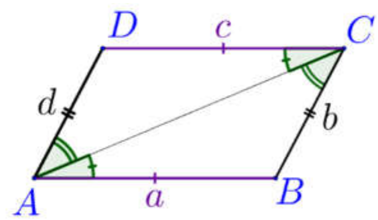
Решенија на задачите за домашна работа

Домашна работа 1

1. а) Да се покаже дека ако $ABCD$ е паралелограм, тогаш спротивните страни му се складни, т.е. $\overline{AB} = \overline{CD}$ и $\overline{AD} = \overline{BC}$.
   б) Ако во четириаголник спротивните страни се еднакви, тогаш тој е паралелограм.



Решение. а) Ќе ги разгледаме $\triangle ABC$ и $\triangle CDA$. За нив важи:

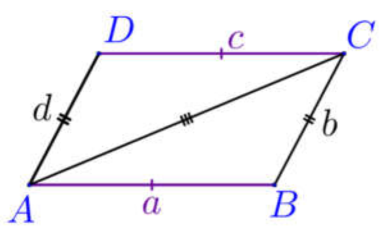
i) $\measuredangle ACB = \measuredangle CAD$ како агли со паралелни краци.

ii) $\overline{AC} = \overline{CA}$ - заедничка страна.

iii) $\measuredangle ACD = \measuredangle CAB$ како агли со паралелни краци.

Според признакот АСА, $\triangle ABC \cong \triangle CDA$. Затоа, важи дека $\overline{AB} = \overline{CD}$ и $\overline{BC} = \overline{DA}$.

б) Нека $ABCD$ е четириаголник во кој $\overline{AB} = \overline{CD}$ и $\overline{AD} = \overline{BC}$. Ќе покажеме дека $AB||DC$ и $AD||BC$, т.е. дека $ABCD$ е паралелограм (види ја сликата лево). Ќе ги разгледаме $\triangle ABC$ и $\triangle CDA$. Имаме дека: i) $\overline{AB} = \overline{CD}$ - од условот на задачата; ii) $\overline{AC} = \overline{CA}$ - заедничка страна; iii) $\overline{AD} = \overline{CB}$ - од условот на задачата б). Заради i), ii) и iii) важи $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (според признакот ССС). Затоа важи дека $\measuredangle ACB = \measuredangle CAD$. Овие два агла, покрај тоа што се еднакви, имаат по еден крак кој лежи на правата AC, а другите два крака им се во различни полурамнини во однос на правата AC. Тоа значи дека овие агли имаат паралелни краци, т.е. $AB||DC$.



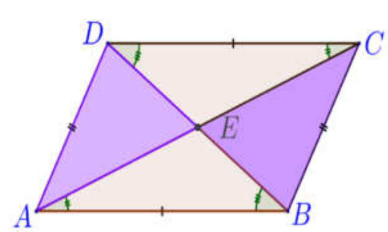
Слично, $\measuredangle ACD = \measuredangle CAB$. И овие два агла, покрај тоа што се еднакви, имаат по еден крак кој лежи на правата AC, а другите краци им се во различни полурамнини во однос на правата AC. Тоа значи дека овие агли имаат паралелни краци, т.е. $AB||DC$.

Забелешка. Докажавме дека: **кај четириаголник двата пара спротивни страни се еднакви, ако и само ако тој четириаголник е паралелограм**.

2. а) Докажете дека кај паралелограмот дијагоналите се преполовуваат.

б) Да се докаже дека ако во четириаголник дијагоналите се преполовуваат, тогаш тој четириаголник е паралелограм.

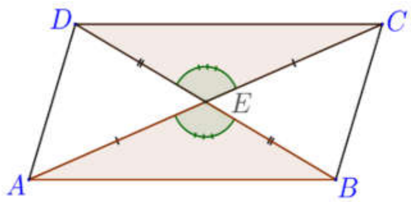
Решение. Нека $ABCD$ е паралелограм и пресекот на дијагоналите AC и BD е точката E (види слика десно). Треба да се покаже дека $\overline{AE} = \overline{CE}$ и $\overline{BE} = \overline{DE}$. Ќе ги разгледаме $\triangle ABE$ и $\triangle CDE$.



