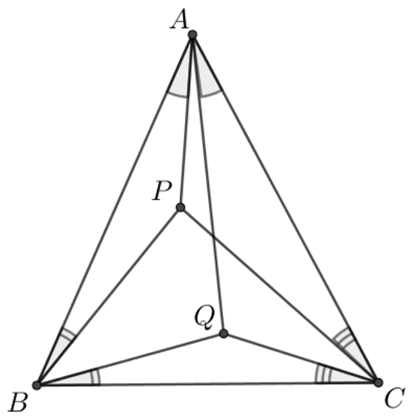
Цртеж 2

Подготвени сме за елементарен доказ на една интересна особина на секој триаголник. Но најпрво потсетуваме на два корисни поими.

Забелешка 5. За три прави велиме дека се **конкуретни** доколку имаат заедничка точка или се паралелни. Во насока на поистоветување на двете можности („заедничка точка“ или „паралелност“), кон секоја права (гледана како множество точки) придодаваме една бесконечна точка согласно следново: бесконечните точки на две прави се еднакви ако и само ако правите се паралелни; со други зборови, доколку под **правец** подразбираме севкупност (класа) од паралелни прави во рамнината, тогаш на секоја права ѝ го придодаваме и нејзиниот правец (како бесконечна точка на таа права). При оваа конвенција велиме дека работиме во **проективна рамнина**. Сега е јасно дека три прави се конкурентни ако и само ако имаат заедничка точка (која може да биде конечна или бесконечна). Згодно е, во проективната рамнина, да разгледуваме и **бесконечна права** – множеството бесконечни точки.

Теорема 6. Нека P е точка во рамнината на $\triangle ABC$, така што $P \neq A, B, C$. Тогаш трите прави што се изогонално конјугирани со правите AP, BP и CP, соодветно, се конкурентни (Цртеж 3).

Доказ. Без губење од општоста, можеме да претпоставиме дека изогонално конјугираните прави со AP и BP се сечат во (конечна) точка Q. Преостанува да докажеме дека точките P и Q лежат на изогонално конјугирани прави во однос на $\angle C$. За таа цел, воведуваме ознаки x, y, z; i, j, k за растојанијата до страните на $\triangle ABC$ од точките P и Q, како што е прикажано на Цртеж 4.



Цртеж 3

Тогаш, согласно Својство 4, имаме дека

$$\frac{x}{y} = \frac{j}{i}$$

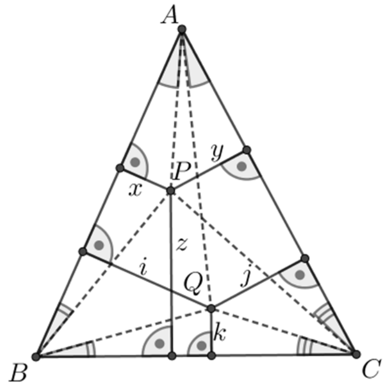
(бидејќи точките P и Q се на изогонално конјугирани прави во однос на $\angle A$) и

$$\frac{z}{x}=\frac{i}{k}$$

(точките P и Q се на изогонално конјугирани прави во однос на $\angle B$). Множејќи ги последните две равенства добиваме

$$\frac{z}{y}=\frac{j}{k},$$

што (според Својство 4) потврдува дека правите PC и QC формираат изогонален пар во однос на $\angle C$. □



Цртеж 4

Од особината на секој триаголник искажана со Теорема 6 произлегува следнава:

Дефиниција 7. Ако три прави низ темињата A,B,C на $\triangle ABC$ се конкурентни во точка P, а соодветните изогонално конјугирани прави (во однос на $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$) се конкурентни во точка Q, тогаш точките P и Q велиме дека формираат **изогонален пар**, т.е., се **изогонално конјугирани,** во однос на $\triangle ABC$. Честопати се користи ознаката $Q=isog_{\triangle ABC}(P)$; се разбира, притоа важи и $P=isog_{\triangle ABC}(Q)$.

Вежба 8. Во однос на даден $\triangle ABC$, кои точки P се изогонално конјугирани сами на себе, т.е., задоволуваат $P=isog_{\triangle ABC}(p)$?

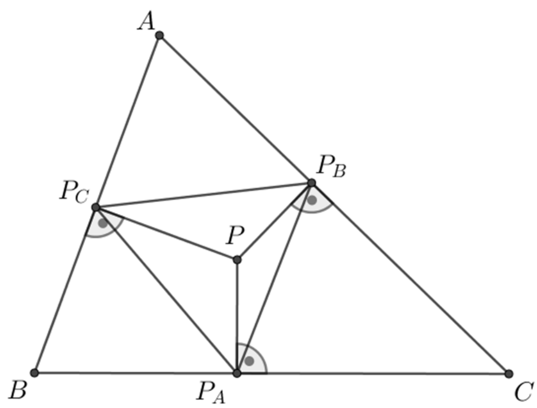
Сугестија. Има точно четири такви точки.

Вежба 9. Нека H и O се ортоцентарот и центарот на опишаната кружница (ABC) за $\triangle ABC$. Покажете дека H и O формираат изогонален пар во однос на $\triangle ABC$.

Вежба 10. Нека $Q=isog_{\triangle ABC}(P)$. Покажете дека Q е бесконечна точка ако и само ако $P\in (ABC)$.

Во контекст на изогонално конјугирани точки ќе изнесеме неколку интересни особини на т.н. педален триаголник (дефиниран во продолжение) на точка во однос на даден триаголник.

Дефиниција 11. Нека ABC е триаголник и P е точка од неговата рамнина. Нека P_A, P_B, P_C се ортогоналните проекции на точката P врз правите BC, CA, AB, соодветно. Тогаш $\triangle P_AP_BP_C$ се нарекува **педален триаголник** на точката P во однос на $\triangle ABC$ (Цртеж 5).



Цртеж 5

Вежба 12. Покажете дека $\triangle P_AP_BP_C$ е дегенериран, т.е. P_A, P_B и P_C се колинеарни, ако и само ако $P \in (ABC)$.

Сугестија. Оваа особина е разгледана во истава рубрика во Сигма 119, во статијата насловена „За правата на Симсон".

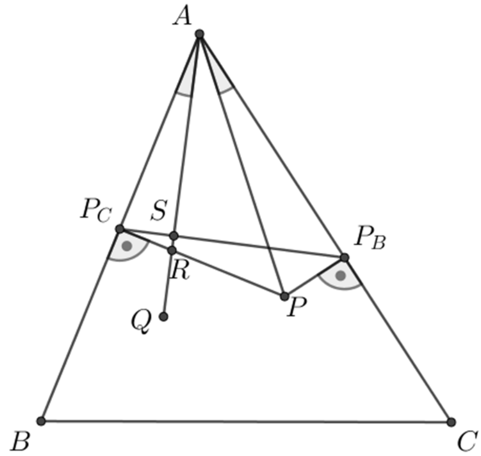
Теорема 13. Нека P е точка во рамнината на $\triangle ABC$ и нека $\triangle P_AP_BP_C$ е нејзиниот педален триаголник во однос на $\triangle ABC$. Нека r_A, r_B, r_C се прави кои минуваат низ точките A, B, C соодветно, при што $r_A \perp P_BP_C$, $r_B \perp P_CP_A$ и $r_C \perp P_AP_B$. Тогаш r_A, r_B, r_C се конкурентни во точката $isog_{\triangle ABC}(P)$.

Доказ. Нека $Q = isog_{\triangle ABC}(P)$. Од причини на симетрија, доволно е да докажеме дека $AQ \perp P_BP_C$ (т.е., дека $Q \in r_A$), при претпоставка дека Q е конечна точка. (Зошто?).

Ги користиме равенствата $\angle\overline{QAB} = -\angle\overline{PAC}$ и $\angle\overline{PAC} = \angle\overline{PAP_B} = \angle\overline{PP_CP_B}$.

Ако $R = AQ \cap PP_C$ и $S = AQ \cap P_BP_C$, тогаш $\triangle\overline{RP_CS} \sim -\triangle\overline{RAP_c}$.

Следствено, $\angle RSP_C = \dfrac{\pi}{2}$. □



Цртеж 6

Вежба 14. (ММО 2015) Нека D, E, F се подножјата на висините во $\triangle ABC$. Низ точката A повлекуваме права $l_A \perp EF$, низ точката B повлекуваме права $l_B \perp FD$, а низ точката C повлекуваме права $l_C \perp DE$. Покажете дека правите l_A, l_B, l_C имаат заедничка точка.

Вежба 15. Нека I_A, I_B, I_C се центрите на припишаните кружници на $\triangle ABC$. Нека X е допирна точка на A-припишаната кружница со страната BC, Y е допирна точка на B-припишаната кружница со страната CA, а Z е допирна точка на C-припишаната кружница со страната AB. Покажете дека правите I_AX, I_BY, I_CZ се конкурентни во центарот на опишаната кружница $(I_AI_BI_C)$.

Сугестија. Нека I е центарот на впишаната кружница за $\triangle ABC$. Што претставува I за $\triangle I_AI_BI_C$? Што претставуваат во тој поглед точките A, B, C?

(продолжува во следниот број)

Петар Филиповски, Јулија Митреска
ООУ „Кузман Јосифовски-Питу“, Скопје

ОЈЛЕРОВА ФОРМУЛА, ОЛЈЕРОВА ТЕОРЕМА И МАЛА ТЕОРЕМА НА ФЕРМА

Тема на обработка на оваа статија се познатите теореми на Олјер и Ферма. Знаејќи ја теоремата на Ојлер, многу лесно можеме да ја одредиме последната цифра на некој број. Исто така, во докажување на некоја деливост често ги користиме споменатите теореми. Пред да ги воведеме теоремите, ќе го воведеме поимот за **класа на конгруенција**, како и поимите за **комплетен** и **редуциран систем на остатоци**.

Нека n е природен број. За секој цел број a постојат единстевени цели броеви q и r такви што $0 \le r < n$ и $a = qn + r$, односно добиваме дека секој цел број a е конгруентен по модул n со еден и само еден од броевите $0,1,...,n-1$. За $r \in \mathbb{Z}$, $0 \le r < n$ со $C(n,r) = \{a \mid a \in \mathbb{Z}, a \equiv r (\mathrm{mod}\, n)\}$ ја означуваме **класата на конгруенцијата по модул n.**

Дефиниција 1. За едно множество $S = \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}\}$ од цели броеви велиме дека е **комплетен систем на остатоци по модул** n ако за $0 \le r \le n-1$, $x_r \in C(n,r)$.

Дефиниција 2. Нека $S = \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}\}$ е комплетен систем на остатоци по модул n и нека $S' \subseteq S$ се состои од сите броеви во S, кои се заемно прости со n. Тогаш за множество S' велиме дека е **редуциран систем на остатоци по модул n.**

Дефиниција 3. Бројот на природни броеви кои не се поголеми од даден природен број n и се заемно прости со него се означува со $\varphi(n)$. Функцијата φ се нарекува **Ојлерова функција.**

Во продолжение ќе ја дадеме табелата со вредностите на $\varphi(n)$ за првите петнаесет природни броеви:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8

Теорема 1. Ојлеровата функција φ е мултипликативна функција, т.е. ако $НЗД(n,m) = 1$, тогаш $\varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$.

Доказ. Јасно е дека $\varphi(1) = 1$. Нека $НЗД(n,m) = 1$. Треба да го одредиме бројот $\varphi(n \cdot m)$ на броевите од следнава табела кои се заемно прости со $n \cdot m$.

1	2	$\cdots$	m
$m+1$	$m+2$	$\cdots$	$m+m$
$2m+1$	$2m+2$	$\cdots$	$2m+m$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$(n-1)m+1$	$(n-1)m+2$	$\cdots$	$(n-1)m+m$

Бидејќи $НЗД(ma+j,m) = НЗД(j,m)$ следува дека или сите броеви од една колона од горната табела се заемно прости со m, или сите не се заемно прости со m. Значи, точно $\varphi(m)$ колони содржат броеви што се заемно прости со m. Бидејќи $НЗД(n,m) = 1$, $n-$те броеви во $j-$та колона формираат комплетен систем остатоци по модул n. Според дефиницијата на $\varphi(n)$, секоја колона содржи точно $\varphi(n)$ броеви заемно прости со n. Според тоа, во секоја од $\varphi(m)-$те колони има по точно $\varphi(n)$ броеви што се заемно прости и со n и со m. Од тоа што еден број е заемно прост со $n\cdot m$ ако и само ако тој е заемно прост со двата од тие броеви, следува $\varphi(n\cdot m)=\varphi(n)\cdot\varphi(m)$.

Теорема 2. Ако p е прост број и $k>1$, тогаш $\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}$.

Доказ. Нека $k>1$ и $n=p^k$, каде p е прост број. Тогаш во низата $1,2,...,p,...,2p,...,p\cdot p,...,p^{k-1}\cdot p$ има p^{k-1} броеви деливи со p, тоа се броевите $p,2p,3p,...,p^{k-1}\cdot p$, па $\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}$.

Теорема 3 (Формула на Ојлер). Ако $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ е даден природен број, тогаш

$$\varphi(n)=n\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

Доказ. Нека $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ е даден природен број. Тогаш од теорема 1 и теорема 2 имаме

$$\begin{aligned}\varphi(n)&=\varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right)\cdot\varphi\left(p_2^{\alpha_2}\right)\cdot\ldots\cdot\varphi\left(p_k^{\alpha_k}\right)\\&=\left(p_1^{\alpha_1}-p_1^{\alpha_1-1}\right)\cdot\left(p_2^{\alpha_2}-p_2^{\alpha_2-1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\right)\\&=p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)\cdot p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1)\\&=p_1^{\alpha_1}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot p_2^{\alpha_2}\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\\&=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\\&=n\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right).\end{aligned}$$

Последица 1. Ако p е прост број, тогаш $\varphi(p)=p-1$.

Доказ. Нека p е прост број. Тогаш $\varphi(p)=p\cdot(1-\frac{1}{p})=p-1$.

Последица 2. Ако природниот број n е од облик 2^m, тогаш $\varphi(n)=2^{m-1}$.

Доказ. Ако $n=2^m$, тогаш од теорема 3 имаме $\varphi(n)=2^m\cdot(1-\frac{1}{2})=\frac{2^m}{2}=2^{m-1}$.

Теорема 4. Ако природниот број $n\geq 3$, тогаш $2\,|\,\varphi(n)$.

Доказ. Ако природниот број n е од облик 2^m, тогаш од последица 2 следува $2\,|\,\varphi(n)$. Нека n не е од облик 2^m. Тогаш $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$, при што барем еден од броевите p_i, за $i\in\{1,2,...,k\}$ е непарен. Тогаш p_i-1 е парен број, па од теорема 3 следува $2\,|\,\varphi(n)$.

Пример 1. Пресметај $\varphi(240)$.

Решение. $\varphi(240)=2^4\cdot 3^1\cdot 5^1\cdot(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3})\cdot(1-\frac{1}{5})=2^4\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{5}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{4}{\cancel{5}}=64$

Пред да ја воведеме Ојлеровата теорема, ќе ја воведеме следнава теорема (без доказ), која ќе ја користиме при докажување на Ојлеровата теорема:

Теорема 5. Нека S' е редуциран систем на остатоци по модул n и нека a е природен број таков што $НЗД(a,n)=1$. Тогаш и множеството $T'=\{ax | x\in S'\}$ исто така е редуциран систем на остатоци по модул n .

Теорема 6 (Теорема на Ојлер). Нека a и n се заемно прости броеви. Тогаш $a^{\varphi(n)}\equiv 1(\mathrm{mod}\, n)$.

Доказ. Нека $S=\{a_1,a_2,...,a_{\varphi(n)}\}$ е редуциран систем на остатоци по модул n . Според претходната теорема, и системот $\{aa_1,aa_2,...,aa_{\varphi(n)}\}$ е редуциран систем на остатоци по модул n . Значи, за секој a_i постои еден и само еден a_j таков што $a_i\equiv aa_j(\mathrm{mod}\, n)$. Ако ги помножиме сите конгруенции од овај облик (ги има точно $\varphi(n)$), добиваме

$$a^{\varphi(n)}a_1a_2...a_{\varphi(n)}\equiv a_1a_2...a_{\varphi(n)}\,(\mathrm{mod}\, n)\,.$$

Од последното и од $НЗД(a_i,n)=1$, имаме $a^{\varphi(n)}\equiv 1(\mathrm{mod}\, n)$.

Пример 2. Со помош на теорема на Ојлер реши ја равенката $314^{164}\equiv x(\mathrm{mod}\,165)$.

Решение. Користејќи ја формулата на Ојлер имаме $\varphi(165)=3\cdot 5\cdot 11\cdot(1-\frac{1}{3})\cdot(1-\frac{1}{5})\cdot(1-\frac{1}{11})=80.$

Вака најденото $\varphi(165)=80$ го заменуваме во теоремата на Ојлер и добиваме

$$314^{\varphi(165)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,165)\Rightarrow 314^{80}\equiv 1(\mathrm{mod}\,165)\Rightarrow(314^{80})^2\equiv 1^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,165)$$

$$314\equiv 149(\mathrm{mod}\,165)\Rightarrow 314^2\equiv 149^2\equiv 22201\equiv 91(\mathrm{mod}\,165)$$

$$314^4\equiv 91^2\equiv 31(\mathrm{mod}\,165).$$

Следува $314^{164}=314^{160}\cdot 314^4\equiv 1\cdot 31\equiv 31(\mathrm{mod}\,165)$.

Теорема 7 (Мала Теорема на Ферма). Нека p е прост број кој е замено прост со природниот број a . Тогаш $a^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$.

Доказ. Ако $n=p$, тогаш $\varphi(n)=\varphi(p)=p-1$, па од Ојлеровата теорема имаме

$$a^{\varphi(n)}=a^{\varphi(p)}=a^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)\,.$$

Последица. Ако p е прост број и a е природен број, тогаш $a^p\equiv a\,(\mathrm{mod}\, p)$.

Пример 3. Со помош на малата теорема на Ферма реши ја равенката $(222^{333}-333^{222})\equiv x(\mathrm{mod}\,7)$.

Решение. Од теоремата на Ферма имаме

$$222^6\equiv 1(\mathrm{mod}\,7)\Rightarrow(222^6)^{55}=222^{330}\equiv 1(\mathrm{mod}\,7)\,.$$

Од друга страна, $222\equiv 5(\mathrm{mod}\,7)\Rightarrow 222^3\equiv 125\equiv 6(\mathrm{mod}\,7)$. Следува

$$222^{333}=222^{330}\cdot 222^3\equiv 1\cdot 6\equiv 6(\mathrm{mod}\,7)\,.$$

Аналогно, $333^6\equiv 1(\mathrm{mod}\,7)\Rightarrow(333^6)^{37}=333^{222}\equiv 1(\mathrm{mod}\,7)$.

Конечно добиваме $(222^{333}-333^{222})\equiv(6-1)\equiv 5(\mathrm{mod}\,7)$.

Задачи за прво читање:

1. Одреди ја последната цифра на бројот 123^{243}.

Решение. За да ја одредиме последната цифра треба да одредиме кој остаток се добива при делење на бројот 123^{243} со бројот 10. Бидејќи $123=3\cdot 61$, а $10=2\cdot 5$ добиваме дека $НЗД\left(123,10\right)=1$, односно можеме да ја примениме Олјеровата теорема. Следува $123^{\varphi(10)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,10)$, т.е. $123^4\equiv 1(\mathrm{mod}\,10)$. Со степенување на последниот израз имаме $\left(123^4\right)^{60}=123^{240}\equiv 1(\mathrm{mod}\,10)$. Од друга страна, $123\equiv 3(\mathrm{mod}\,10)$, т.е. $123^2\equiv 9(\mathrm{mod}\,10)$, односно $123^3\equiv 7(\mathrm{mod}\,10)$. Конечно, на крај добиваме $123^{243}=123^{240}\cdot 123^3\equiv 1\cdot 7\equiv 7(\mathrm{mod}\,10)$. Следува последната цифра на бројот 123^{243} е 7.

2. Одреди го двоцифрениот завршеток на бројот 2023^{2024}.

Решение. Слично, како во задача 1, за да ги одредиме последните две цифри треба да одредиме кој остаток се добива при делење на бројот 2023^{2024} со бројот 100. Од $2023=7\cdot 17^2$ и $100=2^2\cdot 5^2$ следува $НЗД\left(2023,100\right)=1$, односно, можеме да ја примениме Олјеровата теорема. Тогаш $2023^{\varphi(100)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,100)$, т.е. $2023^{40}\equiv 1(\mathrm{mod}\,100)$. Со степенување на последниот израз имаме $\left(2023^{40}\right)^{50}=2023^{2020}\equiv 1(\mathrm{mod}\,100)$. Од друга страна, $2023\equiv 23(\mathrm{mod}\,100)$, т.е. $2023^2\equiv 23^2\equiv 29(\mathrm{mod}\,100)$, односно $2023^4\equiv 29^2\equiv 41(\mathrm{mod}\,100)$. Според тоа добиваме дека $2023^{2024}=2023^{2020}\cdot 2023^4\equiv 1\cdot 41\equiv 41(\mathrm{mod}\,100)$. Следува двоцифрениот завршеток на бројот 2023^{2024} е 41.

3. Докажи дека $18^{143}-6^{25}$ е делив со 25.

Решение. Бидејќи $НЗД(18,25)=1$ и $НЗД(6,25)=1$ исполнети се условите од теоремата на Ојлер. Следува $18^{\varphi(25)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,25)$, т.е. $18^{20}\equiv 1(\mathrm{mod}\,25)$, односно $\left(18^{20}\right)^7=18^{140}\equiv 1(\mathrm{mod}\,25)$. Од друга страна, $18\equiv 18(\mathrm{mod}\,25)$, т.е. $18^2\equiv 24\equiv -1(\mathrm{mod}\,25)$, односно $18^4\equiv(-1)^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,25)$. Следува $18^{144}=18^{140}\cdot 18^4\equiv 1\cdot 1\equiv 1(\mathrm{mod}\,25)$. Слично, за 6^{25} добиваме $6^{\varphi(25)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,25)$, $6^{20}\equiv 1(\mathrm{mod}\,25)$. Од друга страна, $6\equiv 6(\mathrm{mod}\,25)$, т.е. $6^2\equiv 6^2\equiv 11(\mathrm{mod}\,25)$, односно $6^4\equiv 11^2\equiv 21(\mathrm{mod}\,25)$. Следува $6^5\equiv 21\cdot 6\equiv 126\equiv 1(\mathrm{mod}\,25)$, односно $6^{25}=6^{20}\cdot 6^5\equiv 1\cdot 1\equiv 1(\mathrm{mod}\,25)$. Конечно добиваме $18^{143}-6^{25}\equiv 1-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,25)$, што требаше да се докаже.

