Математичко списание СИГМА
за учениците од средните училишта

ISSN 1409-6803 **UDC51(497.17)**

СОПСТВЕНИК И ИЗДАВАЧ:
СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА
Првиот број на СИГМА е отпечатен во јануари 1979 година.
Излегува во четири броја во текот на една учебна година.
Цената на еден примерок е 200 денари.
Претплатата за четирите броја е 480 денари.
Порачките треба да се направат на web страната на СММ, https://smm.org.mk, во делот *Списанија и книги*, со пополнување на податоците наведени во *формата*.

Жиро сметка 3000 0000 1276 071, ЕДБ 4030 99 11 21 596,
Депонент: Комерцијална банка - Скопје, СМ на Македонија, за СИГМА.

Сите коментари, забелешки, Ваши предлози (статии, занимливости, задачи, работа со талентирани ученици и друго) за објавување во СИГМА, и решенија на задачите, можете да ги испратите на e-mail: sigma.spisanie.smm@gmail.com.

Стево Ѓоргиев, Маја Танчевска
Природно-математички факултет , Скопје
АД Осигурителна Полиса, Скопје

ВИДОВИ СЛУЧАЈНИ ПРИМЕРОЦИ (ПРВ ДЕЛ)

Како што видовме во претходниот прилог од минатиот број, веројатносниот примерок е карактеристичен по тоа што секој елемент од популацијата од која се избира примерокот има ненулта веројатност да биде вклучен во примерокот, односно на секој елемент од популацијата му се придружува **веројатност на избор**. Според тоа, разликуваме повеќе видови на веројатносни примероци, одосно случајни примероци, и тоа:

1. Прост случаен примерок
2. Систематски случаен примерок
3. Кластер примерок
4. Стратифициран случаен примерок
5. Повеќеетапен примерок

Прост случаен примерок

При избор на **прост случаен примерок** секој елемент од популацијата има подеднаква можност да биде избран во примерокот, односно сите елементи на популацијата имаат иста веројатност на избор. Популацијата во овој вид на примерок се состои од конечен број на елементи кои можат да се претставaт во листа, која ја нарекуваме **примерочна рамка**. Притоа, елементите од популацијата не треба да се преклопуваат. Исто така, елементите на популацијата мора да се хомогени, односно да задоволуваат одредена карактеристика која е предмет на истражување. Според тоа, добиваме дека е потребно популацијата да биде добро дефинирана, односно потребно е да се знае кои карактеристики треба да ги има еден елемент, за да биде вклучен во популацијата која е предмет на истражување. На тој начин ја конструираме и примерочната рамка. На пример, доколку одредено претпријатие кое се занимава со трговија на мало, има статус на неактивно претпријатие во периодот на истражување, тогаш треба да биде исклучено од примерочната рамка, затоа што не врши дејност. Од ова заклучуваме дека примерочната рамка треба да ги содржи сите потребни информации за елементите на популацијата, како што се име, презиме, шифра на дејност, пол, возраст, статус на вработување, и слично, доколку е возможно. [1]

Во минатото, кога сè уште не била толку развиена технологијата, се користел **метод на лотарија** за избор на елементи на примерокот. Овој метод се состоел во тоа што елементите на популацијата биле нумерирани со бројчиња од 1 до вкупниот број на елементи на популацијата, без повторување на ниту еден од броевите. Потоа, секој од тие бројчиња се запишувале на посебен лист хартија, се виткале ливчињата и се ставале во кутија или сад за мешање. Потоа се влечеле ливчиња од кутијата, сè додека не се извлечат онолку ливчиња, колку што е предвидениот број на елементи за примерокот. Доколку бројот при нумерацијата на елементите на популацијата се наоѓа во извлечените ливчиња, тогаш тој елемент од популацијата е вклучен во примерокот. Но овој метод е застарен и со денешната напредна технологија, оваа постапка се врши компјутерски со генерирање на случајна низа од броеви или на некој друг пософистициран начин.

При овој вид на примерок ја исклучуваме можноста за нарушување на непристрасноста и добиваме примерок кој добро ја претставува популацијата. Од друга страна пак, потешкотии можат да се појават во случај кога со избраните учесници во истражувањето е потешко да се стапи во контакт. За таа цел, потребно е ангажирање на повеќе средства за постигнување на посакуваниот ефект, особено кога се работи за поголема популација. Во одредени случаи се соочуваме со потешкотии при креирање на примерочната рамка, сакајќи да постигнеме целосен опфат. На пример, кога би сакале да спроведеме едно статистичко истражување и притоа да донесеме одлука дека истото ќе го спроведуваме преку интернет, на тој начин можеме да ги исфрлиме одредени потенцијални учесници во истражувањето кои не користат интернет, односно се наоѓаат во одредено географско подрачје во кое не е овозможена интернет врска. [1]

Слика 1. Приказ на прост случаен примерок ([5])

Систематски случаен примерок

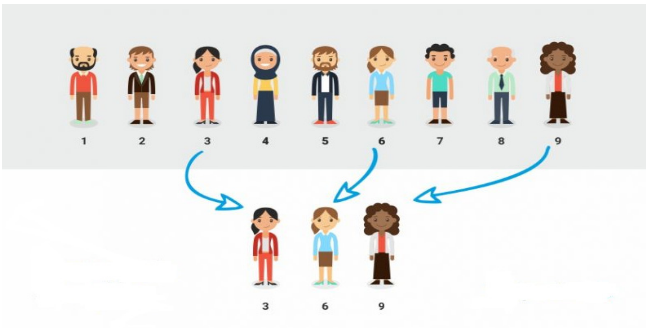
Систематскиот случаен примерок исто така се користи за хомогена популација. За разлика од простиот случаен примерок, овој вид на примерок се карактеризира со тоа што секој елемент од популацијата нема иста веројатност на избор. Во овој случај, елементите на примерокот ги избираме со т.н. **чекор на избор**. Чекорот на избор може да биде претставен во минути, редни броеви или зафатнина на простор.

На пример, елемент на примерокот е секој петти елемент од рамката, или елемент на примерокот се лица на одреден граничен премин така што времето поминато помеѓу едно и друго анкетирано лице е 15 минути. За овој вид на примерок, поволно е да биде формирана рамката за примерок, но и без неа може да биде спроведено истражувањето. Во истражување кое се спроведува на лица на граничен премин, во кои се користи систематски примерок, не е можно да се формира примерочната рамка, затоа што не ни е познато кои лица ќе поминат тој ден на тој граничен премин. Сепак, пред да се спроведе истражувањето, како и за сите примероци, така и за овој вид на примерок потребно е да се определи кои се карактеристиките кои ќе бидат предмет на истражување. Во продолжение, ќе го илустрираме методот за избор на систематски примерок. Нека големината на систематскиот случаен примерок е n. Нека

$$k=\begin{cases}\dfrac{N}{n}, \text{ако } \dfrac{N}{n}\in\mathbb{Z}\\ \left[\dfrac{N}{n}\right]+1, \text{ако } \dfrac{N}{n}\notin\mathbb{Z}\end{cases},$$

каде што N е бројот на елементи во популацијата, n бројот на елементи во примерокот, а со $\left[\frac{N}{n}\right]$ го означуваме најголемиот цел број помал од $\frac{N}{n}$. На случаен начин избираме еден цел број од интервалот $[1,k]$ кој го означуваме со R. Тогаш, во систематскиот случаен примерок влегуваат сите елементи од популацијата чиишто редни броеви согласно нашето нумерирање се во множеството

$$S=\{R+lk \mid l\in \mathbb{Z}\}. \text{ ([3])}$$



Слика 2. Приказ на систематски случаен примерок([5])

Кластер примерок

Подгрупите од популацијата кои природно се наметнуваат и ги групираат елементите на популацијата се нарекуваат **кластери**. Всушност, група од елементи кои припаѓаат на одредено географско подрачје се нарекува **кластер,** ([1],[2],[3]). Примерокот кој се состои од кластери се нарекува **кластер примерок**. Овој вид на примерок се користи кога елементите на популацијата се распространети на широко географско подрачје. Популацијата е поделена на подгрупи наречени кластери врз база на нивната географска распределба. На пример, популацијата во една држава при кластер примерок ја делиме на кластери кои се всушност градовите, популацијата во градовите ја делиме во кластери што се всушност општините, итн. Кластерите треба да бидат хомогени помеѓу себе согласно карактеристиките кои се предмет на истражување. Како и да е за примерокот да биде репрезентативен, мора да се запази хетерогеноста на популацијата. Тоа значи дека, доколку вршиме истражување и ги одбираме само големите градови, а ги изоставиме малите градови, тогаш примерокот нема да биде репрезентативен за популацијата. Да забележиме дека хомогеноста на кластерите, не значи дека е задолжително елементите на кластерот да се хомогени. Со други зборови, доколку популација се градовите, а кластери училиштата, не мора да значи дека секое училиште задоволува исти карактеристики. При спроведување на истражување со кластер примерок, најважно е да забележиме дека популацијата се дели на кластери. Изборот на примерокот се прави на ист начин како кај простиот случаен примерок или како кај систематскиот случаен примерок, со тоа што во случајов на случаен начин се избираат кластерите. Она по што кластер примерокот се разликува од останатите примероци, а воедно и она што е негова најзначајна карактеристика е тоа што сите елементи на кластерот без разлика дали станува збор за личности, домаќинства, училишта и слично, се анкетирани.

Како и останатите видови примероци, така и кластер примерокот си има свои предности и недостатоци. Затоа што популацијата е распространета на пошироко географско подрачје, кластер примерокот се користи за да се намалат трошоците за истражување. Исто така, потребно е помалку време и помали напори за негов избор, а воедно не е задолжително примерочната рамка да содржи информации за сите елементи на популацијата. Уште повеќе, наместо да се оди од едно на друго место за анкетирање на случајно избрани елементи од популацијата кои се наоѓаат на голема оддалеченост, се зема група елементи кои се наоѓаат во еден географски регион. Но, како недостаток на овој вид на примерок е тоа што подлежи на пристрасност и систематски грешки. Во некој случај при случаен избор на кластери, на пример училишта, може да се изберат само училиштата со поголем број на ученици. Со тоа ги отфрламе училиштата со помал број на ученици и резултатите добиени од истражувањето спроведено само со училиштата со поголем број на ученици, може да се разликуваат драстично од резултатите кога би биле вклучени и училиштата со помал број на ученици. Исто така, нехомогеноста на кластерите помеѓу себе, може да ја наруши репрезентативноста на примерокот.

Слика 3. Приказ на кластер примерок ([5])

Извори:

[1] С. Ѓоргиев, Теорија на примерок со посебен осврт кон стратифициран случаен примерок, ПМФ, Скопје, 2020

[2] A. Mohsin, *A Manual for Selecting Sampling Techniques in Research,* University of Karachi, Iqra Univeristy, 2016

[3] L. Sharon, *Samplinf Design and Analysis, Second edition (Advanced Series), State University, Arizona, 2010*

[4] Mc Combes, S. Sampling Methods | Types, Techniques & Examples, Dec 1, 2022, https://www.scribbr.com/methodology/sampling-methods/

[5] Question Pro, *https://www.questionpro.com/blog/probability-sampling/*

МЕТОДОЛОГИИ, ТЕХНИКИ И ТИПОВИ НА ТЕСТИРАЊЕ

Методологии за тестирање на софтвер се различни пристапи и начини да се осигура дека софтверската апликација е целосно тестирана. Софтверските методологии за тестирање опфаќа сè, од единица за тестирање (unit testing), поединечни модули, интеграција тестирање (integration testing), тестирање на безбедност, тестирање на перформансите итн.

Се издвојуваат следните методологии за тестирање на софтвер:

- **Статички метод на тестирање (STATIC TESTING METHOD):** Статичкиот метод на тестирање вклучува тестирање на програмскиот код и неговата целосна документација без да се користи програмата.
- **Динамички метод на тестирање (DYNAMIC TESTING METHOD):** Во динамичкиот метод на тестирње припаѓа работење со софтверот каде што се внесуваат влезни параметри и се проверуваат излезните параметри дали се очекуваните резултати на специфичните тестови кои можат да бидат рачно извршени или со автоматизиран процес. Овај метод се користи само во процесот на утврдување на софтверот.
- **Тестирање на црна кутија (BLACK BOX TESTING METHOD):** Метод на тестирање каде што тестерот нема никаква потреба од внатрешно познавање на апликацијата. Тестерот нема никаков пристап и предзнаење од кодот на апликацијата. Во овој метод припаѓа тестирање на корисничкиот интерфејс како и тестирање на апликацијата преку корисничкиот интерфејс со внесување на влезни параметри и очекување на излени параметри притоа без да знат како се обработени влезните параметри за да се добијат излезните.
- **Тестирање на бела кутија (WHITE BOX TESING METHOD):** Претставува детално истражување на внатрешната логика и структура на кодот. За да може тестерот да го користи “white box testing” методот, тестерот мора да поседува програмерски вештини за да може да го анализира и тестира програмерскиот код.
- **Тестирање на сива кутија (GREY BOX TESTING METHOD):** Овој метод на тестирање е комбинација од “black box” и “white box” методите со други зборови кажано, тестерот има ограничено познавање на внатрешната логика. Обично во “gray box” методот тестерот има пристап до базата на податоци.

Според “Сертификација на софтверски тестери во светот (Certifying Software Testers Worldwide – ISTQB) сертификацијата има 4 основни типови на тестови. Секој тип на тест може да има повеќе видови под тестови.

Типови на тестирање:

Функционално тестирање: Го игнорира внатрешниот механизам на системот и се фокусира на излезните параметри од секој влезен параметар и од секое извршување на системот. Овој тип на тестирање се користи за потврдување на бизнис барањата кои се опишани во документите за бизнис барањата. Функционалното тестирање припаѓа во “black box” тестирање и може да се користи во сите нивоа на тестирање исто така може да се изврши рачно или автоматизирано.

Некои типови на функционално тестирање се:

- Разумно тестирање (Sanity testing)
- Смог тестирање (Smoke testing)
- Истражувачко тестирање (Exploratory testing)

Non-functional testing е тестирање на софтверска апликација или систем каде што се тестираат неговите не-функционалните барања: начинот на кој системот работи, наместо конкретни однесувања на тој систем. На пример, перформанси на софтверот е широк термин кој вклучува многу специфични барања како сигурност и приспособливост итн.

Постојат повеќе видови на не-функционално тестирање кои само ќе ги набороиме, а дел од нив подетално ќе ги разработиме во вториот дел:

- Тестирање на доверливост - Reliability testing
- Тестирање на употребливост - Usability testing
- Тестирање на ефикасност - Efficiency testing
- Тестирање на одржливоста - Maintainability testing
- Тестирање на преносливост - Portability testing
- Стрес тестирање - Stress testing
- Тестирање на усогласеност - Compliance testing
- Тестирање за издржливост - Endurance testing
- Тестирање на перформанси и оптеретување - Performance and Load testing
- Тестирање за компатибилност - Compatibility testing
- Тестирање на безбедност - Security testing
- Тестирање на приспособливост - Scalability testing
- Тестирање на волумен - Volume testing
- Тестирање за обновување - Recovery testing
- Тестирање на интернационализација - Internationalization testing
- Тестирање на локализација - Localization testing

Структурно тестирање (STRUCTURAL TESTING): исто така е познато како сиво тестирање (gray box testing) каде што тестовите се добиени од познавањето на софтвер структурата или од внатрешната имплементација. Стуктурното тестирање може да се користи во сите нивоа на тестирање. Програмерите структурното тестирање го користат во тестирањето на компоненти (component testing) и во тестирање на интеграција на компоненти (component integration testing). Структурното тестирање исто така се користи и во Acceptance тестирањето за одобрување (Acceptance testing), но структурата е поразлична, фокусот е на логичката имплементација.

Регресионо тестирање и ре-тестирање :

- *Регресионо тестирање (regression testing):* Повторно извршување на тест сценаријата кои предходно биле извршени. Целта на регресијата е да се потврди дека после некоја промена во програмскиот код не предизвикале некоја грешка во апликацијата и дека апликацијата ги задоволува сите барања. Регресија тестовите се кандидат за автоматски тестови.
- *Ре-тестирање (re-testing):* Кога тестот е негативен, тестерот пријавува грешка и кога таа грешка ќе биде поправена тестерот повторно го проверува истиот тест за да потврди дали грешката е поправена. [8]

Петар Филиповски, Јулија Митреска
ООУ „Кузман Јосифовски-Питу, Кисела Вода, Скопје

ТЕОРЕМА НА ВИЛСОН

Во претходниот број пишувавме за теоремата на Ојлер и малата теорема на Ферма, па природно е во овој број да пишуваме за теоремата на Вилсон, со што би заокружиле една целина. Со помош на теоремата на Вилсон можеме да го одредиме остатокот кој се добива при делење на некој голем број со прост број.

Теорема 1 (Теорема на Вилсон). За секој прост број p, $p\mid(p-1)!+1$, т.е. $(p-1)!\equiv -1(\bmod p)$.

Доказ. За $p=2$ и $p=3$ лесно се проверува дека теоремата важи. Нека $p>3$ е прост број. Од $1\equiv 1(\bmod p)$ и $(p-1)\equiv -1(\bmod p)$, добиваме дека $1\cdot(p-1)\equiv -1(\bmod p)$. За секој j, $2\le j\le p-2$ важи $НЗД(j,p)=1$, па постои еден и само еден $i\in\mathbb{N}$ таков што $j\cdot i\equiv 1(\bmod p)$ и $0\le i\le p-1$. Очигледно $i\notin\{0,1,p-1\}$, па затоа за секој j, $2\le j\le p-2$ постои еден и само еден i таков што $j\cdot i\equiv 1(\bmod p)$ и притоа $2\le i\le p-2$. Имаме $j\ne i$, бидејќи за j, $2\le j\le p-2$ добиваме

$$НЗД(j-1,p)=НЗД(j+1,p)=1$$

и оттука

$$НЗД(j^2-1,p)=НЗД((j-1)(j+1),p)=1.$$

Од друга страна имаме $j^2-1\equiv 0(\bmod p)$, што не е можно. Значи, броевите $2,3,...,p-2$ ги поделивме на $\frac{p-3}{2}$ дисјунткни двоелементни множества $\{i,j\}$ за кои важи $j\cdot i\equiv 1(\bmod p)$. Ако ги помножиме овие кнгруенции добиваме $2\cdot 3\cdot ...\cdot(p-2)\equiv 1(\bmod p)$. Последната конгруенција множејќи ја со конгруенцијата $1\cdot(p-1)\equiv -1(\bmod p)$ добиваме $(p-1)!\equiv -1(\bmod p)$.

Забелешка. Важи и обратното, т.е. ако $(n-1)!\equiv -1(\bmod n)$ за природен број $n\ge 2$, тогаш n е прост. Нека важи $(n-1)!\equiv -1(\bmod n)$. Да претпоставиме спротивно, дека n не е прост број. Тогаш $(n-1)!\equiv 0(\bmod n)$, па $(n-1)!+1\equiv 1(\bmod n)$, што е во контрадикција со претпоставката $(n-1)!\equiv -1(\bmod n)$. Следува n е прост број.