1) $\measuredangle ABE = \measuredangle CDE$ како агли со паралелни краци,
2) $\overline{AB} = \overline{CD}$ - како спротивни страни,
3) $\measuredangle BAE = \measuredangle DCE$ како агли со паралелни краци.

Според признакот АСА, $\triangle ABE \cong \triangle CDE$. Затоа важи дека $\overline{AE} = \overline{CE}$ и $\overline{BE} = \overline{DE}$.

б) Нека $ABCD$ е четириаголник и пресекот на дијагоналите AC и BD е точката E (види слика лево). Од условот, дијагоналите се преполовуваат, т.е. $\overline{AE} = \overline{CE}$ и $\overline{BE} = \overline{DE}$. Ќе



покажеме дека $\overline{AB} = \overline{CD}$ и $\overline{AD} = \overline{CB}$. Со таа цел ќе ги разгледаме $\triangle ABE$ и $\triangle CDE$. Важи: 1) $\overline{AE} = \overline{CE}$ - од условот на задачата; 2) $\measuredangle AEB = \measuredangle CED$ - како накрсни агли; 3) $\overline{BE} = \overline{DE}$ - од условот на задачата. Од 1), 2) и 3), се добива дека $\triangle ABE \cong \triangle CDE$ (признак САС) па $\overline{AB} = \overline{CD}$.

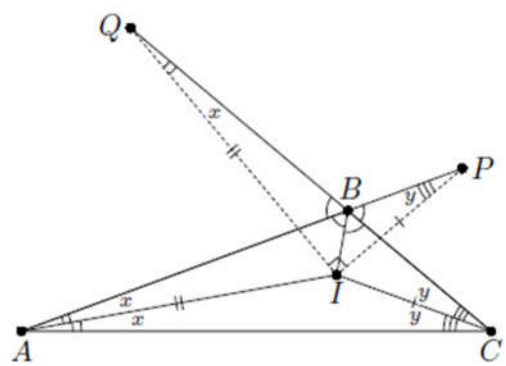
Слично се покажува дека $\triangle ADE \cong \triangle CBE$ (признак САС и: $\overline{AE} = \overline{CE}$ - од условот на задачата, $\measuredangle AED = \measuredangle CEB$ - како накрсни агли, $\overline{BE} = \overline{DE}$ - заедничка страна.) Затоа важи $\overline{AD} = \overline{BC}$. Бидејќи двата пара спротивни страни во $ABCD$ се еднакви, добиваме дека $ABCD$ е паралелограм.

Забелешка. Докажавме дека: **еден четириаголник е паралелограм, ако и само ако неговите дијагонали се преполовуваат**.

Забелешка. Добивме три различни и еквивалентни признаци кога еден четириаголник е паралелограм:

I. ако двата пара спротивни страни му се паралелни,
II. ако двата пара спротивни страни му се еднакви,
III. ако дијагоналите му се преполовуваат.

3. (*) Во триаголникот *ABC*, ∠*ABC*=120°. На продолжетоците на страните *AB* и *CB*, од страната на точката *B*, редоследно се означени точките *P* и *Q*, така што $\overline{AP} = \overline{CQ} = \overline{AC}$. Докажете дека ∠*PIQ*=90°, каде точката *I* е центар на впишаната кружница во триаголникот *ABC*.



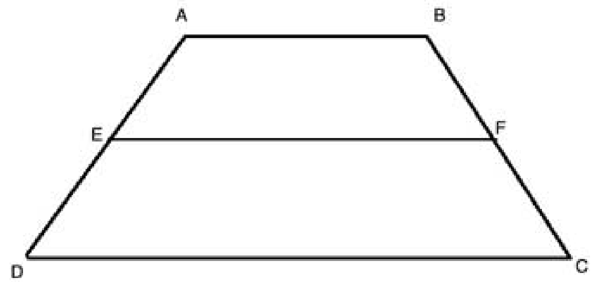
Решение. Најпрвин да приметиме дека аглите ∠*ABQ* = ∠*CBP* = ∠*ABI* = ∠*CBI* = 60°. *I* е пресек на бисектрисите (симетралите) на аглите на триаголникот. Ако ∠*BAC* = 2*x*, а ∠*BCA* = 2*y*, тогаш (од триаголникот *ABC*) 2*x* + 2*y* + 120° = 180°, т.е.

x + *y* = 30°. Триаголниците *ACI* и *QCI* се складни ($\overline{CQ} = \overline{AC}$, САС), поэтому ∠*CQI* = ∠*CAI* = *x*. Од триаголникот *QBI*: ∠*QIB* = 180° – 120° – *x* = 60° – *x*. Аналогно *PIB* = 60° – *y*. Затоа,

∠*PIQ* = ∠*PIB* + ∠*QIB* = (60° – *y*) + (60° – *x*) = 120° – (*x* + *y*) = 120° – 30° = 90°.

