Сојуз на математичари на Македонија
ЕСЕНСКА МАТЕМАТИЧКА ШКОЛА 2022

ЗАВРШЕН ТЕСТ ЗА IX ОДДЕЛЕНИЕ, I и II ГОДИНА

ТЕМА: СЛИЧНОСТИ И НЕКОИ ТЕОРЕМИ ПОВРЗАНИ СО НИВ
03.12.2022

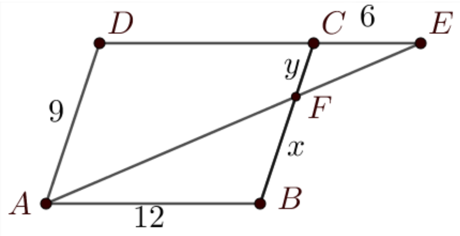
Упатство за ученикот: Задачите од едната тема решавај ги во една тетратка, задачите од другата тема во друга тетратка. Пишувај читливо! Напиши ја целата постапка за решавање на задачата. Ако погрешиш, тогаш напишаното прецртај го. БИДИ ЧЕСЕН!

Време за работа: 2 часа.

ТЕМА 1. СЛИЧНОСТИ И НЕКОИ ТЕОРЕМИ ПОВРЗАНИ СО НИВ

1. а) Во триаголникот ABC е повлечена бисектрисата (симетралата) AD на аголот BAC, каде D лежи на BC. познато е дека страната $\overline{AB}$ е за 2cm поголема од страната $\overline{BC}$, $\overline{CA}$=5cm, $\overline{CD}$=3cm. Кои се страните на триаголникот?

б) Даден е паралелограмот ABCD со страни $\overline{AB}=12$, $\overline{AD}=9$. Точката Е лежи на продолжението на правата CD од кај точката C (како на црт.1). Најдете ги $\overline{BF}=x$, $\overline{FC}=y$.

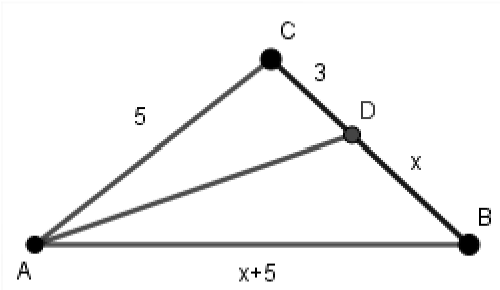


црт.1

Решение

а) Имаме дека $\overline{AB}=\overline{BC}+2\text{cm}$. Нека $\overline{BD}=x$. Тогаш $\overline{BC}=x+3$, $\overline{AB}=x+3+2=x+5$. Од теоремата за бисектриса на агол, важи $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$, т.е. $(x+5):5=x:3$ од каде имаме $3(x+5)=5x$ или $3x+15=5x$

$$x=\frac{15}{2}=7{,}5$$



Сега, $\overline{AB}=7{,}5+5=12{,}5\text{ cm}$, $\overline{BC}=7{,}5+3=10{,}5\text{ cm}$.

