Сојуз на математичари на Македонија
ЕСЕНСКА МАТЕМАТИЧКА ШКОЛА 2022

Петар Соколоски

СЛИЧНОСТИ И НЕКОИ ПОВАЖНИ ТЕОРЕМИ

скрипта со предавања и задачи
за учениците од IX одделение и I година

15. октомври – 19. ноември 2022

Петар Соколоски

СЛИЧНОСТИ И НЕКОИ ПОВАЖНИ ТЕОРЕМИ

скрипта со предавања и задачи
за учениците од IX одделение и I година

ЕСЕНСКА МАТЕМАТИЧКА ШКОЛА 2022
за учениците од основните и средните училишта

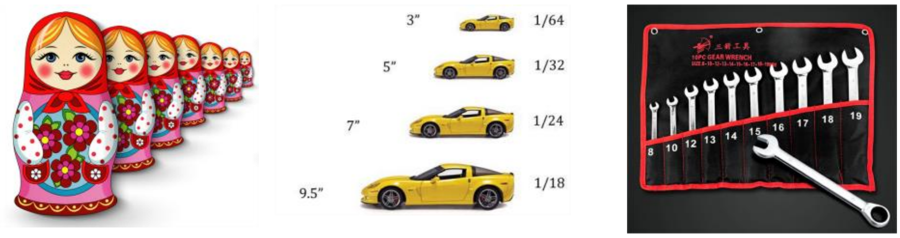
Издавач:
Сојуз на математичари на Македонија

1. Складност на геометриски форми

Формите (1Д, 2Д и 3Д) може генерално да ги поделиме во три групи:

- форми кои имаат ист облик и иста големина (складни или конгруентни форми) (сл. 1-1);
- форми кои имаат ист облик и различна големина (слични форми) (сл. 1-2);
- форми кои имаат различен облик и различна големина.

Слика 1-1



Слика 1-2

Дефиниција. Две форми F и G се *складни* (*еднакви* или *конгруентни*) ако едната од нив преку разни движења (транслација, ротација и симетрија) може да се совпадне со другата. Ознака за складноста на формите F и G е

$$\boldsymbol{F} \cong \boldsymbol{G}.$$

Пример 1. Кога две точки (прави, полуправи) се складни?

Одговор. Секои две точки (прави, полуправи) се складни. Очигледно е дека една точка (права) секогаш може да се премести и да се совпадне со друга точка (права). Во случајот на полуправи, потребно е почетокот на едната полуправа да се пренесе на другата полуправа, а потоа произволна точка од неа да се совпадне со точка од втората полуправа.

Пример 2. Кога две отсечки се складни?

Одговор. Две отсечки се складни кога имаат еднакви должини.

Пример 3. Кога два агла се складни?

Одговор. Два агла се складни кога имаат еднаква големина.

Пример за складни агли се: накрсни агли, наизменични и согласни агли на трансферзала итн.

Пример 4. Кога две кружници се складни?

Одговор. Две кружници се складни кога имаат еднакви радиуси.

Задача 1. Кои страни и агли се складни кај:

а) рамностраниот триаголник;

б) рамнокракиот триаголник;

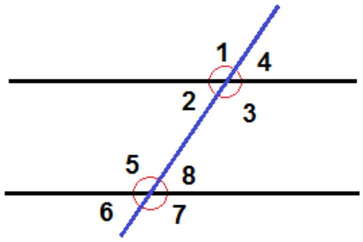
в) паралелограмот;

г) делтоидот;

д) ромбот?

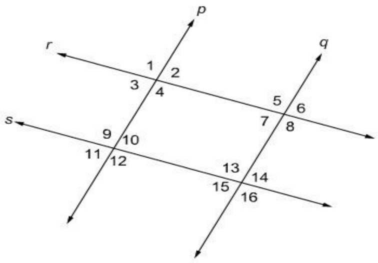
Задача 2. Наведи кои од аглите на сликите 1-3 и 1-4 се складни:

а) $p||q$



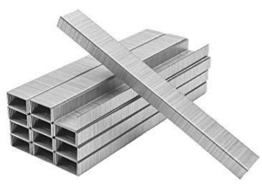
Слика 1-3

б) $p||q, r||s$



Слика 1-4

Задача 3. Наведи кои од формите на сликата 1-5 подолу се складни, а кои се слични.



а)

б)

в)

г)

д)

Слика 1-5. Складни и слични форми

1. Складност на триаголници

Зошто триаголници? Една причина е што триаголникот е наједноставниот многуаголник - со најмал број на страни и агли. Друга причина е - секој многуаголник може да се раздели на повеќе триаголници на различни начини (на пример, со повлекување на сите дијагонали од едно теме). Според тоа, ако добро се проучат својствата на триаголниците, полесно би можеле да се разберат својствата на другите многуаголници.

