Математичко списание СИГМА
за учениците од средните училишта

ISSN 1409-6803 **UDC51(497.17)**

СОПСТВЕНИК И ИЗДАВАЧ:
СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА
Првиот број на СИГМА е отпечатен во јануари 1979 година.
Излегува во четири броја во текот на една учебна година.
Цената на еден примерок е 200 денари.
Претплатата за четирите броја е 480 денари.
Порачките треба да се направат на web страната на СММ,
https://smm.org.mk, во делот *Списанија и книги*, со
пополнување на податоците наведени во *формата*.

Жиро сметка 3000 0000 1276 071, ЕДБ 4030 99 11 21 596,
Депонент: Комерцијална банка - Скопје, СМ на Македонија, за СИГМА.

Сите коментари, забелешки, Ваши предлози (статии, занимливости, задачи, работа со талентирани ученици и друго) за објавување во СИГМА, и решенија на задачите, можете да ги испратите на e-mail: sigma.spisanie.smm@gmail.com.

Стево Ѓоргиев, Маја Танчевска
Природно-математички факултет , Скопје
АД Осигурителна Полиса, Скопје

ОСНОВНИ КОНЦЕПТИ НА МАТЕМАТИКАТА ВО ОСИГУРУВАЊЕТО

Постојат повеќе механизми кои луѓето и како поединци и како група ги користат за да се заштитат од финансиски загуби. Осигурувањето е еден од нив. Главната дефиниција за осигурувањето е дека тоа претставува еден облик на управување со ризик, односно пренос на ризикот од осигуреникот врз осигурителното друштво со плаќање на премија.

Пред да преминеме на разгледувања на некои посебни карактеристики, прво ќе се запознаеме со некои основни поими порзани со осигурувањето кои ќе ни помогнат да го сфатиме и разработиме едноставниот базичен концепт на кој тоа подлежи.

- *Осигуреник – лице чиј живот или имот е осигуран.*
- *Осигурувач – осигурителната компанија.*
- *Полиса – документ за склучен договор за осигурување кој го издава осигурувачот или друго лице овластено од осигурувачот.*
- *Премија – е износот што осигуреникот му го плаќа на осигурувачот за носење на соодветен ризик.*
- *Штета - формално барање до осигурителна компанија за надомест на загубите покриени со полисата за осигурување.*

Главните концепти зошто осигурувањето добро функционира се релативно лесни и едноставни за разабирање за нас како математичари. Овие концепти се одличен показател за тоа дека статистиката никогаш не греши доколку се применува соодветно и добиените резултати се толкуваат правилно.

ПРВ КОНЦЕПТ

Првиот концепт на кој се потпира осигурувањето, меѓу статистичарите е познат како „Законот за големите броеви“, а истиот најдобро може да се објасни преку едноставен пример.

Пример 1. Да претпоставиме дека ни е здодевно од некоја од секојдневните задачи и обврски и одлучивме да играме игра со фрлање на фер паричка. За паричката велиме дека е фер паричка, ако веројатноста да се падне грб е еднаква на 0.5 и веројатноста да се падне глава е исто така 0.5. Ја фрламе паричката и на лист хартија запишуваме колку глави може да се паднат последователно, една по друга, во серија од повеќе фрлања на паричката. Во серија од по едно и по две фрлања, забележуваме дека лесно може да се падне една, односно две глави по ред. Но во серија од три фрлања, сфаќаме дека да се паднат три глави последователно е потешко, во серија од четири фрлања да се паднат четири глави последователно е уште потешко итн. Всушност, колку пати да се обидуваме, со зголемување на бројот на обиди во една серија, континуираното паѓање на глава само се отежнува.

Се разбира, претпоставуваме дека фрлањата на паричката ги правиме на фер начин, каква што е и паричката. ☺

Прашањето кое природно се наметнува е: „Зошто е тоа така?“ Одговорот е едноставен. Веројатноста да се падне глава во серија од едно фрлање е $\frac{1}{2}$. Понатаму, веројатноста да се паднат две глави во серија од две фрлања е производ од веројатностите да се падне глава во првото фрлање и да се падне глава во второто фрлање, односно таа е еднаква на $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. Значи, статистички гледано во изведување на 4 серии од по две фрлања, само еднаш ќе се паднат две глави една по друга, што е „обесхрабрувачки“ на некој начин. Веројатноста многу брзо се намалува доколку се зголеми бројот на фрлања во една серија. Во следната табела ќе ги претставиме веројатностите да се падне глава при секое фрлање на паричката во серии со различен број на фрлања:

Број на фрлања во серијата	1	2	3	4	5	...	n
Веројатноста да се падне глава во секое фрлање	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$		$\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Табела 1. Приказ на веројатностите за серии со повеќе фрлања

Од друга страна, ако одлучиме да ги запишуваме резултатите од фрлањето на паричката од една серија со голем број на обиди, анализирајќи ги резултатите ќе забележиме дека скоро половина од обидите се паднала глава, а останатата половина грб. Значи колку повеќе се изведува еспериментот, толку повеќе се доближува до теоретската веројатност. Математичарите одат еден чекор понапред и велат дека ако изведуваме било каков експеримент во кој набљудуваме еден конкретен настан и експериментот го изведуваме голем број пати, резултатите кои ги добиваме од експериментот се сè поблиску и поблиску до теоретската веројатност за настанување на настанот, па може да се изедначат резултатите од спроведувањето на експериментот и теоретски добиената веројатност.

ВТОР КОНЦЕПТ

Вториот концепт позади осигурувањето е нешто што ќе го нарекуваме тежинска (пондерирана) веројатност. Овој концепт е надополнување на првиот концепт, но подеднакво важен за осигурувањето.

Пример 2. Разгледуваме игра со поени и претпоставуваме дека поседуваме одреден број на поени на почетокот на играта. Играта се состои од фрлање на фер коцка за играње. За една коцка за играње велиме дека е фер коцка за играње, ако веројатноста да се паднат i точки на горната страна на коцката е $\frac{1}{6}$, $i=1,2,3,4,5,6.$

Во играта со поени, добиваме 6 поени ако на горната страна на коцката се паднат 6 точки, а губиме 2 поени ако се падне кој било друг број на точки на горната страна на коцката за играње. Во овој случај, прашањата кои природно се наметнуваат се : „Дали треба да ја играме играта?“ и „Дали ни е исплатливо да ја играме?“. Одговорот е не, бидејќи ќе бидеме во загуба ако играме доволно долго. Но, како дојдовме до тој заклучок? Математичарите развиле формула како да дојдат до очекуваниот број на поени, добиени или изгубени, во ситуации како овие, која гласи:

$$E = p_1 d + p_2 g\,,$$

каде што

- E - очекуван број на поени;
- p_1 - веројатноста да се добие поен;
- p_2 - веројатноста да се изгуби поен;
- d -бројот на добиени поени;
- g - бројот на изгубени поени.

Со примена на формулата во нашиот случај, бидејќи веројатноста да се паднат 6 точки на горната страна на коцката, односно веројатноста да освоиме поени е $\frac{1}{6}$, веројатноста да не се паднат 6 точки на горната страна на коцката, односно за изгубиме поени е $\frac{5}{6}$ и од тоа што добиваме 6 поени, а губиме 2 поени, добиваме дека очекуваниот број на поени при играње на оваа игра е

$$\text{Очекуван број на поени} = -2\cdot\frac{5}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = -0,66\,.$$

Значи, очекуваме да изгубиме 0,66 поени при играње на оваа игра. Всушност, колку повеќе пати ја играме играта толку повеќе ќе се доближуваме до очекуваната загуба од 0,66 поени.

ПРИМЕНА ВО ОСИГУРУВАЊЕ

Како сето ова наведено погоре е поврзано со осигурувањето?

Осигурителните компании го поврзуваат ризикот од повеќе осигуреници во еден фонд, односно го пренесуваат ризикот од едно лице на група. Со тоа,загубата (односно штетата)проилезена од мал број на неповолни настани може да биде лесно поднесена од страна на голем број на осигуреници.

Луѓето купуваат осигурување за да се заштитат од ризици, а со тоа и од загуби. Некои ризици може да се избегнат со навремени мерки за претпазливост, додека некои се неизбежни и надвор од контролата на човекот, па осигурувањето е еден начин да се заштитиме од нив.

Како се доаѓа до полисата за осигурување? Многу едноставно. Лицето кое сака да се осигура ја контактира осигурителната компанија и со неа склучува договор, односно купува полиса за осигурување за која лицето плаќа одредена премија месечно или годишно, а за возврат осигурителната компанија го презема ризикот да ја покрие настанатата штета по тој ризик за кој се однесува полисата (пример: пожар, поплава).

Пример 3. Нека ние сме една мала осигурителна компанија „СИГМА“ која осигурала 1000 куќи и станови од пожар, односно компанијата издала 1000 полиси во една година на сопствениците на овие домаќинства со премија од 200 парични единици месечно, односно $200 \cdot 12 = 2400$ парични единици годишно. Со овој тип на полиса домаќинствата се заштитиле од настанување на пожар, а компанијата го презела ризикот и се согласила да исплати максимален износ во висина од 2000000 парични единици за покривање на секоја од штетите, доколку истата настане.За да го поедноставиме примерот претпоставуваме дека само една куќа или стан ќе биде зафатена од пожар во текот на годината. Притоа, веројатноста да настане штета (во случајот да настане пожар) кај некое од домаќинствата е $\frac{1}{1000}$, додека веројатноста да не настане штета е $\frac{999}{1000}$. Да го разгледаме следното равенство

$$-2000000 \cdot \frac{1}{1000} + 2400 \cdot \frac{999}{1000} = -2000 + 2397,6 = 397,6$$

Значи, со собирање на мали премии, компаниите користејќи ги горните два принципа знаат дека веројатноста ги „штити“ од повремени загуби и притоа имаат очекувана заработка од 397,6 парични единици. Секако, во случај кога би се реализирале повеќе вакви штетни настани, односно пожари, би можела да претрпи и загуба. Од друга страна, осигурениците имаат исто така бенефит од осигурувањето. На прв поглед, веројатноста за настанување пожар е доста мала, па би можеле и да ја игнорираме.Но, на долг рок и веројатноста да не настане штета исто така ќе се намалува,што би значело дека сме изложени на ризик и веројатно сумата за настаната штета не би можеле да ја покриеме самостојно во таков случај.

Ова е еден едноставен пример користејќи мали суми, но математиката која се користи во осигурителните компании, иако е многу покомплексна од ова што го разгледувавме, сепак се заснова на оваа идеја. Осигурителните компании за ваквиот тип на анализи и пресметки ангажираат стручни лица - актуари, кои водејќи се од овие едноставни концепти градат една цела наука. Актуарите се лица кои се едуцирани од областа на математиката, статистиката, веројатноста и финансиите, поседуваат аналитички и деловни вештини кои ги применуваат при анализа на финансиските неизвесности и ризикот. Тие преку анализа на минатите настани и оценка на тековните ризици, креираат модели кои ги користат за проектирање на идните настани.

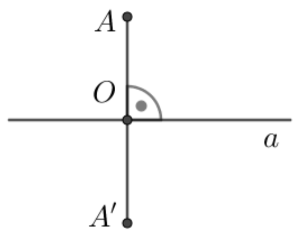
Актуарската професија е најдобрата професија за која најверојатно не сте слушнале до сега.☺

Петар Филиповски

ОСНА СИМЕТРИЈА

Во оваа статија ќе се запознаеме со една трансформација која има голема примена во геометријата. Станува збор за осна симетрија. Со примена на осна симетрија многу докази на одредени проблеми стануваат едноставни. Исто така оваа трансформација има голема примена во конструктивните задачи.

Нека a е фиксна права во рамнината и нека A е произволна точка од истата рамнина. Низ точката A повлекуваме права p која е нормална на правата a и ја сече a во точката O. Тогаш на правата p постои единствена точка A' таква што $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OA'}$. За точката A' велиме дека е **симетрична на точката A во однос на правата a**.

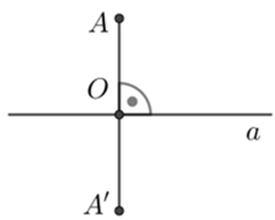


За дадена права a дефинираме трансформација на рамнината, која што ќе ја означуваме со σ_a со:

$$\sigma_a(A)=A' \Leftrightarrow A' \text{ е симетрична на } A \text{ во однос на правата } a.$$

Оваа трансформација се нарекува **осна симетрија**, а правта a се нарекува **оска на симетрија**.

Теорема 1. За секоја осна симетрија σ_a важи $\sigma_a^2=\varepsilon$.



Доказ. Нека σ_a е осна симетрија, A е прозиволна точка и нека $\sigma_a(A)=A'$. Од дефиницијата за осна симетрија имаме $\sigma_a(A')=A$. Тогаш

$$\sigma_a^2(A)=\sigma_a(\sigma_a(A))=\sigma_a(A')=A.$$

Од произволноста на точата A следува $\sigma_a^2=\varepsilon$.

Теорема 2. Ако $\sigma_a^2=\varepsilon$, тогаш σ_a е биекција и притоа важи $\sigma_a^{-1}=\sigma_a$.

Доказ. Нека $\sigma_a^2=\varepsilon$. Нека $\sigma_a(A)=\sigma_a(B)$. Тогаш $\sigma_a(\sigma_a(A))=\sigma_a(\sigma_a(B))$, т.е. $\sigma_a^2(A)=\sigma_a^2(B)$, од каде добиваме дека $A=B$. Следува σ_a е инјекција.

Нека X е произволна точка од рамнината и нека $\sigma_a(X)=A$. Тогаш имаме $\sigma_a(\sigma_a(X))=\sigma_a(A)$, т.е. $\sigma_a^2(X)=\sigma_a(A)$, односно $X=\sigma_a(A)$. Следува σ_a е сурјекција.

Со тоа докажавме дека σ_a е биекција. Од последното добиваме дека постои σ_a^{-1}.

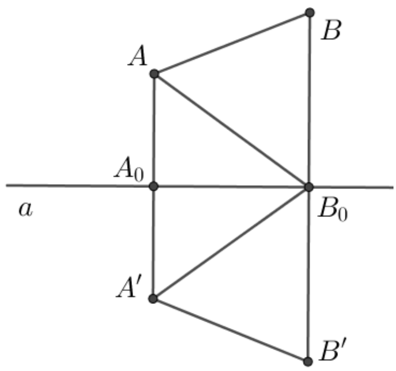
Ако точката A' е симетрична на точката A во однос на правата a, тогаш и точката A е симетрична на точката A' во однос на правата a, па затоа $\sigma_a(A')=A$. Од последното добиваме $\sigma_a^{-1}=\sigma_a$.

Слики на некои фигури при осна симетрија

Теорема 3. Нека A и B се две дадени точки и нека $\sigma_a(A)=A'$ и $\sigma_a(B)=B'$. Тогаш $AB=A'B'$.

Доказ. Ќе разгледаме два случаеви: точките A и B да се од иста страна на правата a и точките A и B да се на различна страна од правата a.

1) Нека точките A и B да се од иста страна на правата a. Тогаш $\sigma_a(A)=A'$ и $\sigma_a(B)=B'$. Нека правите AA' и BB' ја сечат правата a во точките A_0 и B_0, соодветно. Ќе покажеме дека $\triangle AB_0B \cong \triangle A'B_0B'$.



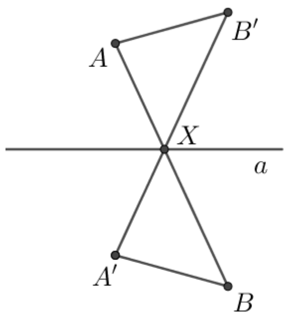
Од складноста, $\triangle AA_0B_0 \cong \triangle A'A_0B_0$, добиваме дека $\angle AB_0A_0=\angle A'B_0A_0$ и $AB_0=A'B_0$. Од друга страна следува $\angle BB_0A=\angle A'B_0B'$. Значи, за триаголниците $\triangle AB_0B$ и $\triangle A'B_0B'$ имаме:

$$AB_0=A'B_0,\ \angle BB_0A=\angle A'B_0B' \text{ и } B_0B=B_0B',$$

па, според признакот САС, следува $\triangle AB_0B \cong \triangle A'B_0B'$, а оттука добиваме $AB=A'B'$.

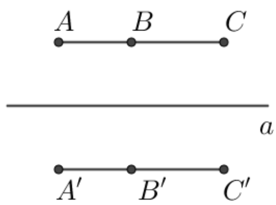
2) Нека точките A и B да се на различна страна од правата a и нека правата AB ја сече правата a во толката X. Нека $\sigma_a(A)=A'$ и $\sigma_a(B)=B'$. Јасно $\sigma_a(X)=X$. Од последното добиваме дека и правата $A'B'$ ја сече правата a во толката X. Следува

$$AB=AX+XB=A'X+XB'=A'B'.$$



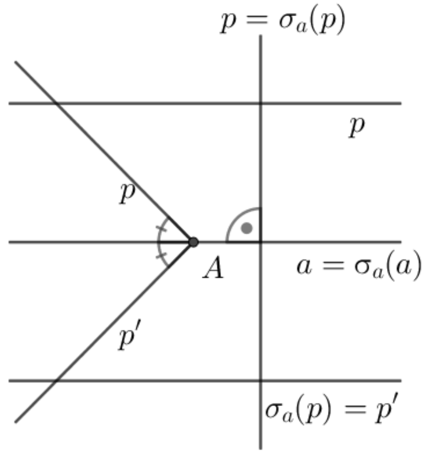
Како последица на оваа теорема ја добиваме следната теорема:

Теорема 4. При секоја осна симетрија σ_a колинеарни точки се пресликуваат во колинеарни точки, т.е. ако точките A, B и C се колинеарни, тогаш и нивните слики $\sigma_a(A)=A'$, $\sigma_a(B)=B'$ и $\sigma_a(C)=C'$ се колинеарни точки.