4. Нека p е непарен прост број. Докажи дека $1^p+2^p+3^p+...+(p-1)^p\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$.

Решение. Од последицата на теоремата на Ферма имаме $a^p\equiv a(\mathrm{mod}\,p)$. Според тоа

$$1^p+2^p+3^p+...+(p-1)^p\equiv 1+2+3+...+(p-1)(\mathrm{mod}\,p)\equiv\frac{p(p-1)}{2}(\mathrm{mod}\,p).$$

Бидејќи p е непарен број следува $p-1$ е парен број, па е делив со 2. Според тоа постои природен број k таков што $k=\frac{p-1}{2}$. Од последното добиваме

$$1^p+2^p+3^p+...+(p-1)^p\equiv pk\equiv 0(\mathrm{mod}\,p).$$

5. Докажи дека за било кои природни броеви n и m, $m^{61}n-mn^{61}$ е делив со 2015.

Решение. Бидејќи $2015=5\cdot13\cdot31$ треба да докажиме дека $m^{61}n-mn^{61}$ е делив со 5, 13 и 31. Прво ќе докажеме дека $m^{61}n-mn^{61}=mn\left(m^{60}-n^{60}\right)$ е делив со 31. Ако барем еден од броевите n и m е делив со 31, тогаш задачата е решена. Нека и двата броеви не се деливи со 31. Тогаш од малата теорема на Ферма имаме $m^{30}\equiv1(\bmod 31)$, па и $(m^{30})^2=m^{60}\equiv1(\bmod 31)$, односно $n^{30}\equiv1(\bmod 31)$, па $(n^{30})^2=n^{60}\equiv1(\bmod 31)$. Следува и нивната разлика $m^{60}-n^{60}$ е делива со 31. Аналогно се докажува и деливоста со 5 и 13. Со тоа задачата е решена.

Задачи за второ читање:

1. Ако p и q се различни прости броеви, докажи дека $p^{q-1}+q^{p-1}\equiv1(\bmod pq)$.

Решение. Од теоремата на Ферма следува $p^{q-1}\equiv1(\bmod q)$ и $q^{p-1}\equiv1(\bmod p)$, односно $q\,\big|\,p^{q-1}-1$ и $p\,\big|\,q^{p-1}-1$. Од друга страна, $p^{q-1}\equiv0(\bmod p)$ и $q^{p-1}\equiv0(\bmod q)$, односно $p\,\big|\,p^{q-1}$ и $q\,\big|\,q^{p-1}$. Од горната дискусија имаме $p\,\big|\,p^{q-1}+q^{p-1}-1$ и $q\,\big|\,p^{q-1}+q^{p-1}-1$. Бидејќи $НЗД\left(p,q\right)=1$ добиваме $pq\,\big|\,p^{q-1}+q^{p-1}-1$, т.е. $p^{q-1}+q^{p-1}\equiv1(\bmod pq)$.

2. Најди ги сите прости броеви p за кои $5^{p^2}+1\equiv0(\bmod p^2)$.

Решение. Нека $5^{p^2}+1\equiv0(\bmod p^2)$. Тоа е еквивалентно со $p^2\,\big|\,5^{p^2}+1$. Следува $p\,\big|\,5^{p^2}+1$. Од последицата на теоремата на Ферма и условите на задачата имаме $5^{p^2}\equiv\left(5^p\right)^p\equiv5^p\equiv5(\bmod p)$, односно $5^{p^2}+1\equiv5+1\equiv6\equiv0(\bmod p)$. Следува $p=2$ или $p=3$. Со директна проверка добиваме дека единствено решение е $p=3$.

3. Ако p е прост број поголем од 3 и ако a и b се природни броеви, докажи дека $6p\,\big|\,ab^p-a^pb$.

Решение. Од последицата на теоремата на Ферма имаме $a^p\equiv a(\bmod p)$ и $b^p\equiv b(\bmod p)$. Според тоа имаме

$$ab^p-a^pb\equiv ab-ab\equiv0(\bmod p).$$

Следува $p\,\big|\,ab^p-a^pb$. Бидејќи $НЗД\left(p,6\right)=1$ доволно е да докажеме дека $2\,\big|\,ab^p-a^pb$ и $3\,\big|\,ab^p-a^pb$. Ако барем еден од броевите a и b е парен, тогаш јасно е дека $2\,\big|\,ab^p-a^pb$. Ако a и b се непарни броеви, тогаш разликата ab^p-a^pb е парен број, па $2\,\big|\,ab^p-a^pb$. Следува $2\,\big|\,ab^p-a^pb$ за било кои природни броеви a и b. Ако барем еден од броевите a и b е делив со 3, тогаш $3\,\big|\,ab^p-a^pb$. Ако и двата броеви даваат ист остаток при делење со 3, тогаш разликата ab^p-a^pb е делива со 3. Останува да го разгледаме случајот кога едниот број дава остаток 1, а другиот број дава остаток 2 при делење со 3. Без губење на општоста ќе претпоставиме дека $a=3k+1$, а $b=3m+2$, каде што k и m се природни броеви. Бројот $a^p=\left(3k+1\right)^p$ дава остаток 1 при делење со 3, па производот a^pb дава остаток 2 при делење со 3. Бидејќи p е прост број поголем од 3, p е непарен број, па бројот $b^p=\left(3m+2\right)^p$ дава остаток 2 при делење со 3. Тогаш производот ab^p дава остаток 2 при делење со 3. Следува разликата $ab^p - a^p b$ е делива со 3. Според тоа $3\left|ab^p - a^p b\right.$ за било кои природни броеви a и b. Од $НЗД(2,3)=1$ и $НЗД(p,6)=1$ следува тврдењето.

4. Најди ги сите природни броеви n за кои $\varphi(n)=6$.

Решение. Нека $n = 2^{\alpha} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$, каде што $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \geq 0$ Користејќи ја Олјеровата формула имаме

$$\varphi(n) = \varphi\left(2^{\alpha}\right) \cdot \varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right) \cdot \varphi\left(p_2^{\alpha_2}\right) \cdot ... \cdot \varphi\left(p_k^{\alpha_k}\right).$$

Нека $k \geq 2$. Тогаш сите p_i за $i = \overline{1,k}$ се непарни броеви, па според последица 1 $\varphi\left(p_i^{\alpha_i}\right)$ се парни броеви, па нивниот производ е делив со 4, но тоа е во контрадикција со $\varphi(n)=6$ (4 не е делител на 6). Останува да ги разгледаме случаите кога $k=0$ или $k=1$. Нека $k=0$. Тогаш $\varphi(n) = \varphi\left(2^{\alpha}\right)$. Но, $\varphi\left(2^{\alpha}\right)=1$ за $\alpha=0$ и $\varphi\left(2^{\alpha}\right)=2^{\alpha-1}$ за $\alpha \geq 1$. Следува за $k=0$ равенката нема решение. Нека $k=1$. Тогаш $n = 2^{\alpha} \cdot p_1^{\alpha_1}$, каде $\alpha \geq 0$, $\alpha_1 \geq 1$. Според последиците 1 и 2 имаме $\varphi(n) = \varphi\left(2^{\alpha}\right) \cdot \varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right) = 2^{\alpha-1} \cdot p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)$. Од последново добиваме $p_1 \leq 7$. Нека $p_1 = 7$, тогаш $p_1 - 1 = 6$, па добиваме $\alpha_1 = 1$ и $\varphi\left(2^{\alpha}\right)=1$. Оттука имаме две решенија, $n = 2^0 \cdot 7^1 = 7$ и $n = 2^1 \cdot 7^1 = 14$. Нека $p_1 = 5$, тогаш $\varphi(p_1) = 4$, но 4 не е делител на 6, па за $p_1 = 5$ равенката нема решение. Останува уште да го разгледаме случајот кога $p_1 = 3$. Тогаш $n = 2^{\alpha} \cdot 3^{\alpha_1}$. Ако $\alpha_1 \geq 3$, тогаш $\varphi\left(3^{\alpha_1}\right) \geq 3^2 \cdot 2$, па равенката нема решение. Слично и за $\alpha_1 = 1$ равенката нема решение. Останува уште да го разгледаме случајот кога $\alpha_1 = 2$. Тогаш $\varphi(n) = \varphi\left(2^{\alpha}\right) \cdot \varphi\left(3^2\right) = \varphi\left(2^{\alpha}\right) \cdot 6$. Оваа равенка има две решенија, $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, односно $n = 2^0 \cdot 3^2 = 9$ и $n = 2^1 \cdot 3^2 = 18$. Следува задачата има четири решенија, $n=7$, $n=9$, $n=14$ и $n=18$.

Задачи за самостојна работа:

1. Реши ја равенката $33^{22} \equiv x(\text{mod}\,14)$. **Одговор.** $x=9$

2. Одреди ја последната цифра на бројот 57^{1995}. **Одговор.** 3

3. Одреди го двоцифрениот завршеток на бројот 627^{2009}. **Одговор.** 87

4. Одреди го трицифрениот завршеток на бројот 513^{2019}. **Одговор.** 873

5. Докажи дека бројот $2^{341}-2$ е делив со 11.

6. Докажи дека бројот $215^{722}-51^{324}$ е делив со 22.

7. Докажи дека бројот $n^7 - n$ е делив со 42 за секој природен број n.

8. Најди ги сите природни броеви n за кои $\varphi(n)=10$. **Одговор.** 11 и 22

Извори:

[1] Владимир Мићић, Зоран Каделбург, Душан Ђукић, Увод у теорију бројева, Београд, 2013

[2] Ellina Grigorieva, Methods of Solving Number Theory Problems, Birkhäuser, 2018

[3] Дончо Димовски, Ристо Малчески, Костадин Тренчевски, Зоран Шуниќ, Натпревари по математика ’94, СДМИ, Скопје, 1994

НИВОА НА ТЕСТИРАЊЕ

Постојат два различни нивоа на тестирање од корисничка гледна точка: ниско ниво на тестирање (low-level testing -LLT) и високо ниво на тестирање (high-level testing - HLT) каде што LLT е група на тестови за различни нивоа на компоненти од апликацијата додека HLT е група на тестови која ја покриват цела апликација.

Генерално постојат 7 нивоа на тестирање и тоа:

- **Тестирање на единица (UNIT TESTING):** Тоа во основа се прави во текот на процесот на развој од страна на програмерите или понекогаш од белата кутија тестери (white box testers) за да бидат сигурни дека програмскиот код работи без грешка и дека целосната спецификација е исполнета. Тие ги тестираат сите делови од програмски код што е напишан како што се класи, функции, интерфејси и процедури.
- **Тестирање на компонента (COMPONENT TESTING)**: оваа тестирање исто така се нарекува тестирање на модули. Разликата помеѓу тестирање на единица (unit testing) и тестирање на компонента (component testing)е тоа што во тестирањето на единица се тестира некое парче код, додека Component тестирање е тестирање на целата компонента.
- **Интеграциско тестирање (INTEGRATION TESTING):** се прави кога две компоненти се интегрирани со цел да се тестира однесувањето и фукционалноста на двете компоненти после интеграцијата како на пример: тестирање на интерфејсите помеѓу компонентите, комуникацијата меѓу различни делови од системот, како на пример комуникацијата со оперативниот систем, со базата на податоци итн.
- **Системско тестирање (SYSTEM TESTING):** е процес на тестирање каде што се тестира веќе интегрираниот систем дали ги исполнува барањата што се поставени од страна на клиентот. Ова тестирање почнува после интеграциското тестирање и се вика црна кутија (black box) тестирање. Во ова ниво тестерот подготвува тест план, тест сценарија кои потоа го извршува.
- **Систем интеграциско тестирање (SYSTEM INTEGRATION TESTING):** Системско интеграциско тестирање (SIT) е високо ниво на софтверско тестирање во кој тестерите проверуваат дали сите поврзани системи можат да работат со други системи во истата околина. Овој процес на тестирање проверува дали сите под-компоненти се успешно поврзани помеѓу себе.
- **Тестирање на одобрување (ACCEPTANCE TESTING):** во основа се прави за да се потврди дали сите барања на клиентот се имплементирани. Обично ова тестирање го прават клиентите или самите корисници.
- **Алфа тестирање (APLHA TESTING):** Алфа тестирањето е симулирано или вистинско оперативно тестирање од страна на потенцијални корисници / клиенти или независен тим на тестери. Алфа тестирањето често се користи за како форма на внатрешно одобрување тестирање (internal acceptance testing), пред софтверот да оди на бета тестирање.
- **Бета тестирање (BETA TESTING):** Ова тестирање го прават самите корисници пред да се пушти официјално во употреба.

Илија Јовчески

11. ЕВРОПСКА ЖЕНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА - ЕГМО 2022

Европската женска математичка олимпијада (EGMO 2022) се одржа во периодот 6 – 12.04.2022 во градот Егер, на 140 km од Будимпешта, Унгарија. По две години натпревари онлајн, оваа година организаторот Bolyai János Mathematical Society и Eszterházy Károly Catholic University смогнаа сили и беспрекорно го организираа натпреварот во живо. Дел од тимовите по сопствена одлука беа и годинава онлајн, но со таквата одлука беа и надвор од официјалната конкуренција. На ЕГМО оваа година учествуваа вкупно 222 девојки, од 57 држави, од кои 123 натпреварувачки од 31 европска држава. Нашиот тим го освои го 17-тото место во екипен пласман. Водач на тимот беше Анета Гацовска Барандовска, а заменик водач Ерблина Зеќири. Македонската екипа повторно ги надмина досегашните тимски резултати, а во поединечна конкуренција резултатите на девојките се следните:

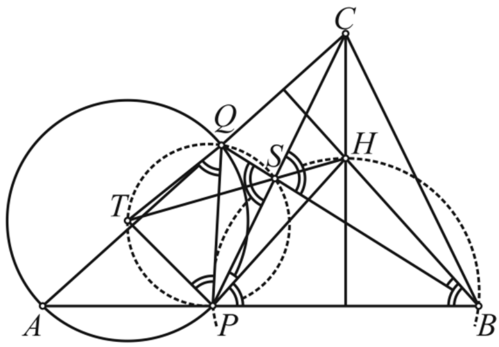
- **Јасна Илиева** – бронзен медал
- **Марија Атанасова** – бронзен медал
- **Емилија Николовска** – пофалница
- **Ивона Зикова** – пофалница

Задача 1. Нека ABC е остроаголен триаголник за чии должини на страни важи $BC < AB$ и $BC < CA$. Дадени се и точките P на отсечката AB и Q на отсечката AC, при што $P \neq B$, $Q \neq C$ и $BQ = BC = CP$. Нека T е центарот на опишаната кружница околу ΔAPQ, H е ортоцентарот на ΔABC и S е пресекот на правите BQ и CP. Докажи дека точите T, H и S се колинеарни.

Решение 1: Од рамнокраките триаголници ΔPBC и ΔQBC со ортоцентар H добиваме:

$$\measuredangle SPH = \measuredangle CPH = \measuredangle HBC = \measuredangle QBH = \measuredangle SBH$$

Од каде следува дека точките P, B, H и S лежат на една кружница, од каде добиваме дека $\measuredangle HSB = \measuredangle HPB = \measuredangle PBH = 90° - \measuredangle CAB$. Од причини на симетрија и $\measuredangle CSH = 90° - \measuredangle CAB$.

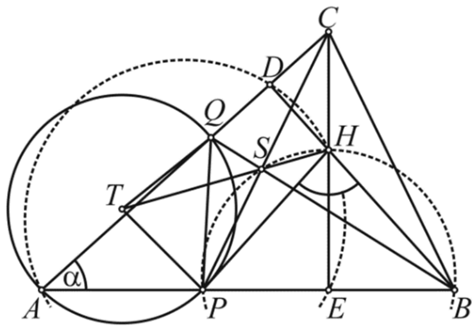


Оттука добиваме $\measuredangle PSQ = \measuredangle CSB = 180° - 2\measuredangle CAB$. А, како централен агол $\measuredangle QTP = 2\measuredangle QAB = 2\measuredangle CAB$. Според ова точките P, S, Q и T лежат на една кружница. Сега од $QT = PT$ следува:

$$\measuredangle PST = \measuredangle PQT = \measuredangle TPQ = \measuredangle TSQ$$

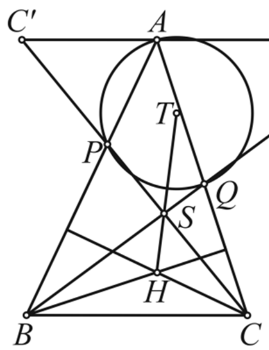
Според ова $\measuredangle PST = \measuredangle TSQ = \frac{1}{2}\measuredangle PSQ = 90° - \measuredangle CAB = \measuredangle CSH$, од каде следува дека точките T, S и H се колинеарни. ■

Решение 2: Нека $\measuredangle CAB=\alpha$, како во претходното решение добиваме $\measuredangle PSQ=180^\circ-2\alpha$, па $\measuredangle BSP=2\alpha$. Нека D и E се подножјата на висините од B и C соодветно. Од тетивниот четириаголник $AEHD$ добиваме дека: $\measuredangle BHE=\measuredangle DAE=\alpha$. Бидејќи CH е симетрала на отсечката PB добиваме дека и $\measuredangle EHP=\alpha$, па $\measuredangle BHP=2\alpha=\measuredangle BSP$. Според ова $BHSP$ е тетивен, од каде добиваме $\measuredangle PHS=\measuredangle PBS$.



Бидејќи ΔBPH и ΔQPT се рамнокраки со агол 2α при врвот, тие се слични. Според ова триаголниците се спирално симетрични со центар во P. Оттука следува дека и $\Delta PTH\sim\Delta PQB$, па $\measuredangle PHT=\measuredangle PBQ=\measuredangle PBS=\measuredangle PHS$. Според ова точките H, S и T се колинеарни. ■

Решение 3: Нека p е права паралелна на BC низ A, а B' и C' се пресеците на p со BQ и CP содветно. Од паралелноста следува дека $\Delta AQB'\sim\Delta CQB$ и $\Delta APC'\sim\Delta BPC$, па $\Delta AQB'$ и $\Delta APC'$ се рамнокраки.



Исто така и $\Delta BCS\sim\Delta B'C'S$ со центар на хомотетија S, па сликата на BH (која е нормална на CQ) ќе минува низ B' и ќе биде нормална на AQ. Бидејќи $\Delta AQB'$ е рамнокрак таа ќе биде симетралата на отсечката AQ, па минува низ T. Слично сликата на CH ќе минува низ C' и T. Оттука сликата на H при хомотетијата со центар во S е T, па H, S и T се колинеарни.

Задача 2. Множеството $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ е множество на природните броеви. Одреди ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, такви што за било кои два природни броеви a и b важат следните два услови:

1) $f(ab)=f(a)f(b)$ и
2) Најмалку два од бревите $f(a)$, $f(b)$ и $f(a+b)$ се еднакви.

Решение: Функцијата $f(x)=1$ очигледно ги задоволува условите на задачата. Нека p е прост број и $m>1$ е природен број. Дефинираме функција $f_{p,m}(a)=m^{\nu_p(a)}$, каде $\nu_p(a)$ е најголемиот степен на p кој е делител на a, то ест $p^{\nu_p(a)} \mid a$ и $p^{\nu_p(a)+1} \nmid a$. Својството 1 е задоволено за овие функции бидејќи степените се собираат при множење. За својството 2 доволно е да забележиме дека ако $f_{p,m}(a) \neq f_{p,m}(b)$, тогаш $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $\nu_p(a) < \nu_p(b)$. Во овој случај $\nu_p(a+b) = \nu_p(a)$, па $f_{p,m}(a+b) = f_{p,m}(a)$, т.е. својството е исполнето.

Доказот дека ова се сите функции кои ги задоволуваат дадените услови ќе го направиме на неколку начини.

Доказ 1: За $a = b = 1$ добиваме дека $f(1) = 1$. Со индукција добиваме дека $f\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}\right) = \prod_{i=1}^{k} f(p_i)^{a_i}$. Нека S е множеството од сите прости броеви p за кои $f(p) > 1$. Ако $|S| = 1$, тогаш $S = \{p\}$ и за $f(p) = m$ ја добиваме $f_{p,m}$. Ако S е празно добиваме $f(a) = 1$ за секој природен број a.

Да претпоставиме сега дека S има барем два елементи и нека $p < q$ се најмалите елементи во S. Сите прости делители на $q - p$ се помали од p, па $f(q-p) = 1$. Според 2, два од броевите $f(p) \neq 1$, $f(q-p) = 1$ и $f(q) \neq 1$ се еднакви, од каде $f(q) = f(p) = m > 1$.

Ако $p^2 < q$, тогаш $q - p^2$ не е делив со p и сите прости делители му се помали од q, па мора $f(q - p^2) = 1$. Сега од 2, два од броевите $f(p^2) = m^2$, $f(q - p^2) = 1$ и $f(q) = m$ се еднакви, што не е можно бидејќи $m > 1$.

Ако $p^2 > q$, тогаш постојат цели броеви $0 < c < p$ и $0 < d < q$ за кои важи $p^2 = cq + d$. Од $0 < d < q$ и $p \nmid d$, следува дека $f(d) = 1$, а од $0 < c < p$ следува дека $f(cq) = f(q) = m$. Сега од 2, два од броевите $f(d) = 1$, $f(cq) = m$ и $f(p^2) = m^2$ се еднакви, што не е можно бидејќи $m > 1$. Со што докажавме дека не постојат функции за кои $|S| > 1$. ■

Доказ 2: Нека p е најмалиот прост број за кој $f(p) = m > 0$. (Ако не постои ваков прост број се добива функцијата $f(x) = 1$.)

Лема: За секој природен број k важи $f(1 + p + \ldots + p^k) = 1$.

Доказ: Доказот ќе го направиме со индукција.

За $k = 0$ добиваме $f(1) = 1$ што следува директно од 1.

За $k = 1$ ги разгледуваме $f(1) = 1$, $f(p) = m$ и $f(p+1)$. За $p > 2$ очигледно $p+1$ е сложен и е производ од помали прости броеви, па $f(p+1) = 1$. Ако $p = 2$, тогаш $f(3) \neq 1$ следува $m = f(2) = f(3) = f(4) = m^2$, што не е можно.

За $k \geq 2$ имаме дека $f(1 + p + \ldots + p^{k-1}) = 1$, $f(p + p^2 + \ldots + p^k) = f(p) = m$, $f(1) = 1$ и $f(p^k) = m^k$, од каде $f(1 + p + \ldots + p^{k-1} + p^k) \in \{1, m\} \cap \{1, m^k\}$. За $k > 1$ пресекот е $\{1\}$ со што го завршивме индукцискиот доказ. □

Нека сега постои прост број $q > p$, за кој $f(q) > 1$. Според 1 имаме:

$$f\left(p^{q-1} - 1\right) = f(p-1) f\left(1 + p + \ldots + p^{q-2}\right) = 1$$

бидејќи $f(p-1)=1$. Но, од $q \mid p^{q-1}-1$ следува дека $f(q) \mid f\left(p^{q-1}-1\right)$, што е контрадикција.