1.1. Елементи на триаголник

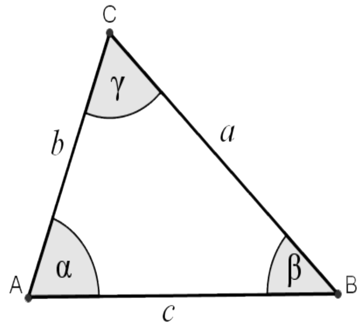
1.2. Триаголникот е рамнинска (2Д) форма чии основни елементи се: неговите темиња, страни и агли. За даден триаголник ABC ќе ги користиме следниве ознаки:

$$\measuredangle CAB = \alpha, \qquad \measuredangle ABC = \beta, \qquad \measuredangle BCA = \gamma.$$

Аголот кај темето A е α, аголот кај темето B е β и аголот кај темето C е γ.

$$\overline{AB} = c, \qquad \overline{BC} = a, \qquad \overline{CA} = b.$$

Страната спроти темето A е a, страната спроти темето B е b и страната спроти темето C е c (види слика 1-6).



Слика 1-6

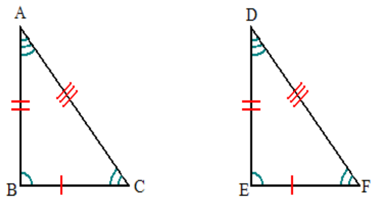
1.2. Складност на два триаголника

Природно се поставува прашањето: кога два триаголника се складни?

Дефиниција 1. Два триаголника се складни кога имаат складни (еднакви) страни и складни (еднакви) агли. Тоа значи дека ако $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, тогаш (види слика 1-7):

$$\overline{AB} = \overline{DE}, \qquad \overline{BC} = \overline{EF}, \qquad \overline{CA} = \overline{FD},$$

$$\measuredangle ABC = \measuredangle DEF, \qquad \measuredangle BCA = \measuredangle EFD, \qquad \measuredangle CAB = \measuredangle FDE.$$



Слика 1-7

Внимавај! Мора да се задржи редоследот на соодветните букви!!! Ако $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, тогаш $\triangle BCA \cong \triangle EFD$, $\triangle ACB \cong \triangle DFE$, но $\triangle ABC \ncong \triangle DFE$, $\triangle ABC \ncong \triangle EDF$!!!

Задача 4. Нека $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$. Дополни ги празните места за да се добие точно равенство:

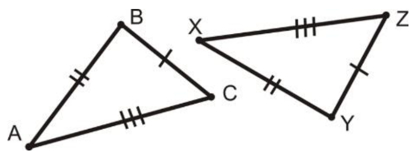
$\overline{AB} =$_____, $\overline{XZ} =$_____, $\overline{XY} =$_____, $\overline{CA} =$_____, $\measuredangle CAB =$_____, $\measuredangle XZY =$_____, $\measuredangle ABC =$_____, $\measuredangle XYZ =$_____, $\measuredangle BCA =$_____.

1.3. Признаци за складност на два триаголника

ССС: Ако трите страни на еден триаголник се еднакви на трите страни од друг триаголник, тогаш двата триаголника се складни (види слика 1-8).

Ако $\overline{AB} = \overline{XY}$, $\overline{BC} = \overline{YZ}$, $\overline{CA} = \overline{ZX}$,

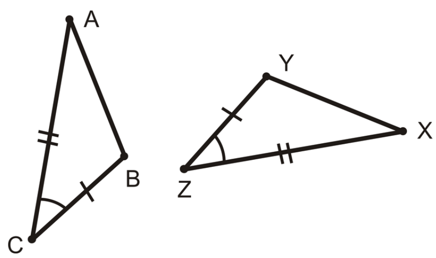
тогаш $\boldsymbol{\triangle ABC \cong \triangle XYZ}$.



Слика 1-8

САС: Ако две страни и аголот што тие страни го формираат кај еден триаголник се еднакви на две страни и аголот што тие страни го формираат кај друг триаголник, тогаш двата триаголника се складни (види слика 1-9). Ако $\overline{CA} = \overline{ZX}$, $\overline{CB} = \overline{ZY}$, $\measuredangle ACB = \measuredangle XZY$, тогаш

$\boldsymbol{\triangle ABC \cong \triangle XYZ}$.