Домашна работа 2

1. Докажете дека во трапез средната линија е паралелна на основите.
   Решение. Нека е даден трапезот ABCD и во него средната линија EF. Важат



   релациите $\overline{AE}:\overline{ED}=\overline{BF}:\overline{FC}=1:1$ па според обратната теорема на Талес, важи $AB \parallel EF \parallel DC$.
2. На медианата CC_1 на триаголникот ABC е земена точка M, т.ш. $\overline{CM}:\overline{MC_1}=3:1$. Низ неа е повлечена права, паралелна на страната BC, која ја сече страната AB во точка N. Најдете го односот $\overline{AN}:\overline{NB}$.

Решение.

Важи дека $\overline{AC_1}=\overline{C_1B}=\frac{1}{2}\overline{AB}$. Од теоремата за пропорционални отсечки, од триаголникот CC_1B, важи $\overline{C_1N}:\overline{NB}=\overline{C_1M}:\overline{MB}=1:3$, од каде

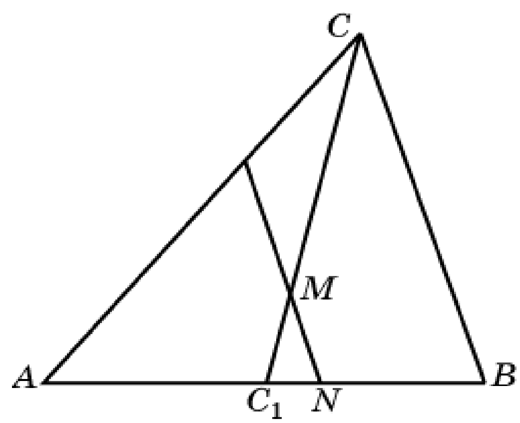
$\overline{C_1N}=\frac{1}{4}\overline{C_1B}=\frac{1}{8}\overline{AB}$. Следува дека,

$$\overline{AN}=\overline{AC_1}+\overline{C_1N}=\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{8}\overline{AB}=\frac{5}{8}\overline{AB}$$

Слично, $\overline{NB}=\overline{C_1B}-\overline{C_1N}=\frac{1}{2}\overline{AB}-\frac{1}{8}\overline{AB}=\frac{3}{8}\overline{AB}$

па

$$\overline{AN}:\overline{NB}=\frac{5}{8}:\frac{3}{8}=5:3$$



3. Во триаголник ABC се повлечени медиани AA_1 и CC_1, кои се сечат во точка M. Најдете го односот $\overline{CM}:\overline{MC_1}$.

Решение

Повлекуваме отсечка C_1D, паралелна на отсечката AA_1. Таа е средна линија на триаголникот AA_1B (поминува низ средината на AB и е паралелна на AA_1) па затоа,

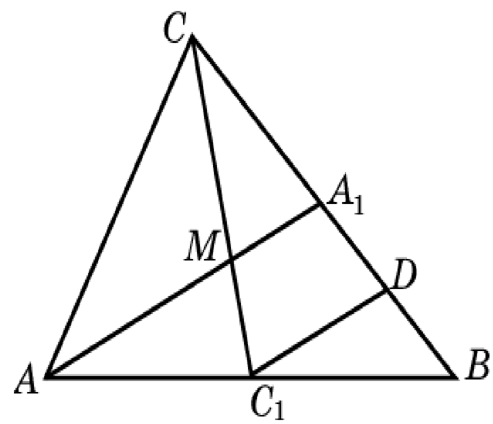
$$\overline{A_1D} = \overline{DB} = \frac{1}{2}\overline{A_1B},$$