Како и во првиот доказ добиваме $f_{p,m}$. ■

Доказ 3: Нека p е најмалиот прост број за кој $f(p)=m>0$. (Ако не постои ваков прост број се добива функцијата $f(x)=1$.)

Лема 1: Ако $f(m) \neq f(n)$, тогаш $f(n+m)=f(n-m)$ за секои природни броеви m и n за кои $n>m$.

Доказ: Од 2 имаме $\{f(n+m), f(n-m)\} \in \{f(n), f(m)\}$. Исто така

$$f(n+m)f(n-m)=f\left(n^2-m^2\right) \in \left\{f(n)^2, f(m)^2\right\}$$

Оттука $f(n+m)=f(n-m)=f(n)$ или $f(n+m)=f(n-m)=f(m)$. □

Лема 2: Ако p не е делител на n, тогаш $f(n)=1$.

Доказ: Нека n е најмалиот пример за кој ова не важи и $n=dp+r$, каде $0<r<p$. Освен тоа $d \geq 1$ бидејќи $n>p$.

Сега $1<f(d)f(p)=f(dp) \neq f(r)=1$, па од лемата $f(dp+r)=f(dp-r)=1$, што е контрадикција. □

Нека сега постои прост број $q>p$, за кој $f(q)>1$. Според 1 имаме:

$$f\left(p^{q-1}-1\right)=f(p-1)f\left(1+p+\ldots+p^{q-2}\right)=1$$

бидејќи $f(p-1)=1$. Но, од $q \mid p^{q-1}-1$ следува дека $f(q) \mid f\left(p^{q-1}-1\right)$, што е контрадикција.

Како и во првиот доказ добиваме $f_{p,m}$. ■

Задача 3. Бесконечната низа од природни броеви a_1, a_2, . . . се нарекува добра ако:

1) a_1 е полн квадрат и
2) за секој природен број n, a_n е најмалиот природен број за кој што $na_1+(n-1)a_2+\ldots+2a_{n-1}+a_n$ е полн квадрат

Докажи дека за секоја добра низа a_1, a_2, . . . , постои природен број k таков што $a_n=a_k$ важи за сите природни броеви $n>k$.

Решение 1: Ја разгледуваме низата $b_n=\sqrt{na_1+(n-1)a_2+\ldots+2a_{n-1}+a_n}$. За разликата на квадратите имаме:

$$b_{n+1}^2-b_n^2=\left((n+1)a_1+na_2+\ldots+2a_{n-1}+2a_n+a_{n+1}\right)-$$
$$\left(na_1+(n-1)a_2+\ldots+2a_{n-1}+a_n\right)=a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}$$

Нека $b_n=b_{n-1}+d$ за некое $n>2$. За b_{n+1} добиваме:

$$b_{n+1}^2-a_{n+1}=b_n^2+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n=2b_n^2-b_{n-1}^2=$$
$$2b_n^2-\left(b_n-d\right)^2=b_n^2+2db_n-d^2<\left(b_n+d\right)^2$$

Па, според условот 2 следува дека $b_{n+1} \leq b_n+d$, то ест $b_{n+1}-b_n \leq b_n-b_{n-1}$. Од каде следува дека разликите не растат, а бидејќи $b_{n+1}^2>b_n^2$, то ест $b_{n+1}-b_n \geq 1$, не можат и бесконечно да опаѓаат.

Според ова постјат природни броеви k и d, такви што за секој природен број $n \geq k$ важи $b_{n+1} - b_n = d$. Сега за $n \geq k$ имаме:

$$a_{n+1} = (a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) =$$
$$(b_{n+1}^2 - b_n^2) - (b_n^2 - b_{n-1}^2) = ((b_n + d)^2 - b_n^2) - (b_n^2 - (b_n - d)^2) =$$
$$d(2b + d) - d(2b_n - d) = d(2b + d - 2b + d) = 2d^2$$

Што е константа. Според ова за $n > k$ вредноста на a_n е константна. ■

Решение 2: Нека $s_n^2 = S_n = a_1 + (a_1 + a_2) + \ldots + (a_1 + \ldots + a_n)$ и $b_n = a_1 + \ldots + a_n$, за секој природен број n. Добиваме дека $S_n = b_1 + \ldots + b_n$ и $S_{n+1} = S_n + b_{n+1}$.
Го разгледуваме $S_n + b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + b_n$ на два начини. Од условите следува дека b_{n+1} е најмалиот природен број поголем од b_n, за кој $S_n + b_{n+1}$ е полн квадрат, па $S_n + b_n \geq (s_{n+1} - 1)^2$ (i). Исто така $S_n + b_n = 2S_n - S_{n-1}$ (ii). Со замнена на (ii) во (i) добиваме $s_n^2 \geq \frac{s_{n-1}^2 + (s_{n+1} - 1)^2}{2} > \left(\frac{s_{n-1} + s_{n+1} - 1}{2}\right)^2$, каде последното неравенство е строго, бидејќи низата (s_n) е строго растечка. По коренување се добива дека $s_n > \frac{s_{n-1} + s_{n+1} - 1}{2}$, од каде $s_n - s_{n-1} \geq s_{n+1} - s_n$. (iii)
Ако сега $d_n = s_{n+1} - s_n$ од тоа што (s_n) е строго растечка следува дека (d_n) е низа од позитивни броеви, а од (iii) следува дека е опаѓачка. Според ова по конечно многу вредности (d_n) е константна, то ест $d_n = d$ за секое $n \geq k$.
Како и во првото решение се добива дека $a_{n+1} = 2d^2$ за секое $n \geq k$. ■

Задача 4. За даден природен број $n \geq 2$ одреди го најголемиот природен број N, кој може да зависи од дадениот број и за кој постојат $N + 1$ реални броеви за кои важат:

1) $a_0 + a_1 = -\frac{1}{n}$ и
2) $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ за $1 \leq k \leq N - 1$.

Решение: Прво ќе докажеме дека за ваквата низа од броеви за $0 \leq i < n$ важи $a_{i+1} + a_i = -\frac{1}{n-i}$.
Според 1, тврдењето е точно за $i = 0$. Да претпоставиме дека е точно за некое $i < n - 1$. Од тврдењето 2 за $k = i + 1$ добиваме:

$$a_i - a_{i+2} = (a_{i+1} + a_i)(a_{i+1} + a_{i+2}) \Rightarrow a_i - a_{i+2} = -\frac{1}{n-i}(a_{i+1} + a_{i+2}) \Rightarrow$$
$$(n-i)a_{i+2} - (n-i)a_i = a_{i+1} + a_{i+2} \Rightarrow (n-i-1)a_{i+2} = a_{i+1} + (n-i)a_i \Rightarrow$$
$$(n-i-1)a_{i+2} + (n-i-1)a_{i+1} = (n-i)a_{i+1} + (n-i)a_i \Rightarrow$$
$$(n-(i+1))(a_{i+2} + a_{i+1}) = (n-i)(a_{i+1} + a_i) = (n-i)\left(-\frac{1}{n-i}\right) = -1$$

Од каде следува индукциското тврдење за $i + 1$, со што докажавме дека ова важи за $0 \leq i < n$.
Доколку ја направиме истата постапка за $i = n - 1$ во последното равенство добиваме $0 = (n-n)(a_{i+2} + a_{i+1}) = -1$, што не е можно. Според ова тврдењето од задачата не може да биде исполнето за $N > n$.
Останува да докажеме дека ова е можно за $N = n$. Навистина за $a_0 = 0$, користејќи ги равенствата $a_{i+1} + a_i = -\frac{1}{n-i}$ добиваме вредности за сите a_i за $0 < i < n$. За овие вредности важи:

$$a_{k-1} - a_{k+1} = (a_{k-1} + a_k) - (a_k + a_{k+1}) = -\frac{1}{n-i+1} + \frac{1}{n-i} = \frac{1}{(n-i)(n-i+1)} = (a_{k-1} + a_k)(a_k + a_{k+1})$$

Според ова добиените вредности ги задоволуваат дадените равенства. ■

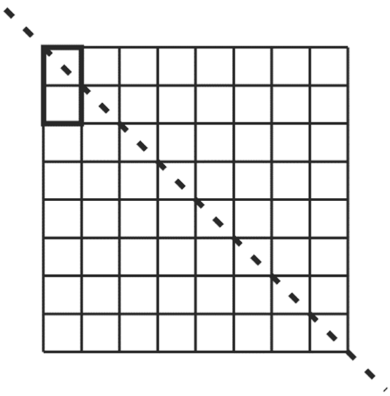
Задача 5. За сите природни броеви n и k, со $f(n,2k)$ го означуваме бројот на начини на кои може $n\times 2k$ табла целосно да се покрие со точно nk домина со димензија 2×1. (Така на пример $f(2,2)=2$ и $f(3,2)=3$.)

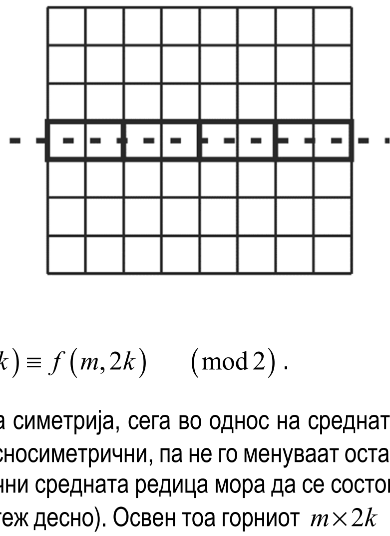
Одреди ги сите природни броеви n, такви што за секој природен број k, бројот $f(n,2k)$ е непарен.

Решение: Ќе докажеме дека бараните броеви се од облик 2^i-1. За доказот ќе користиме две леми.

Лема 1: За секој парен број $n>0$, важи $f(n,n)$ е парен.

Доказ: Навистина ако ги разгледаме распоредите кои се добиваат по осна симетрија во однос на дијагоналата секој распоред можеме да го ставиме во пар со осносиметричниот. Освен тоа никој распоред не е осносиметричен на себе, бидејќи домината не се осносиметрични во однос на дијагоналата (цртеж лево). Според ова сите распореди се поделени во парови, то ест има парен број на распореди. □





Лема 2: За секои цели броеви $m,k\geq 0$, $f(2m+1,2k)\equiv f(m,2k) \pmod 2$.

Доказ: Како во претходната лема разгледуваме осна симетрија, сега во однос на средната ($m+1$-ва) редица. Има парен број на распореди кои не се осносиметрични, па не го менуваат остатокот при делење со два. За распоредите кои се осно симетрични средната редица мора да се состои од цели домина и има само еден начин да се распоредат (цртеж десно). Освен тоа горниот $m\times 2k$ дел мора да е осносиметричен со долниот $m\times 2k$ дел од табелата. Оттука следува дека бројот на осносиметрични распореди е $f(m,2k)$, со што го докажавме тврдењето на лемата. □

Се враќаме на доказот. Очигледно $f(1,2k)=1$ (постои единствен начин да се постават домината во една редица). Бидејќи броевите 2^i-1 се добиваат индуктивно со операцијата во Лема 2 ($2^{i+1}-1=2\left(2^i-1\right)+1$), добиваме дека $f\left(2^i-1,2k\right)=1$, па овие броеви го задоволуваат бараното својство. Од Лема 1 следува дека ниту еден парен број не го задоволува бараното својство. Ако пак непарен број n не е меѓу избраните почнувајќи од него со постапката од Лема 2 по конечно многу чекори ќе стигнеме до парен број $2m>0$, па според лема 2, $f(n,2m)\equiv f(2m,2m)\equiv 0 \pmod 2$, то ест бројот n не ги задоволува условите на задачата. ■

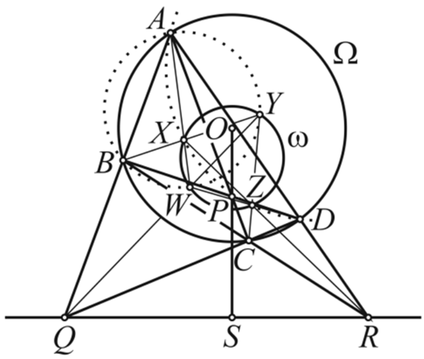
Задача 6. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник чиј центар на опишана кружница е точката O. Пресекот на симетралите на внатрешните агли во темињата A и B е точката X, пресекот на симетралите на внатрешните агли во темињата B и C е точката Y, пресекот на симетралите на внатрешните агли во темињата C и D е точката Z и пресекот на симетралите на внатрешните агли во темињата D и A е точката W. Нека правите AC и BD се сечат во точката P. Претпостави дека X, Y, Z, W, O и P се шест различни точки.

Докажи дека точките O, X, Y, Z и W лежат на една кружница ако и само ако точките P, X, Y, Z и W лежат на една кружница.

Решение 1: Нека Ω е опишаната кружница околу $ABCD$, а r е нејзиниот радиус. Од $\measuredangle AXB = 180° - \measuredangle XBA - \measuredangle BAX$ и $\measuredangle CZD = 180° - \measuredangle ZDC - \measuredangle DCZ$ добиваме $\measuredangle AXB + \measuredangle CZD = 360° - \frac{1}{2}\left(\measuredangle DBA + \measuredangle BAC + \measuredangle ADC - \measuredangle DCB\right) = 180°$. Според ова точките X, Y, Z и W лежат на кружница. Нека таа е ω.

Доволно е да докажеме дека O лежи на ω ако и само ако P лежи на ω.

Ако $ABCD$ е трапез, мора да биде рамнокрак бидејќи е впишан во кружница. Без губење на општоста мора $AB \parallel DC$. Од причини на симетрија точките X, Z, O и P лежат на заедничката симетрала на $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$. Според ова тие се колинеарни, но тоа значи дека ако O лежи на ω од условот на задачата имаме три различни колинеарни точки кои лежат на ω, што не е можно. Слично и P не може да лежи на ω. Според ова доволно е да го разгледаме случајот кога $AB \nparallel DC$ и $AD \nparallel BC$.

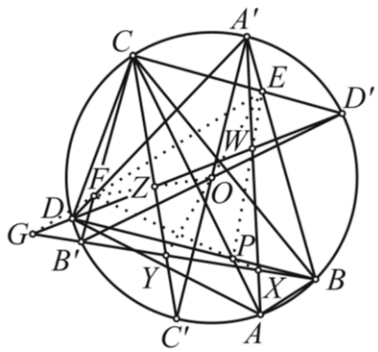


Нека правите AB и DC се сечат во точка Q, а AD и BC во точка R. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека B е меѓу A и Q, а D е меѓу A и R. Ќе докажеме дека QR е радикалната оска на Ω и ω.

Бидејќи точката W е во пресек на симетралите на $\measuredangle ADQ$ и $\measuredangle QAD$, следува дека W е центар на впишаната кружница на ΔADQ. Слично Y е во пресек на симетралите на $\measuredangle CBA$ и $\measuredangle DCB$, па Y е центар на припишаната кружница на ΔCBQ наспроти темето Q. Според ова W и Y лежат на симетралата на $\measuredangle DQA \equiv \measuredangle CQB$. Користејќи го равенството за надворешен агол добиваме $\measuredangle BYQ = \measuredangle YBA - \measuredangle YQB = \frac{\measuredangle CBA}{2} - \frac{\measuredangle CQB}{2} = \frac{\measuredangle BCQ}{2} = \frac{\measuredangle BAD}{2} = \measuredangle BAW$, па точките A, B, W и Y лежат на кружница. Според ова Q е радикалниот центар за оваа кружница, Ω и ω. Од причини на симетрија A, D, Z и X лежат на кружница и R е радикалниот центар за оваа кружница, Ω и ω. Со ова докажавме дека QR е радикалната оска на Ω и ω.

Нека правите OP и QR се сечат во S. Познато е дека ΔPQR во однос на опишаната кружница на $ABCD$ е автополарен (темињата со спротивните страни се пол и соодветна полара). Според ова за точката S важи равенството $\overline{OP} \cdot \overline{OS} = r^2$. Оттука добиваме дека $\overline{SP} \cdot \overline{SO} = \overline{OS} \cdot \left(\overline{OS} - \overline{OP}\right) = \overline{OS}^2 - r^2$, што е степенот на S во однос на Ω. Бидејќи S лежи на нивната радикална оска QR на Ω и ω, следува дека $\overline{SP}\cdot\overline{SO}$ е степенот на S и во однос на ω. Оттука следува дека P лежи на ω ако и само ако O лежи на ω. ■

Решение 2: Нека A', B', C' и D' се вторите пресечни точки на опишаната кружница на $ABCD$ со симетралите на $\measuredangle DAB$, $\measuredangle BCD$, $\measuredangle CDA$ и $\measuredangle DAB$ соодветно. Бидејќи A' и C' се средини на лаците со крајни точки B и D, а B' и D' се средините на лаците со крајни точки A и C, следува дека $\overline{A'C'}$ и $\overline{B'D'}$ се дијаметри, па се сечат во центарот O.

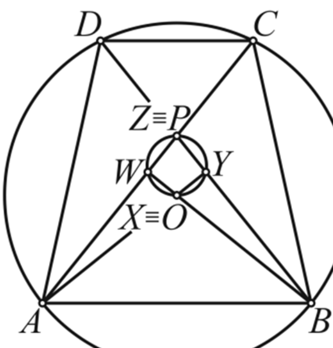


Ќе докажеме дека точките X, Y, Z, W, P и O лежат на конусен пресек, а бидејќи конусен пресек е еднозначно определен со 5 различни точки, ќе следува тврдењето на задачата. Навистина ако конусниот пресек определен од X, Y, Z, W и O е кружница, тогаш и P лежи на таа кружница, а ако X, Y, Z, W и P лежат на кружница, тогаш и O лежи на таа кружница.

Нека E е пресечната точка на $A'B$ и CD', F е пресечната точка на $A'D$ и CB' и G е пресечната точка на XY и ZW.

Од теоремата на Паскал:
За $BDD'CAA'$ добиваме дека точките P, W и E се колинеарни.
За $BB'D'CC'A'$ добиваме дека точките Y, O и E се колинеарни.
За $B'BDA'AC$ добиваме дека точките X, P и F се колинеарни.
За $B'D'DA'C'C$ добиваме дека точките O, Z и F се колинеарни.
За $D'CB'BA'D$ добиваме дека точките E, F и G се колинеарни.
Според ова спротивните страни на $WPXYOZ$ се сечат во колинеарните точки E, F и G, па од обратната теорема на Паскал следува дека точките X, Y, Z, W, P и O лежат на конусен пресек. ■

Забелешка: Тврдењето на задачата е точно и во случајот кога точките P и O се совпаѓаат со некоја од точките X, Y, Z и W.



Според дискусијата во првото решение во случајот кога $ABCD$ е трапез со $AB \parallel DC$, точките P, O, X и Z лежат на заедничката симетрала на $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$. Ако $\overline{AB} > \overline{DC}$ како на цртежот, тогаш O и X се поблиску до AB, а P и Z се поблиску до DC.

Точката P се совпаѓа со Z е еквивалентно со DB е симетрала на $\measuredangle ADC$. Бидејќи $\measuredangle BAX = \frac{\measuredangle BAD}{2} = 90° - \frac{\measuredangle ADC}{2} = 90° - \measuredangle ADZ$. Според ова DB е симетрала на $\measuredangle ADC$ е еквивалентно со $\measuredangle BAX = 90° - \measuredangle ADB = \measuredangle BAO$, што е еквивалентно со точката O се совпаѓа со X.

ЗАДАЧИ ОД УЧИЛНИЦАТА СИГМА 127

Ги покануваме учениците да испраќаат решенија на задачи од оваа рубрика. Решенијата да бидат подготвени во **MS Word**. Испратете ги на електронската адреса на списанието

sigma.spisanie.smm@gmail.com

со предмет „Задачи од Училницата". Ве молиме решенијата испратете ги во еден **WORD** документ (doc или docx формат). Со решенијата испратете: име и презиме, година, училиште и град. **Краен рок за испраќање на решенија е 20 февруари 2023.** Некои од решенијата ќе бидат објавени во наредниот број на Сигма и ќе бидат објавени имињата на сите ученици кои точно ја решиле задачата, а најуспешните решавачи во текот на учебната година ќе бидат симболично наградени.

Прва година

1. Нека a и b се цели броеви такви што во развиениот облик на полиномот $(x^2+ax+b)^3$ коефициентот пред x^4 е 99, а коефициентот пред x е 162. Најди ги вредностите на броевите a и b.

2. Нека a и b се реални броеви за кои важи $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{5}{2}$ и $a-b=\frac{3}{2}$. Најди ги сите можни вредности на изразот $A=a^2+2ab+b^2+2a^2b+2ab^2+a^2b^2$.

3. Внатрешните агли на конвексен многуаголник формираат аритметичка низа со разлика 4°. Одреди го бројот на страни на многуаголникот, ако неговиот најголем внатрешен агол е 172°.

Забелешка. Искористете дека внатрешните агли на многуаголникот, почнувајќи од најголемиот, можат да се подредат во опаѓачка низа во која секој следен член е за 4° помал од претходниот.

4. Нека $ADCB$ е конвексен четириаголник за кој $\measuredangle CBD=2\cdot\measuredangle ADB$, $\measuredangle ABD=2\cdot\measuredangle CDB$ и $\overline{AB}=\overline{CB}$. Докажи дека $\overline{AD}=\overline{CD}$.

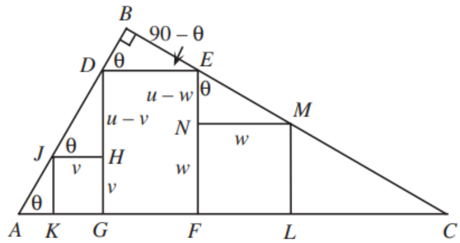
Втора година

1. Дадени се функциите $f(x)=2x+1$ и $g(f(x))=4x^2+1$. Најди ја функцијата $g(x)$.

2. Најди ги сите вредности на реалните броеви a и b за кои неравенството $\left|2x^2+ax+b\right|\le 1$ важи за секој реален број $x\in[-1,1]$.

3. Најди ја должината на интервалот на решенијата на неравенката $(x+6)\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2\ge x^2$.

4. Во правоаголниот триаголник ABC, со прав агол во темето B, вписан е правоаголник $DGFE$ како што е прикажано на цртежот. Квадратите $JKGH$ и $NFLM$ се вписани во триаголниците AGD и FCE соодветно. Ако страната на квадратот $JHGK$ е v, страната на $NFLM$ е w и ако $\overline{DG}=u$, докажи дека $u=v+w$.



