Математичко списание НУМЕРУС
за учениците од основното образование.
ISSN 1409-875X
Излегува во четири броја во текот на една учебна година.
Цената на еден примерок е 150 денари, а претплатата за 4 броја е 420 денари.
Порачките треба да се направат на web страната на СММ, https://smm.org.mk, во делот *Списанија и книги,* со пополнување на податоците наведени во *формата*.
Жиро сметка 300000001276071, ЕДБ 4030991121596, депонент на Комерцијална банка АД, СММ (со назнака за НУМЕРУС).
Електронска адреса за контакт, праќање прилози и решенија: numerus.smm@gmail.com



**СОПСТВЕНИК И ИЗДАВАЧ Е СОЈУЗОТ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА**

**Катерина Хаџи-Велкова Санева**
Факултет за електротехника и информациски технологии, Скопје

## ПАЛИНДРОМИ

Нека е даден природен број $a$ кој не завршува на 0. Ако неговите цифри ги запишеме во обратен редослед, се добива нов број $b$ за кој велиме дека е **симетричен** на бројот $a$. На пример, од бројот $a$ = 357 го добиваме бројот $b$ = 753. Јасно е дека бројот $a$ е исто така симетричен на бројот $b$, па велиме дека броевите $a$ и $b$ се **заемно симетрични**. На пример, заемно симетрични се броевите: 57 и 75, 125 и 521, 3405 и 5043.

Постојат и природни броеви кои се симетрични на самите себе, т.е. ако ги запишеме нивните цифри по обратен редослед, се добива истиот број. Овие броеви се нарекуваат **бројни палиндроми**, или само **палиндроми**, согласно зборовите што се читаат исто од лево кон десно и од десно кон лево како што се зборовите: радар, невен, ротор, око. На пример, бројни палиндроми се броевите: 11, 232, 4334, 55555, 24642, 812218.

### Колку $n$-цифрени палиндроми постојат?

Јасно е дека *постојат 9 едноцифрени палиндроми*, тоа се: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Исто така, *постојат 9 двоцифрени палиндроми*, тоа се двоцифрените броеви со исти цифри: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.

Трицифрените палиндроми имаат облик $\overline{a_1a_2a_1}$, каде што $a_1 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $a_2 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Забележуваме дека тие се одредени само со првите две цифри бидејќи последната цифра им е еднаква со првата, па според тоа нивниот број е еднаков на бројот на двоцифрените броеви, т.е. *постојат 90 трицифрени палиндроми*. Овој резултат може да се добие и на следниов начин: првата цифра може да се избере на 9 начини, а втората на 10 начини, па бројот на трицифрените палиндроми е $9 \cdot 10 = 90$. Од исти причини *постојат 90 четирицифрени палиндроми* кои имаат облик $\overline{a_1a_2a_2a_1}$, $a_1 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $a_2 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Петцифрените палиндроми имаат облик $\overline{a_1a_2a_3a_2a_1}$, додека шестцифрените имаат облик $\overline{a_1a_2a_3a_3a_2a_1}$, каде што $a_1 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $a_2, a_3 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Со слична дискусија како погоре, за бројот на петцифрените и шестцифрените палиндроми се добива: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^2 = 900$.

Забележуваме дека за $n = 2k$, $n$-цифрените палиндроми имаат облик $\overline{a_1 a_2 \dots a_{k-1}\, a_k a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1}$, а за $n = 2k - 1$ имаат облик $\overline{a_1 a_2 \dots a_{k-1}\, a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1}$, односно овие палиндроми се одредени со првите $k$ цифри. Според тоа, *бројот на $n$-цифрените палиндроми ($n = 2k$ или $n = 2k - 1$) е $9 \cdot 10^{k-1}$.*

Од горната дискусија, заклучуваме дека постојат: 9 палиндроми кои се помали од 10, 18 палиндроми кои се помали од $10^2$, 108 палиндроми кои се помали од $10^3$, 198 палиндроми кои се помали од $10^4$, 1098 палиндроми кои се помали од $10^5$, 1998 палиндроми кои се помали од $10^6$, итн. Ако ја продолжиме постапката се добива низата: 9, 18, 108, 198, 1098, 1998, 10998, 19998, 109998, 199998, ... , [4], т.е. бројот на палиндроми $a(n)$ кои се помали од $10^n$ е:

$$a(n) = \begin{cases} 2\left(10^{\frac{n}{2}} - 1\right), & n \text{ е парен број} \\ 11 \cdot 10^{\frac{n-1}{2}} - 2, & n \text{ е непарен број} \end{cases}.$$

## Една постапка за добивање на палиндром од заемно симетрични броеви

Ќе ја опишеме постапката како од даден број да добиеме палиндром:

1. *Запишете кој било број што има повеќе од една цифра*, на пример, бројот 47.

2. *Запишете го симетричниот број на избраниот број*. Симетричен број на 47 е 74.

3. *Соберете ги двата запишани броја кои се заемно симетрични*. Го добивте збирот 47+74=121 кој е палиндром.

Ако добиениот број не е палиндром, повторете ја постапката поаѓајќи од добиениот број во чекор 3. Така на пример, ако почнете од бројот 458, негов симетричен број е 854, а нивниот збир е 458+854=1312 кој не е палиндром, па постапката ја продолжувате. Симетричен број на 1312 е бројот 2131. Збирот на овие два заемно симетрични броја е 1312+2131=3443 кој е палиндром. Ако пак, започнете од бројот 59, по 3 повторувања на погоре опишаната постапка ќе стигнете до палиндромот 1111. *Користејќи ја оваа постапка, речиси секогаш ќе дојдете до палиндром*. Но, ако во некој од чекорите го добиете бројот 196, прекинете ја постапката затоа што никогаш нема да добиете палиндром. Постојат и други броеви со оваа особина. Повеќе детали за овие броеви можете да најдете во [2] и [3].

***Кога број напишан само со единици (најмногу 9), ќе го помножите сам со себе, секогаш ќе добиете палиндром!***

$$1\cdot 1 = \mathbf{1}$$
$$11\cdot 11 = \mathbf{121}$$
$$111\cdot 111 = \mathbf{12321}$$
$$1111\cdot 1111 = \mathbf{1234321}$$
$$11111\cdot 11111 = \mathbf{123454321}$$
$$111111\cdot 111111 = \mathbf{12345654321}$$
$$1111111\cdot 1111111 = \mathbf{1234567654321}$$
$$11111111\cdot 11111111 = \mathbf{123456787654321}$$
$$111111111\cdot 111111111 = \mathbf{12345678987654321}$$

## Задачи со палиндроми

**Задача 1.** Најди го најмалиот трицифрен палиндром чиј збир со најмалиот двоцифрен палиндром е исто така палиндром.

**Решение.** Најмалиот двоцифрен палиндром е 11. Најмалиот трицифрен палиндром има облик $\overline{1a1}$, каде што $a$ е произволна цифра. Ако $a < 9$, тогаш збирот $\overline{1a1} + 11$ е од облик $\overline{1b2}$, каде што $b = a + 1$, и не е палиндром. Останува да се провери случајот кога $a = 9$. Тогаш збирот 191+11=202 е палиндром. Според тоа, бараниот број е 191.

**Задача 2.** Најди ги паровите трицифрени палиндроми кои се запишуваат со помош на две различни цифри, а чија разлика е трицифрен број формиран од три последователни цифри.

**Решение.** Нека $\overline{aba}$ и $\overline{bab}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, е бараниот пар трицифрени палиндроми и нека $a > b$. Нивната разлика е

$$\overline{aba} - \overline{bab} = 100a + 10b + a - (100b + 10a + b) = 91(a - b),$$

каде што $1 \leq a - b \leq 8$. Со непосредна проверка наоѓаме дека $91(a - b)$ е трицифрен број формиран од три последователни цифри само за $a - b = 6$, од каде ги добиваме бараните парови: 717 и 171, 828 и 282, 939 и 393. Разликата на броевите во секој од овие парови е $91 \cdot 6 = 546$.

**Задача 3.** Должините на страните на правоаголник се трицифрените палиндроми $\overline{aba}$ и $\overline{bab}$, $a \neq b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Одреди го периметарот на правоаголникот ако е познато дека тој е исто така трицифрен палиндом.

**Решение.** Периметарот на правоаголникот е

$$L = 2(\overline{aba} + \overline{bab}) = 2(100a + 10b + a + 100b + 10a + b) =$$
$$= 2(111a + 111b) = 2 \cdot 111 \cdot (a + b).$$

Бидејќи $a \neq b$, $a \neq 0$ и $b \neq 0$, периметарот ќе биде трицифрен палиндром само за $a + b = 3$ и $a + b = 4$. Во првиот случај периметарот на правоаголникот е еднаков на 666, а неговите страни се 121 и 212, а во вториот случај периметарот е 888, а станите на правоаголникот се 131 и 313.

**Задача 4.** Најди ги сите четирицифрени палиндроми со точно 5 различни прости делители.
**Решение.** Забележуваме дека 2 и 5 не можат истовремено да се делители на бараниот палиндром бидејќи во тој случај палиндромот би завршувале на 0 што не е можно. Производот на петте најмали прости броеви различни од 5 е еднаков на $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 6006$. Овој број е четирицифрен палиндром. Уште едно решение се добива кога 13 ќе се замени со 19, односно $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 = 8778$. Значи постојат два четирицифрени палиндроми со бараната особина, а тоа се: 6006 и 8778.

**Задача 5.** Најди ги сите трицифрени палиндроми кои се деливи со 18.
**Решение.** За да бројот е делив со 18, тој треба да биде делив со 2 и со 9. Од деливоста со 2, добиваме дека бараниот палиндром мора да завршува на 0, 2, 4, 6 или 8. Јасно е дека за да биде палиндром не може да завршува на 0. Ако палиндромот завршува на 2, тогаш тој има облик $\overline{2a2}$, па за да биде делив со 9, треба збирот на неговите цифри $4 + a$ да биде делив со 9. Тоа е можно единствено за $a = 5$, со што се добива палиндромот 252. Аналогно се проверуваат случаите кога палиндромот завршува на 4, 6 или 8, од каде се добиваат палиндромите: 414, 666 и 828. Според тоа, бараните палиндроми се: 252, 414, 666 и 828.