Теорема 5. При секоја осна симетрија σ_a права p се пресликува во права p'. Притоа:

1. $\sigma_a(a) = a$
2. $p \perp a \Rightarrow \sigma_a(p) = p$
3. $p \parallel a \Rightarrow \sigma_a(p) \parallel a$
4. $p \cap a = \{A\} \Rightarrow \sigma_a(p) \cap p = \{A\}$.



Доказ. **1)** Ако $p = a$, тогаш за секој $P \in a$, имаме $\sigma_a(P) = P$, па добиваме $\sigma_a(a) = a$.

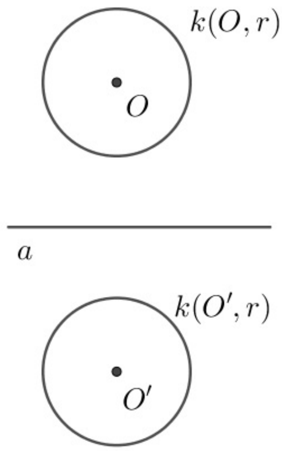
2) Нека $p \perp a$ и $p \cap a = \{A\}$. Нека $B \in p$ е произволна точка и $B \neq A$. Тогаш јасно и $\sigma_a(B) = B' \in p$, па од Теорема 4 следува $\sigma_a(p) = p$.

3) Нека $p \parallel a$ и нека $A, B \in p$ се произволни точки. Јасно $\sigma_a(A) = A'$, $\sigma_a(B) = B'$ се точки од правата $\sigma_a(p) = p'$. Повторно од Теорема 4 следува $\sigma_a(p) \parallel a$.

4) Следува од доказот на Теорема 3.

Како последица од Теорема 5 се добива следната теорема:

Теорема 6. Агол при осна симетрија σ_a се пресликува во нему еднаков агол.



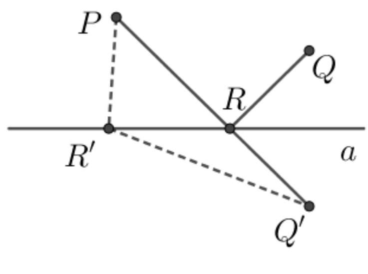
Како последица од Теорема 3 се добива следната теорема:

Теорема 7. Секоја кружница $k(O, r)$, при осна симетрија σ_a се пресликува во кружница $k(O', r)$, каде што $O' = \sigma_a(O)$.

Задача 1. Нека точките P и Q се од иста страна на правта a. На правата a определи точка R така што збирот $PR + RQ$ е најмал.

Решение. Нека $\sigma_a(Q) = Q'$ и нека правата PQ' ја сече правата a во точката R. Тогаш

$$PR + RQ = PR + RQ' = PQ'.$$

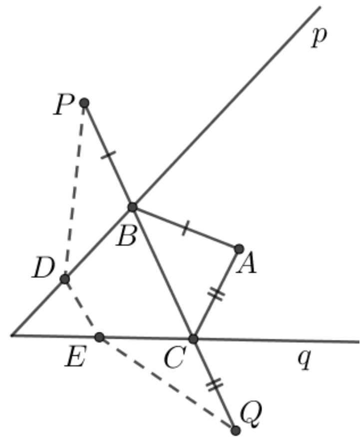


Ќе докажеме дека R е бараната точка. Навистина, ако R' е произволна точка од правата a и $R \neq R'$, тогаш

$$PR' + R'Q = PR' + R'Q' > PQ' = PR + RQ.$$

Од произволноста на R' следува R е бараната точка.

Задача 2. Правите p и q се краци на остар агол. Во внатрешноста на аголот дадена е точка A. На краците p и q одреди точки B и C, соодветно така што триаголникот $\triangle ABC$ има минимален периметар.



Решение. Нека $\sigma_p(A)=P$ и $\sigma_q(A)=Q$. Нека правата PQ ги сече правите p и q во точките B и C, соодветно. Тогаш за периметарот на триаголникот $\triangle ABC$ имаме

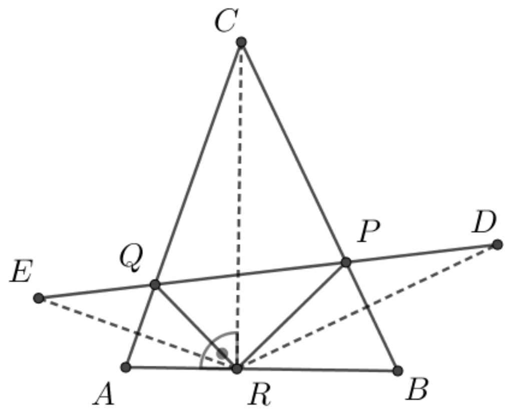
$$L_{\triangle ABC}=AB+BC+CA=PB+BC+CQ.$$

Ќе докажеме дека ова е бараниот триаголник. Нека D и E се произволни точки од правите p и q, соодветно, притоа $D\neq B$ и $E\neq C$. Тогаш за периметарот на триаголникот $\triangle ADE$ имаме

$$L_{\triangle ADE}=AD+DE+EA=PD+DE+EQ>PQ=AB+BC+CA=L_{\triangle ABC}.$$

Следува конструираниот триаголник $\triangle ABC$ има минимален периметар.

Задача 3. Во даден остроаголен триаголник впиши триаголник со минимален периметар, така што на секоја страна од дадениот триаголник да лежи по едно теме од впишаниот триаголник.



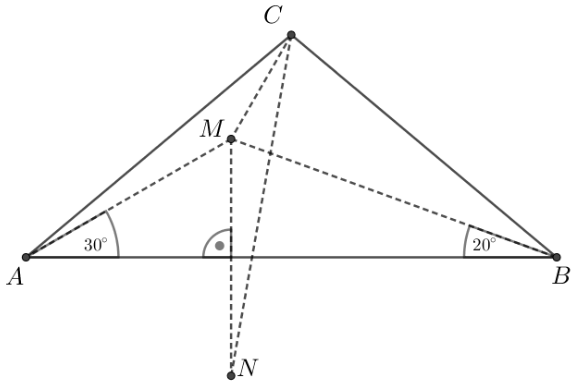
Решение. Нека дадениот триаголник е $\triangle ABC$ и R е произволна точка од страната AB. Нека $\sigma_{BC}(R)=D$ и $\sigma_{CA}(R)=E$. Нека правата DE ги сече страните BC и CA во точките P и Q, соодветно. Тогаш за фиксирана точка R, впишаниот триаголник $\triangle RPQ$ има минимален периметар кој изнесува ED. Триаголникот $\triangle EDC$ е рамнокрак ($EC=RC=DC$), аголот $\angle ECD=\angle ECR+\angle RCD=2\angle ACB$, па добиваме дека ED е минимално кога $EC=DC$ е минимално, т.е. кога RC е висина во триаголникот $\triangle ABC$. Аналогно се покажува дека P и Q се подножја на висините повлечени кон страните BC и CA, соодветно. Следува бараниот триаголник, е триаголникот формиран од подножјата на висините во дадениот триаголник.

Задача 4. Во рамнокракиот триаголник $\triangle ABC$ со основа AB, аголот $\angle ACB=100^\circ$. Точката M е внатрешна точка за триаголникот $\triangle ABC$ за која важи $\angle BAM=30^\circ$ и $\angle MBA=20^\circ$. Пресметај ја големината на аголот $\angle ACM$.

Решение. Нека $\sigma_{AB}(M)=N$. Тогаш триаголникот $\triangle ANM$ е рамностран (зошто?). Следува $\angle BNA=180^\circ-\angle NAB-\angle ABN=130^\circ$. Од $180^\circ-\angle BNA=50^\circ=\frac{\angle ACB}{2}$,

добиваме дека точките A, N и B лежат на кружница со центар во темето C. Од последното следува $CA=CN$, па од складноста на триаголниците $\triangle AMC\cong\triangle NMC$ имаме $\angle ACM=\angle MCN$.
Од теоремата за централен и периферен агол добиваме

$$\angle ACN=2\angle ABN=2\cdot 20^\circ=40^\circ.$$



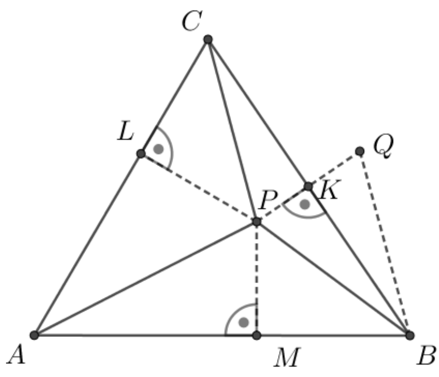
Конечно добиваме $\angle ACM=\frac{\angle ACN}{2}=20^\circ$.

Задача 5. Нека P е точка од внатрешноста на остроаголниот триаголник $\triangle ABC$. Ако d е најмалото растојание од точката P до страните на триаголник $\triangle ABC$, а D е најголемото растојание од точката P до темињата на триаголник $\triangle ABC$, докажи дека $2d\le D$. Кога важи знак за равенство?

Решение. Нека K, L и M се подножјата на висините спуштени од точката P кон страните BC, CA и AB, соодветно. Тогаш

$$d=\min\{PK,PL,PM\}, \text{ а } D=\max\{PA,PB,PC\} .$$

Од 6 те агли со врв во темето P барем еден има вредност помала од 60°. Без губење на општоста, нека тоа е аголот $\angle BPK\ge 60^\circ$. Нека $\sigma_{BC}(P)=Q$. Тогаш $BQ=BP$ и $\angle KQB=\angle BPK\ge 60^\circ$, па добиваме $\angle QBP\le 60^\circ$. Од последното имаме $PQ\le BP$, т.е. $2d\le BP$. Од условите на задачата знаеме $BP\le D$. Следува $2d\le D$. Равенство важи кога триаголникот $\triangle ABC$ е рамностран и точката P е негово тежиште.



Извори:

[1] Живко Мадевски, Александар Самарџиски, Наум Целакоски, Геометрија за II клас на средното образование,Скопје 1976
[2] Milan Mitrovic, Mihajlo Veljkovic, Srdjan Ognjanovic, Ljubinka Petkovic, Nenad Lazarevic, Geometrija za prvi razred Matematicke gimnazije, Beograd, 2003

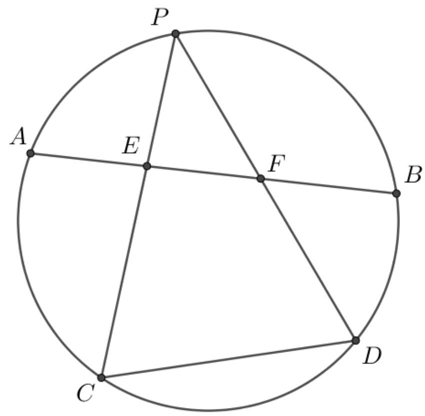
Мирко Петрушевски

Петар Филиповски

ХАРУКИ ЛЕМА

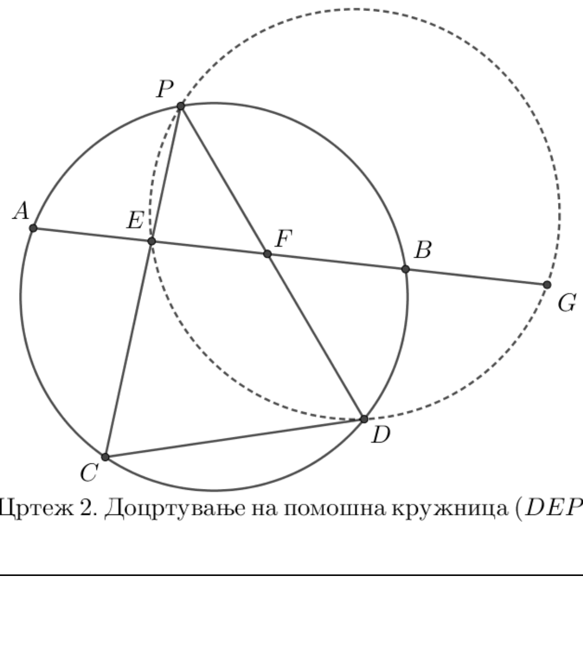
Евклидската геометрија изобилува со прекрасни класични теореми. Во оваа куса статија станува збор за една убава лема откриена од Хироши Харуки. Мистичната убавина на Харуки лемата е во нејзината едноставност. Најпрво ќе ја изложиме и докажеме во изворна форма, а потоа ќе ја обопштиме.

Лема (Харуки). Нека AB и CD се две непресекувачки тетиви на иста кружница, и нека P е подвижна точка на лакот AB кој што не ги содржи точките C и D. Нека $E = PC \times AB$ и $F = PD \times AB$, т.е., E и F се пресечните точки на тетивите PC и PD со AB, соодветно (Цртеж 1). Тогаш вредноста на $\dfrac{AE \cdot BF}{EF}$ не зависи од позицијата на точката P.



Цртеж 1. Харуки лема : $\dfrac{AE \cdot BF}{EF} = const.$

Доказ. Нека G е втората пресечна точка (покрај E) на опишаната кружница (DEP) и правата AB (види Цртеж 2). Имаме



Цртеж 2. Доцртување на помошна кружница (DEP).

$\angle CPD = \angle EPD = \angle EGD$, што кажува дека вредноста на $\angle EGD$ не зависи од позицијата на точката P. Но тоа значи дека точката G е фиксна, и оттаму $BG = const$. Разгледувајќи го степенот на точката F во однос на двете кружници ги добиваме равенствата

$$AF \cdot FB = FP \cdot FD \text{ и } FP \cdot FD = EF \cdot FG.$$

Следува,

$$AF \cdot FB = EF \cdot FG,$$

односно

$$(AE + EF) \cdot FB = EF \cdot (FB + BG).$$

Последното равенство се поедноставува до облик

$$AE \cdot FB = EF \cdot BG,$$

т.е.

$$\frac{AE \cdot FB}{EF} = BG = const. \qquad \square$$

Основната идеја на приложениот доказ е прилично интуитивна. Имено, при подвижна точка P долж лак од кружница, она што останува неменливо е вредноста на $\angle CPD$. Оттаму, природно е идејата таа инваријанта да ја позиционираме на правата AB (со воведување на точката G) имајќи предвид дека секоја од отсечките AE, EF и FB лежи на AB.

Вежба 1. Докажете дека и вредноста $\frac{AF \cdot BE}{EF}$ не зависи од позицијата на точката P. Имено, покажете го равенството $\frac{AF \cdot BE}{EF} = AG$.

Вежба 2. Нека A, B, C, D, E, F и P се како во лемата на Харуки. Точките G и H се вторите пресечни точки на (DEP) и (CFP) со правата AB, соодветно. Докажете дека $AH = BG$ и притоа оваа должина не зависи од позицијата на точката P.

Забелешка 1. Во доказот на Харуки лемата може да користи и кружницата (CFP), наместо (DEP).

Забелешка 2. Тврдењето во лемата на Харуки останува да важи и при одредено релаксирање на условите. Имено, како прво не е потребно тетивите AB и CD да се непресекувачки, и како второ точката P може произволно да се движи долж целата кружница: доволно е да важи $P \neq A, B$ и да се добро дефинирани пресечните точки E и F. За да се докаже лемата при наведените релаксации на условите може да се следи приложениот доказ но притоа разгледуваните величини (агли, отсечки) да се со знак. Алтернативно, може да се испише и доказ разгледувајќи ги неколкуте можни поставености на AB, CD и P во конфигурацијата.

Во доказот на Харуки лемата посочивме дека константната вредност $\frac{AE \cdot BF}{EF}$ е во врска со точка која не лежи на кружницата $(ABCDP)$. Следниот резултат ја дообјаснува природата на оваа константа со помош на елементи од кружницата.

Лема. Нека AB и CD се непресекувачки тетиви на иста кружница, и нека P е точка на лакот AB кој што не ги содржи точките C и D. Нека $E = PC \times AB$ и $F = PD \times AB$. Тогаш

$$\frac{AE \cdot BF}{EF} = \frac{AC \cdot BD}{CD} \tag{1}$$

и

$$\frac{AF \cdot BE}{EF} = \frac{AD \cdot BC}{CD}. \tag{2}$$

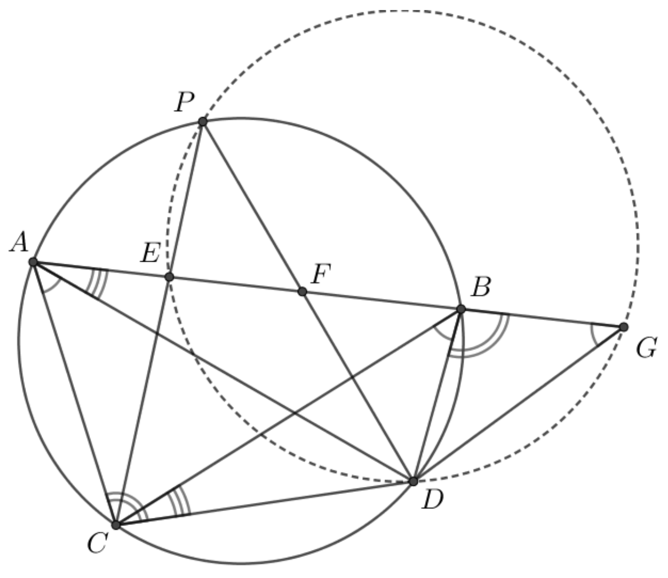
Доказ. Користејќи ја нотацијата и помошната кружница (DEP) од доказот на Харуки лемата, имаме дека

$$\frac{AE \cdot BF}{EF} = BG.$$

За да го изведеме (1) доволно е да покажеме дека важи $BG = \dfrac{AC \cdot BD}{CD}$. Еквивалентно, го покажуваме равенството

$$\frac{BG}{BD} = \frac{AC}{CD}. \tag{3}$$

За таа цел, да забележиме дека $\angle CAD = \angle CPD = \angle EPD = \angle EGD$. Бидејќи $ABCD$ е тетивен, имаме $\angle ACD = \angle DBG$. Следствено, $\Delta ACD \sim \Delta GBD$ и оттука следува (3).