Трета година

1. Без употреба на калкулатор пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{\sin(13^0)+\sin(47^0)+\sin(73^0)+\sin(107^0)}{\cos(17^0)}.$$

2. Реши ја равенката $\sin x\cos^2 x-\sin^3 x+2\sin x\cos^2 x=\sin\frac{3x}{2}$ за $x\in[0,\pi]$.

3. Во множеството реални броеви реши ја неравенката $\sin\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)\leq 0.$

4. Панорамско тркало има дијаметар од 20 метри и е подигнато на висина 1 метар над земјата. Тркалото прави едно полно завртување за 6 минути. За колку време, човек внатре во тркалото, ќе биде издигнат на височина поголема од 16 метри? Кошниците со луѓе може да ги сметаме како точки од кружницата која ја определува тркалото.

Четврта година

1. Докажи дека за секое $n\in\mathbb{N}$ $\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}>\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$.

2. Одреди ги сите вредности на параметарот a за кои дефиниционата област на функцијата $y=\log_{13+a}\left(\ln\frac{a-19x}{3x+a}\right)$ содржи затворен интервал со должина 2, којшто интервал се состои само од позитивни броеви.

3. За кои вредности на параметарот a, најголемата вредност на функцијата $f(x)=\frac{1}{x^2-6x+a}$, на сегментот $[7,9]$, не надминува $\frac{1}{12}$?

4. Нека n е непарен природен број поголем од 1. Докажи дека низата од биномните коефициенти $\binom{n}{1},\binom{n}{2},\ldots,\binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ се состои од непарен број непарни броеви.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИ ОД УЧИЛНИЦАТА СИГМА 126

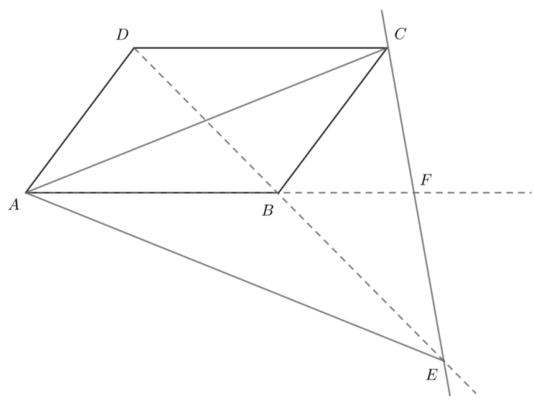
Прва година

1. Кате собрала 756 јаготки. Таа ги поделила јаготките за себе и на секоја од своите другарки така што секоја од нив добила еднаков број на јаготки. Но, три од другарките не се чувствувале гладни, па секоја од нив вратила по една четвртина од нивниот дел. Кате имала голем апетит за јаготки и го изела не само нејзиниот дел, туку и вратените јаготки. Таа го заборавила вкупниот број на јаготки што ги изела, но точно знае дека изела повеќе од 150 јаготки. Колку јаготки изела Кате?

Решение. Нека n е бројот на другарки, вклучувајќи ја и Кате. При поделбата, секоја добила по еднаков број, односно по $\frac{756}{n}$ јаготки. Потоа, три од другарките и вратиле на Кате по $\frac{1}{4}$ од јаготките, односно и вратиле по $\frac{1}{4}\cdot\frac{756}{n}=\frac{189}{n}$ јаготки. Оттука следува дека бројот на другарки n е делител на бројот 189 (цел број јаготки). Но, бројот на другарки е најмалку 3, па затоа $n \geq 4$. Броевите 4, 5, 6 и 8 не се делители на 189. За $n=7$ добиваме дека секоја добила по $\frac{756}{7}=108$ јаготки. Во овој случај, трите другарки и вратиле на Кате по $\frac{1}{4}\cdot 108=27$ јаготки, па оттука следува дека Кате изела вкупно $108+3\cdot 27=189$ јаготки. Ако $n \geq 9$, тогаш секоја би добила помалку од $\frac{756}{9}=84$ јаготки, од каде Кате би изела помалку од $84+3\cdot 21=147$ јаготки. Ова противречи на условот на задачата дека Кате изела повеќе од 150 јаготки. Значи за $n \geq 9$ задачата нема решение, од каде заклучуваме дека Кате изела 189 јаготки.

2. Нека $ABCD$ е паралелограм. На полуправата DB е избрана точка E таква што полуправата AB е симетралата на $\angle CAE$. Нека $F=CE\cap AB$. Докажи дека $\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}-\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}=1$.

Решение.



Отсечките BF и DC се паралелни. Според теоремата на Талес за пропорционални отсечки имаме $\overline{EC}:\overline{EF}=\overline{DC}:\overline{BF}$ и бидејќи $\overline{AB}=\overline{DC}$, добиваме дека $\frac{\overline{EC}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}$ .....(1). Полуправата AF е симетрала на $\angle CAE$ во ΔCAE, па според својството за симетрала на агол имаме дека $\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{CF}}{\overline{EF}}$. На двете страни на ова равенство додаваме 1 и го запишуваме во облик

$1+\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}}=1+\dfrac{\overline{CF}}{\overline{EF}}$. Средуваме до $1+\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{EF}+\overline{CF}}{\overline{EF}}$, односно $1+\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{EC}}{\overline{EF}}$. Од равенството (1), добиваме дека $1+\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BF}}$, или конечно $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BF}}-\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}}=1$.

3. Дадени се множествата $A=\{11k+8 \mid k\in\mathbb{Z}\}$, $B=\{4m \mid m\in\mathbb{Z}\}$ и $C=\{11\cdot(4n+1)-3 \mid n\in\mathbb{Z}\}$. Докажи дека $A\cap B=C$.

Решение. Ќе ја докажеме еквиваленцијата $x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in C$. Со тоа ќе биде докажана дадената еднаквост.

$\Rightarrow$: Нека x е произволен број и нека $x\in A\cap B$. Тогаш $x\in A$ и $x\in B$. Значи, постојат цели броеви k и m, така што $x=11k+8$ и $x=4m$, односно $11k+8=4m$. Оттука добиваме дека $11k=4m-8$, односно $11k=4\cdot(m-2)$. Бидејќи 11 и 4 се заемно прости броеви, следува дека $4\mid k$, т.е. $k=4t$, за некој $t\in\mathbb{Z}$. Тогаш бројот x може да се запише како $x=11k+8=11\cdot 4t+8=11\cdot 4t+11-3=11\cdot(4t+1)-3$. Јасно, $x\in C$. Докажавме дека $x\in A\cap B\Rightarrow x\in C$ .....(1)

$\Leftarrow$: Нека $x\in C$. Тогаш постои $n\in\mathbb{Z}$, така што $x=11\cdot(4n+1)-3$. Средуваме до облик $x=11\cdot 4n+8=4\cdot(11n-2)$. Ако замениме со $u=4n$, $u\in\mathbb{Z}$ и $v=11n+2$, $v\in\mathbb{Z}$, добиваме дека $x=11\cdot u+8=4\cdot v$. Следува дека $x\in A\cap B$. Докажавме дека $x\in C\Rightarrow x\in A\cap B$ .....(2).
Конечно од (1) и (2) следува дека $x\in A\cap B\Leftrightarrow x\in C$, а оттука $A\cap B=C$.

4. Најди ги сите парови природни броеви (n,p), каде што p е прост број, такви што

$$p\cdot(p+n)+p=(n+1)^3 .$$

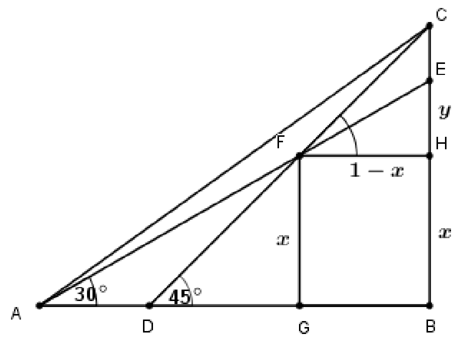
Решение. Дадената релација ја запишуваме во облик $p\cdot(p+n+1)=(n+1)^3$. Следува дека $p\mid(n+1)^3$. Бројот p е прост број, па оттука добиваме дека $p\mid n+1$. Значи, постои природен број k за кој $n+1=k\cdot p$. Заменуваме и добиваме $p\cdot(p+k\cdot p)=(k\cdot p)^3$, односно $p^2\cdot(1+k)=k^3\cdot p^3$. По делење со p^2, добиваме $1+k=k^3\cdot p$ Следува дека $k\mid k+1$. Бидејќи k и $k+1$ се последователни (а со тоа и заемно прости) броеви, ова е можно само ако $k=1$. Тогаш $p=2$ и $n=1$. Бараниот пар природни броеви е парот $(n,p)=(1,2)$.

Втора година

1. Најди ги сите вредности на параметарот $m\in\mathbb{R}$ такви што за реалните решенија x_1,x_2 на равенката $x^2+(m-4)x+(m^2-3m+3)=0$ важи релацијата $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=6$.

Решение. Да забележиме дека за равенката $x^2+(m-4)x+(m^2-3m+3)=0$ да има реални решенија потребно е нејзината дискриминанта да биде позитивна, односно $D=(m-4)^2-4(m^2-3m+3)=-3m^2+4m-4>0$. Од условот на задачата $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=6$ следува $6=x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$. Од Виетовите формули добиваме $6=(m-4)^2-2(m^2-3m+3)\Leftrightarrow m^2-2m-4=0$. Со решавање на последната квадратна равенка ги добиваме решенијата $m_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{20}}{2}=-1\pm\sqrt{5}$, но заради условот $D>0$ единствено решение за m ќе биде $m=\sqrt{5}-1$.

2. Нека е даден правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето B и нека точките D и E се на страните AB и BC соодветно такви што $\measuredangle BAE = 30°$ и $\measuredangle BDC = 45°$. Ако $\overline{AE} = \sqrt{3}$ и $\overline{CD} = \sqrt{2}$, пресметај го растојанието од пресекот на отсечките AE и CD до страната AB на триаголникот.



Решение. Нека пресекот на AE и CD го означиме со F. Подножјата на нормалите спуштени од F кон страните AB и BC ги означуваме со G и H соодветно. Нека $\overline{FG} = x$ и $\overline{EH} = y$. Од тоа што $\measuredangle HFE = \measuredangle BAE = 30°$ добиваме дека $x + y = \overline{FG} + \overline{HE} = \frac{\overline{AF}}{2} + \frac{\overline{FE}}{2} = \frac{\overline{AE}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Значи $x + y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Од друга страна $\measuredangle BDC = 45°$ и $\overline{CD} = \sqrt{2}$, од каде $\overline{DB} = \overline{CB} = 1$, односно $\overline{FH} = \overline{GB} = 1 - \overline{DG} = 1 - x$. Исто така $\measuredangle HFE = 30°$, од каде $\frac{\overline{EH}}{\overline{FH}} = tg\,30° \Leftrightarrow \frac{y}{1-x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x + \sqrt{3}y = 1$. Го добиваме системот $\begin{cases} x + y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x + \sqrt{3}y = 1 \end{cases}$ чие што решение е $x = \frac{1}{2\left(\sqrt{3}-1\right)}$. Тогаш бараното растојание е $\overline{FG} = \frac{1}{2\left(\sqrt{3}-1\right)}$.

3. Ако x и y се реални решенија на системот $\begin{cases} x + \frac{x}{y} + y = 8 \\ x \cdot \frac{x+y}{y} = 15 \end{cases}$, најди ја најмалата вредност на збирот $x + y$.

Решение. Ќе ставаме смена $x + y = u$ и $\frac{x}{y} = v$ и добиваме еквивалентен систем на дадениот, $\begin{cases} u + v = 8 \\ u \cdot v = 15 \end{cases}$. Последниот систем ќе го решиме со помош на метод на замена, ставајќи $v = 8 - u$. Добиваме $u\left(8 - u\right) = 15 \Leftrightarrow u^2 - 8u + 15 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 3, u_2 = 5$. Јасно е дека најмалата вредност на збирот $x + y = u = 3$.

4. Докажи дека за $z \in \mathbb{C}$, $\left|\frac{6z - i}{2 + 3iz}\right| \le 1$ ако и само ако $\left|z\right| \le \frac{1}{3}$.

Решение. Имаме дека $\left|\frac{6z - i}{2 + 3iz}\right| \le 1$ ако и само ако $\left|6z - i\right| \le \left|2 + 3iz\right|$, од каде што добиваме еквивалентно неравенство $\left|6z - i\right|^2 \le \left|2 + 3iz\right|^2$. Сега, од дефиницијата за модул на комплексен број имаме $(6z - i)(6\overline{z} + i) \le \left(2 + 3iz\right)\left(2 - 3i\,\overline{z}\right)$. Средуваме и добиваме

$$36z \cdot \overline{z} + 6iz - 6i\,\overline{z} + 1 \le 4 - 6i\,\overline{z} + 6iz + 9z\overline{z}\,,$$

односно $27z\cdot\overline{z}\le 3$. Конечно, $z\overline{z}\le\frac{1}{9}$, или еквивалентно $\left|z\right|\le\frac{1}{3}$.

Трета година

1. Докажи дека $\frac{\log\left(\mathrm{tg}1^0\right)\cdot\log\left(\mathrm{tg}3^0\right)\cdot\dots\cdot\log\left(\mathrm{tg}89^0\right)}{\log\left(\mathrm{tg}2^0\right)\cdot\log\left(\mathrm{tg}4^0\right)\cdot\dots\cdot\log\left(\mathrm{tg}88^0\right)}=0.$

Решение. Јасно $\mathrm{tg}\,45^0=1$ па следува $\log\left(\mathrm{tg}\,45^0\right)=0,$ додека $\mathrm{tg}\,n^0\ne 1$ за сите $n\in\{1,2,\dots,44,46,\dots,89\}$. Тогаш $\frac{\log\left(\mathrm{tg}1^0\right)\cdot\log\left(\mathrm{tg}3^0\right)\cdot\dots\cdot\log\left(\mathrm{tg}89^0\right)}{\log\left(\mathrm{tg}2^0\right)\cdot\log\left(\mathrm{tg}4^0\right)\cdot\dots\cdot\log\left(\mathrm{tg}88^0\right)}=0.$

2. За кои реални вредности на x и α важи неравенството $2^x+\frac{1}{2^x}\le 2\sin\alpha$?

Решение. Од $(2^x-1)^2\ge 0$ следува $4^x+1\ge 2\cdot 2^x$ односно $2^x+\frac{1}{2^x}\ge 2.$ Од друга страна, $2\sin\alpha\le 2,$ па затоа неравенството важи само кога $2^x+\frac{1}{2^x}=2$. Значи мора $\sin\alpha=1,$ односно $\alpha=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ и $x=0.$

3. Докажи дека ако $\begin{cases} a\sin^2 x+b\cos^2 x=1\\ a\cos^2 y+b\sin^2 y=1\\ a\tan x=b\tan y,\ a\ne b\end{cases}$ тогаш $a+b=2ab.$

Решение. Ако ја поделиме првата равенка на системот со $\cos^2 x\ne 0,$ добиваме равенка $a\cdot\mathrm{tg}^2x+b=\frac{1}{\cos^2 x}$. Ја трансформираме добиената равенка понатаму во облик

$$a\cdot\mathrm{tg}^2x+b=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}\Leftrightarrow a\cdot\mathrm{tg}^2x+b=\mathrm{tg}^2x+1\Leftrightarrow(a-1)\cdot\mathrm{tg}^2x=1-b.$$

На сличен начин, ако ја делиме втората равенка со $\cos^2 x\ne 0,$ добиваме равенка $(b-1)\tan^2 y=1-a.$ Ако ги делиме последните две равенки, при $\mathrm{tg}^2x\ne 0,a,b\ne 1,$ добиваме $\frac{\mathrm{tg}^2y}{\mathrm{tg}^2x}\cdot\frac{b-1}{a-1}=\frac{1-a}{1-b}$. Од последната равенка на системот, за $\mathrm{tg}^2x\ne 0,b\ne 0,$ се добива $\frac{\mathrm{tg}^2y}{\mathrm{tg}^2x}=\frac{a}{b},$ и ако ова го замениме погоре, добиваме $a^2(b-1)^2=b^2(a-1)^2.$

Ќе разгледаме две можни случаи:

i) $a(b-1)=b(a-1)$ од каде следува $a=b$ што е контрадикторно со условите на задачата.

ii) $a(b-1)=b(1-a)$ од каде следува $a+b=2ab.$

(Самостојно покажете дека во случаите $\cos^2 x=0,\mathrm{tg}^2x=0,a,b=1$ или $b=0$ не се добива контрадикција).

4. Одреди ја најголемата вредност на функцијата

$$f(x) = \log_2^2 x\left(\log_2^2 x + 3\log_2 \frac{8}{x^2}\right), \text{ за } 1 < x < 8.$$

Решение. Функцијата може да се доведе во облик

$$f(x) = \log_2^2 x\left(\log_2^2 x + 3\left(\log_2 2^3 - \log_2 x^2\right)\right) =$$
$$= \log_2^2 x\left(\log_2^2 x + 9 - 6\log_2 x\right) = \left(\log_2 x\left(\log_2 x - 3\right)\right)^2.$$

Сега е јасно дека најголемата вредност на функцијата се постигнува во истата точка во која се достигнува и најголемата вредност на функцијата

$$\left|\log_2 x\left(\log_2 x - 3\right)\right| = \left|\log_2 x\right|\left|\log_2 x - 3\right| = \log_2 x(3 - \log_2 x) \text{ за } 1 < x < 8.$$

Ако ставиме $\log_2 x = t,$ последниот израз добива облик на квадратен трином $-t^2 + 3t$, кој ја достигнува својата најголема вредност во точката $t = \frac{3}{2} \in (0,3),$ од каде $x = 2\sqrt{2}.$ Затоа, $f(2\sqrt{2}) = \frac{81}{16}$ е најголемата можна вредност на функцијата $f(x)$ за $1 < x < 8.$

Четврта година

1. Дадена е низата $\left(x_n\right)$ во која секој член е решение на равенката $x^2 - 2\cdot 3^k \cdot x + 9^k = 0$.

а) Одреди го најголемиот индекс k, за кој членот на низата x_k во својот декаден запис има најмногу седум цифри,

б) Одреди го најмалиот природен број N, за кој меѓу неговите делители има точно осум членови на низата,

в) Дали постои природен број n таков што збирот на n последователни членови на низата е еднаков на некој член на низата?

Решение. Јасно е дека дадената равенка има единствено решение $x = 3^k$, па општиот член на низата всушност е $x_n = 3^n, n \in \mathbb{N}$.

а) Да забележиме дека $3^7 = 2187 > 2\cdot 10^3$, од каде следува дека $3^{15} = 3\cdot\left(3^7\right)^2 > 3\cdot\left(2\cdot 10^3\right) = 3\cdot 4\cdot 10^6$. Ова значи дека 3^{15} во декадниот запис има повеќе од седум цифри. Со проверка се утврдува дека $3^{14} = 4782969$ од каде се добива дека $k = 14$.

б) Бројот 3^k (3 е прост број) за делители ги има степените на бројот 3: $3^1, 3^2, \dots, 3^k$. Јасно, 3^k ги содржи делителите на 3^{k-1}, секако и самиот себе. Па најмалиот природен број N кој го бараме ги содржи само првите осум членови на низата. Во спротивно, меѓу делителите на N ќе има повеќе од осум членови на низата. Според тоа N мора да е содржател на $3^8 = 6561$, а бидејќи се бара најмалиот таков број, мора $N = 3^8$.

в) Да претпоставиме дека таков избор постои т.е. за некои природни броеви l и t такви што $l < t$ важи $3^l + 3^{l+1} + \ldots + 3^{l+n-1} = 3^t$. Левата страна е збир на првите n членови на геометриска прогресија со прв член 3^l и количник 3, $\frac{3^l\left(1-3^n\right)}{1-3} = 3^t$, од каде се добива $3^n - 1 = 2\cdot 3^{t-l}$ што значи дека $3^n - 2 \cdot 3^{t-l} = 1$. Бидејќи $t > l$, а $n \in \mathbb{N}$ следува дека левата страна на ова равенство е секогаш делива со 3, а десната не е, што значи дека таков број не постои.

2. Дадена е низата (a_n), каде $a_1 = 1$, а секој член a_n се конструира од a_{n-1} на следниов начин:

- ако најголемиот непарен делител на n има остаток 1 при делење со 4, тогаш $a_n = a_{n-1} + 1$
- ако најголемиот непарен делител на n има остаток 3 при делење со 4, тогаш $a_n = a_{n-1} - 1$

Докажи дека бројот 1 се појавува бесконечно многу пати во низата.

Решение. Нека $a_n = a_{n-1} + b_n$. Тогаш $a_n = a_{n-2} + b_{n-1} + b_n = \ldots = 1 + b_2 + \ldots + b_n$. Притоа $b_{2n} = b_n$ бидејќи ако бројот n го има t како најголем непарен делител, тогаш и $2n$ го има t како најголем непарен делител. Лесно се забележува дека секој природен број од облик 2^n има најголем непарен делител еднаков на 1, а со тоа и остатокот при делење со 4 е 1. Според тоа $a_{2^n} = a_2 = 2,$ од каде следува дека $2 = a_{2^n} = a_{2^n-1} + b_{2^n} = a_{2^n-1} + 1$. Значи $a_{2^n-1} = 1$, за секој $n \in \mathbb{N}$, па заклучуваме дека бројот 1 се појавува бесконечно многу пати во низата.

3. Одреди ги сите вредности на параметарот a такви што равенката $64x^6 - (3x+a)^3 + 4x^2 - 3x = a$ има повеќе од едно решение.

Решение. Дадената равенка ја трансформираме до $64x^6 + 4x^2 = (3x+a)^3 + (3x+a)$. Да ја разгледаме функцијата $f(t) = t^3 + t$. Таа е монотоно растечка функција како збир од монотоно растечки функции. Според тоа равенката го добива обликот $f(4x^2) = f(3x+a)$ од каде заради монотоноста следува дека $4x^2 = 3x + a$. Последната равенка има повеќе од едно решение (две различни) кога дискриминантата на квадратната равенка $4x^2 - 3x - a = 0$ е позитивен број. Бараните вредности на параметарот a се добиваат кога важи $9 + 16a > 0$ односно за $a > -\frac{9}{16}$.