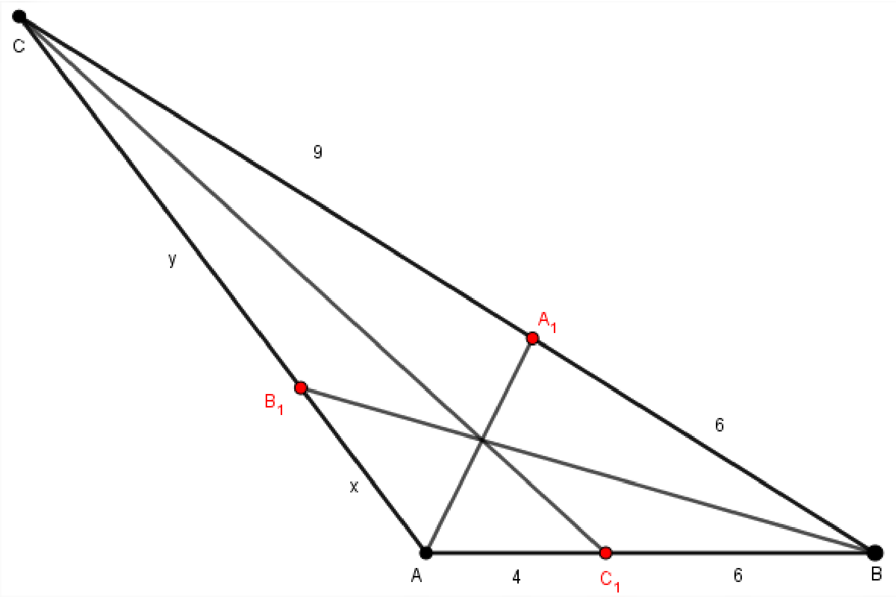
б) Имаме дека $\triangle ABF\sim\triangle ECF$ од каде $\overline{AB}:\overline{BF}=\overline{EC}:\overline{CF}$, т.е. $12:x=6:y$ од каде $x=2y$. Сега, бидејќи $x+y=\overline{BC}=\overline{AD}=9$ се добива дека $2y+y=9$. Добиваме дека $y=3$, $x=6$.

2. Даден е триаголникот ABC и во него се повлечени бисектрисите (симетралите) на аглите AA_1, BB_1, CC_1. Ако се знае дека $\overline{BA_1}:\overline{A_1C}=6:9$, $\overline{BC_1}:\overline{C_1A}=6:4$. Определете го односот $\overline{AB_1}:\overline{B_1C}$. Која страна е подолга, $\overline{AB}$ или $\overline{BC}$?

Решение

Бисектрисите (симетралите)на аглите во триаголник се сечат во една точка. Од теоремата на Чева, имаме дека

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = 1$$



Ако се заменат вредностите на односите, имаме

$$\frac{6}{9} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{4}{6} = 1$$

од каде

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} = \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{9}$$

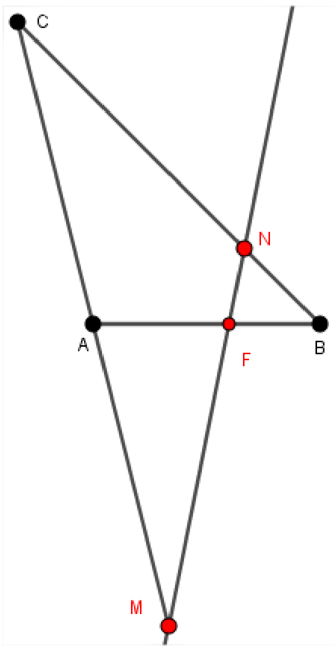
Од теоремата за бисектриса на агол, имаме дека $\overline{BA_1}:\overline{A_1C} = \overline{BA}:\overline{AC} = 6:9$, од каде $\overline{BA} < \overline{AC}$. Слично, $\overline{BC_1}:\overline{C_1A} = \overline{BC}:\overline{CA} = 6:4$ од каде $\overline{BC} > \overline{CA}$. Значи,

$$\overline{BC} > \overline{CA} > \overline{AB}\,.$$

Забелешка. Уште повеќе, важи дека $\overline{AB}:\overline{CA} = 6:9 = 24:36$, $\overline{BC}:\overline{CA} = 6:4 = 54:36$

$$\overline{AB}:\overline{CA}:\overline{BC} = 24:36:54$$

3. Во триаголникот ABC на страната BC е земена точка N така што $\overline{NC} = 3\overline{BN}$; на продолжението на страната AC од кај точката A е земена точка M така што $\overline{MA} = \overline{AC}$ (A е меѓу M и C). Правата MN ја сече страната AB во точката F. Најдете го односот $\overline{BF}:\overline{FA}$.



Решение

Од теоремата на Менелај за триаголникот ABC и правата MN добиваме дека

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = 1\,.$$

Со замена на дадените односи имаме дека

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

од каде $\overline{BF}:\overline{FA} = 2:3$.