а од $\overline{CA_1} = \overline{A_1B}$, се добива

$$\overline{CA_1}:\overline{A_1D} = \overline{A_1B}:\overline{A_1D} = 1:\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

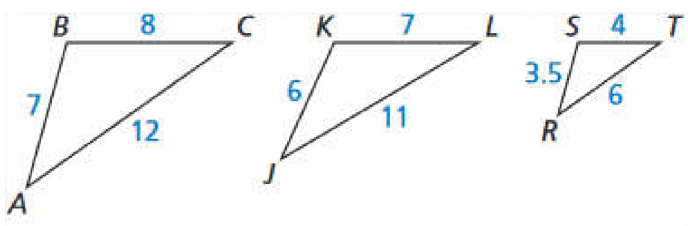
На крај, во триаголникот CC_1D, од теоремата за пропорционални отсечки имаме

$$\overline{CM}:\overline{MC_1} = \overline{CA_1}:\overline{A_1D} = 2:1.$$



Домашна работа 3

1. Проверете кои од триаголниците на цртежите се слични



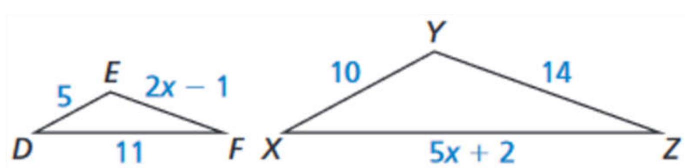
Решение

ABC и JKL не се слични затоа што $7:8 \neq 6:7$.

ABC и RST се слични затоа што $7:3{,}5 = 8:4 = 12:6$. Коефициентот на сличност е 2.

JKL и RST не се слични затоа што $6:7 \neq 3{,}5:4$.

2. Определете ја непознатата на цртежот за триаголниицте да бидат слични

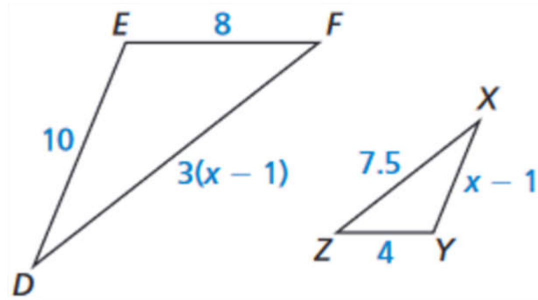


Решение. а) 5:10=(2x-1):14⇔

$$2x - 1 = 7 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4.$$

Коефициентот на сличност е 1/2. Проверуваме дали и третите страни се пропорционални; $5x + 2 = 2 \cdot 11 \Leftrightarrow 5x = 22 - 2 \Leftrightarrow x = 4.$

б) Според цртежот, најголеми се аглите кај темињата E и Y, а најмали се аглите кај темињата D и X. Затоа, треба да провериме дали $EDF \sim YXZ$. Тоа значи дека 8:4=10:(x-1)=3(x-1):7,5. Значи, коефициентот на сличност треба да биде $k = 8:4 = 2$ Затоа, имаме дека $2 = 10:(x-1) \Leftrightarrow x - 1 = 5 \Leftrightarrow x = 6$. Проверуваме дали и третите страни се пропорционални:

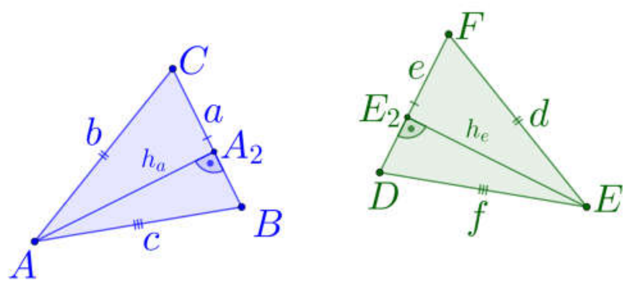


$$3(x-1): 7{,}5 = 2 \Leftrightarrow 3x - 3 = 15 \Leftrightarrow 3x = 18 \Leftrightarrow x = 6.$$