Цртеж 3

За потврда на (2), да забележиме најпрво дека $\angle DCB = \angle DAB$. Исто така $\angle CBD = \angle CPD = \angle EPD = \angle EGD$. Оттаму $\Delta AGD \sim \Delta CBD$, што ни дава

$$\frac{AG}{AD}=\frac{BC}{CD} \text{ односно } AG=\frac{AD\cdot BC}{CD}.$$

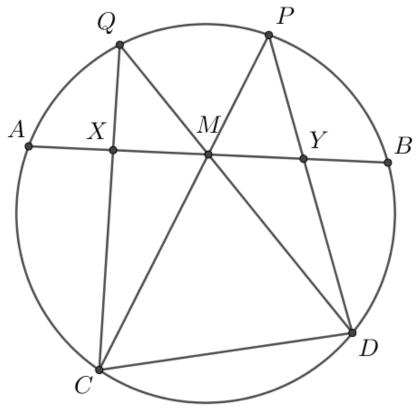
Од друга страна, според Вежба 1, $\frac{AF\cdot BE}{EF}=AG$. Доколку не ја изработивте оваа вежба самостојно, еве го потребното изведување:

$$\begin{aligned} AF\cdot BE=(AE+EF)\cdot(EF+BF) &= AE\cdot BF+AB\cdot EF \\ &= BG\cdot EF+AB\cdot EF \\ &= AG\cdot EF. \end{aligned}$$ □

Забелешка 3. Ако точките A и B си ги заменат улогите, равенките (1) и (2) преминуваат една во друга. Во тој поглед (1) и (2) се еквивалентни. Напоменуваме дека (слично на изворната верзија на Харуки лемата) тврдењето изложено во претходната лема останува да важи и при веќе споменатите релаксирања на условите.

Статијата ја приврsuccessуваме споменувајќи ја познатата „Пеперутка теорема". Истата има бројни докази, а во оваа прилика ќе ја изведеме како едноставна последица на Харуки лемата.

Пример (Пеперутка теорема). Нека M е средишната точка на тетива AB при дадена кружница. Низ M се повлечени две произволни тетиви CP и DQ (Цртеж 4). Тогаш CQ и DP отсекуваат еднакви отсечки XM и MY долж AB.



Цртеж 4. Конфигурација во Пеперутка теорема

Решение. Воведуваме ознаки: $w=AX$, $x=XM$, $y=MY$ и $z=YB$. Според лемата на Харуки (за подвижните точки P и Q) имаме

$$\frac{w\cdot(y+z)}{x}=const=\frac{(w+x)\cdot z}{y}. \tag{4}$$

Бидејќи M е средишна точка на тетивата AB, важи $w+x=y+z$.
Користејќи го ова во (4) добиваме

$$\frac{w}{x}=\frac{z}{y}. \tag{5}$$

Додавајќи 1 на секоја страна од (5), и потоа користејќи уште еднаш дека $w+x=y+z$, имаме:

$$\frac{w+x}{x}=\frac{y+z}{y} \text{ односно } \frac{1}{x}=\frac{1}{y}.$$

Значи $x=y$. □

Иванчо Павлов

ВОВЕД ВО ТЕСТИРАЊЕ НА СОФТВЕР

Денес живееме во време каде што компјутерите и интернетот ни се секојдневие. Многумина не би можеле да си го замислат денот ако не поминат барем еден миг на интернет. Начинот и достапноста на информациите кои ги нуди интернетот се незаменливи, а неговата присутност е насекаде околу нас, па затоа апликациите што ги користиме без разлика дали се десктоп, веб или облак апликации мора да се стабилни т.е. да се без грешки. За таа цел потребно е тестирање на апликациите без разлика на која платформа се тие мора да се стабилни, сигурни и да можат да го опслужат корисникот во било кој момент.

Тестирањето на софтверот е доста значајна фаза во развивањето на еден систем. Околу 40 – 50 проценти од буџетот планиран за развој на еден систем е планиран за тестирањето.

Тестирањето всушност претставува еден вид на истражување со цел да се обезбедат информации за квалитетот на продуктот и да се пронајдат грешките. Исто така, со тестирањето на софтверот се обезбедува и објективни и независен пристап и на тој начин се овозможува клиентите да го ценат и разберат ризикот на имплементацијата на софтверот. Техниките за тестирање вклучуваат процеси за тестирање на програмата или апликацијата, во време на извршување, со цел да најдат софтверски грешки или други дефекти.

Верификација и валидација на софтверот

Тестирањето на софтверот се користи за негова верификација и валидација.

- **Верификација**: Дали софтверот правилно сме го развивале? (дали е во согласност со спецификацијата)
- **Валидација**: Дали сме го развиле вистинскиот софтвер? (дали е тоа што клиентот го бара)

Термините за верификација и валидација обично се мешаат во индустријата, исто така тие и неправилно се дефинираат. Нивните дефиниции според IEEE речникот за терминологии од софтверското инженерство се:

- **Верификација** – процес на проценка на системот или компонентите за да се одреди дали продуктот во одредена фаза на развивање ги исполнува условите дадени на почетокот на секоја фаза.
- **Валидација** – процес на проценка на системот или компонентите, во текот или на крајот од фазата за развивање, со цел да се одреди дали ги задоволува наведените барања.

Според ISO 9000 стандардот:

- **Верификација** – потврдување со проверка и давање на објективни докази дека наведените барања се задоволени.
- **Валидација** – потврдување со проверка и давење на објективни докази дека барањата за специфична намена или апликација се исполнети.

Софтверското тестирање е процес што треба да се применува низ целиот процес на развивање на апликацијата.

Тестирањето како сервис (Testing as a Service - TaaS)

Тестирањето како сервис е модел на аутсорсинг, во кој активностите за тестирање се аутсорсирани на трети лица, специјализирани за симулирање на опкружување за тестирање во реалниот свет, според потребите на клиентот.

Се издвојуваат следните типови на TaaS:

- **Функционално тестирање како сервис (Functional Testing as a Service):** TaaS функционалното тестирање може да вклучи UI/GUI тестирање, regression тестирање и автоматско “User Acceptance Testing” (UAT) кое не е задолжителен дел од функционалнотот тестирање.
- **Перформанс тестирање како сервис (Performance Testing as a Service): Повеќе корисници пристапуват кон апликацијата истовремено. TaaS имитира реална околина каде што преку виртуелни корисници прави “Load” и “Stress” тестирање**
- **Тестирање на безбедност (Security Testing as a Service):** TaaS ги скенира апликациите и веб страните и ги проверува дали се ранливи.

Вообичаено TaaS го користиме кога:

- Тестирањето на апликациите бара обемна автоматизација и кога имаме краток временски период на тестирање.
- Кога не е потребно длабоко познавање на системот за да се изврши тестирање.
- За ад-хок или нередовни тестирања за кои се потребни големи средства.

Бенефитите од TaaS тестирањето се следни:

- Флексибилно извршување на тестовите.
- Некои корисници заштедуваат од 40-60% со TaaS наспроти традиционалниот модел на тестирање.
- Корисниците плаќаат додека го користат
- Намалување на оперативните трошоци како што се трошоците за одржување.
- Одржување во целост и достапност на податоците
- Побрзо доставување на производ

На табелата се прикажани разликите помеѓу традиционалното и TaaS тестирањето во зависност од одредени техники.

Пристап	Традиционално	TaaS
Тест околина	Мануелно креиран	По барање
Податоци за тестирање	Мануелно генерирани	Динамички генерирани
Алатки за тестирање	Мануелно купени	По барање
Документација за тестирање	Мануелно генериран	Динамички генериран
Бизнис домен на знаење	Детално	Основно
Основни средства за тестирање	Мануелно генерирани	Динамички

ЗАДАЧИ ОД УЧИЛНИЦАТА СИГМА 126

Ги покануваме учениците да испраќаат решенија на задачи од оваа рубрика. Решенијатада бидат подготвени во MS Word. Испратете ги на електронската адреса на списанието

sigma.spisanie.smm@gmail.com

со предмет „Задачи од училницата". Ве молиме решенијата испратете ги во еден WORD документ (doc или docx формат). Со решенијата испратете: име и презиме, година, училиште и град. **Краен рок за испраќање на решенија е 1 декември 2022**. Некои од решенијата ќе бидат објавени во наредниот број на Сигма и ќе бидат објавени имињата на сите ученици кои точно ја решиле задачата, а најуспешните решавачи во текот на учебната година ќе бидат симболично наградени.

Прва година

1. Кате собрала 756 јаготки. Таа ги поделила јаготките за себе и на секоја од своите другарки така што секоја од нив добила еднаков број на јаготки. Но, три од другарките не се чувствувале гладни, па секоја од нив вратила по една четвртина од нивниот дел. Кате имала голем апетит за јаготки и го изела не само нејзиниот дел, туку и вратените јаготки. Таа го заборавила вкупниот број на јаготки што ги изела, но точно знае дека изела повеќе од 150 јаготки. Колку јаготки изела Кате?

2. Нека $ABCD$ е паралелограм. На полуправата DB е избрана точка E таква што полуправата AB е симетралата на $\angle CAE$. Нека $F = CE \cap AB$. Докажи дека $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BF}} - \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = 1$.

3. Дадени се множествата $A = \{11k + 8 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{4m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ и $C = \{11 \cdot (4n + 1) - 3 \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Докажи дека $A \cap B = C$.

4. Најди ги сите парови природни броеви (n, p), каде што p е прост број, такви што $p \cdot (p + n) + p = (n + 1)^3$.

Втора година

1. Најди ги сите вредности на параметарот $m \in \mathbb{R}$ такви што за реалните решенија x_1, x_2 на равенката $x^2 + (m - 4)x + (m^2 - 3m + 3) = 0$ важи релацијата $x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = 6$.

2. Нека е даден правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето B и нека точките D и *E* се на страните AB и BC соодветно, такви што $\measuredangle BAE = 30°$ и $\measuredangle BDC = 45°$. Ако $\overline{AE} = \sqrt{3}$ и $\overline{CD} = \sqrt{2}$, пресметај го растојанието од пресекот на отсечките AE и CD до страната AB на триаголникот.

3. Ако x и y се реални решенија на системот $\begin{cases} x + \dfrac{x}{y} + y = 8 \\ x \cdot \dfrac{x + y}{y} = 15 \end{cases}$, најди ја најмалата вредност на збирот $x + y$.

4. Докажи дека за $z \in \mathbb{C}$, $\left|\frac{6z-i}{2+3iz}\right| \leq 1$ ако и само ако $\left|z\right| \leq \frac{1}{3}$.

Трета година

1. Докажи дека $\frac{\log\left(\mathrm{tg}1^0\right)\cdot\log\left(\mathrm{tg}3^0\right)\cdot\ldots\cdot\log\left(\mathrm{tg}89^0\right)}{\log\left(\mathrm{tg}2^0\right)\cdot\log\left(\mathrm{tg}4^0\right)\cdot\ldots\cdot\log\left(\mathrm{tg}88^0\right)} = 0.$

2. За кои реални вредности на x и α важи неравенството

$$2^x + \frac{1}{2^x} \leq 2\sin\alpha\,?$$

3. Докажи дека ако $\begin{cases} a\sin^2 x + b\cos^2 x = 1 \\ a\cos^2 y + b\sin^2 y = 1 \\ a\,\mathrm{tg}\,x = b\,\mathrm{tg}\,y, a \neq b \end{cases}$ тогаш $a + b = 2ab$.

4. Одреди ја најголемата вредност на функцијата

$$f(x) = \log_2^2 x\left(\log_2^2 x + 3\log_2 \frac{8}{x^2}\right), \text{ за } 1 < x < 8.$$

Четврта година

1. Дадена е низата $\left(x_n\right)$ во која секој член е решение на равенката $x^2 - 2\cdot 3^k \cdot x + 9^k = 0$.

а) Одреди го најголемиот индекс k, за кој членот на низата x_k во својот декаден запис има најмногу седум цифри;

б) Одреди го најмалиот природен број N, за кој меѓу неговите делители има точно осум членови на низата;

в) Дали постои природен број n таков што збирот на n последователни членови на низата е еднаков на некој член на низата?

2. Дадена е низата $\left(a_n\right)$, каде $a_1 = 1$, а секој a_n се конструира од a_{n-1} на следниов начин:

- ако најголемиот непарен делител на n има остаток 1 при делење со 4, тогаш $a_n = a_{n-1} + 1$
- ако најголемиот непарен делител на n има остаток 3 при делење со 4, тогаш $a_n = a_{n-1} - 1$

Докажи дека бројот 1 се појавува бесконечно многу пати во низата.

3. Одреди ги сите вредности на параметарот a такви што равенката $64x^6 - \left(3x+a\right)^3 + 4x^2 - 3x = a$ има повеќе од едно решение.

4. Одреди ги сите позитивни реални броеви a, b, c за кои што важи $2\sqrt{a} + 3\sqrt{b} + 6\sqrt{c} = a + b + c = 49$.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИ ОД УЧИЛНИЦАТА СИГМА 125

Прва година

1. Одреди ги сите линеарни функции $f(x)=ax+b$, $a\neq 0$, за кои важи

$$f(f(x))=4\left(|\,a\,|-1\right)\cdot x+b^2.$$

Решение. За функцијата $f(x)=ax+b$, каде $a\neq 0$ и $x\in\mathbb{R}$ можеме да запишеме $f(f(x))=af(x)+b=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$. Со изедначување добиеното со барањето во условот на задачата имаме $a^2x+ab+b=4\left(|\,a\,|-1\right)\cdot x+b^2, x\in\mathbb{R}$.

Двете страни на равенството се идентични ако и само ако $\begin{cases}a^2=4\left(|\,a\,|-1\right)\\ ab+b=b^2\end{cases}$. Да го решиме овој систем равенки, за $a\neq 0$. Разгледуваме два случаи:

- Ако $a>0$, тогаш $|\,a\,|=a$, па првата равенката на системот гласи $a^2-4a+4=0$, т.е. $(a-2)^2=0$. Нејзино решение е $a=2$. Со замена во втората равенка добиваме $2b+b=b^2$, т.е. $b(b-3)=0$. Оттука, $b=0$ или $b=3$. Во овој случај, за обликот на линеарната функција имаме $f(x)=2x$ или $f(x)=2x+3$.

- Ако $a<0$, тогаш $|\,a\,|=-a$ и првата равенката добива облик $a^2+4a+4=0$, т.е. $(a+2)^2=0$. Решение сега е вредноста $a=-2$. Со замена во втората равенка добиваме $-2b+b=b^2$, т.е. $b(b+1)=0$. Оттука, $b=0$ или $b=-1$. Во овој случај, бараната линеарна функција има облик $f(x)=-2x$ или $f(x)=-2x-1$.

Конечно, условот на задачата го исполнуваат функците $f(x)=2x$, $f(x)=2x+3$, $f(x)=-2x$ и $f(x)=-2x-1$.

2. Најди го најголемиот реален број a, за кој што системот равенки $\begin{cases}x-4y=1\\ ax+3y=1\end{cases}$ има целобројно решение.

Решение. За $a=1$ системот гласи $\begin{cases}x-4y=1\\ x+3y=1\end{cases}$ и истиот има решение $(x,y)=(1,0)$.

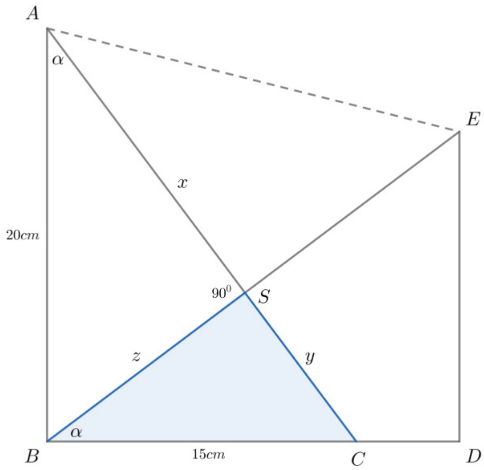
Бидејќи за $a=1$ системот има целобројно решение, вредностите на параметарот $a<1$ нема потреба да се разгледуваат. Претпоставуваме дека $a>1$ и (x,y) се пар цели броеви кои се решение на дадениот систем. Тогаш од првата равенка $x=1+4y$ и со замена во втората равенка добиваме дека $a(1+4y)+3y=1$, односно $y(4a+3)=1-a$. Оттука, $y=-\dfrac{a-1}{4a+3}$. Разгледуваме вредности на параметарот кога $a>1$, па јасно $y<0$. Исто така, за $a>1$ имаме дека $a-1<4a+3$ т.е. $\dfrac{a-1}{4a+3}<1.$

Сега $y=-\dfrac{a-1}{4a+3}>-1$. Добивме дека $y\in(-1,0)$, односно y не е цел број. Од добиената противречност следува дека дадениот систем равенки нема целобројни решенија за $a>1$, па најголемиот број за кој системот има целобројни решенија е $a=1.$

3. Правоаголниот триаголник ABC со катети со должини 15 cm и 20 cm и прав агол во темето B, е складен со триаголникот BDE, чиј прав агол е во темето D. Точката C лежи меѓу точките B и D, а точките A и E се наоѓаат од иста страна на правата BD.

а) Пресметај ја плоштината на фигурата што се добива во пресек на ΔABC и ΔBDE.
б) Одреди го растојанието од точката A до точката E.

Решение. Од складноста на триаголниците (види цртеж) мора да важи $\overline{AB}=\overline{BD}=20\text{ cm}$ и $\overline{BC}=\overline{DE}=15\text{ cm}$. За должините на хипотенузите имаме $\overline{AC}=\overline{BE}=\sqrt{20^5+15^5}=25\text{ cm}$.



Нека точката $S=AC\cap BE$ и нека $\angle BAC=\alpha$. Тогаш и $\angle EBD=\alpha$, па следува дека $\angle ABE=\angle ABC-\angle EBD=90^\circ-\alpha$, односно $\angle ASB=90^\circ$. Значи $AC\perp BE$.