Задача 1. Нека p е прост број. Докажи дека $p^3\mid(p!)^2-p^2$.

Решение. Од $(p!)^2-p^2=(p!-p)(p!+p)=p^2((p-1)!-1)((p-1)!+1)$ и од теоремана Вилсон, $((p-1)!+1)\equiv 0(\bmod p)$, следува $p^3\mid(p!)^2-p^2$.

Задача 2. Нека p е непарен прост број. Докажи дека остатокот што се добива при делење на $(p-1)!$ со $p(p-1)$ е $(p-1)$.

Решение. Од теоремата на Вилсон имаме, $(p-1)!\equiv -1(\bmod p)$, односно $(p-1)!\equiv p-1(\bmod p)$, т.е. $(p-1)!-(p-1)\equiv 0(\bmod p)$. Од друга страна, $(p-1)!-(p-1)\equiv 0(\bmod p-1)$. Бидејќи $НЗД(p,p-1)=1$ имаме

$$(p-1)!-(p-1)\equiv 0(\bmod p(p-1)),\text{ т.е. } (p-1)!\equiv (p-1)(\bmod p(p-1)).$$

Задача 3. Одреди го остатокот кој се добива при делење на бројот $97!$ со 101.

Решение. Бројот 101 е прост број, па од теоремата на Вилсон имаме

$$100!\equiv -1(\bmod 101),\text{ т.е. } 100\cdot 99\cdot 98\cdot 97!\equiv -1(\bmod 101).$$

Од друга страна, знаеме дека $100\equiv -1(\bmod 101)$, $99\equiv -2(\bmod 101)$ и $98\equiv -3(\bmod 101)$, па $100\cdot 99\cdot 98\equiv -6(\bmod 101)$.

Следува $6\cdot 97!\equiv 1(\bmod 101)$. Треба да најдеме множител на 101 таков што, со додавање 1 на бројот, бројот ќе биди делив со 6. Бидејќи $102=101+1=6\cdot 17$, добиваме $6\cdot 97!\equiv (6\cdot 17)(\bmod 101)$. Делејќи ја со 6 последната конгруенција, добиваме $97!\equiv 17(\bmod 101)$. Следува остатокот кој се добива при делење на бројот $97!$ со 101 е 17.

Задача 4. Нека p е непарен прост број. Докажи дека за секој природен број $n<p$,

$$(n-1)!(p-n)!\equiv (-1)^n(\bmod p).$$

Решение. Според теоремата на Вилсон имаме $(p-1)!\equiv -1(\bmod p)$, па важи

$$(p-1)(p-2)\cdot\ldots\cdot(n+1)n(n-1)!\equiv -1(\bmod p).$$

Последното е еквивалентно со

$$(p-1)(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-(p-n-1))(p-(p-n))(n-1)!\equiv -1(\bmod p).$$

Бидејќи $p-k\equiv -k(\bmod p)$, за $k=1,2,\ldots,p-n$, имаме

$$(-1)^{p-n}(p-n)!(n-1)!\equiv -1(\bmod p),$$

од каде заради условот p е непарен прост број, следува тврдењето.

Задача 5. Нека p е непарен прост број. Докажи дека

$$(p-3)!\equiv \frac{p-1}{2}(\bmod p).$$

Решение. Користејќи ја теоремата на Вилсон имаме $(p-1)!\equiv -1(\bmod p)$. Бидејќи $(p-1)\equiv -1(\bmod p)$, добиваме $(p-2)!\equiv 1(\bmod p)$. Слично, од $(p-2)\equiv -2(\bmod p)$ следува $(p-2)!=(p-2)(p-3)!\equiv -2(p-3)!(\bmod p)$, т.е. $-2(p-3)!\equiv 1(\bmod p)$.
Од последното добиваме

$$2(p-3)!\equiv -1\equiv p-1(\bmod p).$$

Бидејќи p е непарен број, следува $p-1$ е парен број, па е делив со 2. Конечно добиваме

$$(p-3)!\equiv \frac{p-1}{2}(\bmod p).$$

Задача 6. Нека p е прост број. Докажи дека $(2(p-1)!+1)\equiv 0(\bmod p)$.

Доказ. Од теоремата на Вилсон имаме $(p-1)!\equiv -1(\bmod p)$, односно

$$(p-1)(p-2)(p-3)!\equiv -1(\bmod p) \qquad (*)$$

Од друга страна знаеме дека $(p-1)\equiv -1(\bmod p)$, $(p-2)\equiv -2(\bmod p)$, односно $(p-1)(p-2)\equiv 2(\bmod p)$. Последната конгруенција можеме да ја запишеме како $(p-1)(p-2)=kp+2$, за некој природен број k.

Последното равенство заменувајќи го во $(*)$, добиваме $(kp+2)(p-3)!\equiv -1(\bmod p)$, т.е. $(kp(p-3)!+2(p-3)!)\equiv -1(\bmod p)$.

Бидејќи $kp(p-3)!\equiv 0(\bmod p)$, следува $2(p-3)!\equiv -1(\bmod p)$, односно

$$(2(p-1)!+1)\equiv 0(\bmod p).$$

Задача 7. Нека p е непарен прост број. Докажи дека

а) $1^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot(p-2)^2\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}}(\bmod p)$

б) $2^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot(p-1)^2\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}}(\bmod p)$

Доказ. а) Според теоремата на Вилсон имаме $(p-1)!\equiv -1(\bmod p)$, односно

$$(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(p-2))(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(p-1))\equiv -1(\bmod p) \quad (*)$$

Ќе го користиме следниот резултат $n\equiv -(p-n)(\bmod p)$.

Заменувајќи за $n=2,4,\ldots,p-1$ во последната конгруенција и множејќи ги сите ($\frac{p-1}{2}$) конгруенции добиваме

$$2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(p-1)\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(p-2))(\bmod p) \qquad (**)$$

Со замена на $(**)$ во $(*)$ имаме

$$(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(p-2))(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(p-1))\equiv(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(p-2))(-1)^{\frac{p-1}{2}}(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(p-2))$$

$$\equiv 1^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot(p-2)^2(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1(\bmod p),$$

односно $1^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot(p-2)^2(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1(\bmod p)$. Последната конгруенција ја множиме со $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ и добиваме $1^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot(p-2)^2\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}}(\bmod p)$.

б) Се остава на читателот.

Задача 8. Нека a и n се природни броеви такви што $n\geq 2$ и $НЗД(a,n)=1$. Докажи дека

$$a^{n-1}+(n-1)!\equiv 0(\bmod n)$$

ако и само ако n е прост број.

Решение. Ако n е прост број, тогаш тврдењето следува директно од малата теорема на Ферма и од теоремата на Вилсон.

Обратно, да претпоставиме дека $n=n_1\cdot n_2$, каде што $n_1\geq n_2\geq 2$. Од $n\mid a^{n-1}+(n-1)!$

имаме $n_1 \left| a^{n-1} + (n-1)! \right.$, па $n_1 \left| a^{n-1} \right.$, а тоа е во контрадикција со претпоставката $НЗД\,(a,n)=1$. Следува тврдењето.

Задача 9. Ако p е непарен прост број, докажи дека за секој природен број $n<p$ важи $(n-1)!(p-n)! \equiv (-1)^n \pmod p$.

Решение. Од теоремата на Вилсон имаме $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$, па следува

$$(n-1)!\,n(n+1)\dots(p-1) \equiv -1 \pmod p.$$

Последното е еквивалентно со

$$(n-1)!\big(p-(p-n)\big)\big(p-(p-n-1)\big)\dots(p-1) \equiv -1 \pmod p.$$

Бидејќи $p-k \equiv -k \pmod p$, за $k=1,2,\dots,p-n$, имаме

$$(n-1)!(-1)^{p-n}(p-n)! \equiv -1 \pmod p.$$

Бидејќи p е непарен прост број, следува тврдењето.

Задача 10. Докажи дека за секој прост број $p>5$, $\dfrac{(p-1)!+(p+1)}{p(p+1)}$ е природен број.

Решение. Бидејќи p е прост број, од теоремата на Вилсон имаме $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$, т.е. $\dfrac{(p-1)!+1}{p} \in \mathbb{N}$. Нека $x=\dfrac{(p-1)!+1}{p}$. Следува

$$x=\frac{(p-1)!(p+1)+(p+1)}{p(p+1)}=\frac{p(p-1)!}{p(p+1)}+\frac{(p-1)!+(p+1)}{p(p+1)},$$

т.е.

$$\frac{(p-1)!+(p+1)}{p(p+1)}=x-\frac{(p-1)!}{(p+1)}.$$

Од последното доволно е да докажиме дека $\dfrac{(p-1)!}{(p+1)}$ е природен број. Бидејќи p е прост број и $НЗД\,(p,p+1)=1$, добиваме $p+1=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$, каде $p_i^{\alpha_i} \le p-1$ за секој $i \in \{1,2,\dots,n\}$, па $p+1 \left| (p-1)! \right.$, односно $\dfrac{(p-1)!+(p+1)}{p(p+1)}=x-\dfrac{(p-1)!}{(p+1)}$ е природен број. Следува $\dfrac{(p-1)!+(p+1)}{p(p+1)}$ е природен број.

Извори:

[1] Владимир Мићић, Зоран Каделбург, Душан Ђукић, Увод у теорију бројева, Београд, 2013
[2] Бојан Башић, Теорија бројева збирка решених задатака, Београд, Нови Сад, 2019
[3] Ellina Grigorieva, Methods of Solving Number Theory Problems, Birkhäuser, 2018
[4] Titu Andreescu, Dorin Andrica, Number theory Structures, examples, and problems-Birkhäuser Boston (2009)
[5] Д. Димовски, К. Тренчевски, Р. Малчески, Б. Јосифовски, Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје 1993

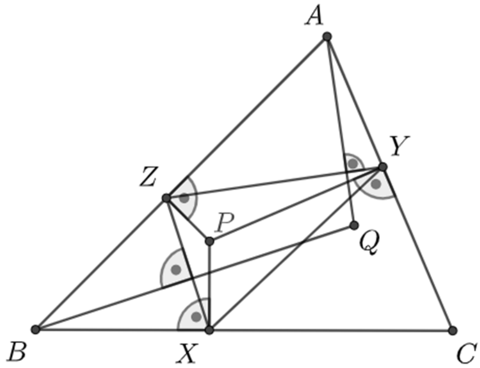
Мирко Петрушевски
Петар Филиповски

ИЗОГОНАЛНИ ПАРОВИ ПРАВИ И ТОЧКИ

(продолжува од минатиот број)

Пример 16. Нека P е точка од внатрешноста на $\triangle ABC$, и $Q = isog_{\triangle ABC}(P)$. Тогаш $\frac{AP \cdot AQ}{AB \cdot AC} + \frac{BP \cdot BQ}{BA \cdot BC} + \frac{CP \cdot CQ}{CA \cdot CB} = 1$.

Решение. Да забележиме дека и Q е во внатрешноста на $\triangle ABC$. Нека X, Y и Z се ортогоналните проекции на точката P врз страните BC, CA и AB, соодветно.



Точките P, Y, Z и A лежат на кружница со дијаметар AP, па од теоремата за синусите имаме $YZ = AP \cdot \sin A$. Од Теорема 13, $YZ \perp AQ$. Оттука

$$P_{AYQZ} = \frac{AQ \cdot YZ}{2} = \frac{AQ \cdot AP \cdot \sin A}{2} = \frac{AP \cdot AQ}{AB \cdot AC} \cdot P_{ABC}.$$

Аналогно,

$$P_{BXQZ} = \frac{BP \cdot BQ}{BC \cdot BA} \cdot P_{ABC} \text{ и } P_{CXQY} = \frac{CP \cdot CQ}{CA \cdot CB} \cdot P_{ABC}.$$

Преостанува да забележиме дека $P_{ABC} = P_{AYQZ} + P_{BXQZ} + P_{CXQY}$. ◊

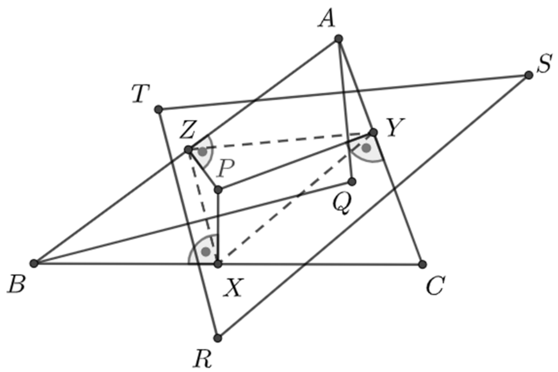
Да се потсетиме дека за секој $\triangle ABC$ важи $O = isog_{\triangle ABC}(H)$, каде H е ортоцентарот и O е центарот на опишаната кружница (ABC). Добро познато е и дека сликите на ортоцентарот H при осните симетрии σ_{AB}, σ_{BC} и σ_{CA} лежат на кружницата (ABC). Овие два факти можеме да ги искажеме и на следниов начин:
Точката $isog_{\triangle ABC}(H)$ е центар на опишаната кружница околу $\triangle RST$, каде $R = \sigma_{BC}(H)$, $S = \sigma_{CA}(H)$ и $T = \sigma_{AB}(H)$.
Всушност, ова е особина на секој изогонален пар точки.

Теорема 17. Нека P е точка од рамнината на $\triangle ABC$ и нека R, S и T се симетричните точки на точката P во однос на страните BC, CA и AB, соодветно. Тогаш $isog_{\triangle ABC}(P)$ е центарот на кружницата (RST).

Доказ. Да ги означиме со X, Y и Z ортогоналните проекции на P врз страните BC, CA и AB, соодветно. Така $\triangle RST$ е слика на $\triangle XYZ$ при хомотетија $\chi_{P,2}$. Следствено, $XY \parallel RS$, $YZ \parallel ST$ и $ZX \parallel TR$. Нека $Q = isog_{\triangle ABC}(P)$. Имајќи ја предвид Теорема 13, заклучуваме дека

$$AQ \perp ST,\ BQ \perp TR \text{ и } CQ \perp RS\ . \qquad (1)$$

Сакаме да покажеме дека: AQ е симетрала на ST, BQ е симетрала на TR и CQ е симетрала на RS. Да забележиме дека $AP = AS$ (бидејќи $S = \sigma_{AC}(P)$) и $AP = AT$ (бидејќи $T = \sigma_{AB}(P)$). Оттука добиваме $AS = AT$. Од (1) следува дека AQ е симетрала на ST. Аналогно за BQ и CQ. □



Вежба 18. Нека P е точка од внатрешноста на $\triangle ABC$ и $\triangle P_A P_B P_C$ е педалниот триаголник на точката P во однос на $\triangle ABC$. Ако $P_A P_B \perp P_A P_C$, тогаш $isog_{\triangle ABC}(P)$ е ортоцентар на $\triangle AP_B P_C$.

Сугестија. Искористете ги Теорема 17 и теоремата на Талес.

Еден класичен резултат во Евклидовата геометрија на триаголник е т.н. **Теорема за девет точки**: Подножјата на висините, средините на страните и средините на отсечките кои ги поврзуваат темињата со ортоцентарот лежат на една кружница (наречена *Ојлерова кружница*). Притоа центарот на Ојлеровата кружница е средишната точка на отсечката HO. Имајќи предвид дека точките H и O формираат изогонален пар во однос на $\triangle ABC$, првите 6/9 од теоремата за девет точки може да се искажат вака: Ортогоналните проекции на H и $isog_{\triangle ABC}(H)$ врз страните на $\triangle ABC$ лежат на иста кружница чиј центар е средишната точка на отсечката која ги поврзува H и $isog_{\triangle ABC}(H)$. Всушност ова е особина на секој изогонален пар точки.

Теорема 19. Нека P е точка од рамнината на $\triangle ABC$ и $Q = isog_{\triangle ABC}(P)$. Нека $P_A P_B P_C$ и $Q_A Q_B Q_C$ се педалните триаголници на P и Q во однос на $\triangle ABC$. Тогаш точките P_A, P_B, P_C, Q_A, Q_B и Q_C лежат на кружница со центар во средишната точка на отсечката PQ.

Доказ. Нека R, S и T се симетричните точки на точката P во однос на страните BC, CA и AB, соодветно. Слично, нека R', S' и T' се симетричните точки на точката Q во однос на страните BC, CA и AB, соодветно. Нека M е средишната точка на отсечката PQ.

Да забележиме дека:

MP_A е средна линија во $\triangle PRQ$; оттука $MP_A = \dfrac{QR}{2}$;

MP_B е средна линија во $\triangle PQS$; оттука $MP_B = \dfrac{QS}{2}$;

MP_C е средна линија во $\triangle PQT$; оттука $MP_C = \dfrac{QT}{2}$.

Според Теорема 17, Q е центар на кружницата (RST). Со други зборови,

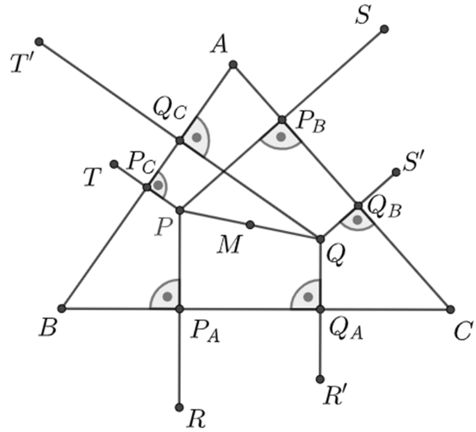
$$QR = QS = QT.$$

Следствено,

$$MP_A = MP_B = MP_C.$$

Аналогно,

$$MQ_A = MQ_B = MQ_C.$$

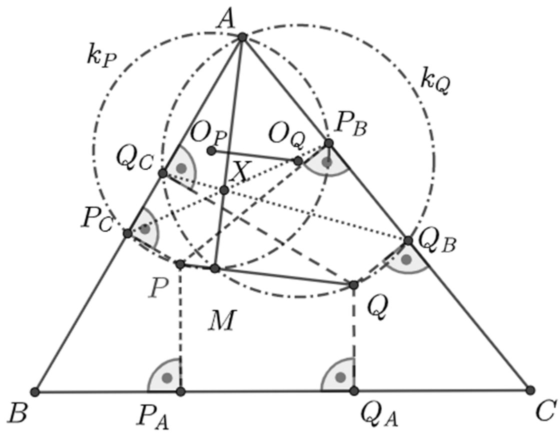


За да го комплетираме доказот доволно е да покажеме дека $MP_A = MQ_A$. Последното равенство е последица на тоа што M е средишната точка на отсечката PQ и притоа $PP_A \perp P_AQ_A$ и $QQ_A \perp P_AQ_A$. Имено, од последните две формули, M лежи на симетралата на отсечката P_AQ_A. □

Оваа статија ја приврщуваме со уште еден пример.