4. Одреди ги сите позитивни реални броеви a, b, c за кои што важи

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt{b} + 6\sqrt{c} = a + b + c = 49.$$

Решение. Од тоа што $a + b + c - 2\left(2\sqrt{a} + 3\sqrt{b} + 6\sqrt{c}\right) = 49 - 2 \cdot 49 = -49$ имаме

$$a + b + c - 2\left(2\sqrt{a} + 3\sqrt{b} + 6\sqrt{c}\right) + 49 = 0,$$

односно

$$a - 4\sqrt{a} + 4 + b - 6\sqrt{b} + 9 + c - 12\sqrt{c} + 36 = \left(\sqrt{a} - 2\right)^2 + \left(\sqrt{b} - 3\right)^2 + \left(\sqrt{c} - 6\right)^2 = 0.$$

Јасно, за исполнување на горното равенство секој квадрат мора да е еднаков на нула, па $a = 4, b = 9, c = 36$.

Подготвиле: Анета Гацовска-Барандовска, Emin Durmishi, Erblina Zeqiri, Јасмина Маркоска, Зоран Штерјов

РУБРИКА ЗАДАЧИ СИГМА 127

Ги покануваме учениците да испраќаат решенија на задачи од оваа рубрика. Решенијата да бидат подготвени во **MS Word**. Испратете ги на електронската адреса на списанието

sigma.spisanie.smm@gmail.com

со предмет „Рубрика Задачи". Ве молиме решенијата испратете ги во еден **WORD** документ (doc или docx формат). Со решенијата испратете: име и презиме, година, училиште и град. **Краен рок за испраќање на решенија е 20 февруари 2023.** Некои од решенијата ќе бидат објавени во наредниот број на Сигма и ќе бидат објавени имињата на сите ученици кои точно ја решиле задачата, а најуспешните решавачи во текот на учебната година ќе бидат симболично наградени.

1711. Да се најде најголемата вредност на аголот φ ако важи следното:
Во секој траголник со агли α, β, γ што не се поголеми од φ е исполнето неравенството

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \geq \frac{5}{4}.$$

Првиот ученик што ќе прати комплетно решение на задачата 1711 ќе биде награден со 1500 денари, вториот со 1000 денари, и третиот со 500 денари.

1712. Нека x_1 и x_2 две решенија на равенката $x^3 = 2022x + 2023$. Пресметај ${x_1}^2 + x_1x_2 + {x_2}^2$.

1713. Докажи дека за секој природен број n постои барем едно решение во множеството природни броеви на равенката

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n .$$

1714. Дадени се 8 точки во просторот такви што кои било три не лежат на иста права. Кој е најголемиот број на отсечки што можат да се повлечат со краеви во дадените точки така што не постојат три отсечки што формираат триаголник?

1715. Дали постои рамнина таква што растојанијата од темињата на дадена коцка до таа рамнина (во некој распоред) се во размер $1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8$?

1716. Во правоаголниот триаголник ABC со прав агол во темето C, е впишана кружница k со центар во точката I. Нека точката M е средина на страната $\overline{AB}$, а правата MI ја сече правата AC во точка X. Ако четириаголникот $AMIC$ е тетивен тогаш докажи дека триаголникот BXC е рамнокрак.

1717. На страната AB на триаголникот ABC избрана е произволна точка D. Нека правата p повлечена низ точката D паралелна со страната BC ја сече страната AC во точка E. Нека правата q повлечена низ точката D паралелна со страната AC ја сече страната BC во точка F. Докажи дека $P_{CEDF} = 2\sqrt{P_{ADE} \cdot P_{DBF}}$.

1718. Нека a, b, c и d се позитивни реални броеви поголеми од 1. Одреди ја најмалата можна вредност на изразот $log_a(ab^2) + log_b(b^2c^3) + log_c(c^5d^6) + log_d(d^{35}a^{36})$.

1719. На отсечката AB земени се произволни две точки M и N така што M да е помеѓу A и N. Нека k_1 и k_2 се кружници со дијаметри AN и MB соодветно, кои кружници се сечат во точките P и Q. Нека Е е точка од кружницата k_1 и нека отсечката EN ја сече отсечката PQ во точка X. Нека полуправата MX ја сече кружницата k_2 во точка F. Ако C е пресечната точка на полуправите AE и BF тогаш:

а) Докажи дека четириаголникот $EMNF$ е тетивен;

б) Докажи дека точките C, P и Q се колинеарни.

1720. Нека a и b се природни броеви со различна парност. Докажи дека бројот $(a + 3b)(5a + 7b)$ не е квадрат на природен број.

1721. Разложи го на множители полиномот $(a + b)^7 - a^7 - b^7$, а потоа реши ја равенката

$$(x + 7)^7 = x^7 + 7^7.$$

1722. Ако a, b, c се бочни рабови на тристрана пирамида кои се заемно нормални, тогаш висината h, која одговара на основата, е дадена со формулата $h = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}$. Докажи!

1723. Реши ја равенката $tg(ctgx) - ctg(tgx) = 0$.

1724. Нека z_1, z_2, z_3 се различни комплексни броеви со еднакви модули. Ако броевите $z_1 + z_2z_3$, $z_2 + z_3z_1$ и $z_3 + z_1z_2$ се реални, тогаш важи равенството $z_1z_2z_3 = 1$. Докажи!
1725. Низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е зададена со $a_1 = 1$ и $a_n = a_1a_2 \dots a_{n-1} + 1$, за $n \geq 2$. Дали постои реален број *M* таков што $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} \leq M$, за секој $m \in \mathbb{N}$?

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД СИГМА 126

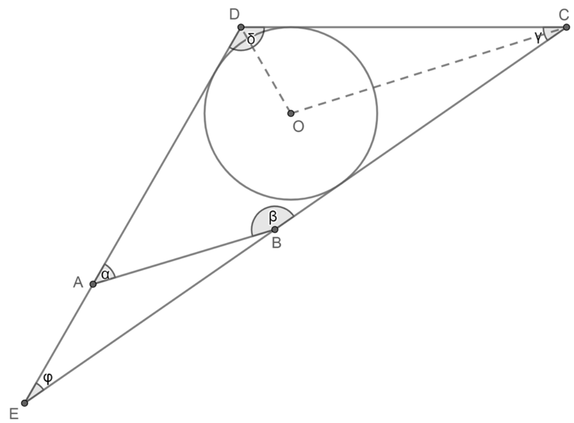
1696. Реалните броеви a, b, c се избрани така што системот $\begin{cases} ax + by = c \\ (a^2+1)x + (b^2+1)y = c^2+1 \end{cases}$ е противречен, а системот $\begin{cases} (b^2+1)x + (c^2+1)y = a^2+1 \\ (c^2+1)x + (a^2+1)y = b^2+1 \end{cases}$ има бесконечно многу решенија. Докажи дека важи равенството $a - b - c = \frac{a^2+c^2}{2b}$. Дали важи обратното?
Решение. Ќе докажеме дека двата услови се еквивалентни со $a = b = -c \neq 0$.
Системот $\begin{cases} ax + by = c \\ (a^2+1)x + (b^2+1)y = c^2+1 \end{cases}$ е противречен ако и само ако $\frac{a}{a^2+1} = \frac{b}{b^2+1} \neq \frac{c}{c^2+1}$, а системот $\begin{cases} (b^2+1)x + (c^2+1)y = a^2+1 \\ (c^2+1)x + (a^2+1)y = b^2+1 \end{cases}$ е неодреден ако и само ако $\frac{b^2+1}{c^2+1} = \frac{c^2+1}{a^2+1} = \frac{a^2+1}{b^2+1}$.
$\frac{a}{a^2+1} = \frac{b}{b^2+1} \Leftrightarrow (a-b)(ab-1) = 0$. Слично, $\frac{a}{a^2+1} \neq \frac{c}{c^2+1}$ и $\frac{b}{b^2+1} \neq \frac{c}{c^2+1}$ се трансформира до $(a-c)(ac-1) \neq 0$ и $(b-c)(bc-1) \neq 0$.
Значи, $\frac{a}{a^2+1} = \frac{b}{b^2+1} \neq \frac{c}{c^2+1}$ (односно системот $\begin{cases} ax + by = c \\ (a^2+1)x + (b^2+1)y = c^2+1 \end{cases}$ да е нерешлив) е еквивалентно со $\begin{cases} a = b \neq c \\ ac \neq 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} b = \frac{1}{a} \neq c \neq a \\ a \neq 0, a \neq \pm 1 \end{cases}$.
Од $\frac{b^2+1}{c^2+1} = \frac{c^2+1}{a^2+1} = \frac{a^2+1}{b^2+1}$ следува $\frac{b^2+1}{c^2+1} \cdot \frac{c^2+1}{a^2+1} = \frac{a^2+1}{b^2+1} \cdot \frac{a^2+1}{b^2+1} \Leftrightarrow (a^2+1)^3 = (b^2+1)^3 \Leftrightarrow a^2 = b^2$, а со замена на b^2 со a^2 во $\frac{c^2+1}{a^2+1} = \frac{a^2+1}{b^2+1}$ се добива и $c^2 = a^2$. Лесно се гледа дека важи и обратното, ако $a^2 = b^2 = c^2$ тогаш системот $\begin{cases} (b^2+1)x + (c^2+1)y = a^2+1 \\ (c^2+1)x + (a^2+1)y = b^2+1 \end{cases}$ има бесконечно многу решенија.
Од досегашната дискусија произлегува

$$\begin{cases} \frac{a}{a^2+1} = \frac{b}{b^2+1} \neq \frac{c}{c^2+1} \\ \frac{b^2+1}{c^2+1} = \frac{c^2+1}{a^2+1} = \frac{a^2+1}{b^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 = c^2 \\ a = b \neq c \\ ac \neq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a^2 = b^2 = c^2 \\ b = \frac{1}{a} \neq c \neq a \\ a \neq 0, a \neq \mp 1 \end{cases}.$$

Првиот добиен систем се сведува на $a = b = -c \neq 0$, а вториот нема решение бидејќи од $b = \frac{1}{a}$ и $a^2 = b^2$ се добива $a = -1$ или $a = 1$.
Од друга страна,

$$a - b - c = \frac{a^2+c^2}{2b} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab - 2b^2 - 2bc = a^2 + c^2 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 + (b+c)^2 = 0 \\ b \neq 0 \end{cases},$$

а последниот систем е очигледно еквивалентен со $a = b = -c \neq 0$.
1697. $ABCD$ е конвексен четириаголник таков што важи: $\angle BAD$ е остар агол, $\angle ADC$ е тап агол, и $\angle BAD + \angle CBA > \pi$. Нека O е центар на кружницата што ги допира страните BC, CD и DA.
Докажи дека $\overline{OC} > \overline{CD}$ ако и само ако $\overline{AB} \sin\angle BAD < (\overline{BC} - \overline{CD}) \sin(\angle BAD + \angle CBA)$.
Решение. Ќе воведеме ознаки за пократко запишување (како на цртежот): $BC \cap DA = \{E\}$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle CBA = \beta$, $\angle DCB = \gamma$, $\angle ADC = \delta$, и $\angle BEA = \angle CED = \varphi$. Да забележиме дека $\varphi = \alpha + \beta - \pi$ и $\angle COD = \pi - \frac{\gamma+\delta}{2} = \pi - \frac{2\pi-(\alpha+\beta)}{2}$, т.е. $\angle COD = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi+\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}$.



Од синусна теорема за $\triangle AEB$:

$$\frac{\overline{BA}}{\sin\varphi}=\frac{\overline{EB}}{\sin(\pi-\alpha)},$$

$$\overline{EB}=\overline{AB}\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi},$$

$$\overline{EC}=\overline{EB}+\overline{BC}=\overline{AB}\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}+\overline{BC}.$$

Од синусна теорема за $\triangle ECD$:

$$\frac{\overline{EC}}{\sin\delta}=\frac{\overline{CD}}{\sin\varphi},$$

$$\sin\delta=\frac{\overline{EC}\sin\varphi}{\overline{CD}}=$$

$$=\frac{\overline{AB}\sin\alpha+\overline{BC}\sin\varphi}{\overline{CD}}.$$

Заради претпоставката аголот δ да е тап ќе важи $\cos\delta<0$, односно $\cos\delta=-\sqrt{1-(\sin\delta)^2}$.

$$\cos\delta=-\sqrt{1-\left(\frac{\overline{AB}\sin\alpha+\overline{BC}\sin\varphi}{\overline{CD}}\right)^2}$$

Од синусна теорема за $\triangle DOC$ и бидејќи за остар агол $\dfrac{\theta}{2}$ важи $\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ и $\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$:

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{CD}}=\frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)}=\frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1-\cos\delta}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}}=\sqrt{\frac{1-\cos\delta}{1+\cos\varphi}}.$$

$$\overline{OC}>\overline{CD}\Leftrightarrow\sqrt{1-\cos\delta}>\sqrt{1+\cos\varphi}\Leftrightarrow\cos\varphi<-\cos\delta=\sqrt{1-\left(\frac{\overline{AB}\sin\alpha+\overline{BC}\sin\varphi}{\overline{CD}}\right)^2}$$

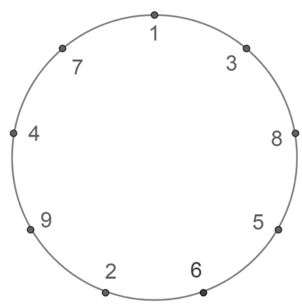
$$\Leftrightarrow(\cos\varphi)^2<1-\left(\frac{\overline{AB}\sin\alpha+\overline{BC}\sin\varphi}{\overline{CD}}\right)^2\Leftrightarrow\left(\frac{\overline{AB}\sin\alpha+\overline{BC}\sin\varphi}{\overline{CD}}\right)^2<(\sin\varphi)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overline{AB}\sin\alpha+\overline{BC}\sin\varphi<\overline{CD}\sin\varphi\Leftrightarrow\overline{AB}\sin\alpha<(\overline{CD}-\overline{BC})\sin(\alpha+\beta-\pi)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overline{AB}\sin\alpha<(\overline{CD}-\overline{BC})(-\sin(\alpha+\beta))\Leftrightarrow\overline{AB}\sin\alpha<(\overline{BC}-\overline{CD})\sin(\alpha+\beta).$$

1698. Дали е можно броевите $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ да се запишат на кружница така што збирот на кои било два соседни броја не е делив ниту со 3, ниту со 5, ниту со 7?

Решение. Одговорот е потврден, како што може да се види од цртежот десно. Уште повеќе, $n=9$ е најмалиот природен број различен од 1, таков што броевите од 1 до n можат да се распоредат на кружница така што збирот на кои било два соседни броја не е делив ниту со ниту со 3, ниту со 5, ниту со 7. Имено, ако $1<n<9$ тогаш 2 и 4 може да го имаат за сосед само 6 и 7 соодветно.



За лесно да го конструираме добиеното решение, доволно е да забележиме дека на кружницата:

(i) 1 мора да е меѓу 3 и 7,

(ii) 2 мора да е меѓу 6 и 9,

(iii) 4 мора да е меѓу 7 и 9.

1699. Реалните броеви u, v, x, y се такви што $u+v \geq 1, x+y \geq 1, u^2+x^2 \leq 1, v^2+y^2 \leq 1.$ Да се најде најмалата и најголемата вредност на изразот $uv-xy$.

Решение. Од неравенствата $u^2+x^2 \leq 1, v^2+y^2 \leq 1$ се добива $-1 \leq u, v, x, y \leq 1$, што заедно со $u+v \geq 1, x+y \geq 1$ имплицира $0 \leq u, v, x, y \leq 1$. Значи, $u \leq \sqrt{1-x^2}$ и $v \leq \sqrt{1-y^2}$.

$$uv-xy \leq \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}-xy \leq \frac{1-x^2+1-y^2}{2}-xy=1-\frac{(x+y)^2}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

Во последното неравенство „ $=$ “ важи ако и само ако

$$\begin{cases} x+y=1 \\ u^2=1-x^2=1-y^2=v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}=y \\ u=\frac{\sqrt{3}}{2}=v \end{cases}.$$

Слично, $xy-uv \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow uv-xy \geq -\frac{1}{2}$, и равенство важи ако и само ако $u=\frac{1}{2}=v$ и $x=\frac{\sqrt{3}}{2}=y$.

Докажавме дека, при дадените услови, најмалата и најголемата вредност на $uv-xy$ се $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$ соодветно.

1700. Да се најдат сите природни броеви n такви што множеството решенија на неравенката $\frac{2+\log_n x}{x-1}<\frac{6}{2x-1}$ не може да се претстави како унија на непразни дисјунктни отворени интервали.

Решение. Изразите во неравенката се дефинирани за $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1,+\infty)$ и $n \neq 1$ $(n \in \mathbb{N})$.

Ако $x \in (0,1) \backslash \left\{\frac{1}{2}\right\}$ тогаш неравенката е еквивалентна со $\log_n x>\frac{6(x-1)}{2x-1}-2$ односно $\log_n x>\frac{2x-4}{2x-1}$, а за $x>1$ неравенката е еквивалентна со $\log_n x<\frac{2x-4}{2x-1}$.

Нека $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Тогаш $\log_n x<0<\frac{2x-4}{2x-1}$, што значи дека во интервалот $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ нема решение на неравенката.

Нека $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Тогаш $\log_n x \geq \log_2 x \geq \log_2 \frac{1}{2}=-1>\frac{2x-4}{2x-1}$, што значи дека секој број од интервалот $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ е решение на неравенката при $n \in \mathbb{N} \backslash\{1\}$.

Да забележиме дека ако $x \in (1, 2]$ тогаш x не е решение за произволен $n \in \mathbb{N} \backslash\{1\}$. Имено, важи $\log_n x>0 \geq \frac{2x-4}{2x-1}$.

Ќе провериме за кои вредности на n неравенката го има за решение $x=4$. Заменувајќи $x=4$ во $\log_n x<\frac{2x-4}{2x-1}$, имаме $\log_n 4<\frac{4}{7} \Leftrightarrow \log_n 2<\frac{2}{7} \Leftrightarrow n^{\frac{2}{7}}>2 \Leftrightarrow n>2^{\frac{7}{2}}=8\sqrt{2} \approx 11{,}3$. Добивме дека $x=4$ е решение за секој $n \geq 12$.

Овие заклучоци се доволни да заклучиме дека за $n \geq 12$ $(n \in \mathbb{N})$ множеството решенија на неравенката е унија од непразни дисјунктни отворени интервали.

За да го докажеме последното, да ја разгледаме функцијата $f(x)=\log_n x-\frac{2x-4}{2x-1}$ за $x>2$. Дефинираме множество $M_{x>2}=\{x>2 \mid f(x)<0\}$. Бидејќи f е непрекината, за секој $x \in M_{x>2}$ постои отворен интервал I_x таков што $x \in I_x$ и за секој $t \in I_x$ важи $f(t)<0$. Јасно е дека $M_{x>2}=\bigcup_{x \in M_{x>2}} I_x$, и дека или е непразен интервал, или унија од непразни дисјунктни отворени интервали (клучно е тоа што $M_{x>2} \neq \emptyset$). Тогаш, $M=M_{x \leq 2} \cup M_{x>2}=\left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup M_{x>2}$ е сигурно унија од непразни дисјунктни интервали.

Значи, за бараните $n \in \mathbb{N}$ мора да важи $2 \leq n \leq 11$. Оставаме за вежба да се докаже дека секој број $n \in \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ го задоволува барањето. Бидејќи за $x>2$ (уште повеќе за $x>1$) важи $\log_n x \geq \log_{11} x$, доволно е да се докаже дека за секој $x>2$ важи $\log_{11} x>\frac{2x-4}{2x-1} \Leftrightarrow x^{\frac{2x-1}{2x-4}}>11$.

1701. Ако a, b, c се природни броеви тогаш докажи дека $7 \mid abc(a^3-b^3)(b^3-c^3)(c^3-a^3)$.

Решение. Ако $7|a$ или$7|b$ или $7|c$ тогаш $7 \mid abc(a^3-b^3)(b^3-c^3)(c^3-a^3)$.

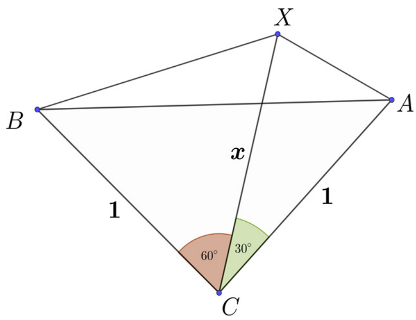
Нека $7 \nmid a$, $7 \nmid b$ и $7 \nmid c$ тогаш a, b, c се од облик $7k+1, 7k+2, 7k+3, 7k+4, 7k+5$ или $7k+6$ за некое $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Од тоа што $(7k+1)^3 \equiv 1^3 \equiv 1\ (\text{мод}7)$, $(7k+2)^3 \equiv 2^3 \equiv 1\ (\text{мод}7)$, $(7k+3)^3 \equiv 3^3 \equiv 6\ (\text{мод}7)$, $(7k+4)^3 \equiv 4^3 \equiv 1\ (\text{мод}7)$, $(7k+5)^3 \equiv 5^3 \equiv 6\ (\text{мод}7)$,
$(7k+6)^3 \equiv 6^3 \equiv 6\ (\text{мод}7)$ следува дека можни остатоци при делење на природните броеви a^3, b^3, c^3 со 7 се 1 или 6. На тој начин имаме дека од броевите a^3, b^3, c^3 постојат два броја кои при делење со 7 дават ист остаток, од каде следува дека разликата на тие два броја е делива со 7, Така имаме дека $7 \mid abc(a^3-b^3)(b^3-c^3)(c^3-a^3)$.

1702. Одреди ја најмалата можна вредност на изразот $\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-\sqrt{3}x+1}$.
Решение. Да забележиме дека вредностите на изразите x^2+1-x, $x^2+1-\sqrt{3}x$ се помали доколку $x \geq 0$. Ги конструираме триаголниците BCX и XCA така што $\angle BCX = 60^\circ$, $\angle XCA = 30^\circ$, $|\overline{BC}| = |\overline{AC}| = 1$ и $|\overline{XC}| = x$. Од косинусната теорема за триаголниците BCX и XCA добиваме

$|\overline{BX}| = \sqrt{x^2+1^2-2\cdot x\cdot 1\cdot cos60^\circ} = \sqrt{x^2+1-2\cdot x\cdot \frac{1}{2}}$ $\quad |\overline{BX}| = \sqrt{x^2+1-x}$ ...(1) и

$|\overline{XA}| = \sqrt{x^2+1^2-2\cdot x\cdot 1\cdot cos30^\circ} = \sqrt{x^2+1-2\cdot x\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$ $|\overline{XA}| = \sqrt{x^2+1-\sqrt{3}x}$ ...(2).