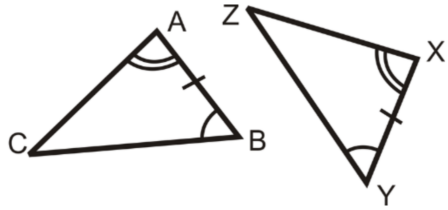


Слика 1-9

АСА: Ако двата агла над една страна во триаголник се еднакви на двата агла над соодветната страна кај друг триаголник, и тие две страни се еднакви, тогаш двата триаголника се складни (види слика 1-10).

Ако $\measuredangle CAB = \measuredangle ZXY$, $\overline{AB} = \overline{XY}$, $\measuredangle ABC = \measuredangle XYZ$,

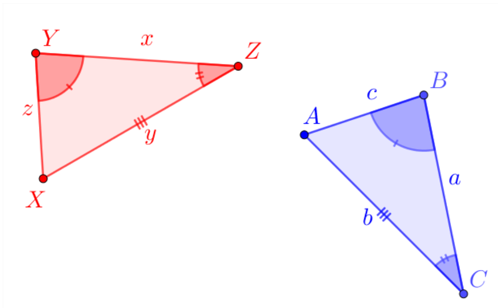
тогаш $\triangle \boldsymbol{ABC} \cong \triangle \boldsymbol{XYZ}$.



Слика 1-10

ААС: Ако два агла и страната спроти помалиот (поголемиот) од нив во еден триаголник се еднакви на два агла и страната спроти помалиот (поголемиот) од нив во друг триаголник, тогаш двата триаголника се складни (види слика 1-11).

Ако $\overline{AC} = \overline{XZ}$, $\measuredangle BCA = \measuredangle YZX$, $\measuredangle ABC = \measuredangle XYZ$, $\measuredangle ACB < \measuredangle ABC$, тогаш $\triangle \boldsymbol{ABC} \cong \triangle \boldsymbol{XYZ}$.

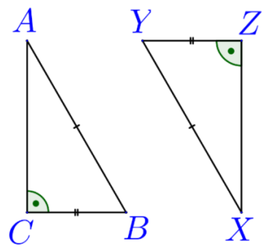


Слика 1-11

Признакот ААС најчесто се користи кај правоаголните триаголници и познат е како признак **хипотенуза-катета**:

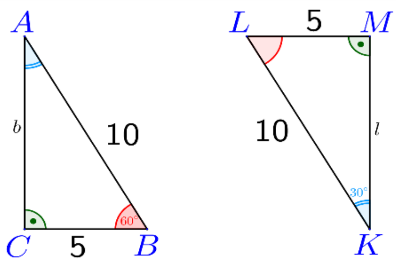
ХК: Ако хипотенузата и една катета кај еден правоаголен триаголник се еднакви на хипотенузата и една катета кај друг правоаголен триаголник тогаш двата правоаголни триаголника се складни (види слика 1-12).

Ако $\measuredangle ACB = \measuredangle XZY = 90°$, $\overline{AB} = \overline{XY}$ и $\overline{BC} = \overline{YZ}$, тогаш $\triangle \boldsymbol{ABC} \cong \triangle \boldsymbol{XYZ}$.



Слика 1-12

Пример 5. Правоаголните триаголници ABC и KLM на слика 1-13 се складни според признакот ХК затоа што $\overline{AB} = \overline{KL} = 10$, $\measuredangle ACB = 90° = \measuredangle KML$ и $\overline{BC} = \overline{LM} = 5$. Јасно е дека $\overline{CA} = \overline{MK}$ и $\measuredangle CAB = 90° - \measuredangle ABC = 90° - 60° = 30° = \measuredangle MKL$. Исто така и $\measuredangle KLM = 90° - \measuredangle MKL = 90° - 30° = 60° = \measuredangle ABC$.

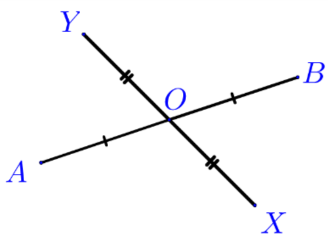


Слика 1-13

Задача 5. Нека отсечките AB и XY се сечат и се преполовуваат во точката O (види слика 1-14). Докажи дека: $\overline{AX} = \overline{BY}$, $\overline{AY} = \overline{BX}$, $\measuredangle XAB = \measuredangle YBA$.