**Задача 6.** Колку е збирот на цифрите на најмалиот трицифрен број кој не е палиндром, но кој е збир на три различни двоцифрени палиндроми?
**Решение.** Забележуваме дека сите двоцифрени палиндроми: 11, 22, 33, 44, 555, 66, 77, 88 и 99, се содржатели на бројот 11. Според тоа и збирот на три различни двоцифрени палиндроми е содржател на 11. Најмалиот трицифрен број кој е содржател на 11 е 110. Останува да провериме дали бројот 110 може да се запише како збир на три различни двоцифрени палиндроми. Бидејќи 110=11+22+77=11 + 33 + 66, следува дека бараниот број е 110. Збирот на неговите цифри е 2.

**Задача 7.** Определи ги најголемиот и најмалиот петцифрен палиндром кој е делив со 101.

**Решение.** Петцифрениот палиндром $\overline{abcba}$, $a \neq 0$, може да се запише во облик:

$$\overline{abcba} = 10000a + 1000b + 100c + 10b + a =$$
$$= 101(99a + 10b + c) + 2a - c.$$

Од тоа што $2a - c < 101$ следува дека петцифрениот палиндром е делив со 101 ако и само ако $2a - c = 0$. Од равенството $2a = c$ следува $a \leq 4$, а бидејќи го бараме најголемиот петцифрен палиндром земаме $a = 4$. Тогаш $c = 8$. Исто така, за да бројот е најголем земаме $b = 9$. Според тоа, најголемиот петцифрен палиндром кој е делив со 101 е бројот 49894.

Повторно од равенството $2a = c$ следува $a \leq 4$, па најмалиот петцифрен палиндром ќе се добие за $a = 1$. Тогаш $c = 2$, а за да палиндромот е најмал земаме $b = 0$. Според тоа, најмалиот петцифрен палиндром кој е делив со 101 е 10201.

## Задачи за самостојна работа

**1.** Најди го најмалиот четирицифрен палиндром чиј збир со најмалиот двоцифрен палиндром е исто така палиндром.

**2.** Колку 2022-цифрени палиндроми постојат?

**3.** Должината на страната на квадрат изразена во $\mathrm{cm}$ е цел број, а неговата плоштина изразена во $\mathrm{cm}^2$ е трицифрен палиндром. Пресметај го периметарот на квадратот.

**4.** Пресметај го волуменот на коцка ако е познато дека тој (изразен во $\mathrm{cm}^3$) е:
а) трицифрен палиндром, б) четирицифрен палиндром.

**5.** Најди ги сите трицифрени палиндроми кои се деливи со 14.

**6.** Најди ги сите четирицифрени палиндроми кои се деливи со:
а) 36, б) 63.

**7.** На колку начини можат да се изберат двоцифрен и трицифрен палиндром така што нивниот збир е исто така палиндром?

## Извори:

[1] Математички лист за ученике основних школа, Друштво математичара Србије, XLVII -1, 2012, 1-5.
[2] Y. Nishiyama, Numerical palindromes and the 196 problem, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 80, No. 3, 2012, 375-384.
[3] Wikipedia, Lychrel number, https://en.wikipedia.org/wiki/Lychrel_number
[4] Wolfram MathWorld, Palindromic Number, https://mathworld.wolfram.com/PalindromicNumber.html

**Елена Хаџиева**
Универзитет „Св. Апостол Павле“, Охрид

## НЕКОЛКУ ЗАДАЧИ ЗА КВАДРАТ

Во прилогов ќе опфатиме неколку задачи за периметар и плоштина на квадрат.

Периметарот на квадрат со страна $a$ изнесува $\boxed{L = 4 \cdot a.}$

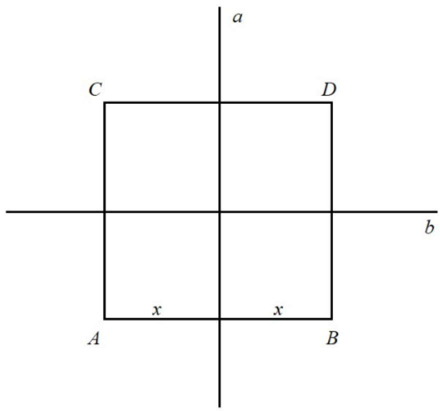
Плоштината на квадрат со страна $a$ изнесува $\boxed{P = a \cdot a = a^2.}$

Во задачите се среќаваат и поимите **бројна вредност** и **мерна единица на дадена величина**. Нивното значење ќе го објасниме преку примери. Во изразот за вредност на периметарот: $L = 20\ \mathrm{cm}$, периметарот $L$ е величина, бројната вредност на периметарот е $20$, а мерната единица е $\mathrm{cm}$ – сантиметри. Во изразот за вредност на плоштината: $P = 20\ \mathrm{cm}^2$, плоштината $P$ е величина, бројната вредност на величината плоштина е исто така $20$, а мерна единица е $\mathrm{cm}^2$ – сантиметри квадратни. Може да се каже дека двеве разгледувани величини имаат иста бројна вредност, кога се изразени во сродни мерни единици.

Во продолжение ќе дадеме 6 решени задачи.

**Задача 1.** Даден квадрат со две прави е поделен на четири помали квадрати, од кои секој има периметар $24\ \mathrm{cm}$. Колкав е периметарот на тој квадрат?

**Решение.** Единствен начин квадратот да биде поделен со двете прави на четири квадрати со еднакви периметри е правите да поминуваат низ средините на спротивните страни на квадратот, како на сликата. Нека квадратот $ABCD$ е поделен со правите $a$ и $b$ на четири квадрати со еднаков периметар, $24\ \mathrm{cm}$.



Страната на секој од помалите квадрати да ја означиме со $x$ (сите помали квадрати имаат еднакви страни, инаку не би имале еднаков периметар). Тогаш $4 \cdot x = 24$, од каде што $x = 24:4 = 6\ \mathrm{cm}$. Квадратот $ABCD$ има страна $a = 2 \cdot x = 12\ \mathrm{cm}$ и периметар $L = 4 \cdot a = 4 \cdot 12 = 48\ \mathrm{cm}$.

Задачава може да се реши и на поинаков начин, воедно и со пократко решение. Во периметарот на квадратот $ABCD$ учествува по половина од периметарот од секој мал квадрат, односно $24:2 = 12\ \mathrm{cm}$. Оттука, $L = 4 \cdot 12 = 48\ \mathrm{cm}$.

**Задача 2.** Дали може од картонски квадрати со страни $18\ \mathrm{cm}$, $24\ \mathrm{cm}$ и $40\ \mathrm{cm}$ со сечење и составување без преклопување, без да остане картон, да се направи нов квадрат? Колку се плоштината и периметарот на тој квадрат?
**Решение.** Да провериме дали збирот на плоштините на дадените картонски квадрати е број, кој што претставува квадрат на друг природен број,

$$18^2 + 24^2 + 40^2 = 324 + 576 + 1600 = 2500 = 50^2.$$

Следува дека, со сечење и составување (без преклопување) може да се направи нов картонски квадрат, со страна $50\ \mathrm{cm}$, без да остане картон. Неговата плоштина е $2500\ \mathrm{cm}^2$, а неговиот периметар е $4 \cdot 50 = 200\ \mathrm{cm}$.

**Задача 3.**
а) Покажи дека постои квадрат чии периметар и плоштина имаат иста бројна вредност кога се изразени во сродни мерни единици. Колкави се тие периметар и плоштина? (Нека бидат изразени во метри, односно квадратни метри.)
б) Бројната вредност на плоштината на еден квадрат е 8 пати поголем од бројната вредност на неговиот периметар, кога се изразени во сродни мерни единици. Колкави се периметарот и плоштината на тој квадрат? (Нека бидат изразени во сантиметри, односно квадратни сантиметри.)
**Решение.** а) За да бидат еднакви бројните вредности на периметарот и плоштината на еден квадрат, треба да биде $a \cdot a = 4 \cdot a$, од каде се добива дека $a = 4$. Периметарот на овој квадрат ќе биде

$$L = 4 \cdot a = 16\ \mathrm{m},$$

а плоштината ќе биде

$$P = a \cdot a = 4 \cdot 4 = 16\ \mathrm{m}^2.$$

б) Според условите на задачата, ќе имаме $a \cdot a = 8 \cdot 4a$. Односно $a \cdot a = 32 \cdot a$, од каде се добива за страната $a = 32\ \mathrm{cm}$. Периметарот на овој квадрат ќе биде

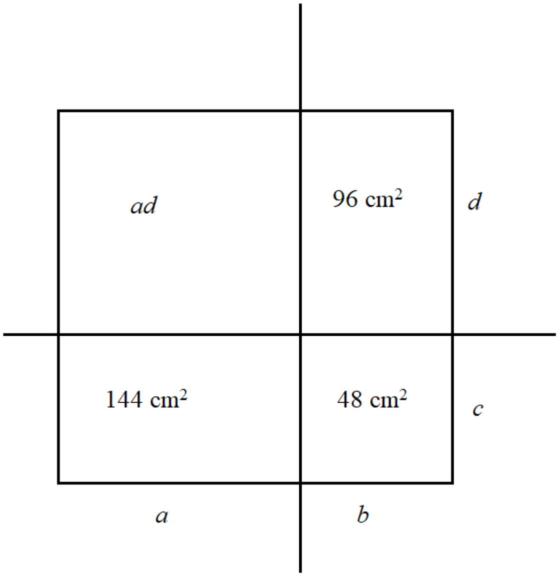
$$L = 4a = 4 \cdot 32 = 128 \text{ cm},$$

а плоштината ќе биде

$$P = a \cdot a = 32 \cdot 32 = 1024 \text{ cm}^2.$$

**Задача 4.** Квадрат со две прави е поделен на четири правоаголници, а три од нив имаат плоштини $48 \text{ cm}^2, 96 \text{ cm}^2$ и $144 \text{ cm}^2$, при што последниве два правоаголници се допираат само во едно теме. Колкава е страната на дадениот квадрат?

