Комбинаторика - Инваријанти и полуинваријанти

Никола Велов

30. Maj 2022

Воведни пример

Пример 1. Диск во рамнината е поделен на области. Броевите 1, 0, 1, 0, 0 и 0 се запишани во областите во насоката на казалката на саатот. На 2 соседни дела во секој чекор можеме да додадеме $+1$. Дали можеме после конечно чекори да направиме сите да се исти?

Пример 2. Дадена е 4×4 табла на сликата подолу. Дозволено е во секој чекор сите полиња на истата хоризонтална, вертикална или дијагонална линија да се помножат со -1. Дали можеме после конечно чекори да направиме сите полиња да бидат 1?

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	-1	1	1

Задачи со инваријанти 1

Пример 3. Околу кругот имаме имаме 5 единици и 4 нули во некој редослед. Во секој чекор, помеѓу исти соседни цифри запишуваме нула, додека помеѓу различни соседни цифри запишиваме единица и ги бришеме броевите од претходниот чекор. Дали после конечно чекори можеме да добиеме 9 нули?

Пример 4. Имаме 8×8 стандардно обоена шаховска табла. Во секој чекор избираме 2×2 квадрат и ги менуваме сите бои во него (од бела во црна и обратно). Дали можеме да добиеме табла со точно едно црно поле?

Задачи со инваријанти 2

Пример 5. Нека n е непарен број. На таблата се напишани броеви 1, 2, ..., $2n$. Во секој чекор избираме a и b од таблата и наместо нив запишуваме $|a - b|$. Докажи дека на крајот ќе остане непарен број.

Задачи со полуинваријанти 1

Пример 6. Имаме 10×10 табла. На 9 полиња имаме трева. Во секој чекор, на секое поле со 2 соседни полиња каде што има трева исто така порасне трева. Дали во некој момент на сите полиња ќе имаме трева?

Пример 7. Имаме n црвени и n жолти точки во рамнината така што немаме три колинеарни точки. Докажи дека секоја црвена точка може да се упари со точно една жолта точка преку права линија, така што добиените линии не се сечат.

Задачи со полуинваријанти 2

Пример 8. (ММО 2017) Нека $n > 1$ е природен број и $a_1, a_2, ..., a_n$ е низа од n природни броеви. Нека

$$b_i = \left[\frac{a_1 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_n}{n-1}\right]$$

Дефинираме функција f со $f(a_1, a_2, ..., a_n) = (b_1, b_2, ..., b_n)$. Нека функцијата $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е дефинирана со: $g(1)$ е бројот на различни елементи во низата $f(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $g(m)$ е бројот на различни елементи во низата $f^m(a_1, a_2, ..., a_n) = f(f^{m-1}(a_1, a_2, ..., a_n))$, $m > 1$. Докажи дека постои k_0 таков што за $m \geq k_0$ функцијата $g(m)$ е периодична.