Да означиме $\overline{AS}=x$, $\overline{CS}=y$ и $\overline{BS}=z$. Тогаш $x+y=25$, а од правоаголните триаголници ASB и BSC имаме дека $x^2+z^2=20^2$ и $y^2+z^2=15^2$. Со одземање на овие две равенства добиваме $x^2-y^2=175$, односно $x-y=7$. Го решаваме системот равенки $\begin{cases}x+y=25\\ x-y=7\end{cases}$ и оттука $x=16\text{ cm}$ и $y=9\text{ cm}$. Јасно $z=12\text{ cm}$.

а) Како пресек на ΔABC и ΔBDE се добива ΔBSC. Неговата плоштина изнесува

$$P_{\Delta BSC}=\frac{1}{2}\cdot z\cdot y=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 9=54\text{ cm}^2.$$

б) Растојанието од точката A до точката E ќе го пресметаме според Питагоровата теорема од правоаголниот триаголник ASE.

$$\overline{AE}=\sqrt{x^2+\overline{SE}^2}=\sqrt{x^2+(\overline{BE}-z)^2}=\sqrt{16^2+(25-12)^2}=\sqrt{425}=5\cdot\sqrt{17}\text{ cm}.$$

4. Докажи дека бројот $B=\dfrac{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ не е цел број.

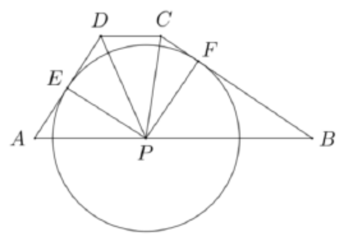
Решение. Дадениот број го запишуваме во облик

$$B=\frac{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{2+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{2\cdot(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=$$
$$=\frac{2\cdot(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=2+\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

Ќе направиме оценка на вториот собирок. Бидејќи $\sqrt{3}-1>0$ и $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}>0$, следува дека $\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}>0$. Но, $\sqrt{3}-1\in(0,1)$ а $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}>1$, па следува дека $0<\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}<1$. Значи, $2<B<3$, односно $B=\frac{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ не е цел број.

Втора година

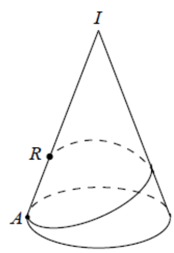
1. Нека $ABCD$ е трапез со основи AB и DC и нека се познати должините на страните $\overline{AB}=42, \overline{BC}=20$ и $\overline{DA}=15$. Ако P е точка на страната AB таква што постои кружница k со центар во P која ги допира страните BC и AD, одреди го производот $\overline{AP}\cdot\overline{PB}$.



Решение. Нека r е радиусот на кружницата, а E и F се точките во кои кружницата ги допира страните AD и BC соодветно. Тогаш $\overline{PE}=\overline{PF}=r$ и тие се висини на триаголниците PAD и PBC спуштени од точката P. Нека h е висината на трапезот. За плоштините на триаголниците имаме $P_{\Delta PAD}=\frac{\overline{PA}\cdot h}{2}=\frac{15r}{2}$ и $P_{\Delta PBC}=\frac{\overline{PB}\cdot h}{2}=\frac{20r}{2}$.

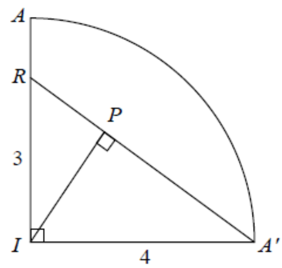
Оттука, изразувајќи го r и изедначувајќи имаме $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{3}{4}$. Од тоа што $\overline{AB}=42$ добиваме дека $\overline{PA}=18$ и $\overline{PB}=24$. Конечно, $\overline{AP}\cdot\overline{PB}=432$.

2. Даден е конус со врв во точка I, основа со радиус $1\,\mathrm{cm}$ и генератриса со должина $4\,\mathrm{cm}$. Избрани се точка A на работ на основата и точка R на отсечката IA, таква што $\overline{IR}=3\,\mathrm{cm}$. Бојан ја црта најкратката можна патека почнувајќи во точката R завртувајќи еднаш околу конусот и завршувајќи во точката A (види цртеж). Ако P е точката на оваа патека што е најблиску до точката I, колку изнесува должината на отсечката IP?



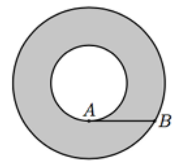
Решение. Со пресекување на конусот вдолж генератрисата IA добиваме кружен исечок со радиус $\overline{IA}=4\,\mathrm{cm}$. Ја означуваме со A' другата крајна точка на лакот на овој кружен исечок (таа е точката која пред пресекувањето се совпаѓа со A). Должината на лакот на кружниот исечок е всушност периметарот на основата на конусот и заради тоа што радиусот на основата на конусот е $1\,\mathrm{cm}$ добиваме дека лакот има должина

2π. Оттука е јасно дека овој кружен исечок е $\frac{1}{4}$ од круг, па му соодветствува централен агол $\angle AIA' = 90°$. Од условот на задачата, точката R лежи на отсечката IA и $\overline{IR} = 3cm.$ Најкратката можна патека почнувајќи во R, патувајќи еднаш околу конусот и завршувајќи во точката A, која ја нацрта Бојан, е сега најкраткото растојание во овој кружен исечок почнувајќи од R и завршувајќи во A'. Од тоа што $\overline{IR} = 3\,\text{cm}$. $\overline{IA'} = 4\ \text{cm}$ и $\angle RIA' = 90°$, од Питагоровата теорема имаме дека $\overline{RA'} = 5$. Тогаш точката P е точка на отсечката RA', за која $IP \perp RA'$. Пресметувајќи ја плоштината на $\Delta RIA'$, на два различни начини, добиваме

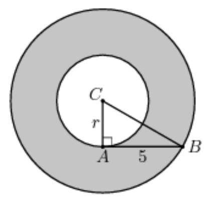


$$P_{\Delta RIA'} = \frac{1}{2}\overline{IR}\cdot\overline{IA'} = \frac{1}{2}\overline{RA'}\cdot\overline{IP} \Leftrightarrow \overline{IR}\cdot\overline{IA'} = \overline{RA'}\cdot\overline{IP} \Leftrightarrow 3\cdot 4 = 5\cdot\overline{IP} \Leftrightarrow \overline{IP} = \frac{12}{5}.$$

3. На цртежот се дадени две концентрични кружници. Точката A е на внатрешната кружница, а точката B е на надворешната кружница. Отсечката AB има должина $5\,\text{cm}$ и е тангента на внатрешната кружница во точката A. Колкава е плоштината на обоениот дел (прстенот) од цртежот?

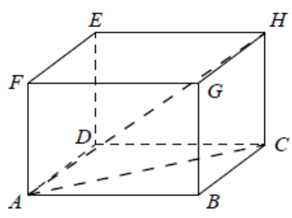


Решение. Нека C е заедничкиот центар на двата круга, R е радиусот на поголемиот круг и r е радиусот на помалиот круг. Бидејќи AB е тангента на помалиот круг, знаеме дека $AC \perp AB$. Ова значи дека ΔABC е правоаголен триаголник со прав агол во темето А, па од Питагоровата теорема и $\overline{AB} = 5\,\text{cm}$, имаме $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$, односно $r^2 + 5^2 = R^2$. Плоштината на обоениот дел е еднаква на разликата на плоштината на поголемиот круг и плоштината на помалиот круг, или $R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi$. Од претходно, имаме $R^2 - r^2 = 25$, па плоштината на обоениот дел изнесува $(R^2 - r^2)\pi = 25\pi\,\text{cm}^2$.



4. Збирот на должините на рабовите на правоаголна призма $ABCDFGHE$ е 24. Ако плоштината на призмата е 11 квадратни единици, пресметај ја должината на просторната дијагонала AH.

Решение. Нека $\overline{AB} = x, \overline{AD} = y, \overline{AF} = z.$ Од тоа што збирот на должините на сите рабови е 24 имаме $x + y + z = 6.$ Од друга страна плоштината на призмата е $11,$ па $2xy + 2xz + 2yz = 11.$ Сега, од Питагоровата теорема имаме $\overline{AH}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CH}^2$. Слично $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, од каде што следува $\overline{AH}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CH}^2$, Односно $\overline{AH}^2 = x^2 + y^2 + z^2.$



Од развојот $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$ добиваме $\overline{AH}^2 = (x+y+z)^2 - (2xy+2xz+2yz) = 6^2 - 11 = 25$, па $\overline{AH} = 5$.

Трета година

1. Одреди ги точките од кружницата со равенка $x^2+y^2+6x-2y=0$ чие растојание до правата $3x+y-12=0$ е најмало односно најголемо.

Решение. Кружницата може да се напише во облик $(x+3)^2+(y-1)^2=10$ од каде се добива центарот на кружницата $O(-3,1)$ и радиусот $r=\sqrt{10}$. Најблиската и најдалечната точка на кружницата од правата мора да лежат на правата која е нормална на дадената права и минува низ центарот на кружницата, а тоа е правата $y=\frac{1}{3}x+2$. Пресекот на оваа права со кружницата $x^2+y^2+6x-2y=0$ се точките $A(0,2)$ и $B(-6,0)$. Може да се провери дека точката $A(0,2)$ е на растојание $\sqrt{10}$ од дадената права, додека $B(-6,0)$ е оддалечена за $3\sqrt{10}$.

2. Низ фокусот *F* на параболата $y^2=8(x+2)$ минува права која со *x* - оската зафаќа агол од 60^0 и ја сече параболата во точките *A* и *B*. Ако симетралата на отсечката AB ја сече *x* - оската во точка *P*, пресметај ја должината на отсечката PF.

Решение. Фокусот на параболата е точката $F(0,0)$ и правата која минува низ фокусот и со *x* - оската зафаќа агол од 60^0 е $y=\sqrt{3}x$. За да ги одредиме пресечните точки со параболата, заменуваме $y=\sqrt{3}x$ во равенката на параболата $y^2=8(x+2)$, па се добива равенката $3x^2-8x-16=0$ чии решенија се $x=4$ и $x=-\frac{4}{3}$. Значи ги добиваме точките од параболата $A(4,4\sqrt{3})$ и $B\left(-\frac{4}{3},-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$. Симетралата на отсечката AB минува низ средната точка на отсечката, $M\left(\frac{4}{3},\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$, и е нормална на правата AB, па нејзината равенка е $y-\frac{4\sqrt{3}}{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{4}{3}\right)$. Таа ја сече *x*-оската во точката $P\left(\frac{16}{3},0\right)$. Конечно, $\overline{FP}=\sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2-0^2}=\frac{16}{3}$.

3. Пресметај ја плоштината на правоаголникот формиран од тангентите на елипсата $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ кои се паралелни со оските.

Решение. Полуоските на елипсата се $a=\sqrt{6}, b=\sqrt{3}$. Тангентите се паралелни со оските, а минуваат низ точките $A(-\sqrt{6},0), B(\sqrt{6},0), C(0,\sqrt{3}), D(0,-\sqrt{3})$. Бидејќи станува збор за правоаголник, опишан околу елипсата, страните на правоаголникот имаат должина колку две полуоски на елипсата, односно страните се со должини $2a$ и $2b$. За плоштината добиваме $P=2a\cdot 2b=4\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}=12\sqrt{2}$.

4. Состави равенката на крива од втор ред која минува низ точката $(3,3)$ и за која растојанието помеѓу нејзините фокуси е четири пати поголемо од растојанието меѓу директрисите.

Решение. Од тоа што кривата има два фокуси и растојанието на фокусите е поголемо од растојанието меѓу директрисите, јасно е дека станува збор за хипербола. Нека равенката на таа хипербола е $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Тогаш фокусите на хиперболата се точките $F_1(-c,0), F_2(c,0)$, каде $c^2=a^2+b^2$, а директрисите имаат равенки $d_{1,2}: x=\pm\frac{a^2}{c}$. Од условите на задачата добиваме дека $4\cdot 2\frac{a^2}{c}=2c$ односно $4a^2=c^2$. Ако ова го замениме во $c^2=a^2+b^2$, за полуоските на хиперболата добиваме врска $b^2=3a^2$. Сега, равенката на хиперболата е од облик $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1$, но истата минува низ точката $(3,3)$, па следува дека $a^2=6$. Конечно, станува збор за хиперболата $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{18}=1$.

Четврта година

1. Дали постојат вредности на параметрите a и b, за кои равенката $x^4-4x^3+6x^2+ax+b=0$ има четири различни решенија?

Решение. Равенката може да ја запишеме во облик $(x-1)^4=-(4+a)x+1-b$. Левата страна на ова равенство е парабола, а десната е права. Параболата и правата може да имаат најмногу две пресечни точки, па според тоа, такви вредности за параметрите a и b, не постојат (Пресечните точки се всушност решенија на дадената равенка).

2. Познато е дека за некои вредности на променливите x и y важи $x^4y^2+x^2+2x^3y+6x^2y+8\le 0$. Докажи дека $x\ge -\frac{1}{6}$.

Решение. Бидејќи важи

$$x^4y^2+x^2+2x^3y+6x^2y+8=x^4y^2+\left(2x^3+6x^2\right)y+x^2+8\le 0$$

Изразот може да го разгледуваме како квадратен трином по променлива y кој не е позитивен. Значи за $x\ne 0$, имаме дека $x^4>0$, па параболата е отворена нагоре и ја сече x-оската. Тогаш $D=\left(2x^3+6x^2\right)^2-4x^4\left(x^2+8\right)\ge 0$, од каде следува дека

$24x^5 + 4x^4 \geq 0$. Значи $4x^4\left(6x+1\right) \geq 0$, па јасно е дека мора $x \geq -\frac{1}{6}$.

3. Одреди ги сите вредности на реалниот параметар a за кои системот равенки $\begin{cases} ax^2 + ay^2 + 2ax + \left(a+2\right)y + 1 = 0 \\ xy + 1 = x + y \end{cases}$ има точно четири различни решенија.

Решение. Ако $a = 0$, тогаш од првата равенка на системот се добива дека $y = -\frac{1}{2}$, а со замена во втората равенка се добива $x = 1$. Ова значи дека за $a = 0$, системот има единствено решение $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$. Нека $a \neq 0$. Втората равенка во системот се трансформира во производот $\left(x-1\right)\left(y-1\right) = 0$ од каде следува дека $x = 1$ или $y = 1$. Со замена на овие вредности во првата равенка се добива квадратна равенка што значи дека системот има точно четири различни решенија ако и само ако секоја од квадратните равенки има точно две различни решенија и паротот $\left(1,1\right)$ не е решение на системот.

За $x = 1$ првата равенка од системот е $ay^2 + \left(a+2\right)y + 3a + 1 = 0$ и таа има точно две различни решенија ако нејзината дискриминанта е позитивен број т.е. $\left(a+2\right)^2 - 12a^2 - 4a > 0$. Тогаш $11a^2 < 4$, па $a \in \left(-\frac{2\sqrt{11}}{11}, 0\right) \cup \left(0, \frac{2\sqrt{11}}{11}\right)$.

За $y = 1$ првата равенка на системот е $ax^2 + 2ax + 2a + 3 = 0$, а нејзината дискриминанта $4a^2 - 8a^2 - 12a$ е позитивен број за $a^2 + 3a < 0$ т.е. $a \in \left(-3, 0\right)$.

Паротот $\left(1,1\right)$ е решение на системот ако и само ако $a = -\frac{3}{5}$. Конечно системот има точно четири различни решенија ако и само ако $a \in \left(-\frac{2\sqrt{11}}{11}, -\frac{3}{5}\right) \cup \left(-\frac{3}{5}, 0\right)$.

4. Најди ги сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ така што за секои реални броеви x и y важи $f\left(x-y\right) = f\left(x\right) + f\left(y\right) - 2xy$.

Решение. Нека $x = y$. Тогаш добиваме $f\left(0\right) = f\left(x\right) + f\left(x\right) - 2x^2$, т.е. $f\left(x\right) = x^2 + \frac{f\left(0\right)}{2}$. Ако $x = y = 0$, тогаш $f\left(0\right) = f\left(0\right) + f\left(0\right) - 0$, т.е. $f\left(0\right) = 0$.

Значи, $f\left(x\right) = x^2$ е единствен кандидат за таква функција.

Да провериме дали таа ги исполнува условите на задачата. $f\left(x\right) + f\left(y\right) - 2xy = x^2 + y^2 - 2xy = \left(x-y\right)^2 = f\left(x-y\right)$, па $f\left(x\right) = x^2$ е бараната функција.

Подготвиле: Анета Гацовска-Барандовска, Emin Durmishi, Erblina Zeqiri, Јасмина Маркоска, Зоран Штерјов

РУБРИКА ЗАДАЧИ СИГМА 126

Ги покануваме учениците да испраќаат решенија на задачи од оваа рубрика. Решенијата да бидат подготвени во **MS Word**. Испратете ги на електронската адреса на списанието

sigma.spisanie.smm@gmail.com

со предмет „Рубрика Задачи". Ве молиме решенијата испратете ги во еден **WORD** документ (doc или docx формат). Со решенијата испратете: име и презиме, година, училиште и град. **Краен рок за испраќање на решенија е 1 декември 2022.** Некои од решенијата ќе бидат објавени во наредниот број на Сигма и ќе бидат објавени имињата на сите ученици кои точно ја решиле задачата, а најуспешните решавачи во текот на учебната година ќе бидат симболично наградени.

1696. Реалните броеви a, b, c се избрани така што системот $\begin{cases} ax+by=c \\ (a^2+1)x+(b^2+1)y=c^2+1 \end{cases}$ е противречен, а системот $\begin{cases} (b^2+1)x+(c^2+1)y=a^2+1 \\ (c^2+1)x+(a^2+1)y=b^2+1 \end{cases}$ има бесконечно многу решенија. Докажи дека важи равенството $a-b-c=\frac{a^2+c^2}{2b}$. Дали важи обратното?

1697. $ABCD$ е конвексен четириаголник таков што важи: $\angle BAD$ е остар агол, $\angle ADC$ е тап агол, и $\angle BAD+\angle ABC>\pi$. Нека O е центар на кружницата што ги допира страните BC, CD и DA. Докажи дека $\overline{OC}>\overline{CD}$ ако и само ако $\overline{AB}\sin\angle BAD<(\overline{BC}-\overline{CD})\sin(\angle BAD+\angle ABC)$.