**Решение.** После поделбата со двете прави, ќе имаме ситуација како на сликата.




Значи, $a \cdot c = 144,\ b \cdot c = 48,\ b \cdot d = 96$. Ако ги измножиме првото и третото равенство, ќе добиеме дека

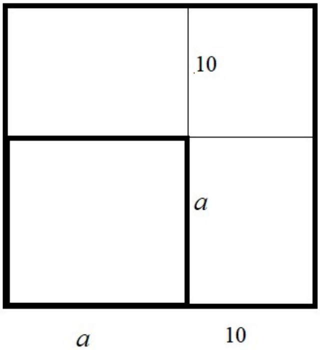
$$a \cdot b \cdot c \cdot d = 144 \cdot 96,$$

Односно

$$a \cdot d \cdot 48 = 144 \cdot 96 \text{ (бидејќи } bc = 48).$$

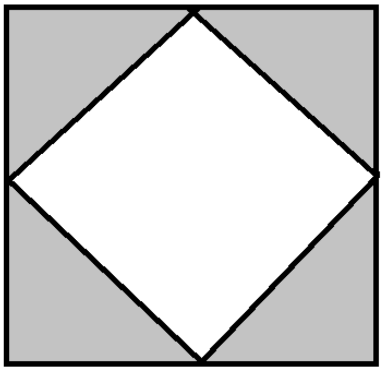
Се добива дека $ad = 288$. За плоштината на квадратот се добива $P = 288 + 96 + 144 + 48 = 576 \text{ cm}^2$, а за страната $24 \text{ cm}$, (бидејќи $24^2 = 576$).

**Задача 5.** Ако страната на даден квадрат се зголеми за $10 \text{ cm}$, тогаш неговата плоштина ќе се зголеми за $200 \text{ cm}^2$. Определи ги плоштината и периметарот на дадениот квадрат.




**Решение.** Плоштината од $200\ \mathrm{cm}^2$, како што се гледа на сликата е збир на плоштините на двата правоаголници, со страни $a$ и $10$, и квадратот со страна $10$. Значи, $200 = 10 \cdot a + 10 \cdot a + 100$, односно $100 = 20 \cdot a$. Оттука, $a = 100 : 20 = 5,$ плоштината на дадениот квадрат е $P = 5 \cdot 5 = 25\ \mathrm{cm}^2$, а неговиот периметар е $L = 4 \cdot 5 = 20\ \mathrm{cm}$.

**Задача 6.** Периметарот на еден квадрат е $72\ \mathrm{cm}$. Да се пресмета плоштината на четириаголникот чии темиња се средините на страните на квадратот.



**Решение.** Нека страната на квадратот е $a,$ ќе имаме: $72 = 4 \cdot a,$ од каде се добива $a = 72 : 4 = 18\ \mathrm{cm}$. Плоштината на четириаголникот чии темиња се средините на страните на квадратот може да се најде ако од плоштината на квадратот се одземе плоштината на четирите сиви триаголници. Сивите триаголници се правоаголни триаголници со катети кои изнесуваат половина од страната на квадратот, односно $9\ \mathrm{cm}$, а нивната плоштина е половина од плоштината на квадрат со страна $9\ \mathrm{cm}$. Според тоа, бараната плоштина ќе биде:

$$P = 18 \cdot 18 - 4 \cdot \big((9 \cdot 9) : 2\big) = 324 - 4 \cdot 40{,}5 =$$

$$= 324 - 162 = 162\ \mathrm{cm}^2.$$

Може да се забележи дека плоштините на сивиот и белиот дел од квадратот се еднакви, и се еднакви на $162\ \mathrm{cm}^2$.

**Задачи за самостојна работа**

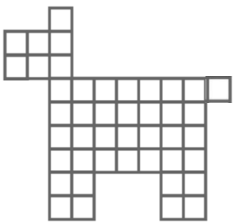
**Задача 1.** Збирот на периметрите на два квадрати е $200\ \mathrm{cm}$, а нивната разлика е $40\ \mathrm{cm}$. Колкави се периметрите и плоштините на овие квадрати?
**Задача 2.** Колкава бројна вредност има страната на квадрат кај кој бројната вредност на периметарот е два пати поголема од бројната вредност на плоштината?
**Задача 3.** Дадени се два исти квадрати, секој од нив има плоштина $100\ \mathrm{cm}^2$. Ако страната на првиот квадрат се зголеми за $2\ cm$, а периметарот на вториот квадрат се зголеми за $16\ \mathrm{cm}$, колкави ќе се плоштините на изменетите квадрати?

**Извори:**

[1] V. Stojanović, *Matematiskop 1. Vodič za šampione. Priručnik za dodatnu nastavu i pripremu takmičenja za učenike IV, V i VI razreda osnovne skole*, Matematiskop, Beograd, 1999.
[2] Програм „Интеграл“ за додатна настава, https://www.diofant.org/integral.htm

## МАТЕМАТИЧКА ЗАГАТКА 1

Може ли да го поплочиш кученцето на сликата со домина 2×1. (Поплочување значи целосно покривање на површината без преклопување.)



**Извор:**

[1] А. Гацовска-Барандовска, В. Миовска, И. Стојковска, *Математички кружоци „Гази Баба“, скрипта со задачи за VII одделение*, СММ, 2020.

**Нина Трифуновска**

# ПРИМЕНА НА КОНГРУЕНЦИИТЕ ЗА ДОБИВАЊЕ НА КРИТЕРИУМИ ЗА ДЕЛИВОСТ СО ПРОСТИТЕ БРОЕВИ: 7, 11, 13, 17 И 19 (ВТОР ДЕЛ)

Во ова продолжение ќе ги докажеме двата критериума за деливост со 7 кои ги наведовме во минатиот број и ќе наведеме критериуми за деливост со 17 и 19.

## Критериуми за деливост со бројот 7

**Трет критериум.**

$$7 \mid a \Leftrightarrow 7 \mid (\overline{a_2a_1a_0} + 6 \cdot \overline{a_5a_4a_3} + 6^2 \cdot \overline{a_8a_7a_6} + 6^3 \cdot \overline{a_{11}a_{10}a_9} + \cdots)$$

**Доказ**: Ќе ги искористиме својствата за конгруенции на степените на бројот 10:

| | | |
|---|---|---|
| $1 \equiv 1 \pmod 7 / \cdot a_0$ | | $a_0 \equiv a_0 \pmod 7$ |
| $10 \equiv 10 \pmod 7 / \cdot a_1$ | | $10a_1 \equiv 10a_1 \pmod 7$ |
| $10^2 \equiv 100 \pmod 7 / \cdot a_2$ | | $10^2a_2 \equiv 100 \cdot a_2 \pmod 7$ |
| $10^3 \equiv 1 \cdot 6 \pmod 7 / \cdot a_3$ | | $10^3a_3 \equiv 1 \cdot 6 \cdot a_3 \pmod 7$ |
| $10^4 \equiv 10 \cdot 6 \pmod 7 / \cdot a_4$ | $\Rightarrow$ | $10^4a_4 \equiv 10 \cdot 6 \cdot a_4 \pmod 7$ |
| $10^5 \equiv 100 \cdot 6 \pmod 7 / \cdot a_5$ | | $10^5a_5 \equiv 100 \cdot 6 \cdot a_5 \pmod 7$ |
| $10^6 \equiv 1 \cdot 6^2 \pmod 7 / \cdot a_6$ | | $10^6a_6 \equiv 1 \cdot 6^2 \cdot a_6 \pmod 7$ |
| $10^7 \equiv 10 \cdot 6^2 \pmod 7 / \cdot a_7$ | | $10^7a_7 \equiv 10 \cdot 6^2 \cdot a_7 \pmod 7$ |
| $10^8 \equiv 100 \cdot 6^2 \pmod 7 / \cdot a_8$ | | $10^8a_8 \equiv 100 \cdot 6^2 \cdot a_8 \pmod 7$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ |

од каде лесно се добива дека $7 \mid a \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + 10^3a_3 + \cdots + 10^na_n \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow (a_0 + 10a_1 + 100a_2) + 6 \cdot (a_3 + 10a_4 + 100a_5) + 6^2 \cdot [(a_6 + 10a_7 + 100a_8) + \cdots \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow 7 \mid (\overline{a_2a_1a_0} + 6 \cdot \overline{a_5a_4a_3} + 6^2 \cdot \overline{a_8a_7a_6} + \cdots)$.

**Четврт критериум.**

$$7 \mid a \Leftrightarrow 7 \mid (\overline{a_3a_2a_1a_0} + 4 \cdot \overline{a_7a_6a_5a_4} + 4^2 \cdot \overline{a_{11}a_{10}a_9a_8} + \cdots).$$

**Доказ**. Слично како и во претходните случаи, ќе ги искористиме својствата за конгруенции на степените од бројот 10:

| | | |
|---|---|---|
| $1 \equiv 1 \pmod 7 / \cdot a_0$ | | $a_0 \equiv a_0 \pmod 7$ |
| $10 \equiv 10 \pmod 7 / \cdot a_1$ | | $10a_1 \equiv 10 \cdot a_1 \pmod 7$ |
| $10^2 \equiv 100 \pmod 7 / \cdot a_2$ | $\Rightarrow$ | $10^2a_2 \equiv 100 \cdot a_2 \pmod 7$ |
| $10^3 \equiv 1000 \pmod 7 / \cdot a_3$ | | $10^3a_3 \equiv 1000 \cdot a_3 \pmod 7$ |
| $10^4 \equiv 1 \cdot 4 \pmod 7 / \cdot a_4$ | | $10^4a_4 \equiv 1 \cdot 4 \cdot a_4 \pmod 7$ |
| $10^5 \equiv 10 \cdot 4 \pmod 7 / \cdot a_5$ | | $10^5a_5 \equiv 10 \cdot 4 \cdot a_5 \pmod 7$ |

| | | |
|---|---|---|
| $10^6 \equiv 100 \cdot 4 \pmod 7 / \cdot\, a_6$ | | $10^6 a_6 \equiv 100 \cdot 4 \cdot a_6 \pmod 7$ |
| $10^7 \equiv 1000 \cdot 4 \pmod 7 / \cdot\, a_7$ | | $10^7 a_7 \equiv 1000 \cdot 4 \cdot a_7 \pmod 7$ |
| $10^8 \equiv 1 \cdot 4^2 \pmod 7 / \cdot\, a_8$ | | $10^8 a_8 \equiv 1 \cdot 4^2 \cdot a_8 \pmod 7$ |
| $10^9 \equiv 10 \cdot 4^2 \pmod 7 / \cdot\, a_9$ | | $10^9 a_9 \equiv 10 \cdot 4^2 \cdot a_9 \pmod 7$ |
| $10^{10} \equiv 100 \cdot 4^2 \pmod 7 / \cdot\, a_{10}$ | | $10^{10} a_{10} \equiv 100 \cdot 4^2 \cdot a_{10} \pmod 7$ |
| $10^{11} \equiv 1000 \cdot 4^2 \pmod 7 / \cdot\, a_{11}$ | | $10^{11} a_{11} \equiv 1000 \cdot 4^2 \cdot a_{11} \pmod 7$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ |

Оттука, имаме $7 \mid a \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + 10^3a_3 + \cdots + 10^n a_n \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow (a_0 + 10a_1 + 100a_2 + 1000a_3) + 4 \cdot (a_4 + 10a_5 + 100a_6 + 1000a_7) + 4^2 \cdot [(a_8 + 10a_9 + 100a_{10} + 1000a_{11}) + \cdots \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow 7 \mid (\overline{a_3a_2a_1a_0} + 4 \cdot \overline{a_7a_6a_5a_4} + 4^2 \cdot \overline{a_{11}a_{10}a_9a_8} + \cdots)$

**Пример 1.** Докажете дека 7|446497982.

**Прв начин.** Ги разделуваме цифрите од записот на бројот чија деливост треба да се провери на групи од по три цифри, почнувајќи од десно налево, т.е. 446 497 982. Доволно е да се докаже дека $7|446497982 \Leftrightarrow 7|(982 + 6 \cdot 497 + 6^2 \cdot 446) \Leftrightarrow 7|20\,020 \Leftrightarrow 7|(20 + 6 \cdot 20) \Leftrightarrow 7|140 = 7 \cdot 20$ со што доказот е завршен.