Со собирање на равенствата (1) и (2) имаме дека $\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-\sqrt{3}x+1} = |\overline{BX}|+|\overline{XA}|$.
Значи вредноста на дадениот израз ќе биде најмала кога збирот $|\overline{BX}|+|\overline{XA}|$ ќе биде најмал, а тоа е во случај кога точката X лежи на отсечката $\overline{BA}$ односно $|\overline{BX}|+|\overline{XA}| = |\overline{BA}|$. Така од Питагорова теорема за рамнокракиот правоаголен триаголник ABC добиваме дека $|\overline{BA}| = \sqrt{|\overline{BC}|^2+|\overline{AC}|^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.
Најмалата можна вредност на изразот $\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-\sqrt{3}x+1}$ е $\sqrt{2}$.

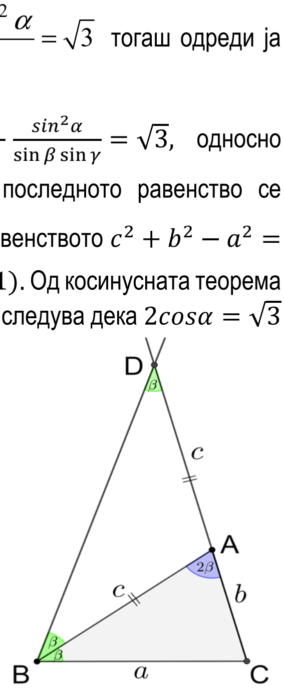


1703. Ако за аглите во триаголникот ABC важи $\dfrac{\sin^2\gamma+\sin^2\beta-\sin^2\alpha}{\sin\beta\cdot\sin\gamma} = \sqrt{3}$ тогаш одреди ја вредноста на аголот α.

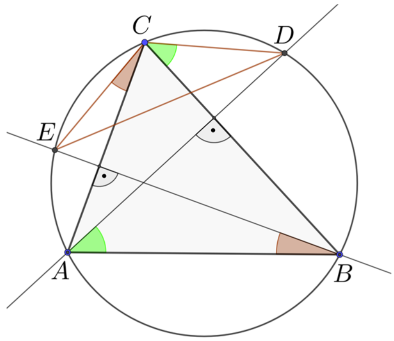
Решение. Даденото равенство се запишува во обликот $\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}-\frac{sin^2\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = \sqrt{3}$, односно $\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}-\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \sqrt{3}$. Со користење на синусна теорема последното равенство се трансформира во обликот $\frac{c}{b}+\frac{b}{c}-\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{c} = \sqrt{3}$ кое е еквивалентно со равенството $c^2+b^2-a^2 = \sqrt{3}bc$. На тој начин го добиваме равенството $a^2 = b^2+c^2-\sqrt{3}bc$ ... (1). Од косинусната теорема го имаме равенството $a^2 = b^2+c^2-2bc\cdot cos\alpha$ ... (2), па од (1) и (2) следува дека $2cos\alpha = \sqrt{3}$ односно $cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Од последното равенство добиваме дека $\alpha = 30^\circ$.

1704. Ако за аглите во триаголникот ABC важи $\alpha = 2\beta$, тогаш докажи дека важи $a^2 = b(b+c)$.

Решение. Од темето B го конструираме аголот $\angle ABD = \beta$ кој ја сече полуправата CA во точка D (види цртеж). На тој начин имаме дека $\angle BDA = \beta$ и $|\overline{AB}| = |\overline{AD}| = c$. Од сличноста на триаголниците BCD и ABC го имаме раавенството $\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ односно $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a}$, од каде следува бараното равенство $a^2 = b(b+c)$.



1705. Нека k е опишаната кружница околу остроаголниот триаголникот ABC. Нормалата од точката A на BC ја сече k во точка D, а нормалата од точката B на AC ја сече k во точка E. Ако $|\overline{AB}|=|\overline{DE}|$ тогаш докажи дека $\angle ACB = 60°$.



Решение. Од тоа што $|\overline{AB}|=|\overline{DE}|$ имаме дека периферните агли над тие отсечки се еднакви или суплементни односно $\angle ACB = \angle ECD$ или $\angle ACB + \angle ECD = 180^\circ$. Така имаме

$$\begin{aligned}\angle ECD &= \angle ECA + \angle ACB + \angle BCD\\ &= \angle EBA + \angle ACB + \angle BAD\\ &= 90^\circ - \angle BAC + \angle ACB + 90^\circ - \angle CBA\\ &= (180^\circ - \angle BAC - \angle CBA) + \angle ACB\\ &= \angle ACB + \angle ACB\\ &= 2\cdot\angle ACB.\end{aligned}$$

Ако $\angle ACB = \angle ECD$ тогаш имаме дека $\angle ACB = 2\cdot\angle ACB$ односно $\angle ACB = 0^\circ$, контрадикција.
Така $\angle ACB + \angle ECD = 180^\circ$ од каде добиваме дека $\angle ACB + 2\cdot\angle ACB = 180^\circ$ односно $\angle ACB = 60°$.

1706. Пресметај ја вредноста на изразот $tg1° + tg5° + tg9° + \cdots + tg173° + tg177°$.
Решение. Користејќи ја формулата $tg\varphi + tg(\varphi+60°) + tg(\varphi+120°) = 3tg(3\varphi)$ и групирајќи ги членовите на изразот по три во група, добиваме:

$$\begin{aligned}&[tg1° + tg(61°) + tg(121°)] + [tg5° + tg(65°) + tg(125°)] + \cdots\\ &+ [tg57° + tg(117°) + tg(177°)] = 3(tg3° + tg15° + \cdots + tg171°) =\\ &= 3[(tg3° + tg63° + tg123°) + (tg15° + tg75° + tg135°)\\ &+ (tg27° + tg87° + tg147°) + (tg39° + tg99° + tg159°)\\ &+ (tg51° + tg111° + tg171°)]\\ &= 9(tg9° + tg45° + tg81° + tg117° + tg153°) =\\ &= 9\left(1 + \frac{sin9°}{cos9°} + \frac{sin81°}{cos81°} + \frac{sin117°}{cos117°} + \frac{sin153°}{cos153°}\right) =\\ &= 9\left(1 + \frac{\sin(9°+81°)}{cos9°cos81°} + \frac{\sin(117°+153°)}{cos117°cos153°}\right) =\\ &= 9\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{2}(cos90° + cos72°)} + \frac{-1}{\frac{1}{2}(cos270° + cos36°)}\right)\\ &= 9\left(1 + \frac{2}{cos72°} - \frac{2}{cos36°}\right)\end{aligned}$$

$$= 9\left(1 + 2\frac{cos36° - cos72°}{cos36°cos72°}\right) = 9\left(1 + 2\cdot\frac{2sin54°sin18°}{sin54°sin18°}\right) = 9\cdot 5 = 45.$$

1707. Ако $\left(\frac{a+i}{a-i}\right)^n = 1, (a \in \mathbb{R})$, докажи дека $a = ctg\left(\frac{k\pi}{n}\right),\ k = 0,1,2,\ldots\ldots,n-1$.
Решение. $\sqrt[n]{1} = \frac{a+i}{a-i} = \sqrt[n]{cos0 + isin0} = \cos\frac{2k\pi}{n} + isin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0,1,2,\ldots\ldots,n-1$

$$\Rightarrow a + i = \sqrt[n]{1}(a-i) \Rightarrow$$

$$a = -i\frac{(1+\sqrt[n]{1})}{1-\sqrt[n]{1}} = -i\frac{\left(1 + \cos\frac{2k\pi}{n} + isin\frac{2k\pi}{n}\right)}{\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{n} - isin\frac{2k\pi}{n}\right)} = -i\frac{2\cos^2\frac{k\pi}{n} + i\cdot 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2\sin^2\frac{k\pi}{n} - i\cdot 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)} =$$

$$= -i\frac{\mathrm{ctg}^2\frac{k\pi}{n} + i\cdot \mathrm{ctg}\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{1 - i\cdot ctg\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = ctg\left(\frac{k\pi}{n}\right),\ \ k = 0,1,2,\dots\dots, n-1$$

1708. Разложи го полиномот на множители $x^{10} + x^5 + 1$.

Решение. За $x \neq 1$ вредноста на полиномот, како збир на геометриска прогресија, можеме да ја запишеме во облик $\frac{x^{15}-1}{x^5-1} = \frac{(x^3)^5-1}{x^5-1} = \frac{(x^3-1)(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)} = (x^2+x+1)\frac{x^{12}+x^9+x^6+x^3+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$

Ако количникот на последните два полиноми е некој полином со целобројни коефициенти, тогаш доволно е да се најде истиот. Со делење на овие два полиноми го добиваме полиномот
$x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$.

Значи, $P(x) = (x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$ за $x \neq 1$.

Лесно се проверува дека ова равенство е точно и за $x = 1$.

1709. Реши го системот равенки $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x^2+y^2-z^2=8-2xy \\ x^3+y^3-z^3=86-3xyz \end{cases}$.

Решение. $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x^2+y^2-z^2=8-2xy \\ x^3+y^3-z^3=86-3xyz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2+z \\ (x+y)^2=8+z^2 \\ (x+y)^3-3xy(x+y-z)=86+z^3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x+y=2+z \\ (2+z)^2=8+z^2 \\ (x+y)^3-6xy=86+z^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2+z \\ 4+4z+z^2=8+z^2 \\ (x+y)^3-6xy=86+z^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ z=1 \\ 3^3-6xy=86+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ z=1 \\ xy=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ z=1 \\ x(3-x)=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ z=1 \\ x^2-3x-10=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=5 \\ z=1 \\ x=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-2 \\ z=1 \\ x=5 \end{cases}.$$

Значи, системот има две подредени тројки решенија (-2,5,1) и (5,-2,1).

1710. Нека $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ и $q_1 < q_2 < q_3 < q_4$ се прости броеви такви што $p_4 - p_1 = 8$ и $q_4 - q_1 = 8$. Нека $p_1 > 5, q_1 > 5$. Докажи дека $30|p_1 - q_1$.

Решение. За секој прост број $p > 3$ важи $p \equiv \pm 1(mod 6)$. Ако $p_1 \equiv 1(mod 6)$, тогаш $p_4 \equiv 3(mod 6)$, што не е можно, бидејќи p_4 е прост број. Значи, $p_1 \equiv -1(mod 6)$. Аналогно важи $q_1 \equiv -1(mod 6)$, па оттука $p_1 - q_1 \equiv 0(mod 6)$ $\quad (*)$.

Два од броевите $p_1 + 2, p_1 + 4, p_1 + 6$ се прости, бидејќи се непарни и се наоѓаат меѓу p_1 и $p_4 = p_1 + 8$. Бидејќи $p_1 + 4 \equiv 3(mod 6)$ добиваме дека $p_1 + 4$ не е прост број. Значи, $p_2 = p_1 + 2, p_3 = p_1 + 6$. Аналогно се добива дека $q_2 = q_1 + 2$ и $q_3 = q_1 + 6$.

Ако $p_1 \equiv 2(mod 5)$, тогаш $p_4 \equiv 0(mod 5)$ што не е можно. Ако $p_1 \equiv 3(mod 5)$, тогаш $p_2 \equiv 0(mod 5)$, а ако $p_1 \equiv 4(mod 5)$, тогаш $p_3 \equiv 0(mod 5)$ што исто така не е можно. Значи, $p_1 \equiv 1(mod 5)$. Аналогно, $q_1 \equiv 1(mod 5)$.

Затоа $p_1 - q_1 \equiv 0(mod 5)$ $\quad (**)$.

Од (*) и (**) следува дека $30|p_1 - q_1$.

Подготвиле:

Борче Јошевски
Раде Кренков
Слаѓан Станковиќ

НАГРАДНИ ЗАДАЧИ

Ги поканувваме учениците да испраќаат решенија на задачи од оваа рубрика. Решенијата да бидат подготвени во **MS Word**. Испратете ги на електронската адреса на уредникот

filipovskipetar@gmail.com

со предмет „Наградни задачи". Ве молиме решенијата испратете ги во еден **WORD** документ (doc или docx формат). Со решенијата испратете: име и презиме, година, училиште и град. **Краен рок за испраќање на решенија е 20 февруари 2023.** Некои од решенијата ќе бидат објавени во наредниот број на Сигма и ќе бидат објавени имињата на сите ученици кои точно ја решиле задачата, а најуспешните решавачи во текот на учебната година ќе бидат симболично наградени.

1. Докажи дека од $n+1$ различни природни броеви помали од $2n$ може да се изберат три, такви што еден од нив да биде еднаков збирот на останатите два.

2. Нека a,b и a,b се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\left(a+\frac{b}{c}\right)^2+\left(b+\frac{c}{a}\right)^2+\left(c+\frac{a}{b}\right)^2+3>2(a+b+c+3).$$

РЕШЕНИЈА НА НАГРАДНИТЕ ЗАДАЧИ ОД СИГМА 126

1. Одреди ги сите парови прости броеви (p,q) такви што $p^{q-1}+q^{p-1}$ е квадрат на природен број.

Решение. Нека n е природен број чиј квадрат е еднаков на $p^{q-1}+q^{p-1}$, т.е.

$$p^{q-1}+q^{p-1}=n^2.$$

Ќе разгледаме три случаи, двата броеви да се парни, двата броеви да се непарни и третиот случај, едниот број да е парен, вториот да е непарен.
Ако двата броеви се парни, тогаш единствена можност е $p=q=2$ за $n=2$, односно $(p,q)=(2,2)$.
Ако двата броеви се непарни, тогаш ќе ги разгледаме остатоците што се добиваат при делење со бројот 4. Бидејќи p и q се непарни, броевите $p-1$ и $q-1$ се парни, па броевите p^{q-1} и q^{p-1} се квадрати на непарни броеви, па тие даваат остаток 1 при делење со бројот 4. Според тоа левата страна од равенството дава остаток 2 при делење со 4. Од друга страна знаеме n^2 дава остаток 0 или 1 при делење со 4. Следува ако двата броеви се непарни, задачата нема решение.
Останува да го разгледаме случајот кога еден од броевите е парен, а еден е непарен. Без губење на општоста ќе претпоставиме дека $p=2$, а q е непарен број од облик $q=2k+1$. Следува

$$2^{q-1}+q=n^2,\text{ т.е. } q=n^2-2^{2k}=\left(n-2^k\right)\left(n+2^k\right).$$

Од q е прост број, добиваме дека едниот од броевите $n-2^k$ и $n+2^k$ е ±1, а другиот е $\pm q$. Бидејќи $n+2^k>0$ и $n+2^k>n-2^k$, мора $n+2^k=q$, а $n-2^k=1$. Со одземање на втората од првата равенка добиваме $2^{k+1}=q-1$, односно $2^{k+1}+1=q$, т.е. $2^{k+1}+1=q=2k+1$. Броевите $2^{k+1}+1$ и $2k+1$ даваат остаток 1 при делење со 4. Следува k е парен број, т.е. $k=2m$ за некој ненегативен цел број m. Според тоа $q=2^{k+1}+1=2^{2l+1}+1=2\cdot4^l+1$ е делив со 3 (бидејќи 4^l дава остаток 1 при делење со 3). Ако q е делив со 3, тогаш мора $q=3$. Со замена за $p=2$ и $q=3$ во $p^{q-1}+q^{p-1}$, добиваме дека вредноста на изразот е 7, но 7 не е квадрат на природен број. Следува задачата има единственот решение $(p,q)=(2,2)$.

2. Нека триаголникот $\triangle ABC$ е рамнокрак со основа BC, P е средишна точка на помалиот лак $\overset{\frown}{AB}$ од опишаната кружница околу триаголникот $\triangle ABC$, а Q е средишна точка на страната AC. Опишаната кружница околу триаголникот $\triangle APQ$ по втор пат ја сече страната AB во точката K. Ако O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот $\triangle APQ$, докажи дека правите PO и KQ се сечат во точка од симетралата на аголот $\angle CBA$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за аглите во триаголникот $\triangle ABC$, т.е. $\angle BAC = \alpha$ и $\angle CBA = \angle ACB = \beta$. Нека R и S се средишните точки на страната AB и на помалиот лак $\overset{\frown}{AC}$, соодветно. Нека $BS \cap PO = \{Z\}$. Ќе докажеме дека точките K, Q и Z се колинеарни. Нека $BS \cap AC = \{T\}$. Од R е средишна точки на страната AB и P е средишна точка на помалиот лак $\overset{\frown}{AB}$ добиваме

$$\angle RPA = \frac{\angle BPA}{2} = \frac{180^\circ - \angle ACB}{2} = \frac{180^\circ - \angle CBA}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2},$$

од каде следува $\angle PAR = \dfrac{\beta}{2}$, односно $PA \parallel BS$. Од последново и од $AC \perp QS$ следува

$$\angle QPO = 90^\circ - \angle PAQ = 90^\circ - \angle BTC = \angle QST \equiv \angle QSB.$$

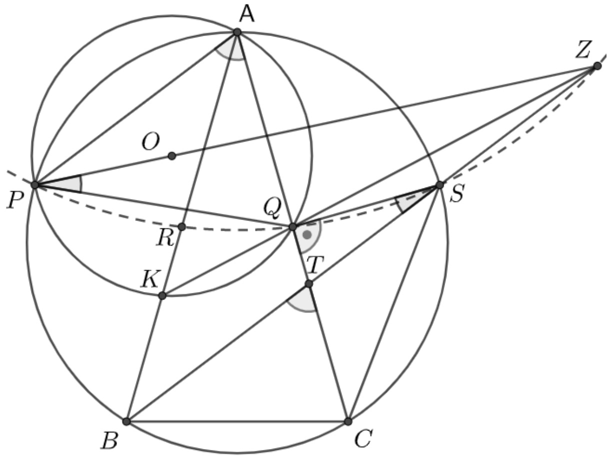
Бидејќи

$$\angle QPZ \equiv \angle QPO = \angle QSB = 180^\circ - \angle ZSQ$$

следува четириаголникот $PQSZ$ е тетивен. Тогаш, од

$$\angle PQK = \angle PAK \equiv \angle PAB = \angle PSB = 180^\circ - \angle ZSP = 180^\circ - \angle ZQP$$

добиваме дека точките K, Q и Z се колинеарни, односно правите PO и KQ се сечат во точка од симетралата на аголот $\angle CBA$.



Подготвил: Петар Филиповски

УЧЕНИЦИ КОИ ИСПРАТИЈА ТОЧНИ РЕШЕНИЈА НА НАГРАДНИТЕ ЗАДАЧИ ОД СИГМА 126, 2022/2023

Задачи	Ученик	Одд.	Училиште	Место
1	Виктор Максимоски	9	ООУ “Единство”	Гостивар

45 РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА - 12.03.2022

Прва година

1А. Марин, Максим, Матеј и Марјан се четири браќа. Мајка им ги затекнала како ги изеле сите кифлички што ги испекла. На нејзиното прашање „Кој ги изеде кифличките?“, тие ги дале следните изјави:
Марин: „Сите јадевме од кифличките.“
Максим: „Јас и Марин заедно изедовме исто толку кифлички колку и Матеј и Марјан заедно.“
Матеј: „Марјан изеде повеќе кифлички од мене.“
Марјан: „Но, јас и Марин заедно изедовме помалку од Максим и Матеј заедно.“
Мајка им знае дека сите четворица ја зборуваат вистината. Кој изел најмногу кифлички?

Решение 1. Нека Марин, Максим, Матеј и Марјан изеле a,b,c,d кифлички соодветно. Тогаш, изјавите кои ги дале се: Марин:„ $a,b,c,d>0$ “, Максим: „ $a+b=c+d$ “, Матеј: „ $d>c$ “, Марјан: „ $a+d<b+c$ “. Од $a+b=c+d$ и $a+d<b+c$ имаме $(a+b)+(a+d)<(c+d)+(b+c)$ т.е. $2a+b+d<b+2c+d$, односно $2a<2c$, од каде $a<c$. Од $c+d=a+b$ и $a+d<b+c$ имаме $(c+d)+(a+d)<(a+b)+(b+c)$ т.е. $a+c+2d<a+2b+c$, односно $2d<2b$, од каде $d<b$. Сега, од $a<c$, $d<b$ и $d>c$ имаме дека $a<c<d<b$, односно Максим изел најмногу кифлички.

Решение 2. Од изјавата на Матеј заклучуваме дека Матеј не е тој кој изел најмногу кифлички, затоа што Марјан изел повеќе од него. Да претпоставиме дека Марјан изел најмногу кифлички. Значи, Марјан изел повеќе или исто толку кифлички колку и Максим, односно Максим изел помалку или исто толку колку и Марјан. Од изјавата на Максим заклучуваме дека Матеј изел помалку или исто толку кифлички колку и Марин, за да Марин и Максим заедно имаат изедено еднаков број кифлички како и Матеј и Марјан заедно. Па тогаш, Максим и Матеј заедно имаат изедено помалку или исто толку кифлички колку и Марјан и Марин заедно, што противречи на изјавата на Марјан, па не може Марјан да изел најмногу кифлички. Да претпоставиме дека Марин изел најмногу кифлички. Тогаш, Марин изел повеќе или исто толку кифлички колку и Матеј. Од изјавата на Максим заклучуваме дека Марјан морал да изеде повеќе или исто толку кифлички колку и Максим. Но, тогаш Марјан и Марин заедно ќе имаат изедено повеќе или исто толку кифлички колку и Матеј и Максим заедно, што противречи на изјавата на Марјан, па не може Марин да изел најмногу кифлички. Заклучуваме дека Максим е тој кој изел најмногу кифлички.

1Б. Александар, Бојан, Васил и Горан играле игри со џамлии. Одиграле вкупно четири игри и секој од нив победил во точно една игра, при што победувале во редослед како погоре дадениот. На крајот од секоја игра и пред почетокот на наредната игра, победникот во последната одиграна игра му дава на секој друг играч во играта, онолку џамлии колку што играчот има во тој момент во себе. После сите одиграни игри, секој од играчите имал по точно 48 џамлии. Колку џамлии имал секој играч пред почетокот на првата играта?

Решение 1. После сите одиграни игри, секој од играчите имал точно 48 џамлии. Значи $(48,48,48,48)$ се бројот на џамлии после сите одиграни игри на Александар, Бојан, Васил и Горан, соодветно. Победник во четвртата игра бил Горан, што значи дека тој ги зголемил два пати џамлиите на останатите играчи, па пред почетокот на чевртата игра играчите имале $48:2=24$, $48:2=24$, $48:2=24$ и $48+24+24+24=120$ џамлии соодветно т.е. $(24,24,24,120)$. Победник во третата игра бил Васил, што значи дека тој ги зголемил два пати џамлиите на останатите играчи, па пред почетокот на третата игра играчите имале $24:2=12$, $24:2=12$, $24+12+12+60=108$ и $120:2=60$ џамлии соодветно т.е. $(12,12,108,60)$. Победник во втората игра бил Бојан, што значи дека тој ги зголемил два пати џамлиите на останатите играчи, па пред почетокот на втората игра играчите имале $12:2=6$, $12+6+54+30=102$, $108:2=54$ и $60:2=30$ џамлии соодветно т.е. $(6,102,54,30)$. Победник во првата игра бил Александар, што значи дека тој ги зголемил два пати џамлиите на останатите играчи, па пред почетокот на првата игра играчите имале $6+51+27+15=99$, $102:2=51$, $54:2=27$ и $30:2=15$ џамлии соодветно т.е. $(99,51,27,15)$. Па, пред почетокот на првата игра Александар имал 99, Бојан имал 51, Васил имал 27 и Горан имал 15 џамлии.