3. а) Докажете дека кај слични триаголници висините на соодветните страни се пропорционални и коефициентот на пропорционалност на висините е еднаков на коефициентот на пропорционалност на триаголниците.
(Нека $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ и CC_2 и FF_2 се две соодветни висини повлечени се од темињата C и F, кои одговараат едно на друго (види слика 5-3). Треба да покажеме дека $\frac{\overline{CC_2}}{\overline{FF_2}} = \frac{h_c}{h_f} = k$.)
б) Формулирајте ги и докажете ги соодветните тврдења за соодветните медиани и бисектриси кај слични триаголници.
Решение

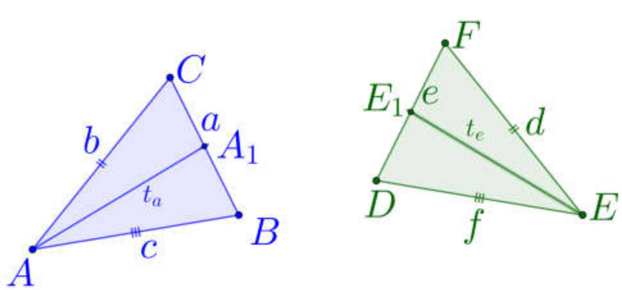
Нека $\triangle ABC \sim \triangle EDF$ и коефициентот на пропорционалност на триаголниците е k.

а) Нека AA_2 и EE_2 се две соодветни висини, кои се повлечени од темиња кои одговараат едно на друго (A и E). Ќе докажеме дека $\triangle ABA_2 \sim \triangle EDE_2$. Важи $\angle AA_2B = \angle EE_2D = 90°$. Понатаму, важи дека $\angle ABA_2 = \angle ABC$ и $\angle EDF = \angle EDE_2$. Но, заради $\angle ABC = \angle EDF$ (од $\triangle ABC \sim \triangle EDF$), имаме дека $\angle ABA_2 = \angle EDE_2$, па од признакот AA, важи дека дека $\triangle ABA_2 \sim \triangle EDE_2$. Сега,



$$\overline{AA_2}: \overline{EE_2} = \overline{AB}: \overline{ED} = k$$

б) i) Кај слични триаголници медианите на соодветните страни се пропорционални и коефициентот на пропорционалност на медианите е еднаков на коефициентот на пропорционалност на триаголниците.



Помош. Докажете дека $\triangle ABA_1 \sim \triangle EDE_1$ според САС.

Решение. Нека AA_1 и EE_1 се две соодветни медиани, кои се повлечени од темиња кои одговараат едно на друго (A и E). Ќе докажеме дека $\triangle ABA_1 \sim \triangle EDE_2$. Важи дека $\angle ABA_1 = \angle ABC$ и $\angle EDF = \angle EDE_1$. Но, заради $\angle ABC = \angle EDF$ (од $\triangle ABC \sim \triangle EDF$), имаме дека $\angle ABA_1 = \angle EDE_1$. Заради $\triangle ABC \sim \triangle EDF$, важи $\overline{AB}:\overline{ED} = k$ и

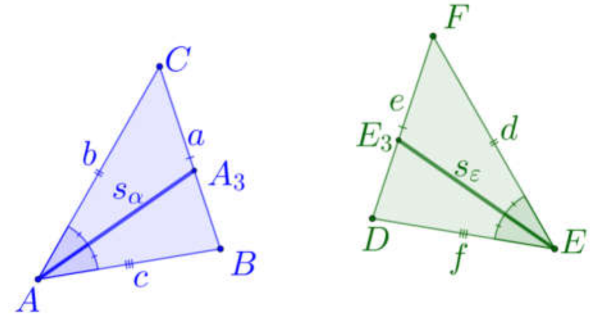
$$\overline{BA_1}:\overline{DE_1} = \left(\frac{1}{2}\overline{AB}\right):\left(\frac{1}{2}\overline{ED}\right) = \overline{AB}:\overline{ED} = k$$

Значи, триаголниците $\triangle ABA_1 \sim \triangle EDE_1$ имаат еден еднаков агол и страните кои ги формираат тие агли се пропорционални па од признакот САС, важи дека $\triangle ABA_2 \sim \triangle EDE_2$. Сега,

$$\overline{AA_1}:\overline{EE_1} = \overline{AB}:\overline{ED} = k$$

ii) Кај слични триаголници бисектрисите на соодветните агли се пропорционални и коефициентот на пропорционалност на бисектрисите е еднаков на коефициентот на пропорционалност на триаголниците.