Пример 20. Нека P и Q се изогонален пар точки во однос на $\triangle ABC$, и нека нивните педални триаголници се $P_AP_BP_C$ и $Q_AQ_BQ_C$, соодветно. Нека $X = P_BP_C \cap Q_BQ_C$. Докажете дека $AX \perp PQ$.

Решение. Да забележиме дека точките A, P_C, P и P_B лежат на кружница k_P со дијаметар AP. Нека O_P е центарот на кружницата k_P. Слично, точките A, Q_C, Q и Q_B лежат на кружница k_Q со дијаметар AQ. Нека O_Q е центарот на кружницата k_Q.



Имајќи ја предвид Теорема 19, $\deg_{k_P}(X) = \deg_{k_Q}(X)$.

Следствено, AX е радикална оска на кружниците k_P и k_Q. Оттука $AX \perp O_PO_Q$. Од друга страна, $\chi_{A,2}(O_P) = P$ и $\chi_{A,2}(O_Q) = Q$. Значи $O_PO_Q \parallel PQ$. Заклучуваме дека $AX \perp PQ$. ◊

ЗАДАЧИ ОД УЧИЛНИЦАТА СИГМА 128

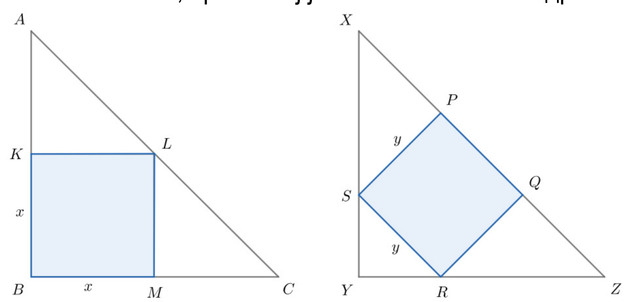
Ги покануваме учениците да испраќаат решенија на задачи од оваа рубрика. Решенијата да бидат подготвени во **MS Word**. Испратете ги на електронската адреса на списанието

sigma.spisanie.smm@gmail.com

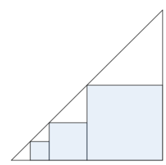
со предмет „Задачи од Училницата". Ве молиме решенијата испратете ги во еден **WORD** документ (doc или docx формат). Со решенијата испратете: име и презиме, година, училиште и град. **Краен рок за испраќање на решенија е 30 април 2023.** Некои од решенијата ќе бидат објавени во наредниот број на Сигма и ќе бидат објавени имињата на сите ученици кои точно ја решиле задачата, а најуспешните решавачи во текот на учебната година ќе бидат симболично наградени.

Прва година

1. Триаголниците ABC и XYZ (на цртежот) се складни правоаголни рамнокраки триаголници. Во нив се впишани квадратите $KLMB$ и $PQRS$ соодветно. Ако плоштината на квадратот $KLMB$ е 189 cm^2, пресметај ја плоштината на квадратот $PQRS$.



2. Три квадрати се впишани во правоаголен триаголник (како на сликата десно). Најди ја должината на страната на средниот квадрат, ако должината на страната на најмалиот квадрат е 1 cm, а должината на страната на најголемиот квадрат е 4 cm.



3. Одреди ги сите реални броеви x за кои бројот $a = \dfrac{2x+1}{x^2+2x+3}$ е цел број.

4. Реши ја равенката $\left|x-2022\right| + \left[x+2021\right] = 4043$ во множеството реални броеви.

Забелешка: Со ознаката $[x]$ означен е целиот дел од бројот x, односно $\left[x\right] = k, k \in \mathbb{Z} \;\;\Leftrightarrow\;\; k \leq x < k+1.$

Втора година

1. Ако z_1, z_2 се комплексни броеви и c е позитивен реален број, докажи дека важи

$$\left|z_1 + z_2\right|^2 \leq \left(1+c\right)\left|z_1\right|^2 + \left(1+\frac{1}{c}\right)\left|z_2\right|^2.$$

2. Нека x, y, z се произволни реални броеви за кои важи $x^2 + y^2 + z^2 \leq 27$ и нека $P = x + y + z + xy + yz + xz.$ Најди ги вредностите на броевите x, y, z за кои изразот P достигнува максимална вредност.

3. Реши го системот $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{5}{y} - \frac{1}{z} = 0 \\ x - yz = 0 \end{cases}$ за $x \in \mathbb{R}$ и y, z прости броеви.

4. Во триаголникот $\triangle ABC$, $\operatorname{tg}\left(\measuredangle CAB\right) = \frac{22}{7}$ и висината спуштена од темето A кон страната BC ја дели страната BC на две отсечки со должини 3 и 17. Одреди ја плоштината на $\triangle ABC$.

Трета година

1. Докажи дека за било кој природен број $n > 5$ важи $3^{\frac{n}{2}} > 11\sqrt{n}.$

2. Нека p е прост број и k е природен број помал од $p.$ Докажи дека бројот $\binom{p}{k}$ е содржател на бројот $p.$

3. На колку различни начини можат да се постават 3 шаховски фигури топ на шаховска табла (8x8), така што топовите меѓусебно не се напаѓаат?
Забелешка. Топот напаѓа исклучиво по хоризонтала и по вертикала.

4. Три од страните на еден трапез лежат на правите $l_1 : 4x + 3y - 12 = 0,$ $l_2 : x + 3y - 3 = 0$ и $l_3 : x = 0,$ а точката $M\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ е теме на тој трапез. Одреди ја најмалата можна плоштина која може да ја има таков трапез.

Четврта година

1. Нека a и b се два корени на полиномот $x^4 + x^3 - 1$. Докажи дека производот ab е корен на полиномот $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$.

2. Нека за броевите $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ важи $\left(ab + bc + ca\right)^3 = abc\left(a + b + c\right)^3$. Докажи дека a, b, c се членови на геометриска прогресија.

3. Реши го системот $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 34 \end{cases}$.

4. Нека простиот број p е од облик $3k + 2$ и истиот е делител на бројот $a^2 + ab + b^2$ за некои природни броеви a и b. Докажи дека p е делител на броевите a и b.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИ ОД УЧИЛНИЦАТА СИГМА 127

Прва година

1. Нека a и b се цели броеви такви што во развиениот облик на полиномот $(x^2+ax+b)^3$ коефициентот пред x^4 е 99, а коефициентот пред x е 162. Најди ги вредностите на броевите a и b.

Решение. Дадениот израз го запишуваме во развиен облик:

$$(x^2+ax+b)^3=(x^2)^3+3(x^2)^2(ax+b)+3x^2(ax+b)^2+(ax+b)^3=$$
$$=x^6+3x^4(ax+b)+3x^2(a^2x^2+2axb+b^2)+a^3x^3+3a^2x^2b+3axb^2+b^3$$
$$=x^6+3ax^5+3bx^4+3a^2x^4+6abx^3+3b^2x^2+a^3x^3+3a^2bx^2+3ab^2x+b^3=$$
$$=x^6+3ax^5+(3b+3a^2)x^4+(6ab+a^3)x^3+(3b^2+3a^2b)x^2+3ab^2x+b^3.$$

Коефициентот пред x^4 е $3b+3a^2$, а коефициентот пред x е $3ab^2$. Од условите на задачата имаме дека $3b+3a^2=99$ и $3ab^2=162$, односно $b+a^2=33$ и $ab^2=54.$ Десните страни на двете равенства се деливи со 3, па затоа мора a и b да бидат деливи со 3 (обиди се да одговориш зошто). Сега, за $a=3m$ и $b=3n$, каде што m и n се цели броеви, со замена во равенствата добиваме $3n+9m^2=33$ и $27mn^2=54$, односно $n+3m^2=11$ и $mn^2=2$. Имајќи предвид дека $n^2>0$, од $mn^2=2$ следува дека $m=1$ и $n^2=2$, што не е можно (n е цел број), или $m=2$ и $n^2=1$. Оттука $n=-1$ или $n=1$. Но, равенството $n+3m^2=11$ го задоволува само бројот $n=-1$. Следува дека бараните броеви се $a=3\cdot 2=6$ и $b=3\cdot(-1)=-3$.

Задачата ја решила Калина Китанова, ученичка во прва година, во СУГС Гимназија „Орце Николов“ – Скопје.

2. Нека a и b се реални броеви за кои важи $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{5}{2}$ и $a-b=\frac{3}{2}$. Најди ги сите можни вредности на изразот $A=a^2+2ab+b^2+2a^2b+2ab^2+a^2b^2$.

Решение. Со квадрирање на втората равенка добиваме $a^2-2ab+b^2=\frac{9}{4}$, односно $a^2+b^2=\frac{9}{4}+2ab.$ Заменуваме во првото равенство $\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{5}{2}$ и добиваме $\frac{\frac{9}{4}+2ab}{ab}=\frac{5}{2}$, од каде $ab=\frac{9}{2}$. Ако пак на двете страни на равенството $a^2-2ab+b^2=\frac{9}{4}$ додадеме $4ab$, имаме $(a+b)^2=\frac{9}{4}+4ab$. За $ab=\frac{9}{2}$ добиваме $(a+b)^2=\frac{81}{4}$, односно $a+b=\frac{9}{2}$ или $a+b=-\frac{9}{2}$.

Сега дадениот израз го запишуваме во облик

$$A = a^2 + 2ab + b^2 + 2a^2b + 2ab^2 + a^2b^2 = (a+b)^2 + 2ab(a+b) + (ab)^2$$
$$= [(a+b)+ab]^2 .$$

За $a+b=\frac{9}{2}$ и $ab=\frac{9}{2}$ добиваме дека $A=\left(\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\right)^2 = 81$. За $a+b=-\frac{9}{2}$ и $ab=\frac{9}{2}$ добиваме дека $A=\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{2}\right)^2 = 0$. Значи можните вредности на изразот се 81 и 0.

3. Внатрешните агли на конвексен многуаголник формираат аритметичка низа со разлика 4°. Одреди го бројот на страни на многуаголникот, ако неговиот најголем внатрешен агол е 172°.

Забелешка. Искористете дека внатрешните агли на многуаголникот, почнувајќи од најголемиот, можат да се подредат во опаѓачка низа во која секој следен член е за 4° помал од претходниот.

Решение. Нека n е бројот на страни на конвексниот многуаголник. Опаѓачката низа формирана од нумеричките вредности на големините на аглите е

$$172\,,\ 168\,,\ 164\,,\ 160\,, ...,\ 172-4(n-1)\,.$$

Збирот на аглите во дадениот многуаголник е

$$172+168+164+160+.....+172-4(n-1)=$$
$$=172+172-4\cdot 1+172-4\cdot 2+172-4\cdot 3+.....+172-4(n-1)=$$
$$=172\cdot n-4\cdot(1+2+3+.....+(n-1))=$$
$$=172\cdot n-4\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}=172\cdot n-2\cdot(n-1)\cdot n$$

Од друга страна, збирот на внатрешните агли во многуаголник со n страни изнесува $180^\circ\cdot(n-2)$. Изедначувајќи ги добиените збирови, добиваме равенка

$$172\cdot n-2\cdot(n-1)\cdot n=180\cdot(n-2)\,.$$

Имаме $174\cdot n-2\cdot n^2=180\cdot n-360$, односно $2\cdot n^2+6\cdot n-360=0$. По кратењето со 2 добиваме израз $n^2+3\cdot n-180=0$, кој поинаку може да се запише во облик $n^2+15\cdot n-12n-180=0$, а со влечење на множители пред заграда, ова се сведува на $(n-12)\cdot(n+15)=0$. Оттука, $n-12=0$ или $n+15=0$, т.е. $n=12$ или $n=-15$. Очигледно дека $n=-15$ не е решение, па следува дека многуаголникот има $n=12$ страни (додекагон).

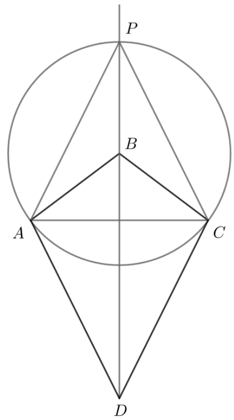
Задачата ја решил Андреј Стефановски, ученик во прва година во ДСУ Математичко – информатичка гимназија, од Скопје.

4. Нека $ADCB$ е конвексен четириаголник за кој $\measuredangle CBD = 2\cdot\measuredangle ADB$, $\measuredangle ABD = 2\cdot\measuredangle CDB$ и $\overline{AB}=\overline{CB}$. Докажи дека $\overline{AD}=\overline{CD}$.

Решение: Ја продолжуваме DB до точка P, која се добива како пресек на DB и кружницата која минува низ A и C и има центар во точката B. Тогаш

$$\angle CPD=\frac{1}{2}\cdot\angle CBD=\angle ADB \quad \text{и} \quad \angle APD=\frac{1}{2}\cdot\angle ABD=\angle CDB\,.$$

Значи четириаголникот $APCD$ е паралелограм (зошто?). Правата PD е симетрала на AC, па правата BD е симетрала на аголот ABC во рамнокракиот триаголник ABC. Имаме дека $\angle ADB = \frac{1}{2} \cdot \angle CBD = \frac{1}{2} \cdot \angle ABD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \angle CDB = \angle CDB$, па DB е симетрала на $\angle ADC$. Бидејќи DB е симетрала на основата на ΔADC, следува дека тој е рамнокрак, т.е. $\overline{AD} = \overline{CD}$.



Втора година

1. Дадени се функциите $f(x) = 2x + 1$ и $g(f(x)) = 4x^2 + 1$. Најди ја функцијата $g(x)$.

Решение. Ќе ги искористиме дефинициите на функциите $f(x)$ и $g(f(x))$ за да ја најдеме функцијата $g(x)$. Имајќи предвид дека $f(x)$ е линеарна функција, а $g(f(x))$ е квадратна функција, следува дека $g(x)$ е исто така квадратна функција. Од $f(x) = 2x + 1$ имаме $[f(x)]^2 = 4x^2 + 4x + 1$. Но функцијата $g(f(x))$ нема член кој содржи x, па затоа одземаме $2f(x)$ од $[f(x)]^2$ и добиваме $[f(x)]^2 - 2f(x) = 4x^2 - 1$. Сега, за да го добиеме изразот $g(f(x)) = 4x^2 + 1$ потребно е на последниот израз да додадеме 2. Со тоа добиваме $[f(x)]^2 - 2f(x) + 2 = 4x^2 + 1$.

Конечно, $[f(x)]^2 - 2f(x) + 2 = g(f(x))$, па за функцијата $g(x)$ го добиваме изразот $g(x) = x^2 - 2x + 2$.

2. Најди ги сите вредности на реалните броеви a и b за кои неравенството $|2x^2 + ax + b| \le 1$ важи за секој реален број $x \in [-1,1]$.

Решение. Од дадената неравенка добиваме дека $-1 \le 2x^2 + ax + b \le 1$. Бидејќи треба оваа неравенка да е точна за секој реален број $x \in [-1,1]$ следува дека истата е точна и за $x=-1$, $x=0$ и $x=1$. Притоа:

(i) Ако $x=-1$ тогаш $-3 \le b-a \le -1$.

(ii) Ако $x=0$ тогаш $-1 \le b \le 1$.

(iii) Ако $x=1$ тогаш $-3 \le a+b \le -1$.

Со собирање на (i) и (iii) добиваме

(iv) $-3 \le b \le -1$.

Од (ii) и (iv) добиваме $b=-1$. Со замена на $b=-1$ во (i) и (iii) добиваме соодветно $-2 \le -a \le 0$ односно $-2 \le a \le 0$. Конечно, следува $a=0$ и $b=-1$.

3. Најди ја должината на интервалот на решенијата на неравенката $(x+6)\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2 \ge x^2$.

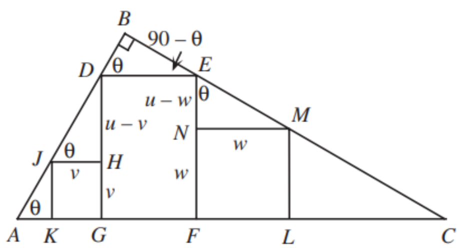
Решение. Јасно е дека $x \ge -1$ (деф. област). Ако ставаме смена $x+1=y$ $(y \ge 0)$, тогаш $x=y-1$ и со замена добиваме еквивалентни неравенки:

$$(y+5)\left(\sqrt{y}-1\right)^2 \ge (y-1)^2 \iff (y+5)\left(\sqrt{y}-1\right)^2 \ge \left[\left(\sqrt{y}-1\right)\left(\left(\sqrt{y}+1\right)\right)\right]^2.$$

Равенството е исполнето за $y=1$. Ако $y \ne 1$, може да скратиме и неравенката се сведува на $y+5 \ge \left(\sqrt{y}+1\right)^2 \iff y+5 \ge y+2\sqrt{y}+1 \iff y \le 4 \iff x \le 3$.

Конечно добиваме $-1 \le x \le 3$, па должината на интервалот на решенијата на дадената неравенка изнесува 4.

4. Во правоаголниот триаголник ABC, со прав агол во темето B, впишан е правоаголник $DGFE$ како што е покажано на цртежот. Квадратите $JKGH$ и $NFLM$ се впишани во триаголниците AGD и FCE соодветно. Ако страната на квадратот $JKGH$ е v, страната на $NFLM$ е w и ако $\overline{DG}=u$, докажи дека $u=v+w$.



Решение. Нека $\angle BAC=\theta$. Добиваме $\angle DJH=\angle BDE=\theta$ како агли со заемно паралелни краци. Од тука се добива $\angle BED=90^\circ-\theta$, а со тоа и $\angle NEM=\theta$. Од условот на задачата $\overline{DG}=u$ и $\overline{HG}=v$, па тогаш $\overline{DH}=u-v$. Слично $\overline{EN}=u-w$. Од триаголниците JHD и NME гледаме дека $tg\,\theta=\dfrac{u-v}{v}$, односно $tg\,\theta=\dfrac{w}{u-w}$, од каде добиваме

$$\frac{u-v}{v}=\frac{w}{u-w} \iff (u-v)(u-w)=vw \iff u(u-v-w)=0.$$

Бидејќи $u \ne 0$, следува $u=v+w$.

Забелешка: Ако $u=0$, тогаш страната DG на правоаголникот $DGFE$ има должина $\overline{DG}=0$, односно точката D се совпаѓа со точката A и точката E со точката C. Тогаш $v=w=0$, односно не постои ниту еден од дадените квадрати во условот на задачата.

Трета година

1. Без употреба на калкулатор пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{\sin(13^0)+\sin(47^0)+\sin(73^0)+\sin(107^0)}{\cos(17^0)}.$$

Решение. Забележуваме дека:

$$\sin(13^0)+\sin(47^0)=2\sin\left(\frac{13^0\ +47^0}{2}\right)\cos\left(\frac{13^0\ -47^0}{2}\right)=\cos(17^0),$$

$$\sin(73^0)=\sin(90^0\ -17^0)=\cos(17^0),\ \ \sin(107^0)=\sin(90^0\ +17^0)=\cos(17^0).$$

Затоа $\dfrac{\sin(13^0)+\sin(47^0)+\sin(73^0)+\sin(107^0)}{\cos(17^0)}=3.$

(Испиши ги самостојно сите тригонометриски равенства кои се искористени во средувањето на изразите.)