Решение 2. Нека a,b,v,g се бројот на џамлии пред почетокот на играта на Александар, Бојан, Васил и Горан, соодветно.

Во првата игра победник е Александар, па пред почетокот на втората игра Александар имал $a-b-v-g$, Бојан имал $2b$, Васил имал $2v$ и Горан имал $2g$ џамлии.

Во втората игра победник е Бојан, па пред почетокот на третата игра Александар имал $2(a-b-v-g)$, Бојан имал $2b-(a-b-v-g)-2v-2g=3b-a-v-g$, Васил имал $4v$ и Горан имал $4g$ џамлии.

Во третата игра победник е Васил, па пред почетокот на четвртата игра Александар имал $4(a-b-v-g)$, Бојан имал $2(3b-a-v-g)$, Горан имал $8g$ и Васил имал $4v-2(a-b-v-g)-(3b-a-v-g)-4g=7v-a-b-g$ џамлии.

Во четвртата игра победник е Горан, па после сите одиграни игри Александар имал $8(a-b-v-g)$, Бојан имал $4(3b-a-v-g)$, Васил имал $2(7v-a-b-g)$ и Горан имал $8g-4(a-b-v-g)-2(3b-a-v-g)-(7v-a-b-g)=15g-a-b-v$ џамлии.

Од тоа што после сите одиграни игри сите имале по точно 48 џамлии, добиваме

$$\begin{cases} 8(a-b-v-g)=48 \\ 4(3b-a-v-g)=48 \\ 2(7v-a-b-g)=48 \\ 15g-a-b-v=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b-v-g=6 & (1) \\ -a+3b-v-g=12 & (2) \\ -a-b+7v-g=24 & (3) \\ -a-b-v+15g=48 & (4) \end{cases}.$$

Исто така, имаме дека вкупниот број џамлии е $4\cdot 48=192$, односно имаме

$$a+b+v+g=192. \qquad (5)$$

Сега, со собирање на (1) и (5) добиваме $2a=198$, од каде $a=99$. Ако оваа вредност ја

$$3b-v-g=111 \qquad (2')$$

замениме во (2)-(5) добиваме $\quad -b+7v-g=123 \qquad (3')$

$$-b-v+15g=147 \qquad (4')$$

$$b+v+g=93 \qquad (5')$$

Со собирање на (2') и (5') добиваме $4b=204$, од каде $b=51$. Ако оваа вредност ја замениме во (3')-(5') добиваме

$$7v-g=174 \qquad (3'')$$

$$-v+15g=198 \qquad (4'')$$

$$v+g=42 \qquad (5'')$$

Со собирање на (3'') и (5'') добиваме $8v=216$, од каде $v=27$. Тогаш, од (5'') добиваме $g=42-v=42-27=15$. Се проверува дека, за добиените вредности важи и (4'').

Значи, Александар имал 99 џамлии, Бојан имал 51 џамлија, Васил имал 27 џамлии и Горан имал 15 џамлии пред почетокот на првата играта.

2АБ. (Сигма 121, Задачи од училница, стр. 44, решение во Сигма 122) Даден е системот линеарни равенки $\begin{cases} (a+3)x-2(a+3)y=12-3a \\ (a+3)x+(a+3)y=-1-a \end{cases}$, каде што $a\neq -3$ е параметар кој не зависи од x и y. Одреди ги сите целобројни вредности на параметарот a за кои решенијата на системот се негативни броеви.

Решение. Го решаваме системот линеарни равенки $\begin{cases}(a+3)x-2(a+3)y=12-3a\\(a+3)x+(a+3)y=-1-a\end{cases}$. Со одземање на првата од втората равенка на системот добиваме

$$\begin{cases}(a+3)x-2(a+3)y=12-3a\\3(a+3)y=-13+2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+3)x-2(a+3)\cdot\dfrac{-13+2a}{3(a+3)}=12-3a\\y=\dfrac{-13+2a}{3(a+3)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{10-5a}{3(a+3)}\\y=\dfrac{-13+2a}{3(a+3)}\end{cases}.$$

По услов на задачата, решенијата на системот се негативни броеви, односно $x<0$ и $y<0$,

што значи дека $\begin{cases}\dfrac{10-5a}{3(a+3)}<0\\\dfrac{-13+2a}{3(a+3)}<0\end{cases}$ (*). Овој систем е еквивалентен со вкупноста од системите

неравенки: (1) $\begin{cases}10-5a>0\\3(a+3)<0\\-13+2a>0\end{cases}$; (2) $\begin{cases}10-5a<0\\3(a+3)>0\\-13+2a<0\end{cases}$.

Вкупноста на системите претставува унија на поединечните множества решенија.

Множеството решенија на системот (1) е $M_1=\varnothing$. Системот (2) се сведува на $\begin{cases}a>2\\a>-3\\a<6,5\end{cases}$, а

неговото множество решенија е $M_2=\left(2,\dfrac{13}{2}\right)$. Следува дека решението на системот

неравенки (*) е множеството $M_1\cup M_2=\varnothing\cup\left(2,\dfrac{13}{2}\right)=\left(2,\dfrac{13}{2}\right)$. Тогаш целобројните вредности за параметарот добиваме вредности $a\in\{3,4,5,6\}$.

3А. (Сигма 123, Задачи од училницата, стр. 28) Одреди ги сите парови природни броеви (x,y), такви што x и y се заемно прости и ја задоволуваат равенката $x^2+2y^2+334=\text{НЗС}(x^2,y^2)$.

Решение. Броевите x и y се заемно прости броеви, па важи $\text{НЗД}(x,y)=1$ и $\text{НЗД}(x^2,y^2)=1$. Од тоа што за секои два природни броја $a,b\in\mathbb{N}$ важи $\text{НЗД}(a,b)\cdot\text{НЗС}(a,b)=ab$, добиваме дека $\text{НЗД}(x^2,y^2)\cdot\text{НЗС}(x^2,y^2)=x^2y^2$, односно $\text{НЗС}(x^2,y^2)=x^2y^2$. Тогаш, дадената равенка преминува во $x^2+2y^2+334=x^2y^2$, која ја трансформираме во облик $y^2(x^2-2)=x^2+334$, односно $y^2=\dfrac{x^2+334}{x^2-2}$.

Бидејќи $y^2=\dfrac{x^2+334}{x^2-2}=\dfrac{x^2-2+336}{x^2-2}=1+\dfrac{336}{x^2-2}$ е природен број, мора x^2-2 да биде делител на бројот $336=2^4\cdot3\cdot7$. Оттука имаме

$$x^2-2\in\{1,2,4,8,16,3,6,12,24,46,7,14,28,56,112,21,42,84,168,336\},$$

односно $x^2 \in \{3,4,6,10,18,5,8,14,26,48,9,16,30,58,114,23,44,86,170,338\}$.

Единствени можни вредности за квадратот на природен број, x^2 , се 4, 9 и 16, од каде x може да биде 2, 3 или 4. Ќе ги разгледаме трите случаи:

1. Ако $x=2$, тогаш $y^2=1+\dfrac{336}{2^2-2}=169$, т.е. $y=13$.

2. Ако $x=3$, тогаш $y^2=1+\dfrac{336}{3^2-2}=49$, т.е. $y=7$.

3. Ако $x=4$, тогаш, $y^2=1+\dfrac{336}{4^2-2}=25$, т.е. $y=5$.

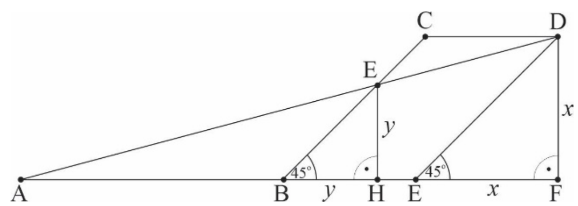
Решенија на равенката се паровите природни броеви $(x,y)=(2,13)$, $(x,y)=(3,7)$ и $(x,y)=(4,5)$.

3Б. (Сигма 122, Задачи од училницата, стр. 32) Најди ги сите природни броеви x што ја задоволуваат равенката $x^3-x+p=507$, каде што p е прост број.

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во облик $x(x^2-1)+p=507,$ односно $x(x-1)(x+1)+p=507.$ Собирокот $(x-1)x(x+1)$ е делив со 3, како производ на три последователни природни броеви. Исто така и 507 е делив со 3, па следува дека мора и p да е делив со 3. Единствен прост број што е делив со 3 е $p=3$. Сега равенката гласи $(x-1)x(x+1)=504$, односно $(x-1)x(x+1)=7\cdot 8\cdot 9$. Јасно, $x=8$.

4АБ. За да стаса од дома до најблиската продавница, Кристијан се движи по обележана патека: оди 200 метри на исток, потоа 150 метри на северо–исток и уште 100 метри на исток (насоката северо–исток е одредена со симетралата на аголот формиран од насоките север и исток). Кристијан сакал да го скрати својот пат и почнал да се движи низ паркот по права линија, директно од неговиот дом кон продавницата. Точно кога ја пресретнал обележаната патека, сретнал еден дедо, се засрамил од неговиот прекорен поглед, па одлучил да продолжи да оди по обележаната патека до продавницата. За колку Кристијан го скратил патот од дома до продавницата?

Решение. Нека $\overline{AB}=200\,\mathrm{m}, \overline{BC}=150\,\mathrm{m}, \overline{CD}=100\,\mathrm{m}$ се деловите од вообичаената патека од домот на Кристијан до продавницата. Тогаш, $\measuredangle ABC=\measuredangle BCD=135^\circ$ и $AB \,||\, CD.$ Нека E е точка од правата AB такашто $DE \,||\, CB$ и F е точка од правата AB така што $DF \perp AB.$ Тогаш, $BEDC$ е паралелограм и $\measuredangle FED=\measuredangle EBC=45^\circ$, па триаголникот ΔDFE е рамнокрак правоаголен триаголник со хипотенуза $\overline{ED}=\overline{BC}=150\,\mathrm{m}$. Од Питагорината теорема за ΔDFE имаме $\overline{EF}^2+\overline{DF}^2=\overline{ED}^2$, потоа од $\overline{EF}=\overline{DF}=x$ со замена добиваме $x^2+x^2=150^2$, од каде $x=\overline{EF}=\overline{DF}=\dfrac{150\sqrt{2}}{2}=75\sqrt{2}\ \mathrm{m}$. Нека G е пресечната точка на AD и BC . Треба да ја пресметаме разликата меѓу должината на искршената линија формирана од отсечките AB и BG и должината $\overline{AG}$. Нека H е точка од правата AB така што $GH \perp AB.$ Тогаш, триаголникот ΔBHG е рамнокрак правоаголен триаголник со краци $\overline{BH}=\overline{GH}=y$.



Од сличноста на $\Delta AHG \sim \Delta AFD$ имаме $\overline{AH} : \overline{HG} = \overline{AF} : \overline{FD}$, односно $(200+y) : y = \left(200+100+75\sqrt{2}\right) : 75\sqrt{2} \Leftrightarrow y = 50\sqrt{2}\,\mathrm{m}$. Од Питагорината теорема за ΔBHG имаме $\overline{BG}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{GH}^2 = \left(50\sqrt{2}\right)^2 + \left(50\sqrt{2}\right)^2 = 5000+5000 = 10000$, од каде $\overline{BG} = \sqrt{10000} = 100\,\mathrm{m}$. Слично, за $\overline{AG} = \sqrt{50000+20000\sqrt{2}}\,\mathrm{m}$, од ΔAHG, имаме $\overline{AG}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{GH}^2 = \left(200+50\sqrt{2}\right)^2 + \left(50\sqrt{2}\right)^2 = 50000+20000\sqrt{2}$. Значи. Кристијан го скратил својот пат

$$(200+100) - \sqrt{50000+20000\sqrt{2}} = \left(300 - \sqrt{50000+20000\sqrt{2}}\right)\mathrm{m}.$$

(Скратувањето е приближно еднакво на 20 m.)

Втора година

1А. (Сигма 121, Рубрика задачи, задача 1623) Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x\sqrt{x} + 27y\sqrt{x} = 36 \\ 27y\sqrt{y} + 9x\sqrt{y} = 28 \end{cases}.$$

Решение. Со собирање и одземање на равенките на системот се добива еквивалентниот систем $\begin{cases} x\sqrt{x} + 27y\sqrt{x} + 27y\sqrt{y} + 9x\sqrt{y} = 36+28 \\ x\sqrt{x} + 27y\sqrt{x} - 27y\sqrt{y} - 9x\sqrt{y} = 36-28 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x})^3 + 3(\sqrt{x})^2(3\sqrt{y}) + 3(\sqrt{x})(3\sqrt{y})^2 + (3\sqrt{y})^3 = 64 \\ (\sqrt{x})^3 - 3(\sqrt{x})^2(3\sqrt{y}) + 3(\sqrt{x})(3\sqrt{y})^2 - (3\sqrt{y})^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x}+3\sqrt{y})^3 = 4^3 \\ (\sqrt{x}-3\sqrt{y})^3 = 2^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+3\sqrt{y} = 4 \\ \sqrt{x}-3\sqrt{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} = 6 \\ 6\sqrt{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt{y} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = \dfrac{1}{9} \end{cases}.$$

1Б. (Сигма 122, Рубрика задачи Сигма 122, задача 1641) Ако за ненултите реални броеви a, b и c важат равенствата $a^2+a=b^2$, $b^2+b=c^2$ и $c^2+c=a^2$, одреди ја вредноста на изразот $(a-b)(b-c)(c-a)$.

Решение. Со собирање на трите равенства добиваме $a^2+b^2+c^2+a+b+c = a^2+b^2+c^2$ односно $a+b+c=0$. На тој начин имаме дека $\begin{cases} a+b=-c \\ b+c=-a \\ c+a=-b \end{cases}$. Од равенството $a^2+a=b^2$ добиваме $a^2-b^2=-a$ односно $(a-b)(a+b)=-a$. Бидејќи $a+b=-c\neq 0$, имаме дека $a-b = -\dfrac{a}{a+b}$. Аналогно, имаме дека $b-c=-\dfrac{b}{b+c}$ и $c-a=-\dfrac{c}{c+a}$. Тогаш за изразот $(a-b)(b-c)(c-a)$ добиваме

$$(a-b)(b-c)(c-a) = \frac{-a}{a+b}\cdot\frac{-b}{b+c}\cdot\frac{-c}{c+a} = \frac{-a}{-c}\cdot\frac{-b}{-a}\cdot\frac{-c}{-b} = 1.$$

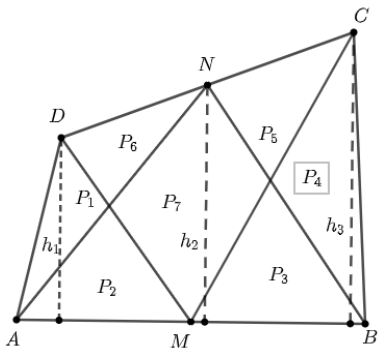
2АБ. (Сигма 122, Рубрика задачи Сигма 122, задача 1648) Докажи дека за секои реални броеви a, b и c, равенката $3(a+b+c)x^2 + 4(ab+bc+ca)x + 4abc = 0$ има реални решениja. При кои услови решенијата на равенката се еднакви меѓу себе?

Решение. За дискриминантата на квадратната равенка имаме:

$$D=16(ab+bc+ca)^2-48abc(a+b+c)=$$
$$16(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2-3a^2bc-3ab^2c-3abc^2)=$$
$$16(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-a^2bc-ab^2c-abc^2)=$$
$$8(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-2a^2bc-2ab^2c-2abc^2)=$$
$$8[(a^2b^2-2ab^2c+b^2c^2)+(b^2c^2-2abc^2+c^2a^2)+(c^2a^2-2a^2bc+a^2b^2)]=$$
$$8[(ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2]\geq 0\,.$$

Ова значи дека дискриминантата е ненегативен реален број, па квадратната равенка ќе има реални решенија за секои реални броеви a,b,c . Равенката ќе има двоен корен ако и само ако $D=0$, т.е. ако и само ако $ab-bc=0$, $bc-ca=0$ и $ca-ab=0$, т.е. кога $ab=bc=ca$.

3А. Нека M и N се средини на страните AB и CD на конвексниот четириаголник $ABCD$. Докажи дека $P_{\Delta ABN}+P_{\Delta CDM}=P_{\square ABCD}$.



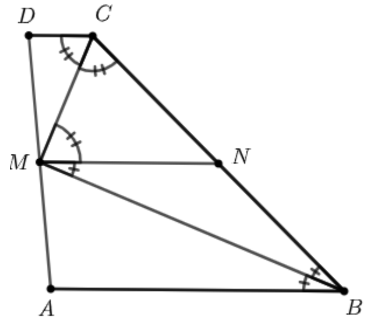
Решение. Отсечките AN , BN , CM и DM го делат четириаголникот на шест триаголници со плоштини $P_1,P_2,...,P_6$, соодветно, и еден четириаголник со плоштина P_7 , како на цртежот. Нека висината на триаголникот AMD спуштена кон AM е h_1 , висината на триаголникот ABN спуштена кон AB е h_2 и висината на триаголникот MBC спуштена кон MB е h_3 . Тогаш добиваме трапез со основи h_1 и h_3 и средна линија h_2 , па $h_2=\dfrac{h_1+h_3}{2}$. Имаме,

$$P_{\Delta ABN}=P_2+P_3+P_7=\frac{\overline{AB}\cdot h_2}{2}=\frac{\overline{AB}\cdot\frac{h_1+h_3}{2}}{2}=\frac{\frac{\overline{AB}}{2}\cdot h_1}{2}+\frac{\frac{\overline{AB}}{2}\cdot h_3}{2}=\frac{\overline{AM}\cdot h_1}{2}+\frac{\overline{MB}\cdot h_3}{2}.$$

Притоа $\dfrac{\overline{AM}\cdot h_1}{2}+\dfrac{\overline{MB}\cdot h_3}{2}=P_{\Delta AMD}+P_{\Delta MBC}=P_1+P_2+P_3+P_4$. Изедначувајќи ги двете добиени равенства следува дека $P_7=P_1+P_4$, па добиваме:

$$P_{\Delta ABN}+P_{\Delta CDM}=P_2+P_3+P_7+P_5+P_6+P_7=P_2+P_3+P_7+P_5+P_6+(P_1+P_4)=P_{\square ABCD}\,.$$

3Б. Симетралата на аголот ABC и симетралата на аголот BCD во трапез $ABCD$, се сечат во точка M на кракот AD на трапезот. Пресметај ја плоштината на трапезот $ABCD$, ако се познати $\overline{MB}=p$, $\overline{MC}=q$ и висината на трапезот h (h е растојанието меѓу основите AB и CD на трапезот).



Решение. Нека $\angle ABM=\phi,\angle DCM=\psi$, т.е. $\angle ABC=2\phi$ и $\angle BCD=2\psi$. Тогаш, од $2\phi+2\psi=180^\circ$ следува дека $\phi+\psi=90^\circ$ **,** па затоа триаголникот BCM е правоаголен и имаме $\overline{BC}=\sqrt{p^2+q^2}$. Нека N е средина на BC , тогаш $\overline{NM}=\overline{NC}=\overline{NB}$**.** Сега $\angle CMN=\angle MCN$ а оттука и $\angle CMN=\angle MCD$, па следува дека MN е паралелна со DC (и со AB).

Бидејќи N е средина на BC, следува M е средина на AD. Јасно, MN е средна линија во трапезот и оттука $P=\overline{MN}h=\frac{\overline{BC}}{2}h=\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{2}h$.

4АБ. Најди ги сите прости броеви p за кои системот $\begin{cases} p+49=2x^2 \\ p^2+49=2y^2 \end{cases}$ има решение во природните броеви (x,y се природни броеви).

Решение. Јасно, $p\neq 2$ бидејќи десните страни на равенките се парни броеви, па за да и левата страна е парна треба p да е непарен прост број. Од условите во задачата добиваме: $2y^2=p^2+49>p+49=2x^2$ и оттука $y>x$; $(p+7)^2>p^2+49=2y^2>y^2$ и оттука $p+7>y$, $p>y-7$ т.е. $p\geq y-6$. Нека $p>y>x$. Ако од втората равенка ја одземеме првата, добиваме $p^2-p=2y^2-2x^2$, односно $p(p-1)=2(y-x)(y+x)$. Бидејќи p не е делител на 2, следува p е делител на $(y-x)(y+x)$, а од $p>y>x$ следува дека $y-x<p$ и $y+x<2p$, па затоа p е делител на $x+y$ и уште, $x+y=p$. Тогаш, добиваме $p-1=2(y-x)$ т.е. $p=2(y-x)+1$, а ако во последната равенка замениме дека $x+y=p$ добиваме $y=3x-1$ односно $p=4x-1$. Ако последното го замениме во првата равенка, имаме $4x+48=2x^2$, $x^2-2x-24=0$, $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+24}=1\pm 5$, па решение во множеството природни броеви е $x=6$. Тогаш, $y=17$ и $p=23$. Значи, за $p=23$ решение на дадениот систем е $(x,y)=(6,17)$.

Да ги разгледаме случаите кога $y-6\leq p\leq y$. т.е. $p=y-t, t=0,1,...,6$. Ако замениме во втората равенка од системот добиваме $(y-t)^2+49=2y^2$ и оттука ја добиваме $y^2+2ty-t^2-49=0$. Дискриминанта е $D=4(t^2+t^2+49)=4(2t^2+49)$. Тогаш од $t=0,1,...,6$, бидејќи решаваме во природни броеви, дискриминантата е квадрат на некој природен број за $t=0,4,6$. За $t=0$ добиваме $y=p=7$ и тогаш $x^2=28$ што нема решение во природни броеви. За $t=4$ добиваме $y_{1,2}=-4\pm 9$ па $y=5$ и тогаш $p=1$, но 1 не е прост број. За $t=6$ добиваме $y_{1,2}=-6\pm 11$ па $y=5$ и тогаш $p=-1$, т.е. p не е прост број. Значи, единствено решение е $p=23$, $x=6$ и $y=17$.

Трета година

1АБ. (Сигма 119, Рубрика задачи, зад. 1593) Најди ги сите вредности на параметарот *a*, за кои што множеството решенија на неравенката $6x^2+4a^2+6ax-3x-24a+35<0$ содржи барем еден цел број.