**Втор начин.** Ги разделуваме цифрите од записот на бројот чија деливост со 7 треба да се провери на групи од по четири цифри, почнувајќи од десно налево, т.е. 4 4649 7982. Доволно е да се докаже дека $7 \mid 446497982 \Leftrightarrow 7|(7982 + 4 \cdot 4649 + 4^2 \cdot 4) \Leftrightarrow 7|2\,6642 \Leftrightarrow 7|(6642 + 4 \cdot 2) \Leftrightarrow 7|6650$ што е точно затоа што $6650 = 7 \cdot 950$ со што доказот е завршен.

Можеме да заклучиме дека ако сакаме да провериме деливост на повеќецифрен број со 7, со една или повеќе примени на првиот и вториот критериум за деливост задачата се сведува на проверка на деливост со 7 на најмногу двоцифрен број, со примена на третиот критериум задачата се сведува на проверка на деливост со 7 на најмногу трицифрен број, а со примена на четвртиот критериум задачата се сведува на проверка на деливост на најмногу четирицифрен број.

## Критериуми за деливост со бројот 17

Начинот за добивање на критериуми за деливост со 7, 11 или 13 може да се примени за добивање на критериуми за деливост со други броеви. Ќе дадеме два критериума за деливост со 17.

**Прв критериум.**

$$17|a \Leftrightarrow 17|(a_0 + a_{16} + a_{32} + \cdots) - (a_8 + a_{24} + a_{40} + \cdots)$$

$$-7[(a_1 + a_{17} + a_{33} + \cdots) - (a_9 + a_{25} + a_{41} + \cdots)]$$
$$-2[(a_2 + a_{18} + a_{34} + \cdots) - (a_{10} + a_{26} + a_{42} + \cdots)]$$
$$-3[(a_3 + a_{19} + a_{35} + \cdots) - (a_{11} + a_{27} + a_{43} + \cdots)]$$
$$+4[(a_4 + a_{20} + a_{36} + \cdots) - (a_{12} + a_{28} + a_{44} + \cdots)]$$
$$+6[(a_5 + a_{21} + a_{37} + \cdots) - (a_{13} + a_{29} + a_{45} + \cdots)]$$
$$-8[(a_6 + a_{22} + a_{38} + \cdots) - (a_{14} + a_{30} + a_{46} + \cdots)]$$
$$+5[(a_7 + a_{23} + a_{39} + \cdots) - (a_{15} + a_{31} + a_{47} + \cdots)]$$

**Доказ**: Овој критериум не е едноставен, но сепак, ја поедноставува постапката за проверка на деливост со 17 со повеќе-цифрени броеви.

Ќе ги искористиме својствата на конгруенциите на степените на бројот 10 со 17:

| | | |
|---|---|---|
| $1 \equiv 1 \pmod{17} / \cdot a_0$ | | $a_0 \equiv a_0 \pmod{17}$ |
| $10 \equiv -7 \pmod{17} / \cdot a_1$ | | $10a_1 \equiv -7 \cdot a_1 \pmod{17}$ |
| $10^2 \equiv -2 \pmod{17} / \cdot a_2$ | | $10^2 a_2 \equiv -2 \cdot a_2 \pmod{17}$ |
| $10^3 \equiv -3 \pmod{17} / \cdot a_3$ | | $10^3 a_3 \equiv -3 \cdot a_3 \pmod{17}$ |
| $10^4 \equiv 4 \pmod{17} / \cdot a_4$ | | $10^4 a_4 \equiv 4 \cdot a_4 \pmod{17}$ |
| $10^5 \equiv 6 \pmod{17} / \cdot a_5$ | | $10^5 a_5 \equiv 6 \cdot a_5 \pmod{17}$ |
| $10^6 \equiv -8 \pmod{17} / \cdot a_6$ | | $10^6 a_6 \equiv -8 \cdot a_6 \pmod{17}$ |
| $10^7 \equiv 5 \pmod{17} / \cdot a_7$ | | $10^7 a_7 \equiv 5 \cdot a_7 \pmod{17}$ |
| $10^8 \equiv -1 \pmod{17} / \cdot a_8$ | | $10^8 a_8 \equiv -1 \pmod{17}$ |
| $10^9 \equiv 7 \pmod{17} / \cdot a_9$ | $\Rightarrow$ | $10^9 a_9 \equiv 7 \cdot a_9 \pmod{17}$ |
| $10^{10} \equiv 2 \pmod{17} / \cdot a_{10}$ | | $10^{10} a_{10} \equiv 2 \cdot a_{10} \pmod{17}$ |
| $10^{12} \equiv 3 \pmod{17} / \cdot a_{11}$ | | $10^{11} a_{11} \equiv 3 \cdot a_{11} \pmod{17}$ |
| $10^{13} \equiv -4 \pmod{17} / \cdot a_{12}$ | | $10^{11} a_{11} \equiv -4 \cdot a_{12} \pmod{17}$ |
| $10^{14} \equiv -6 \pmod{17} / \cdot a_{13}$ | | $10^{11} a_{11} \equiv -6 \cdot a_{13} \pmod{17}$ |
| $10^{15} \equiv 8 \pmod{17} / \cdot a_{14}$ | | $10^{11} a_{11} \equiv 8 \cdot a_{14} \pmod{17}$ |
| $10^{16} \equiv -5 \pmod{17} / \cdot a_{15}$ | | $10^{11} a_{11} \equiv -5 \cdot a_{15} \pmod{17}$ |
| $10^{17} \equiv 1 \pmod{17} / \cdot a_{16}$ | | $10^{11} a_{11} \equiv 1 \cdot a_{16} \pmod{17}$ |
| $10^{18} \equiv -7 \pmod{17} / \cdot a_{17}$ | | $10^{11} a_{11} \equiv -7 \cdot a_{17} \pmod{17}$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ |

Се добива дека остатоците кои се добиваат формираат низа која се повторува: 1, -7, -2, -3, 4, 6, -8, 5, -1, 7, 2, 3, -4, -6, 8, -5. Според тоа остатокот при делење со 17 на $10^n$ е еднаков на остатокот при делење на $10^{n+1}$ со 17, т.е. се користи дека $10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$.

$17|a \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{17} \Leftrightarrow a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + 10^3 a_3 + \cdots + 10^n a \equiv 0 \pmod{17} \Leftrightarrow (a_0 + a_{16} + a_{32} + \cdots) - (a_8 + a_{24} + a_{40} + \cdots) - 7[(a_1 + a_{17} + a_{33} + \cdots) - (a_9 + a_{25} + a_{41} + \cdots)] - 2[(a_2 + a_{18} + a_{34} + \cdots) - (a_{10}$

$+ a_{26} + a_{42} + \cdots)] - 3[(a_3 + a_{19} + a_{35} + \cdots) - (a_{11} + a_{27} + a_{43} + \cdots)] + 4[(a_4 + a_{20} + a_{36} + \cdots) - (a_{12} + a_{28} + a_{44} + \cdots)] + 6[(a_5 + a_{21} + a_{37} + \cdots) - (a_{13} + a_{29} + a_{45} + \cdots)] - 8[(a_6 + a_{22} + a_{38} + \cdots) - (a_{14} + a_{30} + a_{46} + \cdots)] + 5[(a_7 + a_{23} + a_{39} + \cdots) - (a_{15} + a_{31} + a_{47} + \cdots)] \equiv 0 \pmod{17}$

Цифрите кои се со индекс, но не постојат во записот на бројот, земаме дека се нули. На пример, ако $a = 123$, тогаш $a_0 = 3, a_1 = 2, a_2 = 1$. Но, за $n > 2$, $a_n = 0$.

**Втор критериум.**

$$17 \mid a \Leftrightarrow 17 \mid (\overline{a_1a_0} + 15 \cdot \overline{a_3a_2} + 15^2 \cdot \overline{a_5a_4} + 15^3 \cdot \overline{a_7a_6} + \cdots).$$

**Доказ**: Овој критериум ни кажува дека за да провериме деливост на даден број со 17 е доволно бројот да се раздели на двоцифрени броеви, почнувајќи од најдесно, т.е. од цифрата за единици, а потоа добиените двоцифрени броеви се множат со степените на 15, производите се собираат и се проверува дали збирот е делив со 17.