2. Реши ја равенката $\sin x\cos^2 x-\sin^3 x+2\sin x\cos^2 x=\sin\dfrac{3x}{2}$ за $x\in\left[0,\pi\right]$.

Решение. За левата страна на равенката имаме:

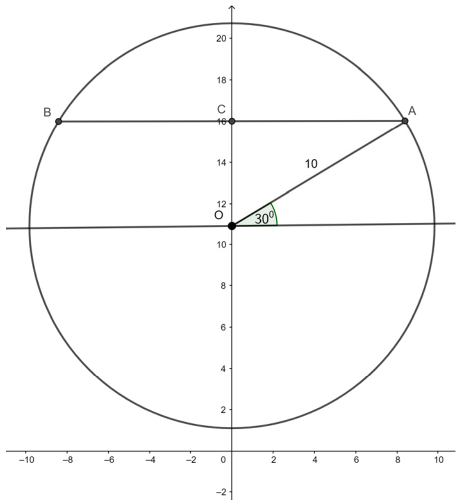
$$\sin x\cos^2 x-\sin^3 x+2\sin x\cos^2 x=\sin x(\cos^2 x-\sin^2 x)+\cos x 2\sin x\cos x=$$
$$=\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x=\sin 3x.$$

Тогаш равенката е еквивалентна со $\sin 3x=\sin\dfrac{3x}{2}$ односно $2\sin\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{3x}{2}-\sin\dfrac{3x}{2}=0.$ Од последново се добива дека $\sin\dfrac{3x}{2}=0$ или $2\cos\dfrac{3x}{2}-1=0.$ Решенијата на двете равенки во интервалот $\left[0,\pi\right]$ се $x_1=0, x_2=\dfrac{2\pi}{3}$ и $x_3=\dfrac{2\pi}{9}$.

3. Во множеството реални броеви реши ја неравенката $\sin\left(\cos x+\dfrac{1}{2}\right)\le 0.$

Решение. Од дадената неравенка следува $(2k-1)\pi\le\cos x+\dfrac{1}{2}\le 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ Функцијата $\cos x$ е ограничена и важи $-1\le\cos x\le 1$, па имаме $-\dfrac{1}{2}\le\cos x+\dfrac{1}{2}\le\dfrac{3}{2}$. Сега е јасно дека неравенката е исполнета само за $k=0$. Во тој случај $\cos x \leq -\frac{1}{2}$ односно $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$ (Користи ја тригонометриската кружница)

4. Панорамско тркало има дијаметар од 20 метри и е подигнато на висина 1 метар над земјата. Тркалото прави едно полно завртување за 6 минути. Колку време, човек внатре во тркалото, ќе биде издигнат на височина поголема од 16 метри? Кошниците со луѓе може да ги сметаме како точки од кружницата која ја определува тркалото.



Решение. Да направиме пресек на тркалото. Според условите на задачата, човекот во тркалото е на височина над 16 метри, ако тој е на висина 5 метри над дијаметарот на тркалото паралелен со подлогата. Нека правата која е паралелна со x-оската и која е на висина 16 метри, ја сече кружницата во точките *A* и *B*. Нека *C* е средината на отсечката *AB*. Тогаш, од ΔOAC добиваме $\sin \measuredangle CAO = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ (образложи зошто), од каде следува дека $\measuredangle CAO = \frac{\pi}{6}$, односно $\measuredangle AOC = \frac{\pi}{3}$. Јасно сега имаме дека $\measuredangle AOB = \frac{2\pi}{3}$. Тогаш времето t за кое човекот е на височина над 16 метри се пресметува од пропорцијата: $\frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{t}{6}$, од каде добиваме $t = 2$ минути.

Четврта година

1. Докажи дека за секое $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} > \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$.

Решение. Прво ќе докажеме дека важи $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1} > \frac{2}{a}$, за $a \geq 2$ и $a \in \mathbb{N}$.

Неравенството е еквивалентно со $\frac{2a}{a^2 - 1} > \frac{2}{a}$ односно $2a^2 > 2a^2 - 2$, што е очигледно точно. Со помош на овој резултат, за левата страна на почетното неравенство имаме:

$$\left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+3}\right) + \frac{1}{3n+2} = \frac{1}{(3n+2)-1} + \frac{1}{(3n+2)+1} + \frac{1}{3n+2} >$$
$$> \frac{2}{3n+2} + \frac{1}{3n+2} = \frac{3}{3n+2}.$$

Останува да докажеме дека $\dfrac{3}{3n+2} > \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2}$. Ќе го разгледаме изразот:

$$\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{3}{3n+2}=\frac{(2n+2)(3n+2)+(2n+1)(3n+2)-3(2n+1)(2n+2)}{(2n+1)(2n+2)(3n+2)}=$$

$$=\frac{-11n}{(2n+1)(2n+2)(3n+2)}<0,$$

од каде директно следува и бараното неравенство.

2. Одреди ги сите вредности на параметарот a за кои дефиниционата област на функцијата $y=\log_{13+a}\left(\ln\dfrac{a-19x}{3x+a}\right)$ содржи затворен интервал со должина 2, којшто интервал се состои само од позитивни броеви.

Решение. Основата на логаритамот е $13+a>0$ и $13+a\neq 1$ односно $a>-13$ и $a\neq -12$. Од тоа што дефиниционата област на логаритамската функција се состои исклучиво од позитивни броеви, важи и $\ln\dfrac{a-19x}{3x+a}>0$ т.е. $\dfrac{a-19x}{3x+a}>1$.

Со средување на изразот добиваме $\dfrac{-22x}{3x+a}>0$ т.е. $\dfrac{x}{3x+a}<0$. Од тука се добиваат системите: $\begin{cases}x>0\\3x+a<0\end{cases}$ или $\begin{cases}x<0\\3x+a>0\end{cases}$.

Ја добиваме вкупноста $\left[\begin{array}{l}-\dfrac{a}{3}<x<0\\0<x<-\dfrac{a}{3}\end{array}\right.$, при што $a>-13$ и $a\neq -12$. Ќе разгледаме три случаи:

1) Ако $a<0$, тогаш $-\dfrac{a}{3}>0$, па $-\dfrac{a}{3}<x<0$ нема решение. Останува само неравенката $0<x<-\dfrac{a}{3}$.

2) Ако $a=0$, тогаш вкупноста нема смисла.

3) Ако $a>0$, тогаш $-\dfrac{a}{3}<0$, па $0<x<-\dfrac{a}{3}$ нема решение, а $-\dfrac{a}{3}<x<0$ е интервал кој не содржи позитивни броеви.

Значи дефиниционата област на дадената функција е интервалот $\left(0,-\dfrac{a}{3}\right)$, за $a<0$.

Овој интервал се состои од позитивни броеви и во себе ќе содржи затворен интервал со должина 2 само ако десната граница на интервалот е поголема од 2. Според тоа $-\dfrac{a}{3}>2$

т.е. $a < -6$. Кога ќе се земат предвид и $a > -13$ и $a \neq -12$, тогаш за параметарот a важи $a \in (-13,-12) \cup (-12,-6)$.

3. За кои вредности на параметарот a, најголемата вредност на функцијата $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 6x + a}$, на сегментот $[7,9]$, не надминува $\dfrac{1}{12}$?

Решение. Функцијата $f(x)$ е дефинирана на сегментот $[7,9]$ ако квадратниот трином $g(x) = x^2 - 6x + a$ нема нули на тој сегмент. Притоа $g(x)$ е парабола која е отворена нагоре со оска на симетрија $x = 3$ (кои се координатите на темето на параболата?). Параболата $g(x)$ не ја сече $x-$оската на сегментот $[7,9]$ ако $g(7)\cdot g(9) > 0$ т.е. $(7+a)(27+a) > 0$. Значи $a \in (-\infty,-27) \cup (-7,\infty)$. Функцијата $g(x)$ на $[7,9]$ е монотоно растечка, па $f(x)$ е монотоно опаѓачка. Според тоа најголемата вредност на функцијата $f(x)$ е $f(7) = \dfrac{1}{7+a}$, при што го бараме она a за кое $\dfrac{1}{7+a} \leq \dfrac{1}{12}$, односно $\dfrac{5-a}{7+a} \leq 0$. Решение на оваа неравенка е секоја вредност $a \in (-\infty,-7) \cup [5,\infty)$.

4. Нека n е непарен природен број поголем од 1. Докажи дека низата од биномните коефициенти $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ се состои од непарен број непарни броеви.

Решение. Познато е дека $(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$. Според тоа $\binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} = 2^n - \binom{n}{0} - \binom{n}{n} = 2^n - 2$, па за збирот на членовите на низата од условот имаме $\binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \overset{*}{=} \dfrac{1}{2}\left(\binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\left(2^n - 2\right) = 2^{n-1} - 1$.

Бидејќи $2^{n-1} - 1$ е непарен број, следува дека бројот на непарни собироци е непарен. За да ја докажеш точноста на равенството *, искористи го својството $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

РУБРИКА ЗАДАЧИ СИГМА 128

Ги покануваме учениците да испраќаат решенија на задачи од оваа рубрика. Решенијата да бидат подготвени во **MS Word**. Испратете ги на електронската адреса на списанието
sigma.spisanie.smm@gmail.com
со предмет „Рубрика Задачи". Ве молиме решенијата испратете ги во еден **WORD** документ (doc или docx формат). Со решенијата испратете: име и презиме, година, училиште и град. **Краен рок за испраќање на решенија е 30 април 2023.** Некои од решенијата ќе бидат објавени во наредниот број на Сигма и ќе бидат објавени имињата на сите ученици кои точно ја решиле задачата, а најуспешните решавачи во текот на учебната година ќе бидат симболично наградени.

1726. Плоштината на фигурата ограничена со параболите $y = x^2 - 2x + 1$ и $y = -x^2 + 2x + 1$ е P. Докажи дека

$$2\frac{1}{2} < P < 3.$$

1727. Докажи дека секоја геометриска фигура со плоштина поголема од n, може да се постави во рамнината така што покрива барем $n + 1$ точки со целобројни координати.

1728. Да се докаже дека меѓу сите n-цифрени броеви запишани само со цифрите 1 и 2 не постојат повеќе од $\frac{2^n}{n+1}$ броеви, такви што кои било два од нив се разликуваат во најмногу три разреди.
(Броевите $\overline{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0}$ и $\overline{b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_1b_0}$ се разликуваат во најмногу три разреди ако $a_j = b_j$ за најмалку $(n-3)$ индекси j, $0 \leq j \leq n-1$.)

1729. Да се најдат сите природни броеви n такви што во множеството природни броеви е решлива равенката

$$\frac{1}{{a_1}^2} + \cdots + \frac{1}{{a_n}^2} = 1.$$

1730. Во множеството цели броеви да се реши равенката

$$x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y.$$

1731. Во трапезот $ABCD$ точката M е средина на кракот BC. Отсечките AC и AM го делат аголот BAD на три еднакви агли. Дијагоналата BD е симетрала на аголот ADC. Најди ги аглите на тој трапез.

1732. Нека графиците на функциите $f(x) = ax^2 + bx$, $g(x) = cx^2 + dx$, $f_1(x) = ax + b$, $g_1(x) = cx + d$ се сечат во една точка со апциса негативен број. Ако $ac \neq 0$ тогаш $bc = ad$. Докажи.

1733. На страните AC и BC во триаголникот ABC избрани се точки K и L за кои важи $\overline{AK}:\overline{KC} = 1:2$, $\overline{BL}:\overline{LC} = 1:3$. Отсечките AL и BK се сечат во точка O. Познато е дека плоштината на триаголникот AOK е $1cm^2$. Најди ја плоштината на триаголникот ABO.

1734. Најди ги сите прости броеви p, q и r за кои $p^2 - r \cdot q = 2500$.

1735. Во триаголникот ABC точката M е средина на BC, а P е пресечна точка на тангентите повлечени од точките B и C на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Нека точката N е средина на отсечката MP, а отсечката AN ја сече опишаната кружница околу триаголникот ABC во точка Q. Докажи дека $\angle PMQ = \angle MAQ$.

1736. Нека a, b и c се должини на страни на триаголник, $p = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ и $q = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$. Докажи дека $|p - q| < 1$.

1737. На едно земјиште во облик на квадрат со страна 12m се копа цилиндрична јама со дијаметар на основата еднаков на 8m. Ископаната земја рамномерно се распоредува по преостанатиот дел од земјиштето и се натиснува толку колку што била натисната кога била во јамата. Колку длабоко треба да се копа, за да јамата биде длабока 3m ?

1738. Рамнината ги сече бочните рабови на правилна четириаголна пирамида во точки чии растојанија до врвот на пирамидата се a, b, c и d. Докажи дека $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}$.

1739. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ се природни броеви и $a>1$ е природен број таков што $a_1 a_2 \ldots a_n | a$. Докажи дека $(a+a_1-1)(a+a_2-1) \ldots (a+a_n-1)$ не е делител на $a^{n+1}+a-1$.

1740. Определи ги аглите α, β, γ на остроаголниот триаголник ABC ако $sin\gamma + cos\beta = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ и

$$cos\gamma + sin\beta = \frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД СИГМА 127

1711. Да се најде најголемата вредност на аголот φ ако важи следното:
Во секој траголник со агли α, β, γ што не се поголеми од φ е исполнето неравенството

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \geq \frac{5}{4}.$$

Решение. Ќе докажеме дека бараната најголемата вредност на аголот φ е $\varphi_{\max}=\pi-4\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$.

Без губење на општоста, нека $0<\alpha\leq\beta\leq\gamma<\pi$. Од $\pi=\alpha+\beta+\gamma\leq 3\gamma$ следува $\gamma\geq\frac{\pi}{3}$.

При $\frac{\pi}{3}\leq\gamma<\pi$ важи $0<\frac{\pi-\gamma}{4}\leq\frac{\pi}{6}\leq\frac{\gamma}{2}<\frac{\pi}{2}$. Бидејќи функцијата "$\sin$" е строго растечка во прв квадрант, имаме $0<\sin\frac{\pi-\gamma}{4}\leq\frac{1}{2}\leq\sin\frac{\gamma}{2}<1$.

Ако воведеме смена $\frac{\pi-\gamma}{4}:=\delta$, тогаш $0<\delta\leq\frac{\pi}{6}$ (и $0<\sin\delta\leq\frac{1}{2}$) и $\sin^2\frac{\gamma}{2}=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-2\delta\right)=\cos^2(2\delta)$.

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=$$
$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}+\sin\frac{\gamma}{2}-\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}=$$
$$=2\sin\frac{\pi-\gamma}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}+\sin\frac{\gamma}{2}-\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\pi-\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}=$$
$$=2\sin\frac{\pi-\gamma}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}+\sin\frac{\gamma}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}-\cos\left(2\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right)\right)\sin\frac{\gamma}{2}=$$
$$=2\sin\frac{\pi-\gamma}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}+\sin\frac{\gamma}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}-\left(2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{4}-1\right)\sin\frac{\gamma}{2}=$$
$$=-2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{4}\sin\frac{\gamma}{2}+2\sin\frac{\pi-\gamma}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}+2\sin\frac{\gamma}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\geq$$
$$\geq-2\cos\frac{\alpha-\beta}{4}\sin\frac{\gamma}{2}+2\sin\frac{\pi-\gamma}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}+2\sin\frac{\gamma}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}=$$
$$=-2\cos\frac{\alpha-\beta}{4}\underbrace{\left(\sin\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\pi-\gamma}{4}\right)}_{\geq 0}+2\sin\frac{\gamma}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\geq$$
$$\geq-2\left(\sin\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\pi-\gamma}{4}\right)+2\sin\frac{\gamma}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}=$$
$$=2\sin\frac{\pi-\gamma}{4}+\sin^2\frac{\gamma}{2}=2\sin\delta+\cos^2(2\delta)=$$
$$=2\sin\delta+1-\sin^2(2\delta)=2\sin\delta+1-(2\sin\delta\cos\delta)^2=$$
$$=2\sin\delta+1-4\sin^2\delta\,(1-\sin^2\delta)=4\sin^4\delta-4\sin^2\delta+2\sin\delta+1=$$
$$=4\sin^4\delta-4\sin^2\delta+2\sin\delta-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}=$$
$$=(4\sin^4\delta-4\sin^3\delta+\sin^2\delta)+(4\sin^3\delta-4\sin^2\delta+\sin\delta)-\left(\sin^2\delta-\sin\delta+\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{4}=$$

$$= \sin^2\delta\,(4\sin^2\delta - 4\sin\delta + 1) + \sin\delta\,(4\sin^2\delta - 4\sin\delta + 1) - \frac{1}{4}(4\sin^2\delta - 4\sin\delta + 1) + \frac{5}{4} =$$

$$= (2\sin\delta - 1)^2\left(\sin^2\delta + \sin\delta - \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{4}$$

$$= (2\sin\delta - 1)^2\left(\sin\delta + \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)\left(\sin\delta - \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) + \frac{5}{4}.$$

$$\underbrace{(2\sin\delta - 1)^2}_{\geq 0}\underbrace{\left(\sin\delta + \underbrace{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}_{>1}\right)}_{>0}\left(\sin\delta - \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) + \frac{5}{4} \geq \frac{5}{4} \Leftrightarrow \sin\delta \geq \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Заради $0 < \delta \leq \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$, последното е можно ако и само ако $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) \leq \delta \leq \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) \leq \frac{\pi-\gamma}{4} \leq \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leq \gamma \leq \pi - 4\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$. Со тоа, докажавме дека за $\varphi \leq \pi - 4\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$ даденото неравенство е точно. Останува уште да се докаже дека при $\pi - 4\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) < \varphi < \pi$ постои триаголник со агли $\alpha, \beta, \gamma \leq \varphi$ за кој важи

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} < \frac{5}{4}.$$

Да разгледаме триаголник со агли $0 < \alpha = \beta = \frac{\pi-\varphi}{2} < \varphi = \gamma < \pi$. Согласно претходните трансформации добиваме:

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} =$$

$$= -2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{4}\sin\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\pi-\gamma}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4} + 2\sin\frac{\gamma}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} =$$

$$= -2\sin\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\pi-\gamma}{4} + 2\sin\frac{\gamma}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} = 2\sin\frac{\pi-\gamma}{4} + \sin^2\frac{\gamma}{2} = 2\sin\delta + \cos^2(2\delta) =$$

$$= \underbrace{(2\sin\delta - 1)^2}_{>0}\underbrace{\left(\sin\delta + \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)}_{>0}\underbrace{\left(\sin\delta - \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)}_{<0} + \frac{5}{4} < \frac{5}{4}.$$

1712. Нека x_1 и x_2 две решенија на равенката $x^3 = 2022x + 2023$. Пресметај ${x_1}^2 + x_1x_2 + {x_2}^2$.