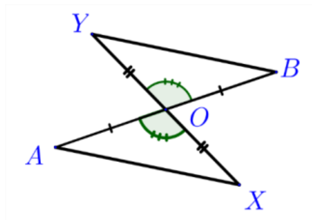
Решение. Ги повлекуваме отсечките AX и BY (види слика 1-15). Триаголниците AOX и BOY се складни според признакот САС ($\overline{AO} = \overline{BO}$, $\overline{XO} = \overline{YO}$, $\measuredangle AOX = \measuredangle BOY$) па $\measuredangle XAB = \measuredangle XAO = \measuredangle YBO = \measuredangle YBA$ и $\overline{AX} = \overline{BY}$. Слично, заради $\overline{AO} = \overline{BO}$, $\overline{XO} = \overline{YO}$, $\measuredangle AOY = \measuredangle BOX$,

имаме дека $\triangle AOY \cong \triangle BOX$ според признакот САС: па $\overline{AY} = \overline{BX}$.



Слика 1-14

Задача 6. Нека отсечките AB и XY се преполовуваат во точката O (види слика 1-14). Ако $\overline{AX} = 14$, $\overline{AB} = 44$, $\overline{XY} = 38$, тогаш најди го периметарот на триаголникот YOB.



Слика 1-15

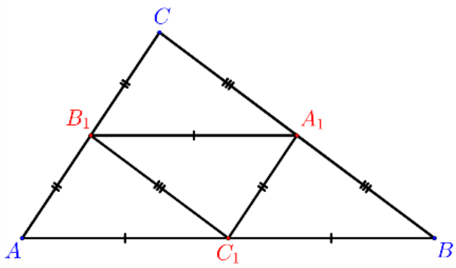
Задача 7. Даден е триаголникот ABC. Нека A_1, B_1, C_1 се средини на страните BC, CA и AB соодветно. Ги повлекуваме средните линии B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 (види слика 1-16). Колку складни триаголници се добиваат на овој начин? Именувај ги и испиши ги паровите од складни триаголници.

Решение. Секоја средна линија е паралелна со страната на триаголникот со која нема заеднички точки и има должина која е еднаква на половина од должината на таа страна. Тоа значи дека:

$$\overline{A_1B_1} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{AC_1} = \overline{C_1B},$$

$$\overline{B_1C_1} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \overline{BA_1} = \overline{A_1C},$$

$$\overline{C_1A_1} = \frac{1}{2}\overline{CA} = \overline{CB_1} = \overline{B_1A}.$$



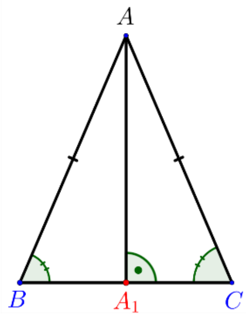
Слика 1-16

Според признакот ССС добиваме:

$$\triangle AC_1B_1 \cong \triangle C_1BA_1 \cong \triangle B_1A_1C \cong \triangle A_1B_1C_1.$$

Задача 8. Докажи дека кај рамнокрак триаголник висината спуштена од врвот се совпаѓа со симетралата на основата, тежишната линија од врвот кон основата и со симетралата на аголот кај врвот.

Решение. Нека $\triangle ABC$ е рамнокрак, $\overline{AB} = \overline{AC}$. Нека AA_1 е висина спуштена од темето A кон основата BC (види слика 1-17). Триаголниците ABA_1 и ACA_1 се правоаголни, имаат еднакви хипотенузи $\overline{AB} = \overline{AC}$ и заедничка катета AA_1. Според признакот ХК, $\triangle ABA_1 \cong \triangle ACA_1$. Од складноста, $\overline{A_1B} = \overline{A_1C}$, т.е. A_1 е средина на основата BC и затоа висината AA_1 во исто време е и тежишна линија.

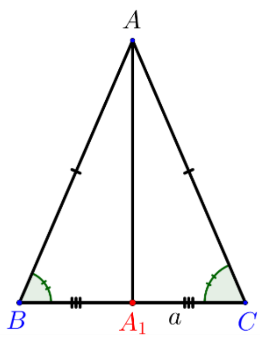


Слика 1-17

Бидејќи $AA_1 \perp BC$ и A_1 е средина на BC, добиваме дека AA_1 е симетрала на BC.

Исто така, од складноста, ќе важи и $\measuredangle BAA_1 = \measuredangle CAA_1$ па AA_1 е симетрала на аголот при врвот, т.е. $\measuredangle BAC$.

Обратно, ако AA_1 е тежишна линија во рамнокракиот $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{AC}$ (види слика 1-18). Заради $\overline{A_1B} = \overline{A_1C}$ и $\measuredangle A_1BA = \measuredangle A_1CA$, според признакот САС, важи $\triangle ABA_1 \cong \triangle ACA_1$. Затоа $\measuredangle BA_1A = \measuredangle CA_1A = x$. Бидејќи $\measuredangle BA_1A + \measuredangle CA_1A = 180°$, имаме $2x = 180°$, т.е. $x = 90°$ од каде се добива дека AA_1 е висина спуштена од темето A кон основата BC.