Помош. Докажете дека $\triangle ABA_3 \sim \triangle EDE_3$ според АА.



а) Нека AA_3 и EE_3 се две соодветни бисектриси, кои се повлечени од темиња кои одговараат едно на друго (A и E). Ќе докажеме дека $\triangle ABA_3 \sim \triangle EDE_3$. Важи $\angle ABC = \angle EDF$. Понатаму, важи дека $\angle BAA_3 = \frac{1}{2}\angle BAC$ и $\angle DEE_3 = \frac{1}{2}\angle DEF$. Но, заради $\angle BAC = \angle DEF$ (од $\triangle ABC \sim \triangle EDF$), имаме дека $\angle BAA_3 = \angle DEE_3$, па од признакот АА, важи дека дека $\triangle ABA_3 \sim \triangle EDE_3$. Сега,

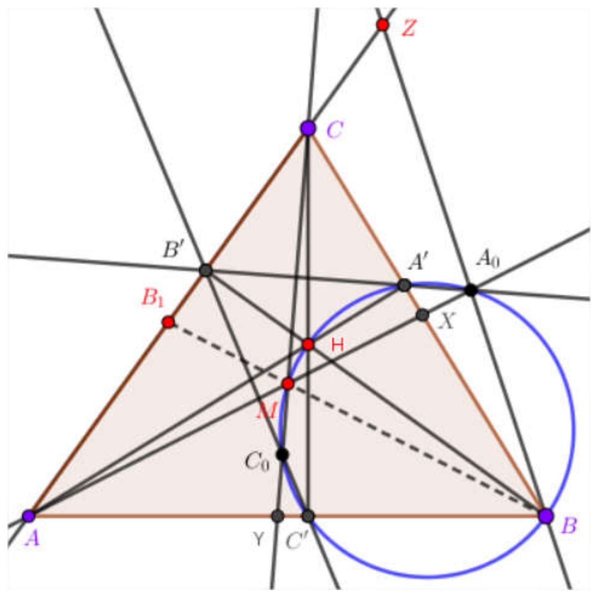
$$\overline{AA_3}:\overline{EE_3} = \overline{AB}:\overline{ED} = k$$

Заклучуваме дека: **кај слични триаголници, висините, медианите и бисектрисите се пропорционални на страните на триаголниците**.

Домашна работа 4

1. (**) Нека AA', BB', CC' се висини на триаголникот ABC; A_0, C_0 се пресечните точки на опишаната кружница околу триаголникот A'BC' со правите A'B' и C'B' соодветно. Докажете, дека правите AA_0 и CC_0 се сечат на медианата на триаголникот ABC или се паралелни на неа.

Решение. Нека правите AA_0 и BC се сечат во точката X, а правите CC_0 и AB – во точката Y. Заради теоремата на Чева, ако отсечките AA_0 и CC_0 и медианата BB_1 минуваат низ иста точка, ќе важи $\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{AY}}{\overline{YB}}=1$, па заради $\overline{CB_1}=\overline{AB_1}$, доволно е да се докаже дека $\overline{BX}:\overline{XC}=\overline{BY}:\overline{YA}$. Бидејќи центарот на кружницата која минува низ точките A', B, C' лежи на правата BB', која е бисектриса на аголот A'B'C', точките A_0 и C' се симетрични во однос на правата BB', исто како и точките A' и C_0 . Нека BA_0 и AC се сечат во точката Z. Точката Z е симетрична на A во однос на BB'. Тогаш, применувајќи ја теоремата на Менелај на триаголникот BCZ и правата на која лежат точките A, A_0, X, добиваме дека важи



$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{CA}}{\overline{AZ}}\cdot\frac{\overline{ZA_0}}{\overline{A_0B}}=1, \qquad \text{од каде,}$$

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}=\frac{\overline{AZ}}{\overline{CA}}\cdot\frac{\overline{A_0B}}{\overline{ZA_0}}=\frac{2\cdot\overline{AB'}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{BC'}}{\overline{C'A}}=\frac{2}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{BC'}}{\overline{C'A}}\cdot\overline{AB'}$$

Аналогно се добива израз за односот $\overline{BY}:\overline{YA}$.