Решение. За секоја кубна равенка $x^3 + px^2 + qx + r$ со корени x_1, x_2, x_3 важат Виетовите формули:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p, x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = q, x_1, x_2, x_3 = -r.$$

Конкретно, за дадената равенка $x^3 - 2022x - 2023$ имаме: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -2022$. Тогаш:

$${x_1}^2 + x_1x_2 + {x_2}^2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = -\Big(x_1x_2 - (x_1 + x_2)\big((x_1 + x_2 + x_3) - x_3\big)\Big) =$$

$$= -\big(x_1x_2 - (x_1 + x_2)(0 - x_3)\big) = -(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = -(-2022) = 2022.$$

1713. Докажи дека за секој природен број n постои барем едно решение во множеството природни броеви на равенката

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n\,.$$

Решение. Ако $n = 1$ тогаш равенката преминува во идентитетот $a_1 = a_1$, па секој природен број a_1 е решение.

Ако $n = 2$ тогаш $a_1 = 2 = a_2$ е решение во множеството природни броеви на равенката $a_1 + a_2 = a_1 \cdot a_2$.

Ако $n > 2$ тогаш $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-2} = 1$, $a_{n-1} = 2$, $a_n = n$ е едно решение на дадената равенка.

Значи, за секој природен број n, множеството решенија M_n на дадената равенка во множеството природни броеви е непразно, што и требаше да се докаже.

1714. Дадени се 8 точки во просторот такви што кои било три не лежат на иста права. Кој е најголемиот број на отсечки што можат да се повлечат со краеви во дадените точки така што не постојат три отсечки што формираат триаголник?

Решение. Нека $A_1, A_2, \dots, A_8$ се точки од просторот во општа положба (кои било три не се колинеарни), и нека точката A_k е крајна точка на a_k отсечки за $k = 1,2,\dots,8$ (јасно $a_k < 8$). Нека $\max\{a_k : k = 1,2,\dots,8\} = n$, и нека без губење на општоста A_1 е крајна точка на n отсечки – $A_1B_1, \dots, A_1B_n$, при што $\{B_1, \dots, B_n\} \subseteq \{A_2, \dots, A_8\}$.

Јасно е дека кои било отсечки B_i и B_j $(i, j \in \{1, \dots, n\})$ не се поврзани со отсечка (во спротивно точките A_1, B_i, B_j се темиња на триаголник). Преостанатите $7 - n$ точки (тоа се точките од множеството $\{A_2, \dots, A_8\} \backslash \{B_1, \dots, B_n\}$), според претпоставката $\max\{a_k : k = 1,2,\dots,8\} = n$, се крајни точки на најмногу n отсечки.

Според тоа вкупниот број повлечени отсечки е најмногу

$$n + (7 - n)n = (8 - n)n = 16 - (16 - 8n + n^2) = 16 - (4 - n)^2 \leq 16,$$

и се добива кога секоја точка е крајна точка на точно 4 отсечки.

Направете цртеж со кој ќе покажете дека добиената конфигурација од 16 отсечки меѓу кои нема три што формираат триаголник е можна.

1715. Дали постои рамнина таква што растојанијата од темињата на дадена коцка до таа рамнина (во некој распоред) се во размер $1:2:3:4:5:6:7:8$?

Решение. Одговорот е потврден.

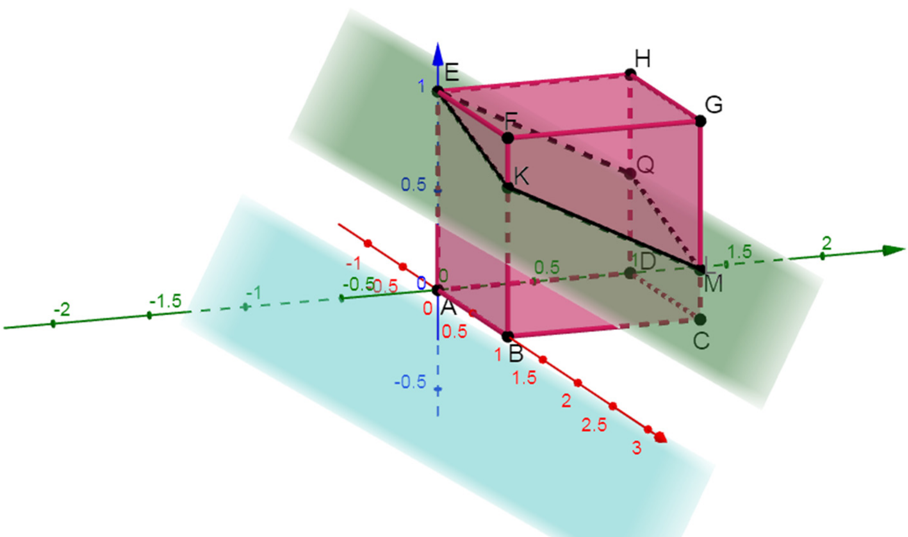
Растојанието од точка $T(x_0, y_0, z_0)$ до рамнина $\Sigma: ax + by + cz + d = 0$ е $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Може да избереме координатен систем во однос на кој темиња на коцката се $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$. Јасно е дека односот од растојанијата од A, B, D, C, E, F, H, G до Σ е

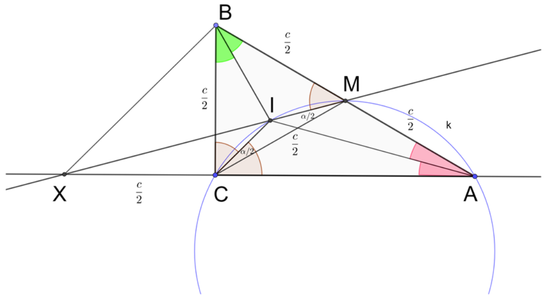
$$|d| : |a + d| : |b + d| : |a + b + d| : |c + d| : |a + c + d| : |b + c + d| : |a + b + c + d|.$$

Избирајќи $a = 1, b = 2, c = 4, d = 1$, т.е. $\Sigma: x + 2y + 4z + 1 = 0$ се добива бараниот однос.

До резултатот може да се дојде и поинаку (види цртеж). Да ја разгледаме рамнината Π што ја сече коцката во паралелограмот $EKMQ$, и нека Σ е рамнината паралелна со Π и на растојание 5 од неа. Пробајте да ги пресметате растојанијата од темињата на коцката до Σ, од што ќе следува дека тие се во бараниот размер.



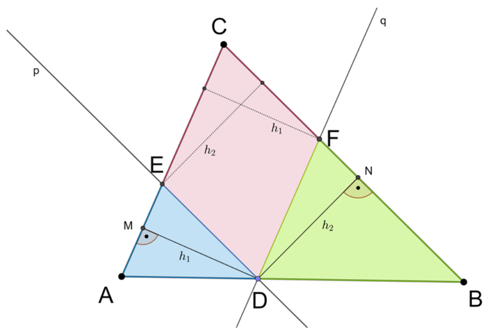
1716. Во правоаголниот триаголник ABC со прав агол во темето C, е впишана кружница k со центар во точката I. Нека точката M е средина на страната $\overline{AB}$, а правата MI ја сече правата AC во точка X. Ако четириаголникот $AMIC$ е тетивен тогаш докажи дека триаголникот BXC е рамнокрак.



Решение. Од тоа што четириаголникот $AMIC$ е тетивен имаме дека $\angle IMC = \angle MCI = \frac{\alpha}{2}$. Значи триаголникот CMI е рамнокрак односно $|\overline{CI}| = |\overline{MI}|$...(1). Од Талесова теорема имаме дека $|\overline{CM}| = |\overline{MA}| = |\overline{MB}| = \frac{c}{2}$. Така имаме дека триаголникот CAM е рамнокрак односно $\angle ACM = \alpha$. На тој начин добиваме дека $\angle CXM + \angle XMC = \angle ACM = \alpha$ односно $\angle CXM = \frac{\alpha}{2}$. Значи, триаголникот XCM е рамнокрак односно $|\overline{XC}| = |\overline{CM}| = \frac{c}{2}$...(2).

Од тоа што $\angle CBI = \angle IBM = \frac{\beta}{2}$, $\angle ICB = \angle BMI = 45^\circ$ и од равенството (1) имаме складност на триаголниците BCI и IMB од каде се добиваме дека $|\overline{BC}| = |\overline{BM}| = \frac{c}{2}$...(3). Од равенствата (2) и (3) следува дека триаголникот BXC е рамнокрак.

1717. На страната AB на триаголникот ABC избрана е произволна точка D. Нека правата p повлечена низ точката D паралелна со страната BC ја сече страната AC во точка E. Нека правата q повлечена низ точката D паралелна со страната AC ја сече страната BC во точка F. Докажи дека $P_{CEDF} = 2\sqrt{P_{ADE} \cdot P_{DBF}}$.



Решение. Од сличноста на триаголниците ADE и DBF добиваме дека $\overline{AE}:\overline{DE} = \overline{DF}:\overline{BF}$ односно $\overline{DE} \cdot \overline{DF} = \overline{AE} \cdot \overline{BF}$...(1). Нека h_1 и h_2 се висините спуштени од точката D во триаголниците ADE и DBF, соодветно. Така имаме дека $P_{CEDF} = \overline{CE} \cdot h_1 = \overline{DF} \cdot h_1$ ...(2), $P_{CEDF} = \overline{CF} \cdot h_2 = \overline{DE} \cdot h_2$ ...(3). Со множење на равенствата (2) и (3), а со користење на равенството (1) добиваме дека

$$P_{CEDF}^{\ 2} = \overline{DE} \cdot \overline{DF} \cdot h_1 \cdot h_2$$
$$P_{CEDF}^{\ 2} = \overline{AE} \cdot \overline{BF} \cdot h_1 \cdot h_2$$
$$P_{CEDF}^{\ 2} = 2\frac{\overline{AE} \cdot h_1}{2} \cdot 2\frac{\overline{BF} \cdot h_2}{2}$$
$$P_{CEDF}^{\ 2} = 4 \cdot P_{ADE} \cdot P_{DBF}$$
$$P_{CEDF} = 2\sqrt{P_{ADE} \cdot P_{DBF}}$$

1718. Нека a, b, c и d се позитивни реални броеви поголеми од 1. Одреди ја најмалата можна вредност на изразот $log_a(ab^2) + log_b(b^2c^3) + log_c(c^5d^6) + log_d(d^{35}a^{36})$.

Решение. Од тоа што $a > 1, b > 1, c > 1, d > 1$ имаме дека $log_d a > log_d 1, log_a b > log_a 1$ $log_b c > log_b 1, log_c d > log_c 1$ односно $log_d a > 0$, $log_a b > 0$, $log_b c > 0$, $log_c d > 0$.
Нека $S = log_a(ab^2) + log_b(b^2c^3) + log_c(c^5d^6) + log_d(d^{35}a^{36})$ тогаш имаме

$$S = log_a a + 2log_a b + 2log_b b + 3log_b c + 5log_c c + 6log_c d + 35log_d d + 36log_d a$$
$$S = 1 + 2log_a b + 2 + 3log_b c + 5 + 6log_c d + 35 + 36log_d a$$

$S = 43 + 2log_a b + 3log_b c + 6log_c d + 36log_d a.$

Користејќи го неравенството помеѓу аритметичката и геометриската средина на четири броја имаме

$S \geq 43 + 4 \cdot \sqrt[4]{2log_a b \cdot 3log_b c \cdot 6log_c d \cdot 36log_d a}$

$S \geq 43 + 4 \cdot \sqrt[4]{6^4 log_a b \cdot log_b c \cdot log_c d \cdot log_d a}$

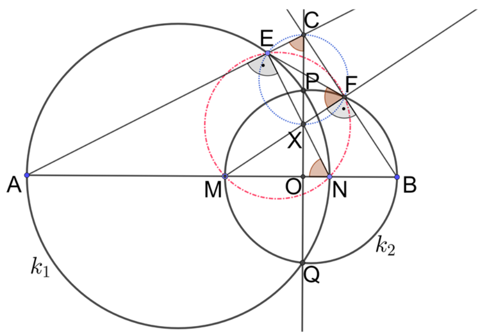
$S \geq 43 + 24 \cdot \sqrt[4]{log_a b \cdot log_b c \cdot log_c d \cdot log_d a}$

Така од равенството $log_a b \cdot log_b c \cdot log_c d \cdot log_d a = 1$ следува дека $S \geq 67$. Значи, најмалата можна вредност на изразот $log_a(ab^2) + log_b(b^2c^3) + log_c(c^5d^6) + log_d(d^{35}a^{36})$ е 67.

1719. На отсечката AB земени се произволни две точки M и N така што M да е помеѓу A и N. Нека k_1 и k_2 се кружници со дијаметри AN и MB соодветно, кои кружници се сечат во точките P и Q. Нека E е точка од кружницата k_1 и нека отсечката EN ја сече отсечката PQ во точка X. Нека полуправата MX ја сече кружницата k_2 во точка F. Ако C е пресечната точка на полуправите AE и BF тогаш:

а) Докажи дека четириаголникот $EMNF$ е тетивен;

б) Докажи дека точките C, P и Q се колинеарни.



Решение. а) Од кружницата k_1 користејќи степен на точка во однос на кружница добиваме дека $\overline{EX} \cdot \overline{XN} = \overline{PX} \cdot \overline{XQ}$ ...(1), а од кружницата k_2 добиваме $\overline{MX} \cdot \overline{XF} = \overline{PX} \cdot \overline{XQ}$...(2). Од равенствата (1) и (2) имаме дека важи равенството $\overline{EX} \cdot \overline{XN} = \overline{MX} \cdot \overline{XF}$ од каде следува дека четириаголникот $EMNF$ е тетивен.

б) Нека правата PQ која е радикална оска за двете кружници ја сече отсечката AB во точка O. Тогаш имаме дека правата XO е нормална на AB. Од тоа што $\angle XEC = \angle CFX = 90^\circ$ имаме дека четириаголникот $EXFC$ е тетивен. Така имаме дека $\angle ACX = \angle ECX = \angle EFX = \angle EFM = \angle ENM = \angle ENA$. Од тоа што аглите NAE и ENA се комплементни следува комплементност и на аголите NAC и ACX односно правата CX е нормална на AB. Така добиваме дека точката C лежи на нормалата повлечена од точката X на отсечката AB. Значи, точките C, X, O се колинеарни од каде следува колинеарност на точките C, P, Q.

1720. Нека a и b се природни броеви со различна парност. Докажи дека бројот $(a+3b)(5a+7b)$ не е квадрат на природен број.

Решение. Од $(a+3b)(5a+7b) = (a+3b)(5a+15b-8b)$

$$= (a+3b)(5a+15b) - 8b(a+3b)$$

$$= 5(a+3b)^2 - 8b(a+3b)$$

и од тоа што бројот $a+3b$ е непарен имаме дека $(a+3b)(5a+7b) \equiv 5\ (\text{мод}8)$.

Да претпоставиме дека постои природен број k за кој $(a+3b)(5a+7b) = k^2$.

Тогаш имаме дека $k^2 \equiv 5\ (\text{мод}8)$. Но, за секој природен број k важи $k^2 \equiv 0\ (\text{мод}8)$ или $k^2 \equiv 1\ (\text{мод}8)$ или $k^2 \equiv 4\ (\text{мод}8)$. На тој начин добиваме контрадикција на претпоставката односно бројот $(a+3b)(5a+7b)$ не е квадрат на природен број.

1721. Разложи го на множители полиномот $(a+b)^7 - a^7 - b^7$, а потоа реши ја равенката

$$(x+7)^7 = x^7 + 7^7.$$

Решение. $(a+b)^7 - a^7 - b^7 =$

$$= (a+b)[(a+b)^6 - (a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)] =$$
$$= (a+b)(7a^5b + 14a^4b^2 + 21a^3b^3 + 14a^2b^4 + 7ab^3)$$
$$= 7ab(a+b)(a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4) =$$
$$= 7ab(a+b)(a^2 + ab + b^2)^2.$$

Според добиениот резултат, равенката $(x+7)^7 = x^7 + 7^7$ ќе се трансформира во

$$(x+7)^7 - x^7 - 7^7 = 0 \Leftrightarrow$$
$$7 \cdot 7x(x+7)(7^4 + 2\cdot 7^3x + 3\cdot 7^2x^2 + 2\cdot 7x^3 + x^4) = 0 \Leftrightarrow$$
$$7 \cdot 7x(x+7)(7^2 + 7x + x^2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = 0 \text{ или } x + 7 = 0$$

$x = 0$ или $x = -7$ се реалните решенија на дадената равенка.

1722. Ако a, b, c се бочни рабови на тристрана пирамида кои се заемно нормални, тогаш висината h, која одговара на основата, е дадена со формулата $h = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}$. Докажи!

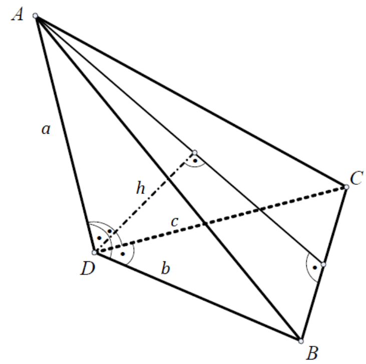
Решение. Да ја поставиме пирамидата да лежи на едниот бочен ѕид BCD. Ако со x, y, z ги означиме аглите кои ги зафаќа висината h со бочните рабови a, b, c соодветно, тогаш $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$. Бидејќи

$cosx = \frac{h}{a}, cosy = \frac{h}{b}, cosz = \frac{h}{c}$,

добиваме $\left(\frac{h}{a}\right)^2 + \left(\frac{h}{b}\right)^2 + \left(\frac{h}{c}\right)^2 = 1$. Од овде добиваме

$$h^2 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

Од каде следува бараната формула $h = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}$.



1723. Реши ја равенката $tg(ctgx) - ctg(tgx) = 0$.

Решение. Равенката е еквивалентна со равенката $tg(ctgx) - tg\left(\frac{\pi}{2} - tgx\right) = 0$

Оттука $ctgx = \frac{\pi}{2} - tgx + k\pi,\ k \in Z$. Следниот еквивалентен облик е

$$ctgx + tgx = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \frac{cosx}{sinx} + \frac{sinx}{cosx} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \frac{2}{sin2x} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow sin2x = \frac{4}{\pi(1+2k)}$$

Последнава равенка има решение ако $-1 \le \frac{4}{\pi(1+2k)} \le 1 \Leftrightarrow \frac{16}{(2k+1)^2\pi^2} \le 1 \Leftrightarrow$

$$\left(2k + 1 + \frac{4}{\pi}\right)\left(2k + 1 - \frac{4}{\pi}\right) \ge 0$$

Последното неравенство е исполнето за секој $k \in Z$ освен за $k = 0$ и $k = -1$. Тоа значи дека решенијата на почетната равенка се добиваат како решенија на равенката $sin2x = \frac{4}{\pi(1+2k)}$ за

$$k \in Z, \qquad k \ne 0 \text{ и } k \ne -1.$$
$$x = \frac{1}{2}arcsin\frac{4}{\pi(1+2k)} + 2n\pi \text{ и } x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}arcsin\frac{4}{\pi(1+2k)} + 2n\pi, \qquad n \in Z.$$

1724. Нека z_1, z_2, z_3 се различни комплексни броеви со еднакви модули. Ако броевите $z_1 + z_2z_3$, $z_2 + z_3z_1$ и $z_3 + z_1z_2$ се реални, тогаш важи равенството $z_1z_2z_3 = 1$. Докажи!

