

ЗАВРШЕН ТЕСТ ЗА IX ОДДЕЛЕНИЕ
03.12.2022

Упатство за ученикот: Задачите од едната тема решавај ги во една тетратка, задачите од другата тема во друга тетратка. Пишувај читливо! Напиши ја целата постапка за решавање на задачата. Ако погрешеш, тогаш напишаното прецртај го. БИДИ ЧЕСЕН!

Време за работа: 2 часа.

ТЕМА 2. ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

1. (15) Во кутија има 10 топчиња, секое од нив обоено со црвена, зелена или бела боја. На секое топче е напишан различен број од 1 до 10. Покажи дека збирот на броевите на топчињата од некоја од боите е поголем од 19.

Решение: Сумата на броевите на сите топчиња е $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55$.

Прв начин: Ако од секоја боја има сума најмногу 18, тогаш вкупната сума ќе биде најмногу $18 \cdot 3 = 54$, што е контрадикција со тоа дека сумата е 55.

Втор начин: Ако сумата 55 ја гледаме како гулаби, а трите бои како дупки, тогаш од тоа што $55 = 18 \cdot 3 + 1$ и од принципот на Дирихле, следи дека барем од една боја сумата на броевите напишани на топчињата ќе биде 19.

2. (20) Покажи дека од произволно множество од 6 различни природни броеви, секогаш ќе може да се одберат 4 различни броеви a , b , c и d , такви што производот $(a - b)(c - d)$ е делив со 15.

Решение: Од 6 броја, постојат барем 2 кои даваат ист остаток при делење со 5. Тие два броја ќе ги земеме да бидат a и b . Од останатите 4 броја, постојат барем два кои даваат ист остаток при делење со 3. Тие два броја ќе ги земеме да бидат c и d .

3. (15) На подиумот во дискотеката танцуваат 51 младинци. Подиумот е во форма на квадрат со дијагонала 10. Покажи дека во секој момент постојат двајца младинци од ист пол кои се на растојание помало од два метри.

Решение: Со 4 хоризонтални и 4 вертикални линии паралелни со страните на квадратот кој го определиува подиумот, тој може да се подели на 25 еднакви квадрати со дијагонала 2. Од тоа што дијагоналата е 2, било кои двајца младинци кои би биле во ист квадрат ќе бидат на растојание помало или еднакво на 2, бидејќи најлош случај е да се најдат во два спротивни агли на тој квадрат, а тие агли се оддалечени точно 2 метри.

Прв начин: $51 = 2 \cdot 25 + 1$, па од принципот на Дирихле во групата има барем 26 младинци од исти пол. Од друга страна $26 > 25$, па од принципот на Дирихле, барем двајца од тој пол се наоѓаат во ист квадрат со дијагонала 2, па се на растојание помало од 2 метри.

Втор начин: $51 = 2 \cdot 25 + 1$, па од принципот на Дирихле во еден квадрат со дијагонала 2 метри има барем 3 младинци. За нив три важи дека секои двајца се на растојание помало или еднакво од 2 метри. Од друга страна $3 > 2$, па од принципот на Дирихле, барем двајца од тие три се од ист пол.