1698. Дали е можно броевите $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ да се запишат на кружница така што збирот на кои било два соседни броја не е делив ниту со 3, ниту со 5, ниту со 7?

1699. Реалните броеви u,v,x,y се такви што $u+v\geq 1, x+y\geq 1, u^2+x^2\leq 1, v^2+y^2\leq 1$. Да се најде најмалата и најголемата вредност на изразот $uv-xy$.

1700. Да се најдат сите природни броеви n такви што множеството решенија на неравенката $\frac{2+\log_n x}{x-1}<\frac{6}{2x-1}$ не може да се претстави како унија на непразни дисјунктни отворени интервали.

1701. Ако a, b, c се природни броеви тогаш докажи дека $7\mid abc(a^3-b^3)(b^3-c^3)(c^3-a^3)$.

1702. Одреди ја најмалата можна вредност на изразот $\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-\sqrt{3}x+1}$.

1703. Ако за аглите во триаголникот ABC важи $\frac{\sin^2\gamma+\sin^2\beta-\sin^2\alpha}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}=\sqrt{3}$ тогаш одреди ја вредноста на аголот α.

1704. Ако за аглите во триаголникот ABC важи $\alpha=2\beta$ тогаш докажи дека важи $a^2=b(b+c)$.

1705. Нека k е опишаната кружница околу остроаголниот триаголникот ABC. Нормалата од точката A на BC ја сече k во точка D, а нормалата од точката B на AC ја сече k во точка E. Ако $|\overline{AB}|=|\overline{DE}|$ тогаш докажи дека $\angle ACB=60^\circ$.

1706. Пресметај ја вредноста на изразот $tg1^\circ+tg5^\circ+tg9^\circ+\cdots+tg173^\circ+tg177^\circ$.

1707. Ако $\left(\frac{a+i}{a-i}\right)^n=1, (a\in\mathbb{R})$, докажи дека $a=ctg\left(\frac{k\pi}{n}\right),\ k=0,1,2,\dots\dots,n-1$.

1708. Разложи го полиномот на множители $x^{10}+x^5+1$.

1709. Реши го системот равенки $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x^2+y^2-z^2=8-2xy \\ x^3+y^3-z^3=86-3xyz \end{cases}$.

1710. Нека $p_1<p_2<p_3<p_4$ и $q_1<q_2<q_3<q_4$ се прости броеви такви што $p_4-p_1=8$ и $q_4-q_1=8$. Нека $p_1>5, q_1>5$. Докажи дека $30|p_1-q_1$.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД СИГМА 125

1681. За секој природен број n се дефинира сумата $S_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$. Докажи дека:

а) За секој природен број n важи $S_n<1{,}65$.

б) Постои природен број n_0 таков што важи $S_{n_0}>1{,}64$.

Решение. Клучно при доказот што ќе го претставиме е пресметувањето на S_{10}.

$$S_{10}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{10^2}=$$

$$=1+\frac{2^4\cdot 3^4\cdot 5^2+2^6\cdot 3^2\cdot 5^2+2^2\cdot 3^4\cdot 5^2+2^6\cdot 3^4+2^4\cdot 3^2\cdot 5^2+3^4\cdot 5^2+2^6\cdot 5^2+2^4\cdot 3^4}{2^6\cdot 3^4\cdot 5^2}+\frac{1}{7^2}=$$

$$=1+\frac{(2^4\cdot 3^4+2^6\cdot 3^2+2^2\cdot 3^4+2^4\cdot 3^2+3^4+2^6)\cdot 5^2+2^4\cdot 3^4\cdot(2^2+1)}{2^6\cdot 3^4\cdot 5^2}+\frac{1}{7^2}=$$

$$=1+\frac{(1296+576+324+144+81+64)\cdot 5^2+1296\cdot 5}{2^6\cdot 3^4\cdot 5^2}+\frac{1}{7^2}=$$

$$=1+\frac{(2485\cdot 5+1296)\cdot 5}{2^6\cdot 3^4\cdot 5^2}+\frac{1}{7^2}=1+\frac{13721}{25920}+\frac{1}{49}=1\frac{698249}{1270080}$$

а) За $1\le k\le 10<n$ важи:

$$S_k<S_n=S_{10}+\sum_{m=11}^{n}\frac{1}{m^2}<1\frac{698249}{1270080}+\sum_{m=11}^{n}\frac{1}{(m-1)m}$$
$$<1\frac{698544}{1270080}+\sum_{m=11}^{n}\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)=$$
$$=1{,}55+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1{,}55+\frac{1}{10}-\frac{1}{m}<1{,}65.$$

б) Да забележиме дека за $n>10$ важи оцената:

$$S_n=S_{10}+\sum_{m=11}^{n}\frac{1}{m^2}>S_{10}+\sum_{m=11}^{n}\frac{1}{m(m+1)}=S_{10}+\sum_{m=11}^{n}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)$$
$$=S_{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\frac{1}{12}-\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=S_{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{n+1}.$$

Според тоа, доволно е да избереме $n>10$ таков што $S_{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{n+1}\ge 1{,}64$, или еквивалентно со последното: $n+1\ge\frac{1}{S_{10}+1/11-1{,}64}=\frac{1}{1\frac{698249}{1270080}+\frac{1}{11}-1\frac{64}{100}}=\frac{1}{\frac{698249}{1270080}+\frac{1}{11}-\frac{16}{25}}=\frac{1270080\cdot 11\cdot 5}{698249\cdot 55+1270080\cdot 5-16\cdot 254016\cdot 11}$, односно $n\ge\frac{69854400}{47279}-1=1476{,}4..$, од каде за било кој $n_0\ge 1477$ важи $S_{n_0}>1{,}64$.

Забелешка. Вредноста на n_0 од б) може да се уточни но тоа бара пософистициран апарат. Всушност, за секој $n_0 \geq 203$ важи $S_{n_0} > 1{,}64$.

1682. Докажи дека за секои ненулти комплексни броеви x, y важи равенството

$$x\mathrm{Im}\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{1}{y}\right) + y\mathrm{Im}\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Решение. Користејќи дека за секој комплексен број z важи $\mathrm{Im}z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, имаме:

$$\begin{aligned}
&x\mathrm{Im}\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{1}{y}\right) + y\mathrm{Im}\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{1}{x}\right) = \\
&= x \cdot \tfrac{1}{2i}\left(\tfrac{y}{x} - \tfrac{\bar{y}}{\bar{x}}\right) \cdot \tfrac{1}{2i}\left(\tfrac{1}{y} - \tfrac{1}{\bar{y}}\right) + y \cdot \tfrac{1}{2i}\left(\tfrac{x}{y} - \tfrac{\bar{x}}{\bar{y}}\right) \cdot \tfrac{1}{2i}\left(\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{\bar{x}}\right) = \\
&= \tfrac{1}{4i^2}\left(x \cdot \tfrac{\bar{x}y - x\bar{y}}{x\bar{x}} \cdot \tfrac{\bar{y}-y}{y\bar{y}} + y \cdot \tfrac{x\bar{y}-\bar{x}y}{y\bar{y}} \cdot \tfrac{\bar{x}-x}{x\bar{x}}\right) = \tfrac{x\bar{y}-\bar{x}y}{4i^2 x\bar{x}y\bar{y}}\left(x(y-\bar{y}) + y(\bar{x}-x)\right) \\
&= \frac{1}{2i}\frac{x\bar{y}-\bar{x}y}{y\bar{y}} \cdot \frac{1}{2i}\frac{\bar{x}y - x\bar{y}}{x\bar{x}} = \frac{1}{2i}\left(\frac{x}{y} - \overline{\left(\frac{x}{y}\right)}\right) \cdot \frac{1}{2i}\left(\frac{y}{x} - \overline{\left(\frac{y}{x}\right)}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{y}{x}\right).
\end{aligned}$$

1683. Збирот на неколку геометриски прогресии е геометриска прогресија. Дали мора збирот-прогресија да се совпаѓа со некоја од собироците-прогресии?

Решение. Одговорот е не. За $q \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $k \in \mathbb{N}$ $(k > 1)$ да ги разгледаме следните k прогресии: $\left(\frac{1}{3}q^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}, \left(\frac{1}{3^2}q^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}, \left(\frac{1}{3^3}q^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}, \dots, \left(\frac{1}{3^{k-1}}q^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}, \left(\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} - \dots - \frac{1}{3^{k-1}}\right)q^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$. Очигледно е дека збирот на прогресиите е геометриската прогресија $\left(\frac{1}{3}q^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$, што е различна од сите собироци-прогресии.

Посуштинско прашање е дали можат да се најдат вакви ненулти геометриски прогресии со различни количници? Ве охрабруваме да ни пратите ваши одговори на ова прашање (пример дека постојат или доказ дека не постојат).

1684. Дадена е функцијата $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ со $f(x) = |x^2 - 2|x| - 3| - \sqrt{x^2 - 2x + 1} + 1$.

а) Реши ја неравенката $f(x) < 0$.

б) Колку пресечни точки има правата $x - 3y - 6 = 0$ со графикот на f?

в) Да се најде линеарна функција чијшто график со графикот на f има најголем можен број пресечни точки со рационални координати.

Решение. Ќе ја трансформираме f до функција дефинирана по делови.

$$\begin{aligned}
f(x) &= |x^2 - 2|x| - 3| - \sqrt{x^2 - 2x + 1} + 1 \\
&= |(|x| + 1)(|x| - 3)| - \sqrt{(x-1)^2} + 1,
\end{aligned}$$

$$f(x) = (|x| + 1)\big||x| - 3\big| - |x - 1| + 1,$$

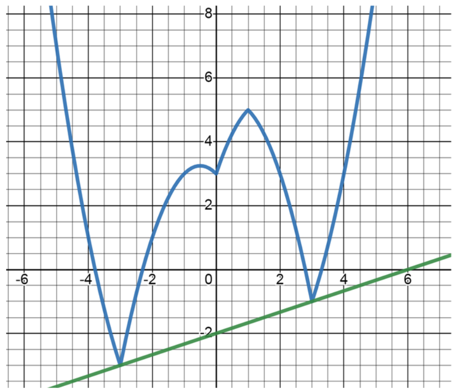
$$f(x) = \begin{cases} (-x+1)(-x-3) + (x-1) + 1, \text{за } x < -3 \\ (-x+1)(x+3) + (x-1) + 1, \text{за } -3 \leq x \leq 0 \\ (x+1)(-x+3) + (x-1) + 1, \text{за } 0 < x < 1 \\ (x+1)(-x+3) - (x-1) + 1, \text{за } 1 \leq x \leq 3 \\ (x+1)(x-3) - (x-1) + 1, \text{за } 3 < x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2+3x-3, \text{за } x<-3 \\ -x^2-x+3, \text{за } -3 \le x \le 0 \\ -x^2+3x+3, \text{за } 0<x<1 \\ -x^2+x+5, \text{за } 1 \le x \le 3 \\ x^2-3x-1, \text{за } 3<x \end{cases} = \begin{cases} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \\ f_4(x) \\ f_5(x) \end{cases}.$$

Сега лесно може да се скицира графикот на f – тој се состои од пет делови на параболи.

а) Од графикот на f се гледа дека е доволно да ги најдеме нулите на функцијата.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f_1(x)=0 \\ f_2(x)=0 \\ f_3(x)=0 \\ f_4(x)=0 \\ f_5(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-3-\sqrt{21}}{2} \\ x_2=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2} \\ f_3 \text{ нема нули} \\ x_4=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2} \\ x_5=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$



$$f(x)<0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{-3-\sqrt{21}}{2}, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right).$$

б) Разгледувајќи ги интервалите на растење и опаѓање на f, заклучуваме дека има три минимуми – во точките $A(-3,-3), B(0,3), C(3,-1)$. Лесно се забележува дека најмалите два минимуми (во A и C) лежат на правата $x-3y-6=0$, според тоа, само A и C се пресечни точки на правата со f.

в) Од цртежот се гледа дека права може да има најмногу шест заеднички точки со графикот на f. Ќе дадеме пример на права што има шест заеднички точки со рационални координати со графикот на f. На пример, правата $2x-3y+11=0$ го сече графикот на f во точките со координати $(-4,1), (-1,3), \left(-\frac{2}{3}, \frac{29}{9}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{35}{9}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{41}{9}\right), \left(\frac{14}{3}, \frac{61}{9}\right)$ (проверете преку решавање на системот). Дали можете да најдете друга ваква права?

Интересно е и да се најде линеарна функција чијшто график со графикот на f има најголем можен број пресечни точки со целобројни координати (ова е полесно од барањето под в)). За таа цел, добро е да се почне со тоа што ќе се најдат сите целобројни точки што лежат на графикот на f за $x \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

1685. Нека a, b, c, d се реални броеви ($a \neq 0$). Докажи дека: ако равенката $3ax^2+2bx+c=0$ нема реални решенија тогаш постои решение на равенката $ax^3+bx^2+cx+d=0$ што не е реално. Дали важи обратното?

Решение. Нека равенката $3ax^2+2bx+c=0$ нема реални решенија, и нека решенијата (реални или комплексни) на равенката $ax^3+bx^2+cx+d=0$ се x_1, x_2, x_3. Тогаш, дискриминантата на квадратната равенка е негативна: $(2b)^2-12ac<0 \Leftrightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^2 < 3\frac{c}{a}$, а според Виетовите формули: $x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$ и $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}$.

Добиваме

$$(x_1+x_2+x_3)^2<3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$
$${x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)<3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$
$${x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2-(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)<0$$
$$({x_1}^2-2x_1x_2+{x_2}^2)+({x_1}^2-2x_1x_3+{x_3}^2)+({x_2}^2-2x_2x_3+{x_3}^2)<0$$
$$(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2<0.$$

Доколку $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ би важело $(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2 \geq 0$, што значи дека не е можно сите решенија на равенката $ax^3+bx^2+cx+d=0$ да се реални.

Обратното не важи. На пример, равенките $x^3+5x^2+3x=0$ и $3x^2+10x+3=0$ имаат само реални решенија.

1686. Ако $a+b=c+d$ и $a^3+b^3=c^3+d^3$ тогаш докажи дека $a^{2023}+b^{2023}=c^{2023}+d^{2023}$.

Решение. Од равенството $a^3+b^3=c^3+d^3$ добиваме $(a+b)(a^2-ab+b^2)=(c+d)(c^2-cd+d^2)$ ...(1). Ако $a+b=c+d=0$ тогаш $a=-b \wedge c=-d$. Така имаме дека $a^{2023}=-b^{2023} \wedge c^{2023}=-d^{\,2023}$ од каде следува $a^{2023}+b^{2023}=c^{2023}+d^{2023}=0$. Нека $a+b=c+d\neq 0$, од равенството (1) следува $a^2-ab+b^2=c^2-cd+d^2$. На тој начин имаме дека $(a+b)^2-3ab=(c+d)^2-3cd$ односно $ab=cd$ ...(2). Со квадрирање на равенството $a+b=c+d$ добиваме $a^2+2ab+b^2=c^2+2cd+d^2$, па од равенството (2) имаме дека $a^2+b^2=c^2+d^2$. Од последното равенство добиваме дека $(a-b)^2=(c-d)^2$ од каде следуват следните два случаи: $\begin{cases} a-b=c-d \\ a+b=c+d \end{cases}$ или $\begin{cases} a-b=-c+d \\ a+b=c+d \end{cases}$. Од двата системи добиваме дека $\begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$ или $\begin{cases} a=d \\ b=c \end{cases}$ односно $\begin{cases} a^{2023}=c^{2023} \\ b^{2023}=d^{2023} \end{cases}$ или $\begin{cases} a^{2023}=d^{2023} \\ b^{2023}=c^{2023} \end{cases}$. Со собирање на двете равенства од двата система се добива бараното равенство $a^{2023}+b^{2023}=c^{2023}+d^{2023}$.

1687. Ако ненултите реални броеви a, b и c го задоволуваат равенството $ab+bc+ca=0$ тогаш одреди ја вредноста на изразот $\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}$.

Решение. Од даденото равенство имаме дека $\begin{cases} (a+b)c=-ab \\ (b+c)a=-bc \\ (c+a)b=-ca \end{cases}$ односно $\begin{cases} (a+b)=\frac{-ab}{c} \\ (b+c)=\frac{-bc}{a} \\ (c+a)=\frac{-ca}{b} \end{cases}$.

Така имаме $\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}$

$$=\frac{1}{a^2+2ab+4bc+2ca}+\frac{1}{b^2+2ab+2bc+4ca}+\frac{1}{c^2+4ab+2bc+2ca}$$

$$=\frac{1}{(a+2c)(a+2b)}+\frac{1}{(b+2a)(b+2c)}+\frac{1}{(c+2a)(c+2b)}$$

$$=\frac{1}{[c+(c+a)][b+(a+b)]}+\frac{1}{[a+(a+b)][c+(b+c)]}+\frac{1}{[a+(c+a)][b+(b+c)]}$$

$$=\frac{1}{\left(c-\frac{ca}{b}\right)\left(b-\frac{ab}{c}\right)}+\frac{1}{\left(a-\frac{ab}{c}\right)\left(c-\frac{bc}{a}\right)}+\frac{1}{\left(a-\frac{ca}{b}\right)\left(b-\frac{bc}{a}\right)}$$

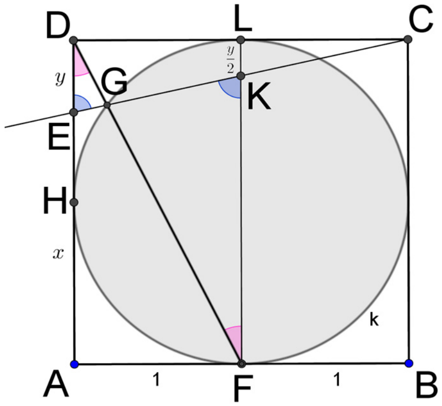
$$=\frac{bc}{c(b-a)b(c-a)}+\frac{ca}{a(c-b)c(a-b)}+\frac{ab}{a(b-c)b(a-c)}$$

$$=\frac{-1}{(a-b)(c-a)}+\frac{-1}{(b-c)(a-b)}+\frac{-1}{(b-c)(c-a)}=\frac{-(b-c)-(c-a)-(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0\,.$$

1688. Нека p и q се прости броеви за кои p^2+pq+q^2 е квадрат на природен број. Докажи дека p^2-pq+q^2 е прост број.