Решение. Да ставиме $z_k = r(cos\varphi_k + isin\varphi_k),\quad k = 1,2,3$. Со непосредни пресметувања добиваме $z_1z_2z_3 = r^3(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)(cos\varphi_3 + isin\varphi_3) =$
$= r^3(cos\varphi + isin\varphi)$, каде $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$. Од условот на задачата имаме
$sin\varphi_k + rsin(\varphi - \varphi_k) = 0,\quad k = 1,2,3$ односно

$$sin\varphi_k(1 - rcos\varphi) + cos\varphi_k \cdot rsin\varphi = 0,\quad k = 1,2,3.$$

Да претпоставиме дека $1-rcos\varphi \neq 0$. Тогаш

$$tg\varphi_k = \frac{rsin\varphi}{rcos\varphi - 1} \qquad k = 1,2,3.$$

што не е можно бидејќи $\varphi_k \in [0,2\pi)$ и меѓусебно се различни.
Затоа $1-rcos\varphi = 0$ и $sin\varphi = 0,$ па е $cos\varphi = 1,\;\; r = 1$. Конечно,

$$z_1z_2z_3 = \mathrm{r}^3(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = 1.$$

1725. Низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е зададена со $a_1 = 1$ и $a_n = a_1a_2 \dots a_{n-1} + 1$, за $n \geq 2$. Дали постои реален број *M* таков што $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} \leq M$, за секој $m \in \mathbb{N}$?

Решение. Од дефиницијата на низата $a_1 = 1,\; a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 7, \dots$ ако $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$ се природни броеви, тогаш $a_n = a_1a_2 \dots a_{n-1} + 1$, како збир на природни броеви е природен број. Според принципот на математичка индукција добиваме дека a_n е природен број за секој $n \in N$.
За членовите на низата $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$ имаме $a_1 = 1 \geq 1, a_2 = 2 \geq 2, a_3 = 3 \geq 3,$
$a_4 = 7 \geq 4$.
Нека претпоставиме дека $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, \dots a_{k-1} \geq k-1$. Бидејќи $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1} \in N$, од дефиницијата на a_k и од претпоставката $a_p \geq p,\; p = 1,2, \dots, k-1$ добиваме
$a_k = a_1a_2 \dots a_{k-1} + 1 \geq a_{k-1} + 1 \geq k - 1 + 1 = k.$ т.е. $a_k \geq k$. Според принципот на математичката индукција следува дека $a_n \geq n$ за секое $n \in N$.
Ако равенството $a_n = a_1a_2 \dots a_{n-1} + 1$ го поделиме со $a_1a_2 \dots a_n$, добиваме

$$\frac{1}{a_1a_2 \dots a_{n-1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_1a_2 \dots a_n},$$

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1a_2 \dots a_{n-1}} - \frac{1}{a_1a_2 \dots a_n}$$

Значи, за $n = 2,3, \dots, m$ е точно последното равенство. Тогаш

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{m} \left(\frac{1}{a_1a_2 \dots a_{n-1}} - \frac{1}{a_1a_2 \dots a_n}\right) =$$

$$= \frac{1}{a_1} + \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_1a_2} - \frac{1}{a_1a_2a_3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{a_1a_2 \dots a_{m-1}} - \frac{1}{a_1a_2 \dots a_m}\right) =$$

$$= \frac{2}{a_1} - \frac{1}{a_1a_2 \dots a_m} = 2 - \frac{1}{a_1a_2 \dots a_m} < 2$$

Од неравенството $a_n \geq n,\;\; n \in N$, односно $\frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{n},\;\; n \in N$ и $a_1a_2 \dots a_m \geq a_m$, добиваме

$$0 < \frac{1}{a_1a_2 \dots a_m} \leq \frac{1}{a_m} \leq \frac{1}{m}.$$

Од последното неравенство следува дека $M = 2$ е најмалиот број за кој е исполнето даденото неравенство.

Подготвиле:
Борче Јошевски
Раде Кренков
Слаѓан Станковиќ

НАГРАДНИ ЗАДАЧИ

Ги покануваме учениците да испраќаат решенија на наградните задачи од оваа рубрика. Испратете ги на електросната адреса на уредникот

filipovskipetar@gmail.com

со предмет „Наградни задачи“. Ве молиме решенијата испратете ги во еден **Word** документ (doc или docx формат). Со решенијата испратете: име и презиме, година, училиште и град. **Краен рок за испраќање на решенија е 30 април 2023.** Некои од решенијата ќе бидат објавени во наредниот број на Сигма и ќе бидат објавени имињата на сите ученици кои точно ја решиле задачата, а најуспешните решавачи во текот на учебната година ќе бидат симболично наградени.

1. Нека z е комплексен број таков што $|z|<1$. Докажи дека

$$\left|\frac{z^{2n}}{2+z^n+z^{5n}}\right| \leq \frac{|z|^{2n}}{2(1-|z|)}.$$

2. На страната BC во остроаголниот $\triangle ABC$ избрана е точка D. Симетралата на $\angle DAC$ ја сече страната BC во точката E. Опишаната кружница околу $\triangle ABD$ по втор пат ја сече отсечката AE во точката F. Правата BF ја сече страната AC во точката G. Права паралелна на DF која минува низ G ја сече страната BC во точката H. Докажи дека правата GE е тангента на опишаната кружница околу $\triangle BHG$.

РЕШЕНИЈА НА НАГРАДНИТЕ ЗАДАЧИ ОД СИГМА 127

1. Докажи дека од $n+1$ различни природни броеви помали од $2n$ може да се изберат три, такви што еден од нив да биде еднаков на збирот на останатите два.

Решение. Нека дадените броеви се $0<a_1<a_2<...<a_{n+1}<2n$. Тогаш, и $0<a_2-a_1<a_3-a_1<...<a_{n+1}-a_1<2n$. Овие n разлики заедно со броевите $a_2,a_3,...,a_{n+1}$ се $2n$ природни броеви помали од $2n$. Според тоа, барем два од нив се еднакви, т.е. постојат $p\neq q$, $p,q>1$, такви што $a_p=a_q-a_1$. Следува бараните броеви се a_1, a_p и a_q.

2. Нека a,b и a,b се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\left(a+\frac{b}{c}\right)^2+\left(b+\frac{c}{a}\right)^2+\left(c+\frac{a}{b}\right)^2+3>2(a+b+c+3).$$

Решение. $\left(a+\frac{b}{c}\right)^2+\left(b+\frac{c}{a}\right)^2+\left(c+\frac{a}{b}\right)^2+3$

$$=\left(a+\frac{b}{c}\right)^2+1+\left(b+\frac{c}{a}\right)^2+1+\left(c+\frac{a}{b}\right)^2+1$$

$$\overset{(1)}{\geq} 2\left(a+\frac{b}{c}\right)+2\left(b+\frac{c}{a}\right)+2\left(c+\frac{a}{b}\right)$$

$$=2(a+b+c)+2\frac{b}{c}+2\frac{c}{a}+2\frac{a}{b}\overset{(2)}{\geq}2(a+b+c)+3\sqrt[3]{2^3\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}}$$
$$=2(a+b+c)+6=2(a+b+c+3)$$

(1) и (2) се неравенства помеѓу аритметичка и геометриска средина.

За да важи равенство во (1) треба $a+\frac{b}{c}=1$, $b+\frac{c}{a}=1$ и $c+\frac{a}{b}=1$.

За да важи равенство во (2) треба $\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=\frac{a}{b}$.

Со замена на (2) во (1) добиваме $a+\frac{a}{b}=1$, $b+\frac{b}{c}=1$ и $c+\frac{c}{a}=1$.

Од $a+\frac{a}{b}=1$ имаме $a\left(1+\frac{1}{b}\right)=1$ т.е. $\frac{1}{a}=1+\frac{1}{b}$. $\qquad(3)$

Аналогно од $b+\frac{b}{c}=1$ добиваме $\frac{1}{b}=1+\frac{1}{c}$ $\qquad(4)$

и од $c+\frac{c}{a}=1$ добиваме $\frac{1}{c}=1+\frac{1}{a}$ $\qquad(5)$

Со замена на (5) во (4) и потоа на (4) во (3) добиваме $\frac{1}{a}=1+2+\frac{1}{a}$ што не е можно.

Следува важи строго неравенство.

Подготвил: Петар Филиповски

65 ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА 16.04.2022

Прва година

1. За броевите a,b, $a\neq 1$, $b\neq 1$ важи $a+b=1$. Докажи дека $\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{2b-2a}{a^2b^2+3}$.

Решение. Од $a+b=1$ имаме дека $a=1-b$ и $b=1-a$. Трансформираме и добиваме:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}&=\frac{1-b}{(b-1)(b^2+b+1)}-\frac{1-a}{(a-1)(a^2+a+1)}=\\
&=-\frac{1}{(b^2+b+1)}+\frac{1}{(a^2+a+1)}=\frac{b^2+b+1-a^2-a-1}{(a^2+a+1)(b^2+b+1)}=\\
&=\frac{(b^2-a^2)+(b-a)}{a^2b^2+a^2b+a^2+ab^2+ab+a+b^2+b+1}=\\
&=\frac{(b-a)(b+a)+(b-a)}{a^2b^2+(a^2+(a^2b+ab^2)+ab+b^2)+(a+b)+1}=\\
&=\frac{(b-a)\cdot 1+(b-a)}{a^2b^2+(a^2+ab(a+b)+ab+b^2)+1+1}=\\
&=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+(a^2+ab\cdot 1+ab+b^2)+2}=\\
&=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+(a+b)^2+2}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+1^2+2}=\frac{2b-2a}{a^2b^2+3},
\end{aligned}$$

со што го покажавме тврдењето.

2. Најди го најмалиот природен број n за кој што $n^2+2022n$ е полн квадрат на природен број.

Решение. Нека $m\in\mathbb{N}$ е природен број таков што $n^2+2022n=m^2$. Последното равенство можеме да го запишеме во облик

$$n^2+2022n=m^2 \Leftrightarrow \left(n+1011\right)^2-1011^2=m^2 \Leftrightarrow \left(n+1011\right)^2-m^2=1011^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(n+1011+m\right)\left(n+1011-m\right)=1011^2 \Leftrightarrow \left(n+1011+m\right)\left(n+1011-m\right)=3^2\cdot 337^2 .$$

Нека $n+1011+m=p$ и $n+1011-m=q$, тогаш $p\cdot q=3^2\cdot 337^2$, $p,q\in\mathbb{N}$ и $p>q$. Значи, $(p,q)\in\{(1011^2,1),(3\cdot 337^2,3),(337^2,3^2),(3^2\cdot 337,337)\}$. Со одземање на двете равенки добиваме $2m=p-q$, од каде $m=\frac{p-q}{2}$. Со замена во првата равенка се добива $n=p-1011-m=p-1011-\frac{p-q}{2}=\frac{p+q}{2}-1011$.

Најмалиот n се добива за најмала вредност на збирот $p+q$, па $p+q=3^2\cdot 337+337=(3^2+1)\cdot 337=10\cdot 337=3370$, а

$n=\frac{p+q}{2}-1011=674$.

3. Најди ги сите подредени парови од цели броеви (x,y) за кои што важи $x^3+y^3=(x+y)^2$.

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во еквивалентна форма

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)^2 \text{ т.е. } (x+y)(x^2-xy+y^2-x-y)=0,$$

од каде добиваме дека $x+y=0$ или $x^2-xy+y^2-x-y=0$.

Од $x+y=0$ ги добиваме решенијата $(k,-k)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ако второто равенство го помножиме со 2, ќе добиеме $2x^2-2xy+2y^2-2x-2y=0$, односно

$x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1+y^2-2y+1=2$ т.е.

$(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

Од тука имаме $(x-y)^2,(x-1)^2,(y-1)^2\in\{0,1\}$.

Ако $(x-y)^2=0,(x-1)^2=1,(y-1)^2=1$, ги добиваме решенијата $(0,0)$ и $(2,2)$.

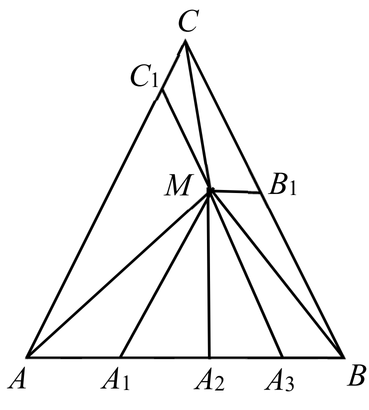
Ако $(x-y)^2=1,(x-1)^2=0,(y-1)^2=1$, ги добиваме решенијата $(1,0)$ и $(1,2)$.

Ако $(x-y)^2=1,(x-1)^2=1,(y-1)^2=0$, ги добиваме решенијата $(0,1)$ и $(2,1)$.

Значи, множеството решенија е $\{(k,-k)\mid k\in\mathbb{Z}\}\cup\{(2,2),(1,0),(1,2),(0,1),(2,1)\}$.

4. Нека M е точка од внатрешноста на рамностраниот триаголник ABC. Докажи дека

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2<2\overline{AB}^2.$$



Решение. Нека A_1 е точка од страната AB така што $MA_1 \parallel CA$, B_1 е точка од страната BC така што $MB_1 \parallel AB$ и C_1 е точка од страната CA така што $MC_1 \parallel BC$. Нека $\overline{MA_1}=x$, $\overline{MB_1}=y$ и $\overline{MC_1}=z$. Четириаголникот C_1AA_1M е рамнокрак трапез затоа што $MA_1 \parallel CA$, а од $MC_1 \parallel BC$ имаме дека

$$\measuredangle MC_1A=\measuredangle BCA=60^\circ=\measuredangle A_1AC_1.$$

Од тука $\overline{AA_1}=\overline{MC_1}=z$. Нека A_2 е точка од страната AB така што $MA_2\perp AB$, и A_3 е точка од страната AB, така што $MA_3 \parallel BC$. Тогаш, триаголникот A_1A_3M е рамностран триаголник, $\overline{A_1A_3}=\overline{MA_1}=x$, $\overline{A_1A_2}=\frac{1}{2}\overline{A_1M}=\frac{x}{2}$. Четириаголникот

A_3BB_1M е паралелограм па имаме дека $\overline{A_3B} = \overline{MB_1} = y$, од каде пак $a = \overline{AB} = \overline{AA_1} + \overline{A_1A_3} + \overline{A_3B} = x + y + z$. Понатаму, од Питагорината теорема за триаголниците AA_2M и A_1A_2M имаме

$$\overline{MA}^2 = \overline{AA_2}^2 + \overline{MA_2}^2 = \overline{AA_2}^2 + \overline{MA_1}^2 - \overline{A_1A_2}^2 =$$

$$= \left(z + \frac{x}{2}\right)^2 + x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = z^2 + zx + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = z^2 + zx + x^2.$$

Слично, $\overline{MB}^2 = x^2 + xy + y^2$ и $\overline{MC}^2 = y^2 + yz + z^2$. Конечно,

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = z^2 + zx + x^2 + x^2 + xy + y^2 + y^2 + yz + z^2 =$$

$$= 2(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) - 3(xy + xz + yz) <$$

$$< 2(x + y + z)^2 = 2a^2 = 2\overline{AB}^2,$$

што требаше да се докаже.

Втора година

1. Нека k е природен број и нека $z_1, z_2, \dots, z_{2022}$ се ненулти комплексни броеви со ист модул такви што $z_1^k + z_2^k + \dots + z_{2022}^k = 0$. Докажи дека $\frac{1}{z_1^k} + \frac{1}{z_2^k} + \dots + \frac{1}{z_{2022}^k} = 0$.

Решение. Нека $r = |z_1| = |z_2| = \dots = |z_{2022}| > 0$. Тогаш

$$\frac{1}{z_1^k} + \frac{1}{z_2^k} + \dots + \frac{1}{z_{2022}^k} = \frac{1}{z_1^k} \cdot \frac{\overline{z}_1^k}{\overline{z}_1^k} + \frac{1}{z_2^k} \cdot \frac{\overline{z}_2^k}{\overline{z}_2^k} + \dots + \frac{1}{z_{2022}^k} \cdot \frac{\overline{z}_{2022}^k}{\overline{z}_{2022}^k} = \frac{\overline{z}_1^k}{r^{2k}} + \frac{\overline{z}_2^k}{r^{2k}} + \dots + \frac{\overline{z}_{2022}^k}{r^{2k}} =$$

$$= \frac{1}{r^{2k}}(\overline{z}_1^k + \overline{z}_2^k + \dots + \overline{z}_{2022}^k) = \frac{1}{r^{2k}}\overline{(z_1^k + z_2^k + \dots + z_{2022}^k)} = \frac{1}{r^{2k}} \cdot 0 = 0.$$

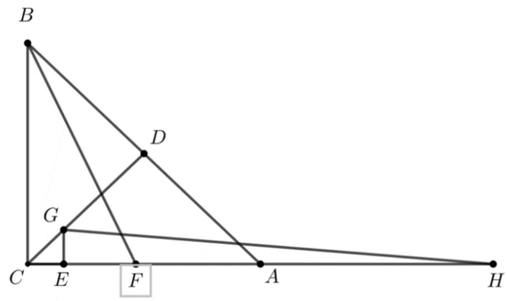
2. Реши ја равенката $(5 - 2x)^2 + (\frac{1}{2 - x} - 1)^2 = 9$ во множеството реални броеви.

Решение. Јасно, $x \neq 2$. Нека $2 - x = t$ т.е. $x = 2 - t$. Тогаш, $5 - 2x = 5 - 4 + 2t = 1 + 2t$ па равенката станува $(1 + 2t)^2 + (\frac{1}{t} - 1)^2 = 9$. Оттука $4t^2 + 4t + 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 1 = 9$, односно $4t^2 - 4 + \frac{1}{t^2} + 4t - \frac{2}{t} = 3$, за на крај да добиеме $(2t - \frac{1}{t})^2 + 2(2t - \frac{1}{t}) - 3 = 0$. Со уште една смена имаме квадратна равенка $z^2 + 2z - 3 = 0$ со решенија 1 и -3, па затоа важи $2t - \frac{1}{t} = 1$ или $2t - \frac{1}{t} = -3$. Ако

$2t-\dfrac{1}{t}=1$, тогаш $2t^2-t-1=0$ и добиваме решенија $t_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\dfrac{1\pm 3}{4}$, т.е. $t_1=1$, $t_2=-\dfrac{1}{2}$, а ако $2t-\dfrac{1}{t}=-3$, тогаш $2t^2+3t-1=0$ па ги имаме решенија $t_{3,4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+8}}{4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$. Конечно, од $x=2-t$ добиваме:

$$x_1=2-t_1=1,\; x_2=2-t_2=\frac{5}{2},\; x_{3,4}=2-t_{3,4}=\frac{11\pm\sqrt{17}}{4}.$$

3. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C. На катетата CA се избрани точки E и F такви што $2\overline{CE}=\overline{EF}$. Нормалата на отсечката CA издигната во точката E и тежишната линија на триаголникот ABC повлечена од темето C, се сечат во точка G. Нека H е точка на правата CA таква што точката A е средина на отсечката CH. Докажи дека правите GF и BH се паралелни прави.