Ќе ги искористиме својствата за конгруенции на степените на бројот 10 со 17:

| | | |
|---|---|---|
| $1 \equiv 1 \pmod{17} / \cdot a_0$ | $\Rightarrow$ | $a_0 \equiv a_0 \pmod{17}$ |
| $10 \equiv 10 \pmod{17} / \cdot a_1$ | | $10a_1 \equiv 10a_1 \pmod{17}$ |
| $10^2 \equiv 15 \cdot 1 \pmod{17} / \cdot a_2$ | | $10^2a_2 \equiv 15 \cdot a_2 \pmod{17}$ |
| $10^3 \equiv 15 \cdot 10 \pmod{17} / \cdot a_3$ | | $10^3a_3 \equiv 15 \cdot 10a_3 \pmod{17}$ |
| $10^4 \equiv 15^2 \cdot 1 \pmod{17} / \cdot a_4$ | | $10^4a_4 \equiv 15^2 \cdot a_4 \pmod{17}$ |
| $10^5 \equiv 15^2 \cdot 10 \pmod{17} / \cdot a_5$ | | $10^5a_5 \equiv 15^2 \cdot 10a_5 \pmod{17}$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ |

од каде лесно се добива дека $a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + 10^3a_3 + \cdots + 10^na_n \equiv 0 \pmod{17} \Leftrightarrow a_0 + 10a_1 + 15 \cdot a_2 + 15 \cdot 10a_3 + 15^2 \cdot a_4 + 15^2 \cdot 10a_5 + 15^3 \cdot a_6 + 15^3 \cdot 10a_7 + \cdots \equiv 0 \pmod{17} \Leftrightarrow (\overline{a_1a_0} + 15 \cdot \overline{a_3a_2} + 15^2 \cdot \overline{a_5a_4} + 15^3 \cdot \overline{a_7a_6} + \cdots \equiv 0 \pmod{17} \Leftrightarrow 17 \mid (\overline{a_1a_0} + 15 \cdot \overline{a_3a_2} + 15^2 \cdot \overline{a_5a_4} + 15^3 \cdot \overline{a_7a_6} + \cdots)$

**Забелешка.** Бидејќи $15 \equiv -2 \pmod{17}$, се добива еквивалентната форма на вториот критериум

$$17 \mid a \Leftrightarrow 17 \mid (\overline{a_1a_0} - 2 \cdot \overline{a_3a_2} + 2^2 \cdot \overline{a_5a_4} - 2^3 \cdot \overline{a_7a_6} + \cdots)$$

**Пример 2.** Покажете дека 17 е делител на бројот 391 629 024 262 655.

Ако го искористиме првиот критериум, имаме: (5)-(0)-7[(5)-(9)]-2[(6)-(2)]-3[(2)-(6)]+4[(6)-(1)]+6[(2)-(9)]-8[(4)- (3)]+5[(2)-(0)] =

= 5-7(-4)-2(4)-3(-4)+4(5)+6(-7)-8(1)+5(2) = 5+28-8+12+20-42-8+10= 17 ≡ 0 (mod 17)

Со вториот критериум, се добива дека

17 | 3 91 62 90 24 26 26 55 $\Leftrightarrow 17|(55 - 2 \cdot 26 + 2^2 \cdot 26 - 2^3 \cdot 24 + 2^4 \cdot 90 - 2^5 \cdot 62 + 2^6 \cdot 91 - 2^7 \cdot 3) \Leftrightarrow 17 \ |(55 - 52 + 104 - 192 + 1440 - 1984 + 64 \cdot 91 - 128 \cdot 3) = 4811 \Leftrightarrow$ 17 | $(11 - 2 \cdot 48) \Leftrightarrow 17$ | $(-85)$ што е точно бидејќи $-85 = 17 \cdot (-5)$.

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Критериум за деливост со бројот **19.** Користејќи ги постапките од претходните докази, докажете ги двата критериума за деливост со бројот 19:

**Прв критериум.**

$$\begin{aligned}19|a \Longleftrightarrow 19|&(a_0 + a_{18} + \cdots) - (a_9 + a_{27} \ldots)+\\&+10[(a_1 + a_{19} + \cdots) - (a_{10} + a_{28} + \cdots)]+\\&+5[(a_2 + a_{20} + \cdots) - (a_{11} + a_{29} + \cdots)]+\\&+12[(a_3 + a_{21} + \cdots) - (a_{12} + a_{30} + \cdots)]+\\&+6[(a_4 + a_{22} + \cdots) - (a_{13} + a_{31} + \cdots)]+\\&+3[(a_5 + a_{23} + \cdots) - (a_{14} + a_{32} + \cdots)]+\\&+11[(a_6 + a_{24} + \cdots) - (a_{15} + a_{33} + \cdots)]+\\&+15[(a_7 + a_{25} + \cdots) - (a_{16} + a_{34} + \cdots)]+\\&+17[(a_8 + a_{26} + \cdots) - (a_{17} + a_{35} + \cdots)]\end{aligned}$$

**Втор критериум.**

$$19|a \Leftrightarrow 19 \mid (\overline{a_1a_0} + 5 \cdot \overline{a_3a_2} + 5^2 \cdot \overline{a_5a_4} + 5^3 \cdot \overline{a_7a_6} + \cdots)$$

**Забелешка.** Секој од критериумите може да се употреби неколку пати еднοподруго при што се добиваат сè помали броеви за кои треба да се провери деливоста со 19.

2. Докажете дека: а) 17 | 957338; б) 19 | 816335.
3. Проверете ја деливоста на бројот 64150611525 со:
   а) 7; б) 17; в) 19.
4. Која цифра треба да биде запишана на местото на X за бројот 37468X да биде делив со: а) 17, б) 19?

**Делчо Лешковски**
Меѓународен балкански универзитет, Скопје

## ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

Ова *Олимписко катче* го посветуваме на *Принципот на Дирихле* (The Pigeonhole Principle). Тој е една од најупотребуваните, а истовремено и една од наједноставните алатки што се користи при решавањето на разни комбинаторни задачи. Се смета дека овој принцип првпат е применет од страна на Дирихле во 1834 година, и затоа го носи неговото име.

(***Принцип на Дирихле***) Нека $n$ е природен број. Ако $n+1$ предмети се распоредени на произволен начин во $n$ кутии, тогаш барем во една кутија има најмалку два предмета.

**Доказ.** Доказот се спроведува со тргнување од спротивното. Ако претпоставиме дека во секоја кутија има најмногу по еден предмет, бидејќи има само $n$ кутии, би следувало дека во кутиите се распоредени најмногу $n$ предмети, што е спротивно со претпоставката дека во кутиите се распоредени $n+1$ предмети.

(***Општ Принцип на Дирихле***) Нека $n$ е природен број. Ако $n$ предмети се распоредени на произволен начин во $k$ кутии, тогаш барем во една кутија има најмалку $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ предмети. (Со $\lceil x \rceil$ го означуваме најмалиот цел број што е поголем или еднаков на $x$ )

**Доказ.** Тврдењето ќе го докажеме со контрадикција. Да претпоставиме дека ниту една од кутиите не содржи повеќе од $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 1$ предмети. Тогаш, вкупниот број на предмети не е поголем од $k\left(\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 1\right)$. Но, $k\left(\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 1\right) < k\left(\left(\frac{n}{k}+1\right)-1\right) = n$ (Тука го искористивме неравенството $\lceil x \rceil < x+1$ ). Ова е контрадикција бидејќи вкупно има $n$ предмети.

**Пример 1.** Докажи дека меѓу 367 луѓе секогаш има барем двајца што имаат роденден во ист ден.
**Решение.** Бидејќи една година има 365 или 366 денови, од Општиот Принцип на Дирихле следува дека барем во еден ист ден се родени двајца (Тука предмети се луѓето, кутии се различните денови во годината и $\left\lceil \frac{367}{365} \right\rceil = \left\lceil \frac{367}{366} \right\rceil = 2$ ).

**Пример 2.** Докажи дека меѓу 6 произволно избрани броеви од множеството $\{1,2,...,10\}$ , секогаш постојат два чиј збир е 11.

**Решение.** Броевите од 1 до 10 ги спаруваме на следниот начин: $(1,10),(2,9),(3,8),(4,7),(5,6).$ Имаме 5 пара и збирот на броевите во секој пар е 11. При произволен избор на 6 броеви, од Принципот на Дирихле следува дека два од нив ќе припаѓаат на еден ист пар, односно нивниот збир ќе биде 11.

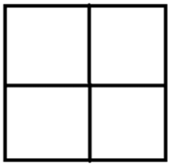
**Пример 3.** Докажи дека меѓу $n+1$ цели броеви можат да се изберат два чија разлика е делива со $n$ .
**Решение.** Нека $a_1,a_2,...,a_{n+1}$ се произволни цели броеви. Нека за секој $1 \le i \le n+1,\quad a_i = b_i \cdot n + r_i,$ при што $0 \le r_i < n.$ Бидејќи има $n+1$ остатоци $r_1,r_2,...,r_{n+1},$ а тие можат да примат $n$ вредности $0,1,2,...,n-1,$ според Принципот на Дирихле следува дека барем два од тие остатоци се еднакви, т.е. постојат $p<q$ такви што $r_p = r_q.$ Според тоа, $a_q - a_p = (b_q - b_p)n,$ односно $a_q - a_p$ е делив со $n$ .

**Пример 4.** Во рамнина е даден триаголник. Докажи дека не постои права што не поминува низ ниту едно од темињата, но ги сече сите три страни на триаголникот.
**Решение.** Секоја права ја дели рамнината на два дела. Од Принципот на Дирихле, бидејќи има три темиња, постојат најмалку две темиња што се на иста страна. Страната на триаголникот формирана од тие две темиња не ја сече правата.

**Пример 5.** На произволен начин е избрана група од пет луѓе. Докажете дека меѓу нив има најмалку двајца кои имаат еднаков број познаници меѓу избраните (сметаме дека релацијата познанство е ,,симетрична’’).

**Решение.** Да претпоставиме дека сите имаат различен број познаници. Ова е единствено можно само ако меѓу избраните има некој со точно 1, друг со точно 2, трет со точно 3, четврт со точно 4 и петти без познаници. Но тогаш тој со 4 познаници го познава и оној што нема познаници, што е спротивно на тоа дека релацијата познанство е ,,симетрична''. Следува дека во групата не може да има човек без познаници, т.е., сите избрани имаат по еден, два, три или четири познаници. Бидејќи групата брои пет члена, од принципот на Дирихле следува дека постојат двајца меѓу нив со еднаков број познаници.

**Пример 6.** Во внатрешноста на квадрат со страна 2 се дадени 5 точки. Докажи дека меѓу нив постојат две точки чие меѓусебно растојание не е поголемо од $\sqrt{2}$.
**Решение.** Квадратот го делиме на четири единечни квадрати, како на сликата.



Според Принципот на Дирихле, постои единечен квадрат во кој се наоѓаат барем две точки. Тогаш, растојанието меѓу тие две точки не е поголемо од дијагоналата на единечниот квадрат, чија должина е $\sqrt{2}$.

**Пример 7.** 27 точки се распоредени во редици и колони, така што во секоја редица има 9 точки, а во секоја колона има 3 точки (Редиците и колоните се заемно нормални). Секоја точка е обоена со црвена или сина боја. Докажи дека постои правоаголник чии темиња се обоени со иста боја, а страните му се паралелни на редиците и колоните.
**Решение.** Бидејќи секоја точка може да се обои со една од двете бои, следува дека секоја колона со 3 точки може да се обои на $2^3=8$ различни начини. Од Принципот на Дирихле следува дека постојат најмалку 2 колони обоени на идентичен начин. Во секоја од овие 2 колони, повторно од Принципот на Дирихле, имаме најмалку 2 точки во колоната обоени со иста боја. Очигледно, овие 4 точки со иста боја, во овие две колони, формираат правоаголник со бараните својства.