Решение. Од условот на задачата имаме дека $p^2+pq+q^2=n^2$, каде n е природен број. Така имаме дека $(p+q)^2-n^2=pq$ односно $(p+q-n)(p+q+n)=pq$. Значи, го имаме равенството $p+q-n=\dfrac{pq}{p+q+n}$. Од тоа што левата страна во последното равенство е природен број и од $p+q+n>p$, $p+q+n>q$ ($p+q+n\nmid p$, $p+q+n\nmid q$) следува дека $\begin{cases}p+q+n=pq\\ p+q-n=1\end{cases}$. Со собирање на двете равенства ја добиваме равенката $2p+2q=pq+1$ која е еквивалентна со равенката $(p-2)(q-2)=3$. На тој начин ги добиваме системите $\begin{cases}p-2=1\\ q-2=3\end{cases}$ или $\begin{cases}p-2=3\\ q-2=1\end{cases}$ од каде се добива дека $\begin{cases}p=3\\ q=5\end{cases}$ или $\begin{cases}p=5\\ q=3\end{cases}$. Во двата случаи бројната вредност на изразот p^2-pq+q^2 е 19 и е прост број.

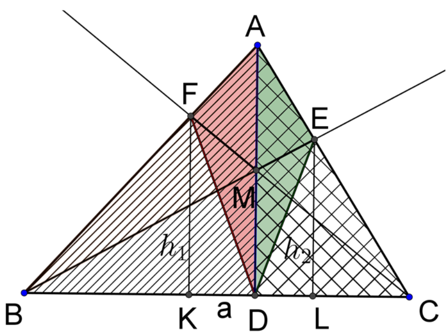
1689. Во квадратот $ABCD$ со страни чии должини се $2cm$, е впишана кружница k која ја допира страната AB во точка F. Нека отсечката DF ја сече кружницата k во точка G, а полуправата CG ја сече страната AD во точка E. Одреди ја должината на отсечката AE.



Решение. Нека $\overline{AE}=x$, $\overline{DE}=y$. Од условот на задачата имаме дека $\overline{AF}=\overline{FB}=1cm$. Нека L е средина на страната $\overline{DC}$, H е средина на страната $\overline{AD}$, а K е пресечната точка на полуправата CG со отсечката $\overline{LF}$. Од Питагорова теорема за триаголникот AFD добиваме дека $\overline{DF}=\sqrt{5}$. Од степен на точката D во однос на кружницата k го имаме равенството $\overline{DG}\cdot\overline{DF}=\overline{DH}^2=1$. Така добиваме $\overline{DG}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

дека односно $\overline{DG}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. Од сличноста на триаголниците EGD и KGF го имаме равенството $\frac{\overline{DE}}{\overline{FK}}=\frac{\overline{DG}}{\overline{GF}}$ од каде се добива дека $\overline{DE}\cdot\overline{GF}=\overline{DG}\cdot\overline{FK}$. На тој начин го имаме равенството $\overline{DE}\cdot(\overline{DF}-\overline{DG})=\overline{DG}\cdot(\overline{FL}-\overline{LK})$ ...(1). Од сличноста на триаголниците ECD и KCL имаме $\overline{DE}:\overline{LK}=\overline{DC}:\overline{LC}$ односно $y:\overline{LK}=2:1$. Така имаме дека $\overline{LK}=\frac{y}{2}$. Така од равенството (1) се добива равенката $y\cdot\left(\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\left(2-\frac{y}{2}\right)$ чие решение е $y=\frac{4}{9}$. Значи, $\overline{AE}=\overline{AD}-\overline{DE}=2-y=2-\frac{4}{9}=\frac{14}{9}$.

1690. Нека D е подножната точка на висината спуштена од темето A, а M е средишна точка на висината AD во триаголникот ABC. Нека полуправата BM ја сече страната AC во точка E, а полуправата CM ја сече страната AB во точка F. Докажи дека $\frac{1}{P_{FBC}}+\frac{1}{P_{BCE}}=\frac{3}{P_{ABC}}$.



Решение. Нека K и L се подножните точки на нормалите спуштени од точките F и E кон страната $\overline{BC}=a$. Така имаме $\frac{\overline{DC}+\overline{BD}}{\overline{BC}}=1 \Leftrightarrow$

$$\frac{\frac{\overline{DC}}{2}\cdot h_1}{\frac{a}{2}\cdot h_1}+\frac{\frac{\overline{BD}}{2}\cdot h_2}{\frac{a}{2}\cdot h_2}=1 \Leftrightarrow \frac{P_{DCF}}{P_{FBC}}+\frac{P_{BDE}}{P_{BCE}}=1 \text{ ...(1).}$$

Од тоа што $\overline{AM}=\overline{MD}$ имаме дека $P_{MDC}=P_{MCA}$ и $P_{MDF}=P_{AFM}$ од каде следува дека $P_{DCF}=P_{CAF}$ ...(2). Аналогно имаме дека $P_{MDB}=P_{MAB}$ и $P_{MDE}=P_{MAE}$ од каде следува дека $P_{BDE}=P_{EAB}$ ...(3). Од равенствата (1), (2) и (3) добиваме дека $\frac{P_{CAF}}{P_{FBC}}+\frac{P_{EAB}}{P_{BCE}}=1 \Leftrightarrow$

$$\frac{P_{CAF}}{P_{FBC}}+1+\frac{P_{EAB}}{P_{BCE}}+1=3 \Leftrightarrow \frac{P_{CAF}+P_{FBC}}{P_{FBC}}+\frac{P_{EAB}+P_{BCE}}{P_{BCE}}=3 \Leftrightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{FBC}}+\frac{P_{ABC}}{P_{BCE}}=3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{P_{FBC}}+\frac{1}{P_{BCE}}=\frac{3}{P_{ABC}}.$$

1691. Нека n е природен број поголем од 2. Докажи дека важи $\log_{n-1} n > \log_n(n+1)$.

Решение.

$$\log^2 n=\left[\frac{logn^2}{2}\right]^2>\left[\frac{\log(n^2-1)}{2}\right]^2=\left[\frac{\log(n-1)+\log(n+1)}{2}\right]^2\geq \log(n-1)\cdot\log(n+1)$$

Ако целото неравенство го помножиме со $\frac{1}{\log(n-1)\cdot logn}$ ќе добиеме

$$\frac{\log n}{\log(n-1)}>\frac{\log(n+1)}{\log n}$$

што е еквивалентно со $\log_{n-1} n > \log_n(n+1)$.

1692. Реши ја параметарската квадратна равенка $(a^2-b^2)x^2+ab=(a^2+b^2)x$ со параметри a и b.

Решение. Равенката $(a^2-b^2)x^2+ab=(a^2+b^2)x$ е еквивалентна со равенката $(a^2-b^2)x^2-(a^2+b^2)x+ab=0$ чии решенија ќе ги најдеме со формулата за квадратна равенка.

$$x_{1,2}=\frac{(a^2+b^2)\pm\sqrt{(a^2+b^2)^2-4ab(a^2-b^2)}}{2(a^2-b^2)}$$

$$x_{1,2}=\frac{(a^2+b^2)\pm\sqrt{a^4+2a^2b^2+b^4-4a^3b+4ab^3}}{2(a^2-b^2)}$$

$$x_{1,2}=\frac{(a^2+b^2)\pm\sqrt{(a^2-2ab-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}$$

$$x_{1,2}=\frac{(a^2+b^2)\pm(a^2-2ab-b^2)}{2(a^2-b^2)}$$

$x_1=\frac{(a^2+b^2)+(a^2-2ab-b^2)}{2(a^2-b^2)}=\frac{2a^2-2ab}{2(a-b)(a+b)}=\frac{a(a-b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{a}{a+b}$ при услов $a\neq\pm b$.

$x_2=\frac{(a^2+b^2)-(a^2-2ab-b^2)}{2(a^2-b^2)}=\frac{2b^2+2ab}{2(a-b)(a+b)}=\frac{b(a+b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{b}{a-b}$ при услов $a\neq\pm b$.

Ако $a=\pm b$ тогаш равенката нема да е квадратна и ќе има решение $x=\frac{\pm b^2}{2b^2}=\pm\frac{1}{2}$ кога $b\neq 0$.

Ако $b=0, a\neq 0$ или $a=0, b\neq 0$ равенката има решенија $x_1=1, x_2=0$. Ако $a=b=0$, равенката има бесконечно многу решенија.

1693. Во множеството на реалните броеви најди ги решенијата на системот равенки

$$\begin{cases} yx^{\log_y x}=x^{\frac{5}{2}} \\ \log_4 y\cdot\log_y(3x-y)=1 \end{cases}$$

Решение. Ако ја логаритмираме првата равенка со основа y и за втората равенка го искористиме равенството $\frac{1}{\log_4 y}=\log_y 4$ ќе добиеме

$$\begin{cases} \log_y(yx^{\log_y x})=\frac{5}{2}\log_y x \\ \log_y(3x-y)=\log_y 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\log_y x\cdot\log_y x=\frac{5}{2}\log_y x \\ 3x-y=4 \end{cases}$$

Ако ставиме смена $\log_y x=t$, првата равенка го добива обликот $1+t^2=\frac{5}{2}t$, односно, после средување $2t^2-5t+2=0$. Оваа квадратна равенка, по нејзиното решавање, ги добива двете решенија $t_1=2$ или $t_2=\frac{1}{2}$. За првата вредност на t, која ќе ја замениме во смената $\log_y x=t=2$ се добива $x=y^2$, а за втората вредност на t се довива $x=y^{\frac{1}{2}}=\sqrt{y}$. На овој начин ќе следат два системи равенки со две променливи:

$\begin{cases} x=y^2 \\ 3x-y=4 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=\sqrt{y} \\ 3x-y=4 \end{cases}$. Првиот систем равенки се сведува на $\begin{cases} x=y^2 \\ 3y^2-y=4 \end{cases}$ со две решенија на втората квадратна равенка $?_1=\frac{4}{3}$ или $y_2=-1$. Решението $y_2=-1$ не го дозволува дефиниционата област на логаритамската функција и така, добиваме само една можна вредност за y, за која променливата $x=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$. Така, подредениот пар $\left(\frac{16}{9},\frac{4}{3}\right)$ е решение на дадениот систем равенки.

Вториот систем равенки е еквивалентен со $\begin{cases} x=\sqrt{y} \\ 3x-x^2=4 \end{cases}$ во кој втората квадратна равенка по x нема реални решенија, па овој систем нема да има реални решенија. Единственото решение е парот $\left(\frac{16}{9},\frac{4}{3}\right)$.

1694. Во секое поле на 103x103 таблица се впишани реални броеви кои што по апсолутна вредност не се поголеми од 1. Во произволен 2x2 квадрат од таа таблица збирот на броевите е еднаков на нула. Докажи дека збирот на сите броеви од таблицата не е поголем од 103.

Решение. Да ја разделиме таблицата на 52 области: првата е полето од левиот горен агол, втората е 3x3 квадратот во левиот горен агол без полето во аголот. Третата е 5x5 квадратот без првите две области итн. Во секоја од 51-та област, почнувајќи од втората, збирот не е поголем од 2, бидејќи: ако во секоја област формираме 2x2 квадрати, едно поле од областа, да го означиме со a, ќе се јави во два квадрати, а друго поле, да го означиме со b, нема да се јави во ниеден квадрат. Бидејќи збирот на броевите во секој 2x2 квадрат е еднаков на 0, збирот на броевите од секоја област ќе биде $b-a\leq 2$. Така, збирот на броевите во таблицата не е поголем од $1+51\cdot 2=103$.

1695. Докажи, ако во триаголникот *ABC* важи $-\beta=90°$, тогаш $(a^2-b^2)^2=(a^2+b^2)c^2$.

Решение. Според тангенсната теорема добиваме:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{tg\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{tg\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}=tg\left(\frac{90°+2\beta}{2}\right)=tg(45°+\beta)=\frac{\sin(45°+\beta)}{\cos(45°+\beta)}=\frac{sin45°cos\beta+cos45°sin\beta}{cos45°cos\beta-sin45°sin\beta}=$$

$$\frac{cos\beta+sin\beta}{cos\beta-sin\beta}=\frac{cos\beta+\sin(\alpha-90°)}{cos\beta-\sin(\alpha-90°)}=\frac{cos\beta-cos\alpha}{cos\beta+cos\alpha}=\frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=$$

$\frac{b(a^2+c^2-b^2)-a(b^2+c^2-a^2)}{b(a^2+c^2-b^2)+a(b^2+c^2-a^2)}$ па затоа: $\frac{a+b}{a-b}=\frac{b(a^2+c^2-b^2)-a(b^2+c^2-a^2)}{b(a^2+c^2-b^2)+a(b^2+c^2-a^2)}$ односно

$$b^2(a^2+c^2-b^2)+a^2(b^2+c^2-a^2)=-b^2(a^2+c^2-b^2)-a^2(b^2+c^2-a^2)$$

$$a^2b^2+b^2c^2-b^4+a^2b^2+a^2c^2-a^4=0$$

$$b^2c^2+a^2c^2=a^4+b^4-2a^2b^2$$

$$(a^2+b^2)c^2=(a^2-b^2)^2$$

што требаше да се докаже.

Подготвиле:

Борче Јошевски,
Раде Кренков,
Слаѓан Станковиќ

НАГРАДНИ ЗАДАЧИ

Петар Филиповски

1. Одреди ги сите парови прости броеви (p,q) такви што $p^{q-1}+q^{p-1}$ е квадрат на природен број.

2. Нека триаголникот $\triangle ABC$ е рамнокрак со основа BC, P е средишна точка на помалиот лак AB од опишаната кружница околу триаголникот $\triangle ABC$, а Q е средишна точка на страната AC. Опишаната кружница околу триаголникот $\triangle APQ$ по втор пат ја сече страната AB во точката K. Ако O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот $\triangle APQ$, докажи дека правите PO и KQ се сечат во точка од симетралата на аголот $\angle CBA$.

Вашите решенија од оваа рубрика може да ги испратите на
e-mail: filipovskipetar@gmail.com со предмет „Наградни задачи“.
Решенијата треба да бидат подготвени во MS Word.

ЕСЕНСКА МАТЕМАТИЧКА ШКОЛА 2022

Есенската математичка школа 2022 е наменета за учениците од 4 до 9 одделение од основните училишта и од 1 до 4 година од средните училишта. Таа се организира по четврти пат, а оваа година, по две години онлјан настава, предавањата ќе бидат на Природно- математичкиот факултет во Скопје, од 15 октомври до 19 ноември 2022, со завршен тест на 3 декември 2022 година.

Темите за учениците од средните училишта кои се обработуваат оваа година на школата се: I и II год. – Неравенства и Сличности и некои поважни теореми и III и IV год. – Обработка на податоци и моделирање. Повеќе информации за Есенската математичка школа 2022 може да најдете на интернет страницата на школата: https://smm.org.mk/skoli/matematicki-skoli/.

КАЛЕНДАР ЗА НАТПРЕВАРИТЕ ПО МАТЕМАТИКА ВО СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ ВО УЧЕБНАТА 2022/2023 ГОДИНА

Општински натпревар, 4.02.2023 година
Регионален натпревар, 4.03.2023 година
Државен натпревар, 1.04.2023 година.

ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА 19 .02.2022

Прва година/ А група

Избери еден од понудените одговори или внеси цел ненегативен број (без мерна единица).

Следните три задачи се бодуваат со 3 поени.

1АБ. Вредноста на алгебарскиот израз $\frac{a^3-b^3}{a+b-\frac{ab}{a+b}} - \frac{a^3+b^3}{a-b+\frac{ab}{a-b}}$ за $a=-3$ и $b=2$ изнесува:

А) – 5 Б) 0 В) 5 Г) 10 Д) $\frac{1}{4}$

Одговор: Б

2АБ. Бројот a е составен од 66 единици и 44 тројки. Кој/и од следните искази е точен:

p: Бројот a е делив со 3.

q: Бројот a е делив со 6.

r: Бројот a е прост број.

s: Бројот a не е делив со 2.

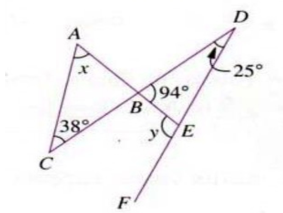
А) Само *p, q* и *s*. Б) Само *s.* В) Само *p* и *r*.

Г) Само *p* и *s*. Д) Ниеден од исказите

Одговор: Г

3А. Колку степени изнесува збирот на аглите означени со x и y на сликата?

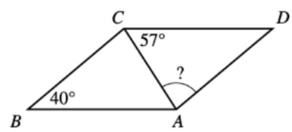
(Внеси ја вредноста без знакот за степен)



Одговор: 167

3Б. Колку степени изнесува аголот означен со прашалник на сликата, ако четириаголникот $BADC$ е паралелограм?

(Внеси ја вредноста без ознаката за степен)



Одговор: 83

Следните четири задачи се бодуваат со 4 поени.

4АБ. Дадена е функцијата $f(x)=x+1$. Колку изнесува вредноста на изразот $f(0)+f(1)+f(2)+...+f(2021)$?

А) 2022 Б) 2043231 В) 2041210

Г) 4086462 Д) ниеден од понудените одговори

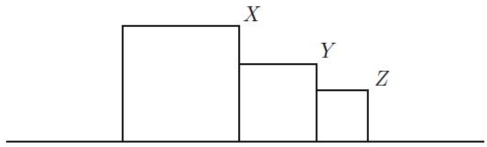
Одговор: Д

5АБ. На табла се напишани 10 трицифрени природни броеви. Кои било два од нив имаат различна последна цифра и кои било два од нив различна претпоследна цифра. Ако S е збирот на сите 10 броеви запишани на таблата, колку изнесува збирот на последните две цифри на бројот S?