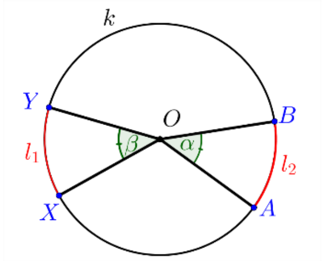


Слика 1-18

Задача 9. Дадена е кружница $k(O,R)$ и точки A,B,X,Y на k (види слика 1-19).

а) Докажи дека ако аглите AOB и XOY се складни, тогаш лаците AB и XY се складни (Два лака на една кружница се складни ако имаат еднакви должини).

б) Докажи дека ако лаците AB и XY се складни, тогаш аглите AOB и XOY се складни.



Слика 1-19

Решение. Знаеме дека должината на кружен лак од кружница со радиус R, кој одговара на централен агол $\alpha°$ изнесува $l = \frac{\alpha}{360}2R\pi$.

а) Затоа, јасно е дека, ако $\alpha = \beta$, тогаш $l_1 = \frac{\alpha}{360}2R\pi, l_2 = \frac{\beta}{360}2R\pi,$ па $l_1 = l_2$.

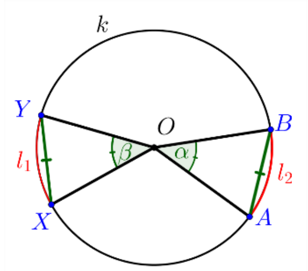
б) Ако $l_1 = l_2$, каде $l_1 = \frac{\alpha}{360}2R\pi, l_2 = \frac{\beta}{360}2R\pi$, тогаш

$$\frac{\alpha}{360}2R\pi = \frac{\beta}{360}2R\pi, \qquad \text{т. е.} \quad \alpha = \beta.$$

Задача 10. Дадена е кружница $k(O,R)$ и точки A,B,X,Y на k (види слика 1-20).

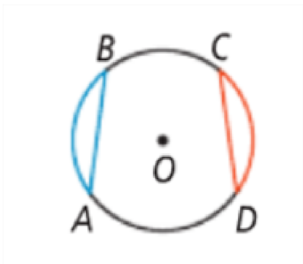
а) Докажи дека ако аглите AOB и XOY се складни, тогаш отсечките AB и XY се складни.

б) Докажи дека ако отсечките AB и XY се складни, тогаш аглите AOB и XOY се складни.



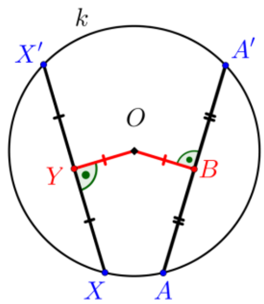
Слика 1-20

Задача 11. Дадена е кружница $k(O,R)$ и точки A, B, C, D на k (види слика 1-21).
а) Докажи дека ако лаците AB и CD се складни, тогаш отсечките AB и CD се складни.
б) Докажи дека ако отсечките AB и CD се складни, тогаш лаците AB и CD се складни.



Слика 1-21

Задача 12. Дадена е кружница $k(O,R)$ и точки A, A', X, X' на k. B и Y се средини на отсечките AA' и XX', соодветно.
а) Докажи дека ако отсечките OB и OY се складни, тогаш отсечките AA' и XX' се складни.
б) Докажи дека ако отсечките AA' и XX' се складни, тогаш отсечките OB и OY се складни.



Слика 1-22

Дополнителни задачи

1. а) Да се покаже дека ако $ABCD$ е паралелограм, тогаш спротивните страни му се складни, т.е. $\overline{AB} = \overline{CD}$ и $\overline{AD} = \overline{BC}$.
   б) Ако во четириаголник спротивните страни се еднакви, тогаш тој е паралелограм.
2. а) Докажете дека кај паралелограмот дијагоналите се преполовуваат.
   б) Да се докаже дека ако во четириаголник дијагоналите се преполовуваат, тогаш тој четириаголник е паралелограм.
3. (*) Во триаголникот ABC, $\angle ABC=120°$. На продолжетоците на страните AB и CB, од страната на точката B, редоследно се означени точките P и Q, така што $\overline{AP} = \overline{CQ} = \overline{AC}$. Докажете дека $\angle PIQ=90°$, каде точката I е центар на вписаната кружница во триаголникот ABC.