**Пример 8.** (11. ЈБМО, Македонија) Дадени се 50 точки во рамнината такви што меѓу нив нема три колинеарни. Секоја од овие точки е обоена во една од четири бои. Докажи дека постојат најмалку 130 разнострани триаголници чии темиња се обоени со иста боја.

**Решение.** Бидејќи $50=4\cdot 12+2$ , од Принципот на Дирихле следува дека постојат најмалку 13 истобојни точки. Ќе ја докажеме следната лема.

*Лема.* Нека се дадени $n>8$ точки во рамнината такви што меѓу нив нема три колинеарни. Тогаш постојат најмалку $\frac{n(n-1)(n-8)}{6}$ разнострани триаголници чии темиња се дадените точки.

*Доказ.* Имаме $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ отсечки и $\binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ триаголници со темиња во дадените точки. Над секоја отсечка постојат најмногу два рамнокраки триаголници за кои таа отсечка е основа. Навистина, ако над некоја отсечка *AB* постојат 3 рамнокраки $\Delta ABC$, $\Delta ABD$ и $\Delta ABE$, тогаш точките *C*, *D* и *E* се наоѓаат на симетралата на отсечката *AB*, па затоа ќе бидат колинеарни, што е противречност. Според тоа, имаме најмногу $2\frac{n(n-1)}{2}=n(n-1)$ рамнокраки триаголници. Конечно, од принципот на исклучување следува дека имаме најмалку

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-n(n-1)=\frac{n(n-1)(n-8)}{6}$$

разнострани триаголници. ■

Сега, ако во претходната лема земеме дека имаме $n=13$ истобројни точки, добиваме дека бројот на разностраните триаголници е поголем или еднаков на $\frac{13\cdot 12\cdot 5}{6}=130$ .

**Проблем 9.** 49 ученици решаваат 3 задачи. Секоја задача се оценува од 0 до 7 поени. Два ученика A и B ќе ги наречеме *споредливи* ако на секоја задача, поените што ги добил A не се повеќе од поените што ги добил B. Докажи дека меѓу овие 49 ученици постојат двајца *споредливи*.

**Решение.** Ги разгледуваме можните резултати на првите две задачи. Ако постојат двајца со исти резултати на нив, тогаш независно од третата задача, тие двајца се *споредливи*. Затоа да претпоставиме дека такви ученици нема.

Да ги разгледаме можните резултати од облик (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6), (0, 7), (1, 7), (2, 7), (3, 7), (4, 7), (5, 7), (6, 7), (7, 7). Ако 9 ученика на првите две задачи имаат некој од горните 15 резултати, тогаш, според Принципот на Дирихле, меѓу тие 9 ќе постојат двајца кои имаат еднаков број поени на третата задача. Бидејќи секои два од гореспоменатите 15 резултати се споредливи, токму тие два ученика ќе бидат *споредливи*. Затоа можеме да претпоставиме дека најмалку 15-8=7 резултати од гореспоменатите не се постигнати од учениците.

Аналогно, во секоја од долните групи има најмногу по 8 резултати:

(1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), (7, 6);

(2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (7, 5);

(3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (5, 4), (6, 4), (7, 4).

Следува дека на првите две задачи, од учениците не се постигнати барем 15-8+13-8+11-8+9-8=16 резултати, што е невозможно, бидејќи не се постигнати точно 64-49=15 резултати.

## Задачи за самостојна работа

**1.** Докажи дека постои природен број што е делив со 2022, а првите десет цифри му се 1234567890.

**2.** Во одделение со $n$ ученици, секој ученик се ракува со произволен број на негови соученици. Докажи дека во одделението има најмалку двајца ученици кои направиле еднаков број ракувања.

**3.** Врз една права се нанесени 2008 отсечки. Пресекот на секои 10 од нив претставува празно множество. Дали можеме да избереме 224 отсечки т.ш. никои две од нив немаат заеднички точки?

## Решенија на задачите за самостојна работа од XLVIII-1

**1.** 3. **2.** $\frac{10!}{2!3!2!}=151200.$

**3.** Ако ја измножиме левата страна, од секоја од *n*-те загради треба да одбереме $a$ или $b$. Ако одбереме $b$ од *k* загради (соодветно на $a$ од $n-k$ загради), тоа можеме да го направиме на $\binom{n}{k}$ начини, и така ја добиваме десната страна на равенството.

**4.** $\binom{6}{3}\binom{9}{5}+\binom{6}{4}\binom{9}{4}+\binom{6}{5}\binom{9}{3}+\binom{6}{6}\binom{9}{2}$.

**5.** Бројот на зборови составени од седум различни букви изнесува $31\cdot30\cdot29\cdot28\cdot27\cdot26\cdot25$ и од него треба да го одземеме бројот на зборови во кои буквите ,,**а**” и ,,**б**” се наоѓаат една до друга, а тој изнесува $29\cdot28\cdot27\cdot26\cdot25\cdot6\cdot2$ (првите пет множители се за другите 5 букви, множителот 6 е за местото на двојката букви ,,**аб**” или ,,**ба**” меѓу нив, а множителот 2 е за изборот помеѓу ,,**аб**” и ,,**ба**”.

## Извори:

[1] Ивайло Кортезов, Светлозар Дойчев, Състезателни задачи по математика за 7. - 8. клас, 2010.
[2] Дончо Димовски, Костадин Тренчевски, Ристо Малчески, Борис Јосифовски, Практикум по елементарна математика, 1992.
[3] Pablo Soberon, Problem-Solving Methods in Combinatorics (An Approach to Olympiad Problems), 2013
[4] https://www.matematika.bg/olimpiadi/teoria/princip-na-dirihle.html

## МАТЕМАТИЧКА ЗАГАТКА 2

Луѓето понекогаш кажуваат вистина, а понекогаш лага. Г-дин Абрамович е од оние луѓе кои во понеделник, вторник и среда лажат, а сите останати денови ја зборуваат вистината. Г-дин Богданов пак лаже во четврток, петок и сабота, а сите останати денови ја зборува вистината. Еден ден г-дин Абрамович и г-дин Богданов се сретнале.

Г-дин Абрамович: „Вчера јас лажев!“

Г-дин Богданов: „И јас исто така.“

Во кој ден од неделата тие ги дале овие изјави?

## Извор:

[1] Математика +, https://matematika-plus.weebly.com/

**Петар Филиповски**
ООУ „Кузман Јосифовски-Питу“, Скопје

## XXVI ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Во периодот од 28.06-03.07.2022 година, во Сараево, Босна и Херцеговина се одржа XXVI Јуниорска Балканска Математичка Олимпијада за ученици до петнаесет и пол години. На олимпијадата учествуваа 11 држави во официјална конкуренција и 8 држави како гости. Македонија ја претставуваа:

**МКД1 Дамјан Давков**, ученик во IX одделение при ООУ „Ванчо Прке“-Штип
**МКД2 Димитар Фидановски**, ученик во I година при ПСУ „Јахја Кемал“ – Скопје
**МКД3 Марко Митевски**, ученик во IX одделение при ООУ „Кирил Пејчиновиќ“, Кисела Вода, Скопје
**МКД4 Марко Серафимовски**, ученик во IX одделение при ООУ „Владо Тасевски“, Карпош, Скопје
**МКД5 Нина Ламева**, ученичка во IX одделение при ООУ „Браќа Миладиновци“, Аеродром, Скопје
**МКД6 Леонид Тодороски**, ученик во IX одделение при ООУ „Григор Прличев“-Охрид
под водство на Проф. Д-р Делчо Лешковски-водач и Анастасија Трајанова-заменик водач.

Македонија постигна огромен успех на ЈБМО 2022, освојувајќи 4 медали. **Дамјан Давков – златен медал, Леонид Тодороски – сребрен медал, Димитар Фидановски – бронзен медал и Марко Митевски – бронзен медал.**

Да забележиме дека, Дамјан Давков го освои златниот медал со максимален број бодови.

Во продолжение се дадени задачите од олимпијадата.

**1.** Одреди ги сите парови $(a,b)$ од позитивни цели броеви за кои важи

$$11ab \le a^3 - b^3 \le 12ab \, .$$

**Решение.** Нека $a-b=t$. Од $a^3-b^3\geq 11ab$ заклучуваме дека $a>b$, па $t$ е позитивен цел број. Според тоа почетното неравенство можеме да го запишеме во облик

$$11b(b+t)\leq t\left[b^2+b(b+t)+(b+t)^2\right]\leq 12b(b+t).$$

Бидејќи

$$t\left[b^2+b(b+t)+(b+t)^2\right]=t\left(b^2+b^2+bt+b^2+2bt+t^2\right)$$
$$=3tb(b+t)+t^3,$$

неравенството можеме да го запишеме во облик

$$(11-3t)b(b+t)\leq t^3\leq(12-3t)b(b+t).$$

Ако $t\geq 4$, неравенството $t^3\leq(12-3t)b(b+t)$ не е исполнето, бидејќи десната страна во неравенството е непозитивна. Останува да ги провериме случаите кога $t\in\{1,2,3\}$.

Ако $t=3$, тогаш горното неравенство добива облик

$$2b(b+3)\leq 27\leq 3b(b+3).$$

Ако $b\geq 3$, тогаш левата страна од неравенството е поголема од $27$ и ако $b=1$, тогаш десната страна е помала од $27$, па овие два случаи не се решение. Ако $b=2$, решение е парот $(a,b)=(5,2)$.

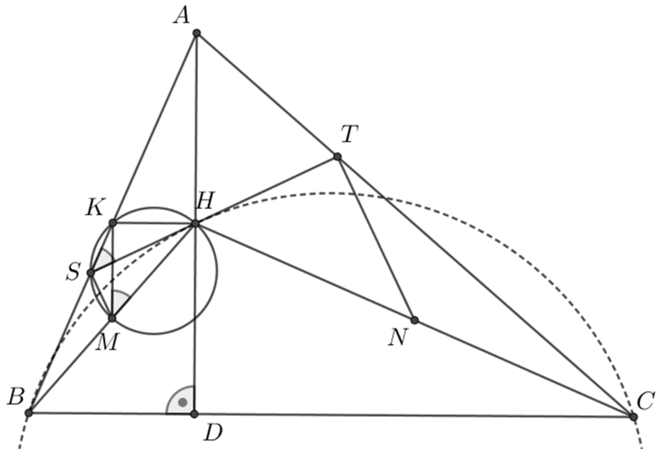
Ако $t\leq 2$, имаме

$$(11-3t)b(b+t)\geq(11-6)\cdot 1\cdot(1+1)=10>t^3,$$

па и овај случај не е решение.
Следува единствено решение е парот $(a,b)=(5,2)$.