Решение. Нека $\overline{CE}=x$, $\overline{GE}=y$. Тогаш, $\overline{EF}=2x$, $\overline{AF}=b-3x$ а $\overline{FH}=2b-3x$. Триаголниците CEG и ACB се слични (правоаголни и $\angle GCE=\angle BAC$ (DC и DA се радиуси на опишаната кружница околу ΔABC, па ΔADC е рамнокрак)), а оттука важи $\dfrac{\overline{GE}}{\overline{CE}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$, т.е. $\dfrac{y}{x}=\dfrac{a}{b}$, односно имаме $y=\dfrac{ax}{b}$. За плоштината на триаголникот BGF имаме:

$$P_{BGF}=P_{BCF}-P_{GBCE}-P_{EFG}=\frac{3x\cdot a}{2}-\frac{a+y}{2}x-\frac{2x\cdot y}{2}=\frac{2xa-3xy}{2}=$$

$$=\frac{2xa-3x\dfrac{ax}{b}}{2}=\frac{2abx-3ax^2}{2b}=\frac{ax}{b}\frac{2b-3x}{2}=\frac{y(2b-3x)}{2}=\frac{\overline{GE}\cdot\overline{FH}}{2}=P_{FHG}.$$

Заклучуваме дека триаголниците BGF и HGF се еднаквоплоштни и имаат иста страна, GF, па затоа нивните висини од темињата B и H се еднакви, односно растојанијата од темињата B и H до правата GF се еднакви. Оттука следува дека GF и BH се паралелни прави.

4. За природните броеви a,b,c, $a<b<c$ важи дека НЗД$(c-a,c-b)=1$. Нека постои цел број d таков што $a+d,b+d,c+d$ се должини на страни на правоаголен триаголник. Докажи дека постојат цели броеви l и m за кои важи $c+d=l^2+m^2$.

Решение. Од условот $a<b<c$ и од тоа што $a+d,b+d,c+d$ се должини на страни на правоаголен триаголник имаме дека важи равенството

$$\left(a+d\right)^2+\left(b+d\right)^2=\left(c+d\right)^2.$$

Со квадрирање и средување добиваме $d^2+\left(2a+2b-2c\right)\cdot d+\left(a^2+b^2-c^2\right)=0.$

Ја решаваме последната равенка како квадратна равенка по d и добиваме решенија $d_{1/2}=-\left(a+b-c\right)\pm\sqrt{\left(a+b-c\right)^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)}$. Решенијата ги трансформираме до следниот облик $d_{1/2}=-\left(a+b-c\right)\pm\sqrt{2\left(c-a\right)\cdot\left(c-b\right)}$. Бројот d е цел број, од каде заклучуваме дека $2\left(c-a\right)\cdot\left(c-b\right)$ е полн квадрат на природен број, односно $2\left(c-a\right)\cdot\left(c-b\right)=x^2$, за $x\in\mathbb{N}$. Од условот на задачата $\text{НЗД}(c-a,c-b)=1$ мора да важи $\left(c-a\right)=2p^2$ и $\left(c-b\right)=q^2$ или $\left(c-a\right)=p^2$ и $\left(c-b\right)=2q^2$, при што во двата случаи $p,q>0,\ \text{НЗД}\left(p,q\right)=1$. Тогаш добиваме $d_{1/2}=-\left(a+b-c\right)\pm 2pq$.

Заради симетрија, ќе го разгледаме само случајот $\left(c-a\right)=2p^2$ и $\left(c-b\right)=q^2$, од каде имаме

$$c+d=c-\left(a+b-c\right)\pm 2pq=c-a+c-b\pm 2pq=2p^2+q^2\pm 2pq=\left(p\pm q\right)^2+p^2.$$

Значи $c+d=\left(p\pm q\right)^2+p^2=l^2+m^2$, за $l=p\pm q,\ m=p,$ што требаше и да се докаже.

Трета година

1. Реши ја равенката $y^3=x^3+8x^2-6x+8$ во множеството природни броеви.

Решение. Да го разгледаме изразот $y^3-(x+1)^3$, во кој со замена на равенството од условот добиваме $y^3-(x+1)^3=y^3-x^3-3x^2-3x-1=5x^2-9x+7$.

Квадратната равенка $5x^2-9x+7=0$ има дискриминанта $D<0$, од каде следува дека квадратната функција $f(x)=5x^2-9x+7$ нема реални решенија и $f(x)=5x^2-9x+7>0$. Тогаш и изразот $y^3-(x+1)^3>0$, односно важи $y>x+1$. Од друга страна, на сличен начин како погоре добиваме дека

$y^3-(x+3)^3=y^3-x^3-9x^2-27x-27=-x^2-33x-19=-(x^2+33x+19),$

па сега за $x\in\mathbb{N}$ (јасно $x>0$), последниот израз е негативен, односно

$$y^3-(x+3)^3=-(x^2+33x+19)<0\text{, од каде } y<x+3.$$

Решенијата на равенката се во множеството природни броеви, па затоа од $x+1<y<x+3$, останува единствена можност $y=x+2$.

Со замена во почетната равенка имаме $(x+2)^3=x^3+8x^2-6x+8$ односно $x^3+6x^2+12x+8=x^3+8x^2-6x+8$. Добиваме еквивалентна равенка

$2x^2 - 18x = 0$, односно $2x(x-9) = 0$. Од тука решенијата се $x = 9$, $y = 11$. (Другото решение на последната равенка, вредноста $x = 0$, не припаѓа на множеството природни броеви, па не се разгледува).

2. Најди ги сите реални броеви a и b $(a < b)$ за кои се исполнети условите $|\lg(a+1)| = \left|\lg\left(-\frac{b+1}{b+2}+1\right)\right|$ и $|\lg(10a+6b+22)| = 4\cdot\lg 2$.

Решение. Забележуваме дека мора $0 < a+1$, а од условот на задачата важи и $0 < a+1 < b+1 < b+2$. Од $|\lg(a+1)| = \left|\lg\left(-\frac{b+1}{b+2}+1\right)\right|$ имаме

$$\left|\lg(a+1)\right| = \left|\lg\left(-\frac{b+1}{b+2}+1\right)\right| = \left|\lg\left(\frac{1}{b+2}\right)\right| = \left|-\lg\left(b+2\right)\right| = \left|\lg\left(b+2\right)\right|.$$

Потребно е да разгледаме два случаи:

Случај 1: За $a+1 = b+2$, од вториот услов следува дека

$$|\lg(10a+6b+22)| = 4\cdot\lg 2 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\lg(16b+32)\right| = \lg 16.$$

Тогаш, можни се следните случаи: $16b+32 = \frac{1}{16}$ или $16b+32 = 16$, односно $b_1 = -2 + \frac{1}{256}$ и $b_2 = -1$, но и двете решенија противречат на условот $0 < b+1$.

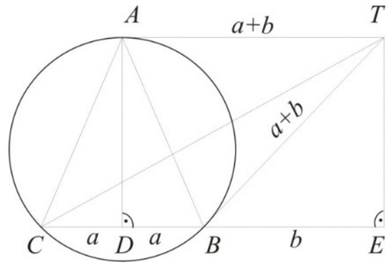
Случај 2: За $a+1 = \frac{1}{b+2}$, имаме

$$10a+6b+22 = 10(a+1)+6(b+2) = 6(b+2)+\frac{10}{b+2}.$$

Сега, од вториот услов добиваме: $\left|\lg(10a+6b+22)\right| = \left|\lg\left(6(b+2)+\frac{10}{b+2}\right)\right| = \lg 16,$

односно $6(b+2)+\frac{10}{b+2} = 16$ или $6(b+2)+\frac{10}{b+2} = \frac{1}{16}$. Ќе воведеме смена $b+2 = w$ во двата случаи. Во првиот случај, добиваме $6w^2 - 16w + 10 = 0$, односно $w_1 = 1, w_2 = \frac{10}{6}$, од каде $b_1 = -1, b_2 = -\frac{1}{3}$. Бидејќи $0 < b+1$, $b_1 = -1$ не е решение. За $b = -\frac{1}{3}, a = -\frac{2}{5}$ добиваме едно решение. Во вториот случај, еквивалентната равенка по w е $96w^2 - w + 160 = 0$, што е квадратна равенка која нема реални решенија. Останува, $b = -\frac{1}{3}, a = -\frac{2}{5}$ да е единственото решение кое ги задоволува двата услови на задачата.

3. Тангентите повлечени од точка T кон кружница k ја допираат кружницата во точки A и B. Нека C е точка од кружницата, различна од точките A и B, таква што $\overline{AB}=\overline{AC}$. Докажи дека $\measuredangle TCB \le 30^0$.



Решение. Согласно условите на задачата, ΔABC е рамнокрак. Нека D е подножјето на висината спуштена од врвот A. Јасно, центарот на кружницата лежи на AD, а заради фактот дека AT е тангента следи дека $AT \perp AD$. Нека E е точка таква да $ADET$ е правоаголник. Означуваме $\overline{CD}=\overline{DB}=a$ и $\overline{BE}=b$. Тогаш $\overline{BT}=\overline{AT}=a+b$. Тврдењето на задачата $\measuredangle TCB \le 30^0$ е еквивалентно со $\cos\measuredangle TCB \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$, односно $\overline{CE} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{CT}$ или уште повеќе $\overline{CE}^2 \ge \frac{3}{4}\overline{CT}^2$. Од Питагорината теорема за триаголниците CTE, BTE добиваме

$$\overline{CT}^2=\overline{CE}^2+\overline{TE}^2=\overline{CE}^2+\overline{BT}^2-\overline{BE}^2=(2a+b)^2+(a+b)^2-b^2=5a^2+b^2+6ab.$$

Тврдењето добива облик $(2a+b)^2 \ge \frac{3}{4}(5a^2+6ab+b^2)$, а е еквивалентно со $a^2-2ab+b^2 \ge 0$ односно со $(a-b)^2 \ge 0$. Како последното неравенство е секогаш точно, точни се и сите претходни еквивалентни неравенства, па и тврдењето на задачата.

4. Ако за реалните броеви x и y важи релацијата $(x+5)^2+(y-12)^2=14^2$, најди ја најмалата вредност на изразот x^2+y^2 и одреди за кои вредности на x и y се достигнува таа.

Решение. Дадената релација може да се напише и во облик $\left(\frac{x+5}{14}\right)^2+\left(\frac{y-12}{14}\right)^2=1$, па затоа има смисла да се стави смена $\frac{x+5}{14}=\cos\theta,\quad \frac{y-12}{14}=\sin\theta,\quad \theta\in[0,2\pi)$ (јасно, во тој случај се добива основниот тригонометриски идентитет $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$). Ако ги изразиме променливите x и y, имаме

$$x^2+y^2=(14\cos\theta-5)^2+(14\sin\theta+12)^2=365+28\cdot(12\sin\theta-5\cos\theta)=$$
$$=365+28\cdot 13\cdot\left(\frac{12}{13}\sin\theta-\frac{5}{13}\cos\theta\right).$$

Да го разгледаме правоаголниот триаголник со страни 5, 12 и 13 (навистина $5^2+12^2=13^2$). Ако φ е помалиот остар агол на овој триаголник, тогаш имаме

$$\sin\varphi=\frac{5}{13}, \cos\varphi=\frac{12}{13}$$

и оттука добиваме

$$x^2+y^2=365+28\cdot 13\cdot\left(\frac{12}{13}\sin\theta-\frac{12}{13}\cos\theta\right)=$$
$$=365+364\left(\cos\varphi\sin\theta-\sin\varphi\cos\theta\right)=365+364\sin(\theta-\varphi).$$

Тогаш $x^2+y^2=365+364\sin(\theta-\varphi)\geq 365-364=1$. Значи, најмалата вредност на изразот x^2+y^2 е 1 и истата се достигнува за $\theta-\varphi=\frac{3\pi}{2}$ односно $\theta=\frac{3\pi}{2}+\varphi$.

Во тој случај

$$x=14\cos\theta-5=14\sin\varphi-5=\frac{5}{13} \qquad \text{и}$$
$$y=14\sin\theta+12=14(-\cos\varphi)+12=-\frac{12}{13}.$$

Четврта година

1. Нека $n>1$ е даден природен број. Докажи дека не постои нетривијална бесконечна аритметичка прогресија чии членови се n-ти степени на природни броеви.

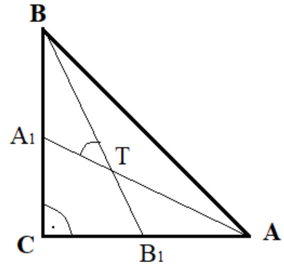
Решение. Нека $a_1^n, a_2^n, a_3^n, \ldots$ се членови на бесконечна аритметичка прогресија. Бидејќи членовите на низата се различни природни броеви (низата е нетривијална), добиваме дека мора $a_1<a_2<a_3<\ldots$. Од условот за аритметичка прогресија важи $a_{k+1}^n-a_k^n=a_k^n-a_{k-1}^n$ за секој $k\geq 2$. Разложуваме и имаме:

$$(a_{k+1}-a_k)(a_{k+1}^{n-1}+a_{k+1}^{n-2}a_k+\ldots.+a_k^{n-1})=(a_k-a_{k-1})(a_k^{n-1}+a_k^{n-2}a_{k-1}+\ldots.+a_{k-1}^{n-1}) \quad \ldots.(1)$$

Бидејќи $a_k^{n-1}+a_k^{n-2}a_{k-1}+\ldots.+a_{k-1}^{n-1}<a_{k+1}^{n-1}+a_{k+1}^{n-2}a_k+\ldots.+a_k^{n-1}$, за да важи (1) мора $a_{k+1}-a_k<a_k-a_{k-1}$ за секој $k\geq 2$. На овој начин добиваме бесконечна опаѓачка низа од природни броеви . $a_2-a_1>a_3-a_2>a_4-a_3>\ldots.$, што не е можно. Следува дека аритметичка прогресија со бараните својства не постои.

2. Тежишните линии повлечени кон катетите во правоаголен триаголник зафаќаат агол ϕ. Ако е познато дека $tg\,\phi=\frac{3}{4}$, најди ги аглите на триаголникот.

Решение. Нека ΔABC е со прав агол во темето C, катети $\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=a$ и хипотенуза $\overline{AB}=c$. Нека A_1 е средина на страната BC, B_1 е средина на страната CA, а должините на тежишните линии се $\overline{AA_1}=t_a$ и $\overline{BB_1}=t_b$. Нека T е тежиштето на триаголникот.



Од тригонометриското равенство $\cos^2\phi = \dfrac{1}{1+tg^2\phi}$ добиваме $\cos\phi = \dfrac{4}{5}$. Користејќи дека $\measuredangle ATB_1 = \measuredangle A_1TB = \phi$ и $\measuredangle ATB = 180° - \phi$, со примена на косинусната теорема имаме: Во ΔTA_1B: $\dfrac{a^2}{4} = \dfrac{t_a^{\,2}}{9} + \dfrac{4t_b^2}{9} - \dfrac{4t_a t_b \cos\phi}{9}$, во ΔTB_1A: $\dfrac{b^2}{4} = \dfrac{t_b^{\,2}}{9} + \dfrac{4t_a^{\,2}}{9} - \dfrac{4t_a t_b \cos\phi}{9}$ и Во ΔTAB: $c^2 = \dfrac{4t_a^{\,2}}{9} + \dfrac{4t_b^2}{9} + \dfrac{8t_a t_b \cos\phi}{9}$.

Од Питагорината теорема и горните равенства, по средување на изразите, добиваме:

$$\frac{20t_a^{\,2}}{9} + \frac{20t_b^{\,2}}{9} - \frac{32t_a t_b \cos\phi}{9} = \frac{4t_a^{\,2}}{9} + \frac{4t_b^2}{9} + \frac{8t_a t_b \cos\phi}{9}.$$

Заменувајќи $\cos\phi = \dfrac{4}{5}$, добиваме $\dfrac{16}{9}\left(t_a - t_b\right)^2 = 0$, т.е. $t_a = t_b$. Од овде следи дека ΔABC е рамнокрак, па земајќи в предвид дека е правоаголен заклучуваме дека неговите агли се $90°, 45°, 45°$.

3. Најди ги сите решенија $k, l, m \in \mathbb{N}$ на равенката $k!\,l! = k! + l! + m!$. ($n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$).

Решение. Без губење на општоста, претпоставуваме дека $k \geq l$. Делејќи ја равенката со $l!$ добиваме $k! = \dfrac{k!}{l!} + 1 + \dfrac{m!}{l!}$. Бидејќи три члена во овој израз се цели броеви, тогаш и четвртиот е исто така цел број, од каде заклучуваме дека $m \geq l$. Натаму, збирот на десната страна е најмалку 3, од каде пак мора $k \geq 3$ и $k!$ е парен број. Оттука, точно еден од броевите $\dfrac{k!}{l!}, \dfrac{m!}{l!}$ е непарен број.

1) Да претпоставиме дека $\dfrac{k!}{l!}$ е непарен и $\dfrac{m!}{l!}$ е парен. Тогаш или $k = l$, или $k = l+1$ и l е парен, при што $m \geq l+1$.

- Ако $k = l$, тогаш $k! = 2 + \dfrac{m!}{l!}$. Ако $k = 3$, тогаш решението е $k = l = 3, m = 4$. Ако пак $k > 3$, тогаш $k!$ е делив со 3, од каде следи дека бројот $k! - 2$ не е делив со 3, значи $m = k+1$ или $m = k+2$. Оттука добиваме дека $\dfrac{m!}{k!} = k+1$ или $\dfrac{m!}{k!} = (k+1)(k+2)$, од каде пак следи дека $k! = k+3$ или $k! = 2 + (k+1)(k+2)$. Со директна проверка утврдуваме дека $k = 3$ и $k = 4$ не се решенија, а за уште поголеми вредности на k левата страна на равенството е поголема од десната.

- Ако $k = l+1$ и l е парен, тогаш треба да се реши равенката $(l+1)! = l + 2 + \dfrac{m!}{l!}$.

Левата страна на равенката и $\frac{m!}{l!}$ се деливи со $l+1$, па $l+2$ мора да е делив со $l+1$ што не е можно.