Решение. Ја средуваме неравенката како неравенка по параметарот a, во облик $4a^2+(6x-24)a+6x^2-3x+35<0$. За да постои вредност на параметарот a, која ја задоволува неравенката (параболата е отворена нагоре), потребен и доволен услов е дискриминантата на квадратната равенка $4a^2+(6x-24)a+6x^2-3x+35=0$ да е позитивна (односно параболата да има две пресечни точки со $x-$ оската). Значи $D=(6x-24)^2-4\cdot 4\cdot(6x^2-3x+35)=-15x^2-60x+4>0$ односно $15x^2+60x-4<0.$

Оттука добиваме $x \in \left(-\frac{8\sqrt{15}}{15}-2, \frac{8\sqrt{15}}{15}-2\right)$. Во овој интервал целобројни вредности за променливата се: $x=-4, x=-3, x=-2, x=-1, x=0$. За секоја од овие вредности на *x* ќе ги најдеме соодветните вредности за параметарот a.

Неравенката по параметарот a, $4a^2+(6x-24)a+6x^2-3x+35<0$, за $x=-4$, добива облик $4a^2-48a+143<0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \left(\frac{11}{2}, \frac{13}{2}\right)$.

Ако $x=-3$, тогаш добиваме неравенка $2a^2-21a+49<0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \left(\frac{7}{2}, 7\right)$.

Ако $x=-2$, имаме неравенка $4a^2-36a+65<0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \left(\frac{5}{2}, \frac{13}{2}\right)$.

За $x=-1$, добиваме неравенка $2a^2-15a+22<0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \left(2, \frac{11}{2}\right)$.

Ако $x=0$, тогаш важи $4a^2-24a+35<0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

Унијата на сите добиени интервали ни ги одредува бараните вредности на параметарот a, $a \in (2,7)$.

2А. (Сигма 120, Рубрика задачи, зад. 1611) Познато е дека $a^x=b^y=c^z=30^w$ и $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{w}$, каде a, b, c се природни броеви, а x, y, z, w се реални броеви. Одреди го збирот $a+b+c$.

Решение. Да забележиме дека ниту еден од броевите a, b, c не може да е 1. Ако било кој од броевите a, b или c прима вредност 1, тогаш $30^w=1$, од каде $w=0$, што не е можно затоа што по условот на задачата x, y, z, w се ненулти реални броеви. Сега $a,b,c>1$, па со логаритмирање на равенството $a^x=b^y=c^z=30^w$ добиваме $x=w\log_a 30$, $y=w\cdot\log_b 30$, $z=w\cdot\log_c 30$. Од равенството $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{w}$ добиваме $\frac{1}{w\cdot\log_a 30}+\frac{1}{w\cdot\log_b 30}+\frac{1}{w\cdot\log_c 30}=\frac{1}{w}$ односно $\log_{30} a+\log_{30} b+\log_{30} c=1$. На тој начин добиваме $\log_{30} abc=1$ од каде следува дека $abc=30$. Со оглед на фактот што a, b, c се природни броеви поголеми од 1, за производот имаме $abc=2\cdot3\cdot5$, а за бараните броеви a, b, c имаме вредности 2, 3 и 5 (во било кој редослед). Конечно бараниот збир е $a+b+c=2+3+5=10$.

2Б. Одреди го количникот на броевите $2021^{\sqrt{\log_{2021} 2022}}$ и $2022^{\sqrt{\log_{2022} 2021}}$.

Решение: Да ги означиме дадените броеви со $2021^{\sqrt{\log_{2021} 2022}}=x$ и $2022^{\sqrt{\log_{2022} 2021}}=y$.

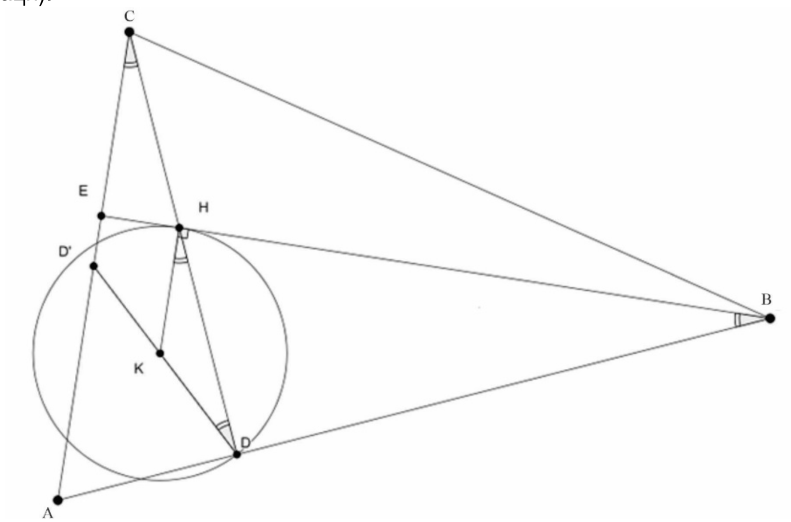
Го бараме нивниот количникот $\frac{x}{y}, y \neq 0$. Трансформираме: $\log x=\sqrt{\log_{2021} 2022}\cdot\log 2021$,

$\log y=\sqrt{\log_{2022} 2021}\cdot\log 2022$, па $\log x=\sqrt{\frac{\log 2022}{\log 2021}}\cdot\log 2021$,

$\log y = \sqrt{\frac{\log 2021}{\log 2022}} \cdot \log 2022$, односно $\log x = \sqrt{\log 2021 \cdot \log 2022}$ и $\log y = \sqrt{\log 2022 \cdot \log 2021}.$ Последново покажува дека $\log x = \log y$ односно $x = y,$ па бараниот количник е еднаков на 1.

3А. Во триаголник ABC, CD е висината во триаголникот спуштена од темето од C и точката H е ортоцентарот на триаголникот. Нека точката K е центар на кружница која што минува низ точката D и нека правата BH е тангента на кружницата со допирна точка H. Докажи дека правата DK ја преполовува страната AC.

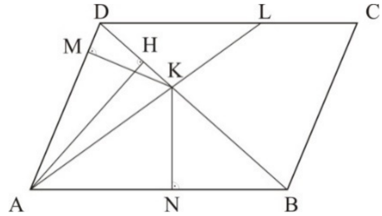
Решение. Нека $D' = DK \cap AC.$ Нека E е подножната точка на висината спуштена од темето B (види цртеж). Јасно е дека $\measuredangle BHK = 90^0.$ ΔADC и ΔAEB се правоаголни, па важи: $\measuredangle ACD = 180^o - (90^o + \measuredangle CAD) = 90^o - \measuredangle CAD = \measuredangle ABE$ (или како агли со заемно нормални краци).



Понатаму, $\measuredangle DBH = 90^0 - \measuredangle DHB = \measuredangle BHK - \measuredangle DHB = \measuredangle DHK.$ ΔKDH е рамнокрак па $\measuredangle KDH = \measuredangle KHD$. Оттука $\measuredangle KDH = \measuredangle KHD = \measuredangle ABE = \measuredangle ACD,$ па добиваме дека $\Delta AD'D$ е рамнокрак и $\overline{CD'} = \overline{DD'}$. ΔADC е правоаголен со прав агол во темето $D,$ па според Талесовата теорема, постои кружница со дијаметар AC на која лежи темето $D.$ Од $\overline{CD'} = \overline{DD'}$, каде $D' \in AC$, јасно е дека точката D' е центарот на таа кружница и тогаш важи $\overline{AD'} = \overline{CD'}$. Со тоа докажавме дека правата правата DK ја преполовува страната $AC.$

3Б. (Сигма 120, Задачи од училницата, стр. 32) Даден е паралелограм $ABCD$. Симетралата на $\measuredangle DAB$ ја сече страната DC во точка $L,$ а дијагоналата BD во точка K, таква што $\overline{DK} : \overline{KB} = 3 : 4$. Пресметај ја должината на отсечката $LC,$ ако периметарот на паралелограмот е 28.

Решение. AL е симетрала на $\measuredangle DAB$ па важи $\measuredangle DAL = \measuredangle LAB = \measuredangle ALD$ (последните два агли се еднакви како наизменични агли при трансверзала AL), од каде ΔALD е рамнокрак. Да означиме $\overline{DL} = \overline{AD} = b$ и $\overline{AB} = \overline{DC} = a$. За плоштините на триаголниците на цртежот имаме



$P_{\Delta AKD}:P_{\Delta ABK}=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{MK}}{2}:\frac{\overline{AB}\cdot\overline{NK}}{2}=\overline{AD}:\overline{AB}=b:a$, каде MK,NK се соодветните висини спуштени кон страните и за нив важи $\overline{MK}=\overline{NK}$ затоа што точката K, како точка од симетралата на $\measuredangle DAB$ е подеднакво оддалечена од краците на аголот.

Од друга страна, $P_{\Delta AKD}:P_{\Delta ABK}=\frac{\overline{DK}\cdot\overline{AH}}{2}:\frac{\overline{BK}\cdot\overline{AH}}{2}=\overline{DK}:\overline{KB}=3:4$. Сега, изедначувајќи ги односите на плоштините добиваме дека важи $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$, а од периметарот на паралелограмот $2(a+b)=28$, со замена, имаме $b=6,a=8$.

Конечно, $\overline{LC}=a-b=2$.

4АБ. Одреди ја максималната вредност на изразот

$$y=\operatorname{tg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \text{ за } x\in\left[-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{3}\right].$$

Решение. Означуваме $z=-(x+\frac{\pi}{6})$, за $z\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ и $2z\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$. Функцијата $\operatorname{tg}x$ е непарна функција, додека $\cos x$ е парна функција. Јасно, тогаш важи $-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}\left(-(x+\frac{\pi}{6})\right)=\operatorname{tg}z$ и $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(-(x+\frac{\pi}{6})\right)=\cos z$. За првиот член на изразот y, важи: $\operatorname{tg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-(x+\frac{2\pi}{3})\right)=\operatorname{ctg}(-x-\frac{\pi}{6})=\operatorname{ctg}z$ и оттука добиваме поинаков облик на изразот $y=\operatorname{ctg}z+\operatorname{tg}z+\cos z$. Ќе го средиме изразот до:

$$y=\frac{\cos z}{\sin z}+\frac{\sin z}{\cos z}+\cos z=\frac{\sin^2 z+\cos^2 z}{\sin z\cdot\cos z}+\cos z=\frac{1}{\sin z\cdot\cos z}+\cos z=\frac{2}{\sin 2z}+\cos z.$$

Функцијата $\sin 2z$ е монотона растечка функција за $z\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$, па на истиот интервал $\frac{2}{\sin 2z}$ е опаѓачка функција. Функцијата $\cos z$ е монотона опаѓачка функција за $z\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$.

Значи двете функции на дадениот интервал достигнуваат максимум за $z=\frac{\pi}{6}$, па и изразот y достигнува максимум во истата точка $z=\frac{\pi}{6}$. Притоа,

$$y_{\max}=\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}=\frac{11}{2\sqrt{3}}=\frac{11\cdot\sqrt{3}}{6}.$$

Четврта година

1А. Нека A е 19-елементно подмножество од множеството $B=\{1,4,7,10,13,\ldots,100\}$. Докажи дека множеството A содржи два елементи чиј збир е делив со 104.

Решение. Да ги разгледаме следните подредени парови чиј збир е 104: $(4,100),(7,97),....,(49,55)$. Овие парови ги опфаќаат сите броеви од множеството B, освен броевите 1 и 52. Броевите 1 и 52 можеби припаѓаат во A, но не се појавуваат во ниту еден од паровите погоре. Заради ова, постојат најмалку $19-2=17$ броеви, елементи на множеството A, кои припаѓаат во некој од дадените парови. Бидејќи $17>16,$ а постојат 16 парови на броеви чиј збир е делив со 104, од принципот на Дирихле, два од броевите во A мора да припаѓаат во ист пар, што значи постојат два елементи во A чии збир е делив со $104.$

1Б. Докажи дека бројот $\dfrac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$ е сложен .

Решение. Нека $a=5^{25}$. Од $a^5-1=(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)$ добиваме

$$\frac{5^{125}-1}{5^{25}-1}=\frac{a^5-1}{a-1}=a^4+a^3+a^2+a+1=(a^2+3a+1)^2-5a(a+1)^2=$$
$$=(a^2+3a+1+5^{13}(a+1))(a^2+3a+1-5^{13}(a+1)).$$

Бидејќи $a^2+3a+1+5^{13}\left(a+1\right)>a^2+3a+1-5^{13}\left(a+1\right)>1$ следува дека бројот $\dfrac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$ можеме да го претставиме како производ на два различни природни броеви различни од еден. Според тоа дадениот број е сложен.

2А. (Сигма 123, Задачи од училница, стр.29) Одреди ги сите парови цели броеви x и y такви што $1+2026x+2028y=xy$.

Решение. За целите броеви x и y, ќе го разгледаме производот:

$$\left(x-2028\right)\left(y-2026\right)=xy-2028y-2026x+2026\cdot 2028.$$

Ако го искористиме равенството дадено во условот, за производот добиваме

$$\left(x-2028\right)\left(y-2026\right)=1+2026\cdot 2028=2027^2.$$

(Притоа, искористивме дека $1+2k\cdot\left(2k+2\right)=1+4k^2+4k=\left(2k+1\right)^2$.)

Од тоа што 2027 е прост број, следува дека $x-2028\in\left\{\pm1,\pm2027,\pm2027^2\right\}$, од каде се добиваат следните парови за броевите x и y:

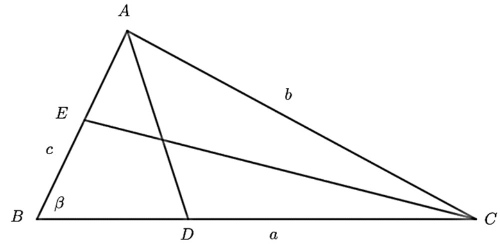
$$\left(x,y\right)\in\left\{\left(2029,2027^2+1\right),\left(2027,-2027^2+2026\right),\left(4055,4053\right),\left(1,-1\right),\right.$$
$$\left.\left(2027^2+2028,2027\right),\left(-2027^2+2028,2025\right)\right\}.$$

2Б. (Сигма 117, Задачи од училница, стр.28) Најди ја равенката на заедничката тангента на параболите $y=x^2+2x+2$ и $y=x^2+x+2$.

Решение. Нека заедничката тангента има равенка $y=kx+b$. Тогаш секоја од равенките $x^2+2x+2=kx+b$ и $x^2+x+2=kx+b$ има единствено решение. За детерминантите на квадратните равенки кои се добиваат $x^2+(2-k)x+2-b=0$ и $x^2+(1-k)x+2-b=0$, мора да важи дека се и двете нули, т.е. $D_1=(2-k)^2-4(2-b)=k^2-4k+4b-4=0$, $D_2=(1-k)^2-4(2-b)=k^2-2k+4b-7=0$. Со одземање на втората од првата равенка добиваме $-2k+3=0$ односно $k=\dfrac{3}{2}$. Со замена во првата равенка имаме $b=\dfrac{4+4k^2-k^2}{4}=\dfrac{31}{16}$. Значи, бараната равенка е $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{31}{16}$.

3А. (Сигма 119, Задачи од училницата, стр. 49) Во триаголникот ABC симетралата на аголот во темето A ја сече страната BC во точка D, а симетралата на аголот во темето C ја сече страната AB во точка E. Аголот во темето B е поголем од 60°. Докажи дека $\overline{AE}+\overline{CD}<\overline{AC}$.

Решение. Согласно стандардните ознаки за елементите на триаголник нека $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$ и $\overline{AC}=b$. Според условот во задачата $\beta>60^{\circ}$, па оттука $\cos\beta<\cos 60^{\circ}=\frac{1}{2}$ ($\cos x$ е опаѓачка функција на $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$). Од косинусната теорема имаме $\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}<\frac{1}{2}$, односно $a^2+c^2<ac+b^2$.



На двете страни на ова неравенство додаваме $ab+bc$ и добиваме $ab+bc+a^2+c^2<ab+bc+ac+b^2$. Со групирање на собироците добиваме $c(b+c)+a(a+b)<a(b+c)+b(b+c)$, односно $c(b+c)+a(a+b)<(a+b)(b+c)$. Ако поделиме со $(a+b)(b+c)\neq 0$ добиваме $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}<1$, односно $\frac{bc}{a+b}+\frac{ba}{b+c}<b$.
Според теоремата за односот во кој симетралата на аголот ја дели спротивната страна имаме $\overline{AE}=\frac{bc}{a+b}$ и $\overline{CD}=\frac{ab}{b+c}$. Навистина, важи $\frac{b}{\overline{AE}}=\frac{a}{\overline{BE}}$, односно $b\overline{BE}=a\overline{AE}$. Бидејќи $\overline{AE}+\overline{BE}=c$, од $\overline{BE}=c-\overline{AE}$ добиваме $b(c-\overline{AE})=a\overline{AE}$. Јасно $\overline{AE}=\frac{bc}{a+b}$. На истиот начин, од $\frac{b}{\overline{CD}}=\frac{c}{\overline{BD}}$ и $\overline{CD}+\overline{BD}=a$, добиваме $b\overline{BD}=c\overline{CD}$ и $\overline{BD}=a-\overline{CD}$. Оттука $b(a-\overline{CD})=c\overline{CD}$, односно $\overline{CD}=\frac{ab}{b+c}$. Со директна замена во неравенството следува дека $\overline{AE}+\overline{CD}<\overline{AC}$.

3Б. (**Сигма 118, Рубрика Задачи, зад. 1562 (1577)** Најди ги првите две и последните две цифри на децималниот запис на бројот x_{1001}, ако $x_1=2$ и $x_{n+1}=\frac{1}{\sqrt[10]{2}}x_n+\frac{\sqrt[10]{2}-1}{\sqrt[10]{2}}$, $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Од рекурентната дефиниција на низата $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ добиваме $x_{n+1}=\frac{1}{\sqrt[10]{2}}x_n+1-\frac{1}{\sqrt[10]{2}}$, односно $x_{n+1}-1=\frac{1}{\sqrt[10]{2}}(x_n-1)$. Дефинираме нова низа, $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ со $y_n=x_n-1$, при што $y_1=1,\ y_{n+1}=\frac{1}{\sqrt[10]{2}}y_n,\quad n=1,2,...$ Од последново заклучуваме дека низата $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ е геометриска прогресија, со прв член $y_1=1$ и количник $\frac{1}{\sqrt[10]{2}}$, односно $y_{n+1}=y_1\left(\frac{1}{\sqrt[10]{2}}\right)^n$, $n=1,2,...$. Имаме: $y_{1001}=\frac{1}{2^{100}}$, $x_n=y_n+1$ за $n=1,2,...$ од каде директно следи дека:

$$x_{1001}=1+\frac{1}{2^{100}}=1+\frac{5^{100}}{10^{100}}=1+\underbrace{0,0...01}_{100\text{ нули}}\cdot 5^{100}.$$

Значи, првите две цифри на бројот x_{1001} се 1 и 0, а двете последни цифри се 2 и 5.

4А. Низата $f(1), f(2), f(3), \ldots$ е дефинирана со $f(n)=\frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]\right)$, каде $[x]$ го означува целиот дел од x. Докажи дека $f(n+1)<f(n)$ за бесконечно многу природни броеви n.

Забелешка. $[x]$ е најголемиот цел број кој не е поголем од x, односно $[x]=k \Leftrightarrow k \leq x<k+1, k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Нека $g(n)=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]=nf(n)$ и дефинираме $g(0)=0.$ Лесно се забележува дека $\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]=1$ ако n е делив со k, и $\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]=0$ ако n не е делив со k. Според тоа имаме:

$g(n)-g(n-1)=\left(\left[\frac{n}{1}\right]-\left[\frac{n-1}{1}\right]\right)+\left(\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)+\ldots+\left(\left[\frac{n}{n}\right]-\left[\frac{n-1}{n}\right]\right)=d(n),$ каде $d(n)$ го означува бројот на природни делители на бројот n. Добиваме:

$g(n)=g(n-1)+d(n)=g(n-2)+d(n-1)+d(n)=\ldots=d(1)+d(2)+\ldots+d(n).$

Оттука $f(n)=\frac{d(1)+d(2)+\ldots+d(n)}{n}$, па условот $f(n+1)<f(n)$ е еквивалентен со $\frac{d(1)+d(2)+\ldots+d(n)+d(n+1)}{n+1}<f(n).$ Бидејќи $d(1)+d(2)+\ldots+d(n)=nf(n)$ следува дека доволно е да докажеме дека постојат бесконечно многу природни броеви n за кои важи $d(n+1)<f(n)$. Условот е исполнет за бесконечно многу природни броеви n за кои $n+1$ е прост број. Во тој случај $d(n+1)=2<f(n).$

4Б. За секој природен број n, докажи дека важи $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}$.

Решение. Имаме $k^3>k^3-k=k\left(k^2-1\right)=(k-1)k(k+1) \Leftrightarrow \frac{1}{(k-1)k(k+1)}>\frac{1}{k^3}$. Ако искористиме дека $\frac{1}{(k-1)k(k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{2}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$ за $k=2,3,\ldots,n$ добиваме:

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}<1+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+2}=\frac{5}{4}+\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2n}=\frac{5}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}<\frac{5}{4}.$$

СОДРЖИНА

Стево Ѓоргиев, Маја Танчевска
ОСНОВНА КЛАСИФИКАЦИЈА НА МЕТОДИТЕ
ЗА ИЗБОР НА ПРИМЕРОК.. 1
ОЛИМПИСКО КАТЧЕ
Мирко Петрушевски, Петар Филиповски
ИЗОГОНАЛНИ ПАРОВИ ПРАВИ И ТОЧКИ.. 4
Петар Филиповски, Јулија Митреска
ОЈЛЕРОВА ФОРМУЛА, ОЛЈЕРОВА ТЕОРЕМА
И МАЛА ТЕОРЕМА НА ФЕРМА... 8
Иванчо Павлов
НИВОА НА ТЕСТИРАЊЕ... 14
ЕГМО 2022.. 15
ЗАДАЧИ ОД УЧИЛНИЦАТА СИГМА 127.. 23
РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД УЧИЛНИЦАТА СИГМА 126............ 25
РУБРИКА ЗАДАЧИ, СИГМА 127.. 31
РЕШЕНИЈА, РУБРИКА ЗАДАЧИ СИГМА 126.................................... 32
НАГРАДНИ ЗАДАЧИ.. 38
РЕШЕНИЈА НА НАГРАДНИТЕ ЗАДАЧИ ОД СИГМА 126................. 38
45. РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД
СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА 12.03.2022.. 40