**2.** Нека $ABC$ е остроаголен триаголник во кој важи $AH=HD$, каде што $H$ е ортоцентар на триаголникот $ABC$ и $D\in BC$ е подножјето на висината спуштена од темето $A$. Нека со $l$ е означена правата низ $H$ што ја допира опишаната кружница околу триаголникот $BHC$. Нека $S$ и $T$ се пресечните точки на $l$ со $AB$ и $AC$, соодветно. Да ги означиме средините на $BH$ и $CH$ со $M$ и $N$, соодветно. Докажи дека правите $SM$ и $TN$ се паралелни.

**Решение.**




За да докажеме дека правите $SM$ и $TN$ се паралелни, доволно е да докажеме дека и двете се нормални на правата $ST$. Ќе докажеме дека $SM \perp ST$. Нека $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$ и $\angle ACB = \gamma$. Од теоремата за агол меѓу тетива и тангента имаме

$$\angle SHB = \angle HCB = 90^\circ - \beta .$$

Со комбинирање на последното равенство и следното

$$\angle HBS \equiv \angle HBA = 90^\circ - \alpha$$

добиваме

$$\angle BSH = 180^\circ - \left(90^\circ - \beta\right) - \left(90^\circ - \alpha\right) = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$$

од каде следува дека $\angle TSA = \gamma$.

Бидејќи $AH = HD$, $H$ е средишна точка на $AD$. Нека $K$ е средишна точка на страната $AB$. Тогаш правите $KH$ и $BC$ се паралелни. Бидејќи $M$ е средина на $BH$, правите $KM$ и $AD$ се паралелни, од каде следува дека $KM \perp BC$. Од $KH \parallel BC$, имаме $KM \perp KH$, па $\angle MKH = 90^\circ$. Исто така, од $KH \parallel BC$ следува

$$\angle KHM \equiv \angle KHB = \angle CBH .$$

Од

$$\angle HMK = 90^\circ - \angle KHM = 90^\circ - \angle CBH$$
$$= 90^\circ - \left(90^\circ - \gamma\right) = \gamma = \angle TSA \equiv \angle HSK ,$$

следува дека четириаголникот $MHKS$ е тетивен, од каде добиваме $\angle MSH = \angle MKH = 90^\circ$. Со други зборови $SM \perp ST$. Случајот

$TN \perp ST$ се докажува аналогно. Со тоа докажавме дека правите $SM$ и $TN$ се паралелни.

**3.** Одреди ги сите четворки $(p,q,a,b)$ од позитивни цели броеви, каде што $p$ и $q$ се прости броеви и $a>1$, за кои важи

$$p^a = 1+5q^b .$$

**Решение.** Да забележиме дека, ако $p$ и $q$ се непарни, тогаш левата страна во равенството ќе биде непарен број, а десната парен број. Според тоа задачата нема решение кога $p$ и $q$ се непарни броеви. Со други зборови, барем еден од нив треба е парен, т.е. да е еднаков на $2$. Ќе ги разгледаме и двете можности, $p=2$ и $q=2$.

Нека $p=2$. Тогаш почетната равенка ја запишуваме во облик

$$2^a = 1+5q^b .$$

Од последното добиваме дека бројот $q$ е непарен (во спротивно, десната страна ќе биде непарен број и задачата ќе нема решение). Следува $2^a \equiv 1 \pmod 5$. Последната равенка има решение ако и само ако $a=4c$, за некој позитивен цел број $c$. Равенката $2^{4c} = 1+5q^b$ ја запишуваме во облик

$$2^{4c} - 1 = 5q^b \Leftrightarrow \left(4^c - 1\right)\left(4^c + 1\right) = 5q^b .$$

Бидејќи $q$ е непарен, не може истовремено да е делител и на $4^c - 1$ и на $4^c + 1$. Имено, ако ги дели и двата броеви, ќе ја дели и нивната разлика, која е еднаква на $2$, а тоа не е можно. Добиваме $q^b \mid 4^c - 1$ или $q^b \mid 4^c + 1$, па мора еден од броевите $4^c - 1$ или $4^c + 1$ е делител на $5$. Бидејќи за $c \geq 2$ двата броеви се поголеми од $5$, останува да го разгледаме само случајот кога $c=1$. Тогаш од $5q^b = 15$ добиваме дека единствено решение е $b=1$ и $q=3$. Следува четворката $(p,q,a,b)=(2,3,4,1)$ е единствено решение на равенката во овај случај.

Нека $q=2$. Следува $p$ е непарен број и равенката ја запишуваме во облик

$$p^a = 1+5\cdot 2^b .$$

Нека $b$ е парен број. Тогаш од $2^b \equiv 1 \pmod{3}$ следува $1+5\cdot 2^b$ е делив со $3$, па мора $p=3$ (бидејќи $3 \mid p^a$) и равенката добива облик

$$3^a = 1+5\cdot 2^b .$$

Оттука следува $3^a \equiv 1 \pmod{5}$, од каде се добива дека $a=4m$, за некој позитивен цел број $m$. Според тоа, равенката $3^a = 1+5\cdot 2^b$ добива облик

$$\frac{3^{2m}-1}{2}\cdot\frac{3^{2m}+1}{2} = 5\cdot 2^{b-2} .$$

Бидејќи $3^{2m} \equiv 1 \pmod{4}$ добиваме дека $\frac{3^{2m}+1}{2} \equiv 1 \pmod{2}$. Оттука заклучуваме дека бројот $\frac{3^{2m}+1}{2}$ е замно прост со $2^{b-2}$, од каде следува е делител на $5$. Ова е исполнето само за $m=1$ (ако $m>1$, тогаш $\frac{3^{2m}+1}{2}>5$). Од $m=1$, $q=2$, $p=3$ и $a=4m$ лесно се одредува дека $b=4$. Следува четворката $(p,q,a,b)=(3,2,4,4)$ е единствено решение на равенката во овај случај.

Останува да го разгледаме случајот кога $b$ е непарен број. Во овој случај имаме

$$p^a = 1+5\cdot 2^b \equiv 1+5\cdot 2 \equiv 2 \pmod{3},$$

од каде заклучуваме дека $a$ е непарен број. Имено, ако $a$ е парен број, тогаш не важи $p^a \equiv 2 \pmod{3}$, без разлика каква е вредноста на $p$. Од последното и од $a>1$, заклучуваме дека $a \ge 3$. Според тоа равенката ја запишуваме во облик

$$5\cdot 2^b = p^a - 1 = (p-1)\left(p^{a-1}+p^{a-2}+\ldots+1\right).$$

Тогаш

$$p^{a-1}+p^{a-2}+\ldots+1 \equiv 1+1+\ldots+1 \equiv a \pmod{2},$$

од каде се добива дека овај број е замно прост со бројот $2^b$, односно мора да е делител на $5$. Ова не е можно, бидејќи за $a \ge 3$ и $p \ge 3$ добиваме

$$p^{a-1}+p^{a-2}+\ldots+1 \ge p^2+p+1 \ge 3^2+3+1 = 13 > 5 .$$

Следува равенката нема решение кога $q=2$ и $b$ е непарен број.

Според тоа равенката има две решенија, $(p,q,a,b)=(2,3,4,1)$ и $(p,q,a,b)=(3,2,4,4)$.

**4.** Еден парен позитивен цел број $n$ се нарекува "убав" ако множеството $\{1,2,...,n\}$ може да се разбие на $\frac{n}{2}$ двоелементни подмножества, такви што збирот на елементите во секое подмножество е степен на $3$. На пример, $6$ е "убав" бидејќи множеството $\{1,2,3,4,5,6\}$ може да се разбие на подмножества $\{1,2\}$, $\{3,6\}$, $\{4,5\}$. Одреди го бројот на "убави" позитивни цели броеви што се помали од $3^{2022}$.

**Решение.** За "убав" број $n$ и даденото разбивање на множеството $\{1,2,...,n\}$ на двоелементни подмножества такви што збирот на елементите во секое подмножество е степен на $3$, велиме дека $a,b\in\{1,2,...,n\}$ се "спарени" ако и двата броеви припаѓаат на истото подмножество.

Нека $x$ е "убав" број и $k$ е (единствен) ненегативен цел број таков што $3^k \le x < 3^{k+1}$. Да претпоставивме дека $x$ е "спарен" со $y<x$. Тогаш, $x+y=3^s$, за некој позитивен цел број $s$. Бидејќи

$$3^s = x+y < 2x < 2\cdot 3^{k+1} < 3^{k+2}$$

добиваме $s<k+2$. Од друга страна, од

$$x+y \ge 3^k + 1 > 3^k$$

имаме $s>k$. Следува $s=k+1$, па $x+y=3^{k+1}$. Од последното равенство и од претпоставката $y<x$ добиваме $x>\frac{3^{k+1}}{2}$.

Слично како и погоре, можеме да заклучиме дека постои број $z$ од затворениот интервал $\left[3^{k+1}-x,x\right]$ кој е "спарен" со $3^{k+1}-z$. Имено, за секој таков број $z$, поголемиот од броевите $z$ и $3^{k+1}-z$ е поголем од $\frac{3^{k+1}}{2}$, бидејќи е поголем од $3^k$, па броевите $z$ и $3^{k+1}-z$ припаѓаат на исто подмножество. Со други зборови, секој од броевите од сегментот $\left[3^{k+1}-x,x\right]$ е "спарен" со друг број од истиот сегмент. Забележуваме, ова повлекува дека сите броеви помали од $3^{k+1}-x$ се "спарени" меѓу себе, па бројот $3^{k+1}-x-1$ е или "убав" број или е еднаков на нула. Исто така, бројот $3^k$ мора да биде "спарен" со бројот $2\cdot 3^k$, од каде следува $x\geq 2\cdot 3^k$.