2) Нека сега $\frac{k!}{l!}$ е парен и $\frac{m!}{l!}$ е непарен. Тогаш или $m=l$, или $m=l+1$ и l е парен.

- Ако $m=l$ тогаш равенката се сведува на $k!l!=k!+2l!$ односно $\frac{k!}{l!}\left(l!-1\right)=2$.

Бидејќи $\frac{k!}{l!}$ е парен, добиваме дека $l!-1=1$ односно $l=2$ и $k!=4$, што не е можно.

- Ако $m=l+1$ и l е парен, тогаш равенката станува $k!l!=k!+(l+2)l!$, односно $k!(l!-1)=(l+2)l!$. Бидејќи $l!$ и $l!-1$ се заемно прости, следи дека бројот $l+2$ мора да биде делив со $l!-1$. Ова е можно само ако $l=2$ и тогаш имаме $k!=8$, што не е можно.

Заклучуваме дека единствено решение на равенката е $k=l=3,\ m=4$.

4. Нека $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ е даден полином чии коефициенти се реални броеви, $a_n\neq 0$ и притоа важи $p(x)\cdot p(2022x^4)=p(2022x^5+x)$. Докажи дека полиномот $p(x)$ нема реални корени.

Решение. Нека k е најмалата вредност за која важи $a_k\neq 0$. Добиваме

$p(2022x^4)=a_n2022^nx^{4n}+a_{n-1}2022^{n-1}x^{4n-4}+...+a_k2022^kx^{4k}$

$p(x)\cdot p(2022x^4)=a_n^2 2022^nx^{5n}+...+a_k^2 2022^kx^{5k}$ ... (1)

$p(2022x^5+x)=a_n(2022x^5+x)^n+...+a_k(2022x^5+x)^k=a_n2022^nx^{5n}+...+a_kx^k$ ... (2)

Од $p(x)\cdot p(2022x^4)=p(2022x^5+x)$, (1) и (2) добиваме дека $k=5k,$ па оттука $k=0.$

Значи $a_0\neq 0,$ од каде следува дека $p(0)=a_0\neq 0.$

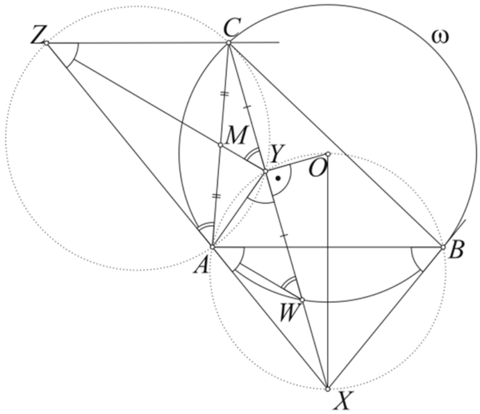
Да претпоставуваме дека $x_0\neq 0$ е реален корен на полиномот $p(x).$ Следува $p(2022x_0^5+x_0)=0,$ т.е., $x_1=2022x_0^5+x_0$ е реален корен на $p(x).$ На овој начин ја формираме рекурентната низа $\left\{x_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ за која важи $x_n=2022x_{n-1}^5+x_{n-1}$ и притоа секој нејзин член е корен на полиномот $p(x).$ Бидејќи $\frac{x_n}{x_{n-1}}=2022x_{n-1}^4+1>1$, следува дека низата $\left\{x_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ е строго монотоно растечка. Оттука добиваме дека $p(x)$ има бесконечно многу реални корени, што не е можно. Јасно, заклучуваме дека $p(x)$ нема реални корени.

39. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА 2022

Минатата година се одржа 39. Балканска математичка олимпијада во Аргос, Кипар од 4 до 9 мај 2022 година. Лидер на тимот беше Никола Велов, а заменик лидер Петар Филиповски. На ова олимпијада за прв пат во историјата на Македонија постигнат е златен медал на БМО, освоен од **Никола Спировски**. Покрај златниот медал, имавме и два сребрени медали, освоени од **Дамјан Давков** и **Јан Стојановски**, еден бронзен медал освоен од **Алексиј Тасиќ** и две пофалници освоени од **Јасна Илиева** и **Блаже Суклевски**. Вреди да се напомене дека екипата оваа година го постигна најголемиот екипен успех со освоени 118 поени и по бројот на освоени медали го зеде третото место после Романија и Грција.

Задача 1. Нека ABC е остроаголен триаголник во кој $AC \neq AB$ со опишана кружница ω со центар O. Нека t_A и t_B се тангентите на ω во A и B соодветно и X е нивната пресечна точка. Нека Y е подножјето на нормалата спуштена од O на отсечката CX. Правата низ C паралелна на AB ја сече t_A во Z. Докажи дека правата YZ минува низ средината на отсечката AC.

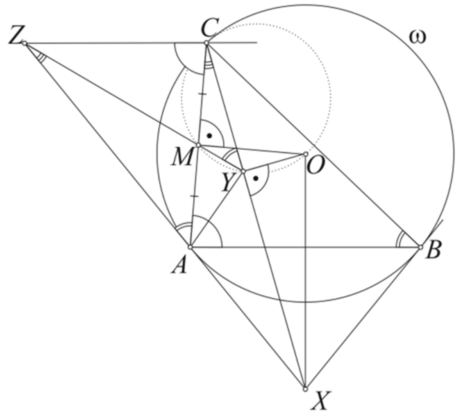
Решение1: Да забележиме дека четириаголникот $OAXB$ е тетивен со дијаметар OX. Точката Y лежи на опишаната кружница, бидејќи $OY \perp XC$. Според ова $\measuredangle AZC = \measuredangle XAB = \measuredangle ABX = \measuredangle AYX$, па и $CYAZ$ е тетивен.



Нека M е пресечната точка на YZ и AC, а W е втората пресечна точка на CY со ω. Од тетивноста на $CYAZ$ добиваме дека $\measuredangle CYZ = \measuredangle CAZ$, а бидејќи ZA е тангента на ω важи и $\measuredangle CAZ = \measuredangle CWA$, па $\measuredangle CYM = \measuredangle CWA$. Според ова $\Delta CWA \sim \Delta CYM$, а бидејќи CW е тетива во ω и Y е подножје на нормалата спуштена од O следува дека Y е средна точка на отсечката $\overline{CW}$. Сега од сличноста следува дека M е средна точка на отсечката $\overline{AC}$. ■

Решение2: Нека M е средината на отсечката $\overline{AC}$. За аглите важи $\measuredangle CAZ = \measuredangle CBA$ и $\measuredangle ZCA = \measuredangle BAC$, па $\Delta CAZ \sim \Delta ABC$. Правата низ C, Y и X е C-симедијана во ΔABC, а ZM е соодветната тежишна линија во ΔCAZ, па од изогоналноста следува дека $\measuredangle AZM = \measuredangle ACY$. Според ова:

$$\measuredangle ZMA = 180° - \measuredangle AZM - \measuredangle MAZ = 180° - \measuredangle ACY - \measuredangle CBA \qquad (1)$$

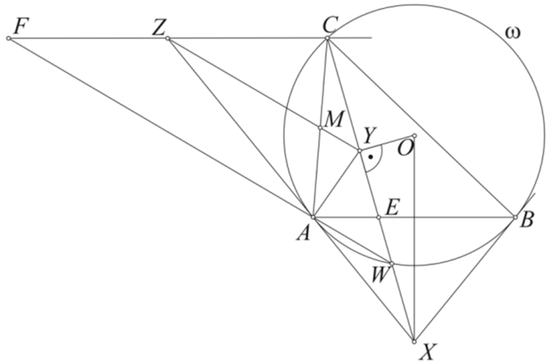


Четириаголникот $CMYO$ е тетивен, бидејќи $\measuredangle OMC = \measuredangle OYC = 90°$. Според ова $\measuredangle CYM = \measuredangle COM = \frac{\measuredangle COA}{2} = \measuredangle CBA$, од каде добиваме:

$$\measuredangle YMC = 180° - \measuredangle MCY - \measuredangle CYM = 180° - \measuredangle ACY - \measuredangle CBA \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека $\measuredangle YMC = \measuredangle ZMA$ и бидејќи точките A, C и M се колинеарни, следува дека и точките Z, M и Y се колинеарни. ■

Решение3: Нека W е втората пресечна точка на CX со ω, E е пресекот на AB со CX и F е пресекот на AW со CZ.



Од $(C,W;E,X) = -1$ (AB е полара за X во однос на ω), по проекција на CZ преку A добиваме $(C,F;Z,\infty) = -1$. Според ова Z е средина на $\overline{CF}$, а бидејќи Y е средина на $\overline{CW}$, следува дека ZY ја преполовува $\overline{AC}$. ■

Задача 2. Нека a, b и n се позитивни цели броеви за кои $a > b$ и важат следните тврдења:

(i) a^{2021} е делител на n

(ii) b^{2021} е делител на n

(iii) 2022 е делител на $b - a$

Докажи дека постои подмножество T од множеството позитивни делители на n, такво што збирот од елементите во T е делив со 2022, но не е делив со 2022^2.

Решение: Ако $1011 | a$, тогаш $1011^{2021} | n$, па можеме да го избереме множеството $T=\{1011, 1011^2\}$, за кое $1011+1011^2=2022\cdot 506$. Според ова можеме да претпоставиме дека $3 \nmid a$ или $337 \nmid a$.

Лема: Ако k е позитевен цел број, тогаш $a^k b^{2021-k} | n$.

Доказ: Бидејќи $n^{2021}=n^k \cdot n^{2021-k}$ е делив со $a^{2021k} \cdot b^{2021(2021-k)}$, по пресметка на 2021 корен го добиваме бараното тврдење. □

Сега ќе докажеме дека множеството $T=\{a^k b^{2021-k} | 0\le k\le 2021\}$ го задоволува тврдењето. Според лемата сите елементи од T се делители на n. За нивниот збир важи:

$$S=\sum_{k=0}^{2021} a^k b^{2021-k} \equiv \sum_{k=0}^{2021} a^k a^{2021-k} \equiv \sum_{k=0}^{2021} a^{2021} \equiv 2022\cdot a^{2021} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, 2022)$$

Од друга страна $S=\frac{a^{2022}-b^{2022}}{a-b}$.

Ако $3 \nmid a$, тогаш $3 \nmid b$, па ако 3^t е највисокиот степен на 3 кој е делител на $a-b$, според LTE (Lifting the exponent lemma) 3^{t+1} е највисокиот степен на 3 кој е делител на $a^{2022}-b^{2022}$ ($2022=3\cdot 337$), па $9 \nmid S$ и оттука $2022^2 \nmid S$.

Ако $3 | a$, тогаш $337 \nmid a$ и $337 \nmid b$. Од исти причини во овој случај $337^2 \nmid S$, па повторно $2022^2 \nmid S$. ■

Задача 3. Најди ги сите функции $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$

$$f\left(y\left(f\left(x\right)\right)^3+x\right)=x^3 f\left(y\right)+f\left(x\right)$$

за секои $x, y>0$.

Решение 1: За $y=\frac{s}{f(x)^3}$ добиваме $f\left(x+s\right)=x^3 f\left(\frac{s}{f(x)^3}\right)+f\left(x\right)$ (1), за секои $s, x>0$. Од каде следува дека бараната функција е строго растечка. Нека $f\left(1\right)=c$. Ако $c<1$, за $x=1$ и $y=\frac{1}{1-c^3}$ добиваме $y=yc^3+1$, па оттука $f\left(y\right)=f\left(yc^3+1\right)=f\left(y\right)+c$ што е во контрадикција со $c>0$.

Нека сега $c>1$. Ќе докажеме дека $f\left(1+c^3+\ldots+c^{3n}\right)=\left(n+1\right)c$ за секој цел број $n\ge 0$ со индукција. Очигледно тврдењето е точно за $n=0$. Нека тврдењето е точно за n. Во (1) заменуваме $x=1$ и $s=c^3+\ldots+c^{3(n+1)}$ и добиваме

$$f\left(1+c^3+\ldots+c^{3n}+c^{3(n+1)}\right)=f\left(1+c^3+\ldots+c^{3n}\right)+c=\left(n+1\right)c$$

со што го завршивме индукцискиот доказ.

Ако замениме $x=1+c^3+\ldots+c^{3(n-1)}$ и $s=3^{3n}$ во (1) добиваме:

$$(n+1)c=f\left(1+c^3+\ldots+c^{3n}\right)=\left(1+c^3+\ldots+c^{3(n-1)}\right)^3 f\left(\frac{c^{3n}}{(nc)^3}\right)+nc$$

од каде следува $f\left(\frac{c^{3(n-1)}}{n^3}\right)=\frac{c}{\left(1+c^3+\ldots+c^{3(n-1)}\right)^3}<c=f(1)$. Бидејќи f е растечка, важи $\frac{c^{3(n-1)}}{n^3}<1$, за секој природен број n. Меѓутоа за $\sqrt{n}>\frac{3}{2\ln c}$ добиваме дека

$$c^{3(n-1)}>c^{2\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}>c^{\frac{3}{\ln c}\sqrt{n}}=e^{3\sqrt{n}}=\left(e^{\sqrt{n}}\right)^3>\left(\left(\sqrt{n}\right)^e\right)^3>n^3$$

што е контрадикција.
Според ова $c=1$ и за $x=1$ имаме $f(y+1)=y+1$, од каде со индукција добиваме дека $f(n)=n$ за секој природен број n. За природни броеви $x=n$ и m, ако $y=\frac{m}{n}$ важи $f\left(\frac{m}{n}n^3+n\right)=n^3 f\left(\frac{m}{n}\right)+n$ од каде $m\cdot n^2+n=n^3 f\left(\frac{m}{n}\right)+n$ и по средување добиваме $f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}$. ■

Решение 2 (за случајот $c>1$) Бидејќи f е строго монотоно растечка:

$$f(y)+f(1)=f\left(y\cdot f(1)^3+1\right)>f\left(y\cdot f(1)^3\right)\Rightarrow f\left(c^3y\right)<f(y)+c$$

за секој $y>0$. Со индукција добиваме дека $f\left(c^{3n}\right)<(n+1)c$, за секој природен број n.
За $x=c^{3n}$ и $t=c^{3n+3}-c^{3n}$ во (1) добиваме:

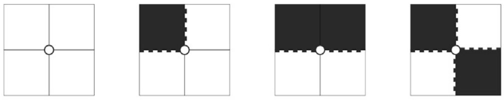
$$(n+2)c>f\left(c^{3n+3}\right)>f\left(c^{3n+3}\right)-f\left(c^{3n}\right)=c^{9n}f\left(\frac{c^{3n+3}-c^{3n}}{f\left(c^{3n}\right)^3}\right)>c^{9n}f\left(\frac{c^{3n+3}-c^{3n}}{c^3(n+1)^3}\right)$$

Бидејќи $\frac{c^{3n+3}-c^{3n}}{c^3(n+1)^3}=\frac{c^{3n}}{(n+1)^3}\cdot\frac{c^3-1}{c^3}>1$, за доволно голем n, добиваме $(n+2)>c^{9n-1}$, што е неточно за доволно голем n. ■

Задача 4. За непарен природен број $n\geq 3$, разгледуваме квадратна $n\times n$ табла со n^2 полиња. На почетокот Дионис го бои секое од полињата на таблата црвено или сино. Знаеме дека жаба може да да скокне од едно поле на друго, ако и само ако двете полиња се обоени со иста боја и имаат барем едно заедничко теме. Зантиј гледа како е обоена таблата и поставува k жаби така што за секое од полињата на таблата постои жаба која може да стигне по конечно многу чекори (може и нула). Најди ја најмалата вредност за k за која вакво поставување на жаби е можно независно од почетното обојување на таблата.

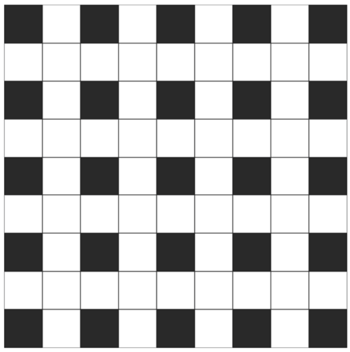
Решение: Го дефинираме графот чии темиња се темињата на мрежата добиена од квадратната табла. Две темиња се поврзани во графот со ребро, ако се соседни во квадратната мрежа и двете квадратчиња од страните на реброто се во различна боја.

Компонентите на сврзаност со барем две темиња во овој граф се границите на еднобојните области. Секоја ваква област може да биде покриена со една жаба, па најмалиот број на жаби ќе биде еднаков на бројот на области плус една „надворешна“ компонента.



Бидејќи нема ребра по надворешната граница од таблата, секое теме на ќош има степен 0, а останатите по работ, 0 или 1. Внатрешните ребра може да имаат степен 0, 2 или 4, што се гледа од цртежот погоре. Од друга страна изолираните компоненти имаат најмалку 3 темиња ако се на ќош, а 4 темиња во спротивно.

Нека N е бројот на вакви компоненти. Од претходната дискусија следува дека има најмалку $4N-4$ темиња. Освен тоа ќошевите се изолирани, па $4N \leq (n+1)^2 \Leftrightarrow N \leq \frac{(n+1)^2}{4}$, па потребни се најмалку $\frac{(n+1)^2}{4}+1$ жаби.



На цртежот погоре е прикажано боење за кое се достигнува овој број (обоено наместо црвено и необоено наместо сино). Поточно ги боиме квадратчињата кои се во непарна редица и непарна колона. На овој начин има точно $\frac{(n+1)^2}{4}$ обоени квадратчиња и исто толку изолирани компоненти и имаме една необоена компонетта, па потребни се најмалку $\frac{(n+1)^2}{4}+1$ жаби. ■

СОДРЖИНА

Стево Ѓоргиев, Маја Танчевска
ВИДОВИ СЛУЧАЈНИ ПРИМЕРОЦИ (ПРВ ДЕЛ)................................ 1
Иванчо Павлов
МЕТОДОЛОГИИ, ТЕХНИКИ И
ТИПОВИ НА ТЕСТИРАЊЕ.. 5
Петар Филиповски, Јулија Митреска
ТЕОРЕМА НА ВИЛСОН... 7
ОЛИМПИСКО КАТЧЕ
Мирко Петрушевски, Петар Филиповски
ИЗОГОНАЛНИ ПАРОВИ ПРАВИ И ТОЧКИ
(продолжува од минатиот број)……………...................................... 11
ЗАДАЧИ ОД УЧИЛНИЦАТА СИГМА 128... 14
РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД УЧИЛНИЦАТА СИГМА 127............ 16
РУБРИКА ЗАДАЧИ, СИГМА 128.. 24
РЕШЕНИЈА, РУБРИКА ЗАДАЧИ СИГМА 127.................................... 25
НАГРАДНИ ЗАДАЧИ.. 32
РЕШЕНИЈА НА НАГРАДНИТЕ ЗАДАЧИ ОД СИГМА 127................. 32
65 ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА
УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА
16.04.2022.. 34
39. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА 2022…………….. 44