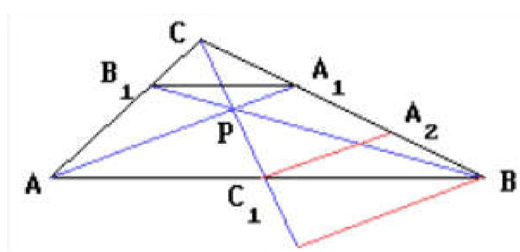
Останува да се докаже дека

$$\frac{\overline{BC'}}{\overline{C'A}}\cdot\overline{AB'}=\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}}\cdot\overline{CB'}\Leftrightarrow\frac{\overline{BC'}}{\overline{C'A}}\cdot\frac{\overline{AB'}}{\overline{CB'}}\cdot\frac{\overline{CA'}}{\overline{A'B}}=1$$

Но, ова е точно теоремата на Чева за ортоцентарот H на триаголникот.

2. Низ точката *P*, која лежи на медианата CC_1 на триаголникот *ABC*, се повлечени прави AA_1 и BB_1 (точките A_1 и B_1 лежат на страните *BC* и *CA* соодветно). Докажете, дека $A_1B_1 \parallel AB$.

Решение



Нека A_2 е средина на отсечката A_1B. Тогаш C_1A_2 е средна линија на триаголникот ABA_1, и следователно, $A_1P \parallel C_1A_2$. Тогаш, од теоремата на Талес имаме $\overline{CA_1}:\overline{A_1A_2}=\overline{CP}:\overline{PC_1}$, и, бидејќи $\overline{A_1B}=2\overline{A_1A_2}$, важи

$$\overline{CA_1}:\overline{A_1B}=\overline{CA_1}:\left(2\overline{A_1A_2}\right)=\overline{CP}:\left(2\overline{PC_1}\right)$$

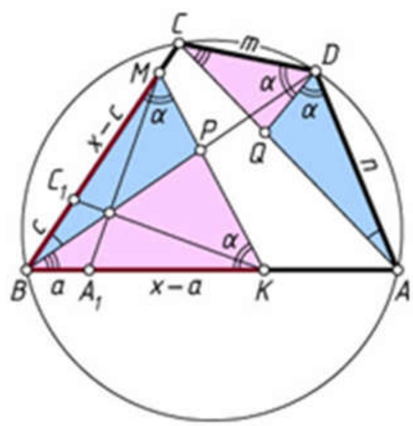
Аналогно се добива дека $\overline{CB_1}:\overline{B_1A}=\overline{CP}:\left(2\overline{PC_1}\right)$. Затоа, $\overline{CA_1}:\overline{A_1B}=\overline{CB_1}:\overline{B_1A}$, па, од обратната теорема на Талес, $A_1B_1 \,||\, AB$.

3. (**) Четириаголникот ABCD е впишан во кружница, DC=m, DA=n. На страната BA се земени точки A_1 и K, а на страната BC – точки C_1 и M. Се знае дека BA_1=a, BC_1=c, BK=BM и дека отсечките A_1M и C_1K се сечат на дијагоналата BD. Најдете ги BK и BM.

Решение

Ќе го разгледаме случајот кога точката A_1 е помеѓу точките A и K, а точката C_1 е помеѓу точките B и M (Останатите случаи се разгледуваат аналогно). Нека P е пресечната точка на отсечките KM и BD, $\angle ADC=2\alpha$, и $\overline{BK}=\overline{BM}=x$. Имаме дека

$$\angle BKM=\angle BMK=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ABC)=\alpha\,.$$



Ја повлекуваме бисектрисата DQ на триаголникот ADC. Сега, добиваме дека $\angle ADQ=\angle BMP=\alpha$,

$\angle QAD=\angle CAD=\angle CBD=\angle CBP$ па затоа триаголниците ADQ и BMP се слични. Значи, $\overline{AD}:\overline{BM}=\overline{DQ}:\overline{PM}$. Аналогно се добива дека $\overline{CD}:\overline{KB}=\overline{DQ}:\overline{PK}$. Од овие равенства следува, дека

$$\overline{PK}:\overline{PM}=\left(\overline{CD}:\overline{KB}\right):\left(\overline{AD}:\overline{BM}\right)=\overline{CD}:\overline{AD}=m:n$$