А) 10 Б) 9 В) 14 Г) 5 Д) 0

Одговор: В

6АБ. Три квадрати со различна големина се поставени како на цртежот така што темињата X, Y и Z се колинеарни (лежат на иста права).



Одреди ја должината на страната на најголемиот квадрат (во сантиметри), ако должините на страните на другите два квадрати се 6cm и 4 cm. (Внеси ја вредноста без единицата мерка.)

Одговор: 9

7АБ. Дадена е функцијата $f(x)=2px-1$, каде што p е прост број. Кој/и од следните искази е точен:

q: Функцијата е растечка за секој прост број *p.*

r: $f(0)=p-1$.

s: За p =2, точката со координати (2022,8087) лежи на графикот на функцијата.

t: Исказите *q*, *r* и *s* се вистинити искази.

А) Само *r, s* и *t*. Б) Само *s*. В) Само *q* и *s*.

Г) Само *s* и *t*. Д) ниеден од исказите

Одговор: В

Следните три задачи се бодуваат со 5 поени.

8А. За колку различни множества $X\subseteq\{1,2,3,4,5,6\}$ важи $X\cap\{3,4,5\}=\{4,5\}$.

А) 0 Б) 6 В) 7 Г) 8 Д) 16

Одговор. Г

8Б. Цената на една капа е цел број денари. Вкупната цена на седум капи е поголема од 930, а помала од 950 денари, а вкупната цена на единаесет капи е поголема од 1450, а помала од 1470 денари. Колку денари изнесува цената на една капа?

А) 135 Б) 132 В) 133 Г) 134 Д) ниеден од понудените одговори

Одговор. В

9А. На прашањето кој од петте ученици (Ана, Билјана, Весна, Горан и Дарко) јаде грашок добиени се следните одговори:

1) „Ако Горан јаде грашок, тогаш и Дарко јаде грашок.“
2) „Барем едно од девојчињата јаде грашок.“
3) „Најмногу едно од момчињата јаде грашок.“
4) „Ана и Горан или двајцата јадат грашок или двајцата не јадат грашок.“
5) „Ако Дарко не јаде грашок, тогаш не јадат ни Билјана, ни Весна.“

Секој од дадените одговори е точен. Одреди кој од следните искази е точен:

А) „Горан јаде грашок.“
Б) „Билјана или Весна јадат грашок.“
В) „Ако Дарко јаде грашок, тогаш и Ана јаде грашок.“
Г) „Ана и Билјана јадат грашок.“
Д) „Билјана и Весна не јадат грашок.“

Одговор. Б

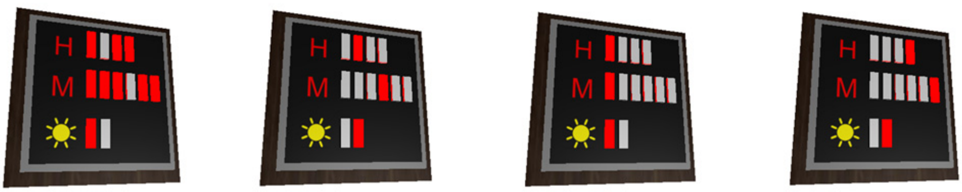
9Б. Во едно училиште од 840 ученици, 770 ученици биле присутни на часови. Четири петтини од отсутните ученици биле оправдано отсутни. Колкав дел од учениците во училиштето биле неоправдано отсутни?

А) $\frac{4}{5}$ Б) $\frac{1}{5}$ В) $\frac{1}{56}$ Г) $\frac{1}{15}$ Д) $\frac{1}{60}$

Одговор. Д

10А. Јован за подарок добил часовник на кој има три реда сијалички, во првиот ред четири, во вториот ред шест и во третиот ред две сијалички. Тој знае само дека првиот ред ги покажува часовите, а вториот ред минутите. Кога било 11 часот и 59 минути претпладне, тогаш во првиот ред светеле првата, третата и четвртата сијаличка, во вториот ред светеле првата, втората, третата, петтата и шестата сијаличка, а во третиот ред светела првата сијаличка (слика 1). Од друга страна, кога било 4 часот и 4 минути попладне забележал дека светеле сијаличките кои претходно не светеле, а не светеле сијаличките кои претходно светеле (слика 2). Сијаличките светат ако се означени во црвена боја.

Одреди после колку време, од времето прикажано на слика 3), кога светат само првите сијалички во секој ред, по прв пат ќе светат само последните сијалички во секој ред како на слика 4).



1) 2) 3) 4)

А) 15 часа 7 мин. Б) 4 часа 29 мин. В) 1 час 1 мин.
Г) 7 часа 31 мин. Д) 3 часа 7 мин.

Одговор. Б

10Б. Во една златарница имало 200 златни прачки. Од секоја прачка биле излиени 11 златници (сите со еднаква големина), при што останувала мала количина на злато, така што од остатоците на 10 прачки се излива точно една нова прачка. Колку најмногу златници може да се излијат од почетните 200 прачки на овој начин?

А) 2200 Б) 2420 В) 2442 Г) 2444 Д)2445

Одговор: Г

Следните три задачи се бодуваат со 5 поени.

11АБ. За еден број велиме дека е *триделив* ако има точно три делители. Колку изнесува збирот на најмалите три триделиви природни броеви?

Одговор: 38

12АБ. Бочната плоштина на еден рамностран цилиндар (цилиндар кај кој дијаметарот на основата е еднаков на висината на цилиндарот) е 64π cm^2. Нека плоштината на цилиндарот е x cm^2, а волуменот е y cm^3. Притоа, мерниот број на плоштината x е p % од мерниот број на волуменот y. Колку изнесува вредноста p?

Одговор: 75

13АБ. Броителот на дропката од облик $\frac{a}{b}$ е за за 2 помал од нејзиниот именител. Ако броителот се намали за $\frac{1}{2}$, а именителот се зголеми за $\frac{1}{4}$, тогаш се добива дропката $\frac{10}{21}$. Колку изнесува вредноста на изразот $a+b$?

Одговор: 8

Следните четири задачи се бодуваат со 6 поени.

14АБ. Одреди го најмалиот четирицифрен број делив со 7, кој при делење со 8, 9 и 10 дава остаток 2.

Одговор. 1442

15АБ. Од 1000 железни блокови во форма на квадар, секој од нив со должина 15 cm и еднаква ширина и висина, со топење и повторно моделирање, изработен е еден голем железен блок во форма на квадар со должина 12 dm, ширина 1 m и висина 8 dm. Колку изнесува збирот на должината, ширината и висината (во сантиметри) на еден од помалите железни блокови? (Внеси ја вредноста без единицата мерка.)

Одговор: 31

16АБ. Колку изнесува апсолутната вредност на збирот на коефициентите на полиномот $P(x)=(x+2)(3x-7)-(x-6)(2x-7)(x-1)-15$ по неговото сведување во нормален вид?

Одговор: 27

17АБ. Дадени се три паралелни прави r, s и t, така што s е меѓу r и t. Трите прави се пресечени со правите m и n, при што пресечните точки на правата m со правите r, s и t се A, B и C соодветно, а пресечните точки на правата n со правите r, s и t се A_1, B_1 и C_1 соодветно. Притоа, $\overline{AB}=2x+3$, $\overline{BC}=\frac{2y-1}{2}$, $\overline{A_1B_1}=y$ и $\overline{B_1C_1}=\frac{x+2}{2}$.

Ако $x+y=4$, одреди ја должината $\overline{AB}$.

Одговор: 5

Следните три задачи се бодуваат со 7 поени.

18АБ. Производот на два двоцифрени броја е запишан само со седмици. Одреди го збирот на броевите.

Одговор. 58

19АБ. Даден е квадрат $ABCD$ со должина на страна $4\sqrt{2}$ и во него е впишан четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$ т.ш. A_1, B_1, C_1, D_1 се средините на страните DA, AB, BC, CD, соодветно. Плоштината на делот од впишаниот круг во квадратот $ABCD$ што се наоѓа надвор од четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$ претстави ја во облик $x+y\pi$, каде $x, y\in \mathbb{Z}$. Колку изнесува вредноста на изразот $|x+y|$?

Одговор: 8

20А. Колку изнесува вредноста на изразот a^3b+ab^3, ако $a^4+b^4=97$ и $a^2+b^2=13$, за $a,b\in \mathbb{N}$?

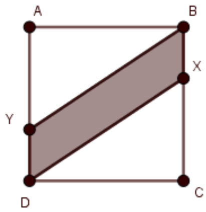
Одговор: 78

20Б. Ако $a^2+b^2=34$ и $a+b=8$, тогаш одреди ја вредноста на изразот a^2b+ab^2.
Одговор: 120

Втора година / А група

Се избира еден од понудените одговори.
Следните три задачи се бодуваат со 3 поени

1АБ. На дадениот цртеж, $DCBA$ е квадрат со страна 10. Ако $\overline{AY}=\overline{CX}=8$, пресметај ја плоштината на шрафираниот дел од цртежот.



A) 20 **B)** 35 **C)** 45 **D)** 26 **E)** 30

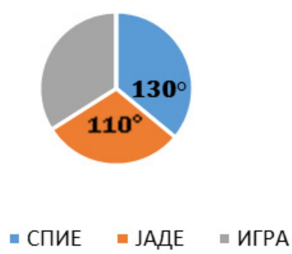
Решение. А

2АБ. Ако $\frac{7}{8}$ од 720 е n, колку е 60% од n?

A) 60 **B)** 720 **C)** 96 **D)** 268 **E)** 378

Решение. Е

3АБ. Во дадениот дијаграм со зададена легенда, кругот покажува како едно мече поминува 24 часа. Колку часови има поминато мечето во играње?

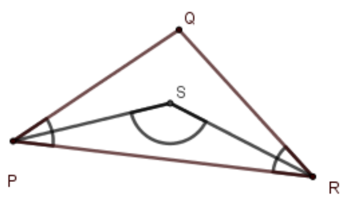


A) 4 **B)** 8 **C)** 5 **D)** 1 **E)** 7

Решение. В

Следните четири задачи се бодуваат со 4 поени

4АБ. Даден е триаголникот PRQ за кој што важи $\angle PQR=120°$ и $\angle QPS=\angle RPS$ и $\angle QRS=\angle PRS$. Колку изнесува аголот PSR?



A) 130° **B)** 100° **C)** 80° **D)** 150° **E)** 110°

Решение. D

5АБ. Ако $6x^2+11x-10=(ax+b)(cx+d)$, за a,b,c,d цели броеви, колку е $a^2+b^2+c^2+d^2$?

A) 34 **B)** 42 **C)** 44 **D)** 50 **E)** 64

Решение. B

6АБ. Алек и Бодан заедно имаат 105 години, Влатко и Алек 97 години, а Бодан и Влатко заедно имаат 92 години. Колку години има Бодан?

A) 42 **B)** 46 **C)** 48 **D)** 50 **E)** 55

Решение. D

7АБ. Колку е апсолутната вредност на збирот на третите степени на решенијата на равенката $x^2-2x+5=0$?

A) 2 **B)** 5 **C)** 12 **D)** 22 **E)** 25

Решение. D

Следните три задачи се бодуваат со 5 поени

8АБ. Ако простите броеви $x,\ y,\ z$ такви што $x<y<z$ се решенија на системот равенки $\begin{cases} x+y+z=68 \\ x\cdot y+y\cdot z+z\cdot x=1121 \end{cases}$, која е вредноста на производот $y\cdot z$?

A) 893 **B)** 919 **C)** 957 **D)** 989 **E)** 1003

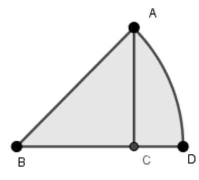
Решение. D

9АБ. Најди го производот на сите вредности на параметарот $k, k\neq 0$, за кои квадратната равенка $kx^2+(5k+3)x+(6k+5)=0$ има единствено решение.

A) 2 **B)** 5 **C)** 12 **D)** 9 **E)** 10

Решение. D

10АБ. На дадениот цртеж *BA* и *BD* се радиуси на кружница со центар *B*. Плоштината на кружниот исечок *ABD* е 2π квадратни единици и претставува $\frac{1}{8}$ од плоштината на целиот круг. Најди ја плоштината на правоаголниот триаголник *ABC* (изразена во истите квадратни единици).



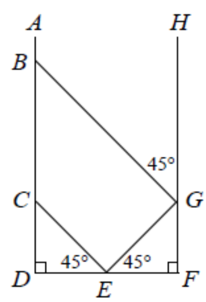
A) 4 **B)** 5 **C)** 9
D) 8 **E)** 10

Решение. A

Во следните задачи се внесува бројна вредност (ненегативен цел број) без единица мерка.

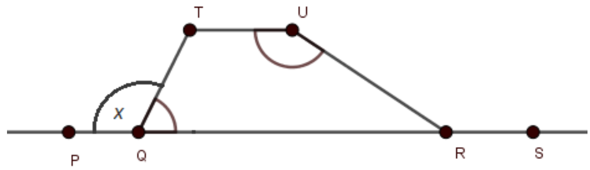
Следните три задачи се бодуваат со 5 поени

11А. Јана се наоѓа на позицијата C на дадената скица. Таа вклучува ласер насочен кон точката *E* на *DF*. Светлото од ласерот се рефлектира од точката *E* кон точката *G* на *FH*, а потоа од точката *G* кон точката *B* на *AD* (како на цртежот). Ако $\overline{DE}=\overline{EF}=1\mathrm{m}$ која е должината на патот *BD* во метри?



Одговор. 3

11Б. На дадениот цртеж правите *TU* и *PS* се паралелни, а точките *Q* и *R* (види цртеж) се такви што $\angle PQT = x$, $\angle RQT = x - 50^\circ$ и $\angle TUR = x + 25^\circ$. Колку е аголот *URS*? (Одговорот запиши го без знакот за степен)



Одговор. 140

12А. Колку е збирот $|z|^2 + \mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z$, ако $z = (2+i)(3-i) + \dfrac{7-i}{i-1}$?

Одговор. 14

12Б. Ако за линеарната функција $f(x) = ax + b$ важат равенствата $f(-2) + f(4) = 22$ и $f(-2) - f(4) = 42$, определи колку е $a + b$.

Одговор. 11

13АБ. На колку нули завршува производот на првите 25 природни броеви?

Одговор. 6

Следните четири задачи се бодуваат со 6 поени

14А. Во една цвеќарница има 400 цвеќиња. Од нив 70% се рози. Откако се продале 8 рози и одреден број од другите цвеќиња, 85% од цвеќиња што останале во цвеќарницата биле рози. Колку цвеќиња, што не се рози, се продале?

Одговор. 72

14Б. На еден тест Марија освоила 60%, а Гордана 85% од можните поени. Ако Гордана има 10 поени повеќе од Марија, колку вкупно поени носел тестот?

Одговор. 40

15А. Нека a и b се позитивни цели броеви такви што $a, b \leq 100\,000$ и за нив важи $\dfrac{a^3 - b}{a^3 + b} = \dfrac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$. Колку такви подредени парови (a, b) има?

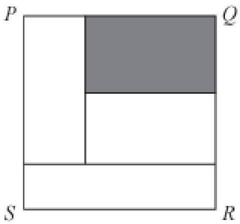
Одговор. 10

15Б. Неколку броеви се наредени еден до друг. Почнувајќи од третиот број, секој нареден е еднаков на збирот на претходните два броја, зголемен за редниот број на местото каде што се наоѓа бројот (ако се работи за петтиот број, тој е еднаков на збирот на третиот и четвртиот и на бројот 5). Ако десеттиот број е 103 а дванаесеттиот 217, колку е четиринаесеттиот број?

Одговор. 563

16АБ. Квадратната равенка $x^2 - (10 + m)x + 10m + 1 = 0$, каде што *m* е цел број, има целобројни решенија *p* и *q*, и притоа *p* е прост број. Пресметај ја вредноста на параметарот *m*.

Одговор. 12



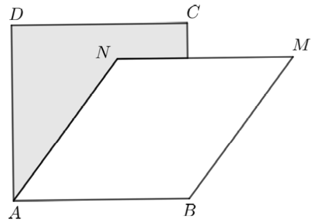
17АБ. Најди ги сите реални броеви x и y такви што $x^2+2y^2+\frac{1}{2}\le x(2y+1)$. Решението внеси го во облик $2\cdot x\cdot y$.

Одговор. 1

Следните три задачи се бодуваат со 7 поени

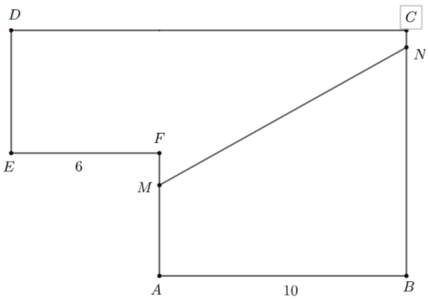
18А. На дадениот цртеж (горе лево), квадратот *SRQP* има страна со должина 42 и е поделен на четири помали правоаголници. Ако овие четири правоаголници имаат еднакви периметри, пресметај ја плоштината на шрафираниот дел од цртежот.

Одговор. 540



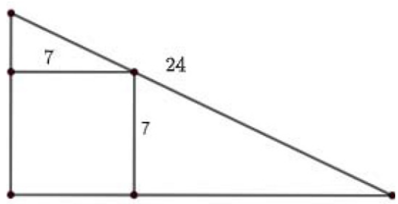
18Б. На сликата *ABCD* е квадрат со плоштина 289 cm^2, а четириаголникот *ABMN* е ромб со плоштина 255 cm^2. Колку изнесува плоштината на сивиот дел во cm^2?
(Одговорот внеси го без мерната единица)

Одговор. 94



19АБ. На цртежот е дадена фигурата *ABCDEF* чија што плоштина е 130. За должините на страните е познато дека $\overline{AF}=\overline{DE}$, $\overline{EF}=6$, $\overline{AB}=10$. Ако отсечката *MN* ја дели фигурата на две фигури со еднакви плоштини, пресметај ја плоштината на фигурата *MNCF*.