Бидејќи отсечките KC_1, MA_1, BP се сечат во една точка, од теоремата на Чева

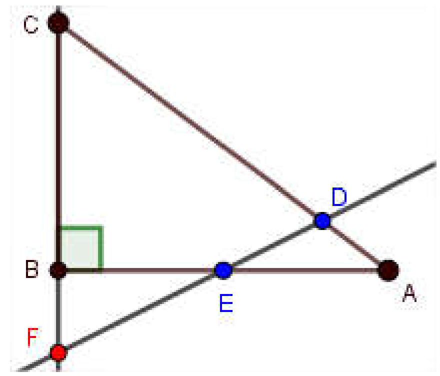
$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1K}}\cdot\frac{\overline{KP}}{\overline{PM}}\cdot\frac{\overline{MC_1}}{\overline{C_1B}}=1,\qquad \text{или}\quad \frac{a}{x-a}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{x-c}{c}=1$$

од каде

$$x=\frac{ac(m-n)}{cn-am}\,.$$

Домашна работа 5

1. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето B и страни $\overline{\mathrm{AB}} = 4$, $\overline{\mathrm{BC}} = 3$. Точката E е средина на страната AB, а точката D лежи на страната AC и $\overline{\mathrm{DA}} = 1$. Нека F е пресек на DE и BC. Најдете ја должината на отсечката BF.



Решение. Од Питагоровата теорема, имаме дека $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ па со смена се добива $\overline{AC}^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$, од каде $\overline{AC} = 5$. Заради теоремата на Менелај, за триаголникот ABC и правата DE, имаме:

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = 1$$

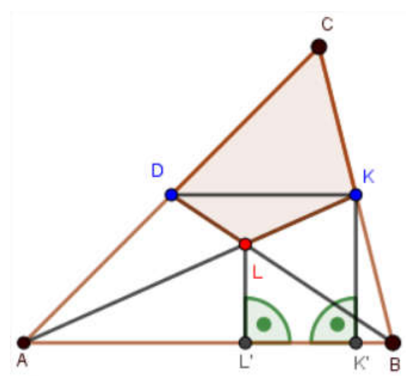
Нека $\overline{BF} = x$. Важи уште дека $\overline{\mathrm{CF}} = \overline{\mathrm{CB}} + \overline{\mathrm{BF}} = 3 + x$. Од условите на задачата, имаме

$$\overline{CD} = \overline{CA} - \overline{DA} = 5 - 1 = 4, \qquad \overline{AE} = \overline{AE} = \frac{\overline{AE}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Сега, со замена во равенството (1), имаме

$$\frac{x}{3+x} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{2} = 1 \Leftrightarrow 4x = 3 + x \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$$

2. Во триаголникот ABC медианата AK ја сече медианата BD во точката L. Најдете ја плоштината на триаголникот ABC, ако плоштината на четириаголникот KCDL е еднаква на 5.



Решение. Ја повлекуваме средната линија DK. Триаголниците ABC и DKC се слични со коефициент на сличност $\overline{AB}:\overline{DK} = 2$, па затоа $P(ABC) = 2^2 P(DKC) = 4\,P(DKC)$. Исто така, триаголниците ABL и KDL се слични со коефициент на сличност $\overline{AL}:\overline{LK} = 2$, па затоа

$$P(ABL) = 2^2 P(KDL) = 4\,P(KDL).$$

Збирот на висините на триаголниците ABL и KDL е половина од висината h_c во триаголникот ABC кон страната AB и нивниот однос е 2:1. Тоа значи дека висината на триаголникот ABL кон страната AB изнесува $\overline{LL'} = \frac{2}{3}\overline{KK'} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} h_c = \frac{1}{3} h_c$ па плоштината $P(ABL) = \frac{1}{3} P(ABC)$ (триаголници со иста основа имаат плоштини кои се однесуваат како нивните висини). Сега, плоштината на четириаголникот е $P(DLKC) = P(DKC) + P(DKL) = \frac{1}{4} P(ABC) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} P(ABC) = \frac{1}{3} P(ABC)$ од каде, $P(ABC) = 3P(DLKC) = 3 \cdot 5 = 15$.