Одговор. 10



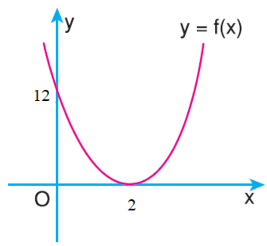
20АБ. Во правоаголен триаголник со хипотенуза со должина 24, впишан е квадрат со страна 7, како на сликата. Колку е плоштината на правоаголниот триаголник?

Одговор. 112

Трета година/А група

Изберете еден од понудените одговори.

Следните три задачи се бодуваат со 3 поени.



1АБ. За параболата $y=f(x)$ дадена на цртежот, најди го $f(10)$.

А. 24 **Б.** 192 **В.** 240
Г. 2 **Д.** друга вредност

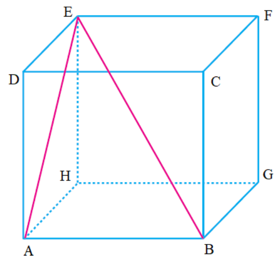
Одговор. Б

2АБ. Во една кутија има 1000 топки од кои 5% се сини, а останатите се црвени. По отстранување на одреден број црвени топки од кутијата, бројот на сини топки е 10% од преостанатите топки во кутијата. Колку црвени топки останале во кутијата?

А. 900 **Б.** 850 **В.** 5000
Г. 450 **Д.** друга вредност

Одговор. Г

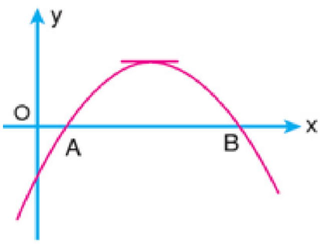
3АБ. Дадена е коцката *ABCDEFGH*. Колку е $\sin\measuredangle ABE$?



А. $\frac{1}{2}$ **Б.** $\sqrt{2}$ **В.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Г. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **Д.** друга вредност

Одговор. Г



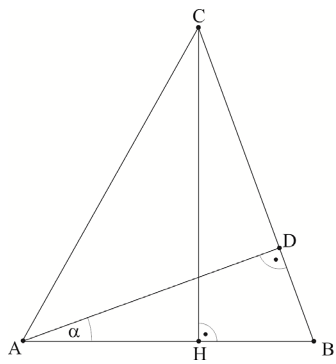
Следните четири задачи се бодуваат со 4 поени.

4АБ. Дадена е параболата $y=-x^2+6x+3m-9$ (види цртеж лево), за чии точки *A* и *B* важи $5\cdot\overline{OA}=\overline{OB}$. Одреди ја вредноста на параметарот *m*.

А. $\frac{2}{3}$ **Б.** $\frac{3}{4}$ **В.** $\frac{4}{3}$ **Г.** $\frac{5}{2}$ **Д.** $\frac{2}{5}$

Одговор. В

5. Даден е триаголникот *ABC* и за него, според ознаките на цртежот, е познато дека $\overline{BH}=10$ и $\overline{BC}=16$. Ако $\measuredangle DAB=\alpha$, колку изнесува $\operatorname{ctg}\alpha$?



А. $\frac{\sqrt{39}}{5}$ **Б.** 1 **В.** $\frac{3}{4}$ **Г.** $\frac{\sqrt{41}}{5}$ **Д.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Одговор. А

6АБ. Кој од дадените броеви не може да е вредност на функцијата $f(x)=x^2-2x+5$?

А. 0 **Б.** 4 **В.** 10
Г. 10^{10} **Д.** ниту еден

Одговор. А

7АБ. Последната цифра на бројот $4+5^2+4^3+5^4+...+4^{2021}+5^{2022}$ е:

А. 0 **Б.** 4 **В.** 5 **Г.** 9 **Д.** 2

Одговор. Г

Следните три задачи се бодуваат со 5 поени.

8АБ. За кое од следниве множества важи неравенството $\sin x\le\sin 3x$?

А. $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ **Б.** $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{61\pi}{100},\pi\right]$ **В.** $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$

Г. $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{79\pi}{100},\pi\right]$ **Д.** $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{95\pi}{100},\pi\right]$

Одговор. Д

9АБ. Ако $5^{10x}=4900$ и $2^{\sqrt{y}}=25$, пресметај ја вредноста на изразот $5^{5(x-1)}\cdot4^{\sqrt{y}}$.

А. 0 **Б.** 14 **В.** 5 **Г.** 10 **Д.** 20

Одговор. Б

10АБ. Избрани се два броја a и b од множеството $\{1,2,3,...,26\}$, така што производот ab е еднаков на збирот од останатите броеви од множеството. Колку изнесува $|a-b|$?

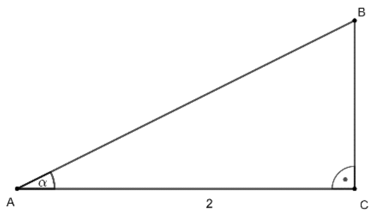
А. 15 **Б.** 11 **В.** 9 **Г.** 6 **Д.** 1

Одговор. Г

Во следните задачи внесете го решението како цел ненегативен број (без единица мерка).

Следните три задачи се бодуваат со 5 поени.

11. Најди го периметарот на правоаголниот триаголник *ABC*, ако се знае дека $\overline{AC}=2$ и $\text{tg}\alpha=\frac{3}{4}$.



Одговор. **6**

12А. Ако $\frac{\sin^2 5°+\sin^2 10°+\cdots+\sin^2 85°}{tg10°\cdot tg20°\cdots tg80°}=a$, најди ја вредноста на $2\cdot a$.

Одговор. 17

12Б. Ако најголемата вредност на променливата $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ за која важи равенството $6\cdot 2^{\frac{1}{\sin^2 x}}-8=2^{2\cdot\text{ctg}^2 x+2}$ е m, најди ја вредноста на $\frac{\pi}{m}$.

Одговор. 2

13АБ. Познато е дека важи равенството $2-\cos^2\alpha=3\sin\alpha\cos\alpha.$ Да се најде вредноста $2\text{tg}\alpha,$ ако се знае дека $\sin\alpha\neq\cos\alpha,\ \cos\alpha\neq 0.$

Одговор. 1

Следните четири задачи се бодуваат со 6 поени.

14А.16Б. Нека $f(x)=-x^2+bx+c$ е квадратна функција со теме во точката (3,2). Ако x_1 и x_2 се нулите на функцијата, пресметај ја вредноста на изразот $(x_1-x_2)^2$.

Одговор. 8

14Б. Познато е дека секој жител на Логичната Земја е или тапчо или сезнајко. Тапчовците даваат секогаш неточни, а сезнајковците секогаш точни искази. Еден случаен минувач го наслушнал следниов разговор помеѓу Ане, Боро и Ване, жители на Логичната Земја:

Ане: „Боро и Ване се и двајцата тапчовци!“

Боро: „Тоа е точно.“

Колкумина од Ане, Боро и Ване се тапчовци?

Одговор. 2

15А. Пресметај $\frac{24x}{\pi}$ ако за $0<x<\frac{\pi}{2}$ важи

$$4\log_{16}(\cos 2x)+2\log_4(\sin x)+\log_2(\cos x)+3=0.$$

Одговор. 1

15Б. Да се определи вредноста на изразот $5\sin\theta - 3\cos\theta$ ако се знае дека

$$3\sin\theta + 5\cos\theta = 5 \text{ каде } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Одговор. 3

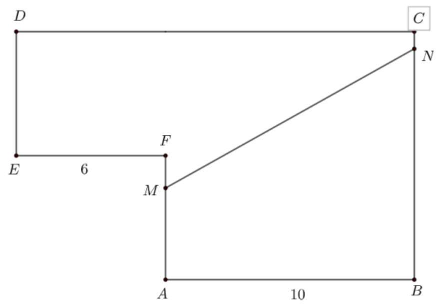
16А. Најди го збирот на сите позитивни решенија на равенката $\left(x^2+5x+5\right)^{x^2-10x+21}=1.$

Одговор. 10

17А. 19Б. Ако *A* е збирот на решенијата на равенката $\sin x - \cos x - |\sin x + \cos x| = 1$ кои се наоѓаат на интервалот $[0, 2\pi]$, пресметај $\frac{16}{\pi}A.$

Одговор. 24

17Б. На цртежот е дадена фигурата *ABCDEF* чија што плоштина е 130. За должините на страните е познато дека $\overline{AF} = \overline{DE}$, $\overline{EF} = 6$, $\overline{AB} = 10$. Ако отсечката *MN* ја дели фигурата на две фигури со еднакви плоштини, пресметај ја плоштината на фигурата *MNCF*.



Одговор. 10

Следните три задачи се бодуваат со 7 поени.

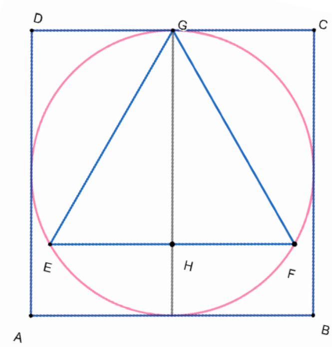
18А. Нека x, y и z се позитивни реални броеви. Најди ја најмалата вредност за изразот

$$\left(\frac{x}{y}+2\right)\left(\frac{y}{z}+2\right)\left(\frac{z}{x}+2\right).$$

Одговор. 27

18Б. Одреди го збирот на сите броеви $2xy$, каде x и y се реални решенија на неравенката

$$x^2 + 2y^2 + \frac{1}{2} \le x(2y+1).$$

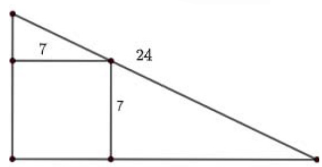


Одговор. 1

19А. Во еден квадрат е впишана кружница, а во неа е впишан рамностран триаголник (цртеж горе десно). Ако P_1 е плоштината на квадратот и P_2 е плоштината на триаголникот, најди ја вредноста на $\frac{P_1}{P_2}\cdot 3\sqrt{3}.$

Одговор. 16

20А. Во правоаголен триаголник со хипотенуза со должина 24, впишан е квадрат со страна 7, како на сликата. Колку е плоштината на правоаголниот триаголник?



Одговор. 112

20Б. Со 32 m жица сакате да заградите три страни на правоаголна површина (четвртата страна е ѕид). Која е најголемата можна плоштина која може да се загради? (Резултатот внеси го без мерна единица)

Одговор. 128

Четврта година/А група

Изберете еден од понудените одговори.
Следните три задачи се бодуваат со 3 поени.

1АБ. Ако збирот на *k* последователни природни броеви е 45, која е најголемата можна вредност на *k*?

А. 3 **Б.** 5 **В.** 7 **Г.** 9 **Д.** 11

Одговор. Г

2АБ. Низата на Фибоначи започнува со броевите 1,1,2,3,5,8,13,... (после дадените први два члена 1 и 1, секој нареден член е збир од претходните два). Ако 36-от член на низата е 14 930 352 и 38-от член е 39 088 169, колку изнесува 40-от член на низата?

А. 63 245 997 **Б.** 63 245 986 **В.** 102 334 153
Г. 102 334 154 **Д.** 102 334 155

Одговор. Д

3АБ. За природен број *n*, со $P(n)$ го означуваме производот на цифрите на бројот *n*, додека со $S(n)$ збирот на цифрите на бројот *n*. За колку двоцифрени броеви важи $P(n)+S(n)=n$?

А. 3 **Б.** 8 **В.** 9 **Г.** 13 **Д.** 23

Одговор. В

Следните четири задачи се бодуваат со 4 поени.

4АБ. Колку пермутации (x_1, x_2, x_3, x_4) на множеството $\{1,2,3,4\}$ го имаат својството: изразот $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$ не е делив со 3?

А. 6 **Б.** 8 **В.** 12 **Г.** 14 **Д.** 16

Одговор. Б

5АБ. Даме си игра на три ескалатори во еден мол. Едниот од ескалаторите се движи надолу, другиот нагоре, а третиот е расипан; ескалаторите во сѐ останато се идентични. Ескалаторите кои одат нагоре и надолу се движат со иста брзина. Претпоставуваме дека Даме трча со константна брзина. По ескалаторот кој оди нагоре Даме се качува за 6 секунди, а по оној што оди надолу се качува за 30 секунди. За колку секунди ќе се качи по ескалаторот што не работи?

А. 10 **Б.** 12 **В.** 14 **Г.** 16 **Д.** 18

Одговор. А

6АБ. Во една населба, точно една петтина од вкупниот број жители се темнокоси жени, а истиот број се светлокоси мажи. Ако точно четири седмини од жените се светлокоси и притоа се знае дека жените во оваа населба се или со светла или со темна коса, кој од понудените одговори е можниот вкупен број на жители во населбата?

А. 700 **Б.** 800 **В.** 900 **Г.** 1000 **Д.** 1100

Одговор. В

7АБ. Познато е дека секој жител на Логичната Земја е или тапчо или сезнајко. Тапчовците даваат секогаш неточни, а сезнајковците секогаш точни искази. Еден случаен минувач го наслушнал следниов разговор помеѓу Ане, Боро и Ване, жители на Логичната Земја:

Ане: „Боро и Ване се и двајцата тапчовци!“
Боро: „Тоа е точно.“

Колкумина од Ане, Боро и Ване се тапчовци?

А. 0 **Б.** 1 **В.** 2 **Г.** 3 **Д.** не може да се каже

Одговор. В

Следните три задачи се бодуваат со 5 поени.

8АБ. Познато е дека постои само еден четирицифрен број n за кој $\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{n}}}$ е природен број. Колку изнесува збирот на цифрите на бројот *n*?

А. 17 **Б.** 18 **В.** 19 **Г.** 20 **Д.** 21

Одговор. Б

9АБ. Нека *x*, *y* и *z* се природни броеви такви што: $x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{26}{21}$. Колку изнесува xyz ?

А. 20 **Б.** 24 **В.** 28 **Г.** 32 **Д.** 36

Одговор. А

10АБ. Избрани се два броја a и b од множеството $\{1,2,3,...,26\}$, така што производот ab е еднаков на збирот од останатите броеви од множеството. Колку изнесува $|a-b|$?

А. 15 **Б.** 11 **В.** 9 **Г.** 6 **Д.** 1

Одговор. Г

Во следните задачи внесете го одговорот (ненегативен цел број без единица мерка) или изберете го точниот одговор.

Следните 3 задачи се бодуваат со 5 поени.

11АБ. Аритметичката средина на деветте броеви $\{9,99,999,...,999999999\}$ е 9-цифрен број *M* чии цифри се различни. Која цифра не се јавува во декадниот запис на бројот *M*?

Одговор. 0

12АБ. Равенката $z^4+z^3+2z^2+2z+4=0$ има комплексен корен чии реален и имагинарен дел се еднакви. Најди го бројот кој е за 5 поголем од реалниот дел на тој корен.

Одговор. 4

13АБ. Колку точни кубови на природни броеви се делители на бројот $3!\cdot 5!\cdot 7!$?

Одговор. 6

Следните 3 задачи се бодуваат со 6 поени.

14АБ. На кошаркарски турнир учествувале 8 екипи и притоа секоја екипа одиграла точно по еден натпревар со секоја од останатите екипи. За победа екипите добиваат по 2 поена, за пораз 0 поени (на турнирот немало нерешен натпревар). Екипите освоиле 14, 12, 8, 8, 6, 4, 2, 2 поени, редоследно. Колку натпревари последните четири екипи на табелата имаат изгубено од првите четири екипи?

Одговор. 15

15АБ. За секој ненегативен цел број *n* дефинираме број $A_n = 2^{3n}+3^{6n+2}+5^{6n+2}$. Најдете го најголемиот заеднички делител на броевите $A_0, A_1, ..., A_{2022}$.

Одговор. 7

16А. Нека $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низата на Фибоначи дефинирана на следниот начин: $F_1=F_2=1$ и $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ за $n\geq 1$. Ако x е реален број за кој важи $x^2=x+1$, пресметај ја вредноста на изразот $x^{2022}-xF_{2022}-F_{2021}$.

Одговор. 0

16Б. Во секое теме на една коцка запишан е различен број од множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Збирот на броевите кои се наоѓаат во темињата на ѕидовите на коцката е константен (ист за секој ѕид) и не е делив со бројот кој не е запишан во темињата на коцката. Определи го бројот кој не е запишан во ниту едно теме на коцката.

Одговор. 7

17А. Пресметај ја вредноста на изразот $\sum_{k=1}^{2022}\binom{2022}{k}^2-\binom{4044}{2022}+2022$.

Одговор. 2021

17Б. Нека x, y се позитивни реални броеви за кои важи $x^3+y^3+(x+y)^3+30xy=2000$. Пресметај ја вредноста $x+y$.

Одговор. 10

Следните три задачи се бодуваат со 7 поени.

18А. Нека a, b и c се ненегативни реални броеви, при што најмалку два од броевите се ненулти и за броевите важи $a+b+c=ab+bc+ca$. Определи ја најмалата вредност на реалниот број k така што $(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}-k\right)\leq k$.

Одговор. 1

18Б. Нека x, y и z се позитивни реални броеви. Најди ја најмалата вредност за изразот

$$\left(\frac{x}{y}+2\right)\left(\frac{y}{z}+2\right)\left(\frac{z}{x}+2\right)$$

Одговор. 27

19АБ. При ротација со центар во точката *M* и агол α (во насока спротивна на насоката на стрелките на часовникот) точката $A(1,2)$ се пресликува во точката $A_1(6,5)$ додека точката $B(1,4)$ се пресликува во точката $B_1(4,5)$. Пресметај го збирот на координатите на точката *M*.

Одговор. 8

20АБ. Нека p е цел број. Познато е дека корените на равенката $x^3+2px^2-px+10=0$ се три последователни членови на аритметичка прогресија. Пресметај го збирот на корените на равенката.

Одговор. 6

СОДРЖИНА