Со помош на принципот на математичка индукција ќе докажеме дека $a_n=2^n-1$, каде $a_n$ е бројот на "убави" позитивни цели броеви помали од $3^n$. За $n=1$, тврдењето е очигледно, бидејќи $2$ е единствен "убав" позитивен цел број помал од $3$. Нека тврдењето е точно за некој позитивен цел број $n$. Ќе докажеме дека тврдењето е точно и за $n+1$. За да го докажеме ова, прво да забележиме дека бројот на "убави" позитивни цели броеви е помеѓу броевите $2\cdot 3^n$ и $3^{n+1}$ и е точно $a_{n+1}-a_n$. Забележуваме дека $3^{n+1}-1$ е "убав" број. За секој "убав" број $2\cdot 3^n\leq x<3^{n+1}-1$, бројот $3^{n+1}-x-1$ исто така е "убав" и е строго помал од $3^n$. Исто така, за секој позитивен цел број $y<3^n$, постои едениствен цел број $x$ таков што $2\cdot 3^n\leq x<3^{n+1}-1$ и $3^{n+1}-x-1=y$. Тогаш

$$a_{n+1}-a_n=a_n+1\Leftrightarrow a_{n+1}=2a_n+1=2\left(2^n-1\right)+1=2^{n+1}-1.$$

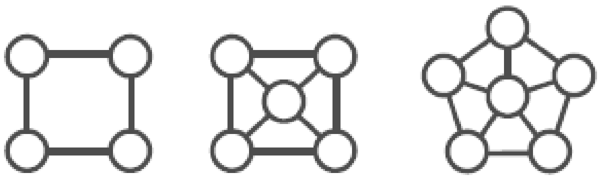
Според принципот на математичка индукција следува тврдењето. Следува има $2^{2022}-1$ "убави" позитивни цели броеви помали од $3^{2022}$.

## МАТЕМАТИЧКА ЗАГАТКА 3

Пополни ги со броеви празните крукчиња во секоја од фигурите, така што:

- броевите во секои две крукчиња кои се директно поврзани со линија да не се заемно прости;
- броевите во секои две крукчиња кои не се директно поврзани со линија да се заемно прости.

(За два броја велиме дека се заемно прости, ако нивниот најголем заеднички делител е бројот 1.)



**Извор:**

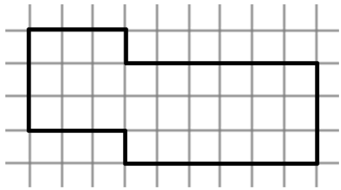
[1] A. Burago, *Mathematical Circle Diaries, Year 2*, Mathematical Circles Library, AMS, 2010.

## КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

### 4 одделение

**3969.** Збирот на два броја е за 2 поголем од десет илјади, а нивната разлика е десет илјади. Кои се броевите?

**3970.** Секое квадратче во мрежата има страна со должина 1 cm. Определи ги периметарот (обиколката) и плоштината на фигурата.



**3971.** Андреј секогаш кажува по две реченици од кои едната е вистинита, а другата е невистинита. Еднаш тој рекол: „Вчера беше среда. Задутре ќе биде вторник.“ Потоа малку размислил и рекол: „Денес е среда. Вторник беше завчера.“

Во кој ден од седмицата Андреј ги изговорил овие реченици?

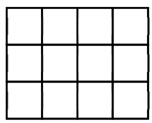
**3972.** Јана имала собрано одредена сума пари во касичката. Прво таа потрошила една третина од парите за да си купи книга, а со преостанатите 320 денари од касичката купила подарок за сестра си. Колку пари имала Јана во касичката на почетокот?

### 4 – 5 одделение

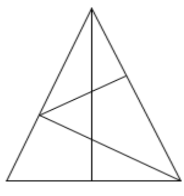
**3973.** Стави загради во бројниот израз $54+369:9-3\cdot 2$ така што вредноста на добиениот израз да биде: а) 177 б) 130.

**3974.** Никола замислил еден природен број. Тој број е за 1 помал од количникот од делењето на најголемиот четирицифрен број и најголемот двоцифрен број. Кој број го замислил Никола?

**3975.** Правоаголникот на цртежот расечи го на две фигури вдолж некои линии на мрежата така што добиените две фигури да имаат еднаква обиколка, а различна плоштина. Обој една од фигурите.



**3976.** Колку триаголници има на цртежот?



## 5 – 6 одделение

**3977.** Збирот на броевите $34,76$ и $29,89$ намали го за $18,33$, а добиената разлика зголеми ја 2,3 пати. Кој број го доби?

**3978.** Определи ги сите рамнокраки триаголници со должини на страни цел број сантиметри и периметар 24 cm?

**3979.** Марија спакувала 4 подарока во една кутија и ја испратила по пошта во која примаат пратки до 5 kg. Едниот подарок има маса 1,8 kg, другиот 950 g, а третиот 1030 g. Колку најмногу килограми може да биде масата на четвртиот подарок?

**3980.** Даден е квадрат со должина на страна $4$. Пресметај го периметарот на правоаголникот на кој должината на едната страна е за два помала од должината на страната на квадратот, а плоштината еднаква на плоштината на дадениот квадрат.

## 6 – 7 одделение

**3981.** Пресметај ја вредноста на изразот

$$1-\frac{100}{101}+\frac{99}{101}-\frac{98}{101}+\frac{97}{101}-...-\frac{2}{101}+\frac{1}{101}.$$

**3982.** Одреди ја цифрата $a$ за која бројот $\overline{7438a}$ при делење со 5 дава ист остаток како и при делење со 9.

**3983.** Определи ја дропката што е еквивалентна со дропката $\frac{5}{7}$ и збирот на броителот и именителот ѝ е еднаков на $60$.

**3984.** Филип го запишал производот на првите 37 природни броја при што две цифри ги заменил со буквите $a$ и $b$ и го добил записот:

$$1376a7530912263450463159795815809024b0000000.$$

Кои цифри ги заменил Филип?

## 7 – 8 одделение

**3985.** Разликата на најголемиот и најмалиот внатрешен агол во еден рамнокрак триаголник е $8°$. Определи ја големината на внатрешните агли на триаголникот.

**3986.** Во едно училиште има точно три паралелки во 7 одделение: 7а, 7б и 7в. Во 7а одделение учат 36% од вкупниот број на учениците од сите три одделенија. Бројот на ученици во 7б одделение е еднаков на $\frac{5}{9}$ од бројот на ученици во 7а. Колку ученици учат во секое од одделенијата, ако во 7а има 6 ученици помалку од 7в одделение?

**3987.** Претстави го бројот $208$ како збир на четири различни природни броеви, такви што првиот намален за $3$, вториот зголемен за $3$, третиот намален трипати, а четвртиот зголемен трипати, даваат еден ист број.

**3988.** Мартин е постар од своите три сестри Ана, Ивана и Елена за 8, 10 и 13 години, соодветно. После една година, збирот на годините на сестрите на Мартин ќе биде за 39 поголем од годините на Мартин. Колку години има Мартин денес?

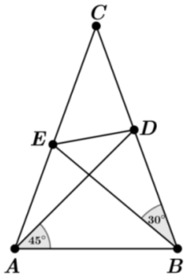
**8 – 9 одделение**

**3989.** За која вредност на $x$ е исполнето равенството

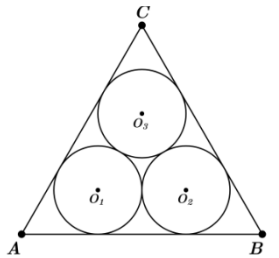
$$111111\cdot\left(\frac{11}{10101}-\frac{10}{3\cdot 7\cdot 13\cdot 37}-\frac{5}{2442x}\right)=\frac{17}{2}?$$

**3990.** Конструираме опаѓачка низа од сите природни броеви, делители на бројот 707070. Кој број се наоѓа на седмото место во низата?

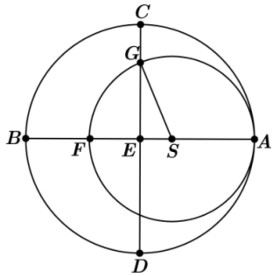
**3991.** На цртежот е даден рамнокрак триаголник $ABC$ $\left(\overline{AC}=\overline{BC}\right)$ со агол при врвот од $40^\circ$. На краците $AC$ и $BC$ се избрани точките $E$ и $D$, соодветно, така што $\measuredangle BAD=45^\circ$ и $\measuredangle EBD=30^\circ$. Пресметај го збирот на аглите $\measuredangle BED$ и $\measuredangle EDA$.




**3992.** Во рамностраниот триаголник $ABC$ со должина на страна $a$, се вписани три кружници со радиус $r$ (како на цртежот). Изрази ги периметарот и плоштината на триаголникот преку радиусот на кружниците.



## 9 одделение




**3993.** Две кружници се допираат одвнатре во точката $A$. Нека $AB$ и $CD$ се два заемно нормални дијаметри на поголемата кружница кои ја сечат помалата кружница во точки $F$ и $G$, соодветно и $S$ е центарот на помалата кружница (како на цртежот). Определи ја плоштината на делот ограничен со двете кружници, ако $\overline{BF} = 5\,\text{cm}$ и $\overline{CG} = 3\,\text{cm}$.

**3994.** Нека $2n = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2022}$. Докажи дека $n = 2^{2022} - 1$ и дека $n$ е делив со 21.

**3995.** Пресметај ја вредноста на изразот $a^5b^2 + a^2b^5 + 2ab$, ако $a + b = 1$ и $a^2 + b^2 = 2$.

**3996.** Дијагоналите на трапезот $ABCD$ имаат должини $3\,\text{cm}$ и $5\,\text{cm}$, а должината на отсечката што ги поврзува средините на основите е $2\,\text{cm}$. Пресметај ја плоштината на трапезот.

**Изготвиле**: Елена Павлов, Анкица Талеска, Лена Миловановиќ, Милена Мицковска, Соња Чаламани, Стево Ѓоргиев, Јасмина Костова – Папалазова, Зоран Штерјов, Борче Јошевски.

---

**Трајче Ѓорѓијевски**

## НАГРАДНИ ЗАДАЧИ

**1.** Нека $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots\ a_3 a_2 a_1 a_0}$ е природен број со цифри $a_0, a_1, a_2, a_{3,} \ldots, a_n$. Докажи дека

$$7 | 2^0 \cdot \overline{a_1 a_0} + 2^1 \cdot \overline{a_3 a_2} + 2^2 \cdot \overline{a_5 a_4} + 2^3 \cdot \overline{a_7 a_6} + \cdots$$

**2.** Полукруг со радиус $\sqrt{3}\ cm$ ротира околу една крајна точка од својот дијаметар за агол од $30^0$. Пресметај ја плоштината на 2Д-формата што се добива при опишувањето на полукружницата.

## 4 одделение

**3941.** Дедото сега има $62$ години, неговата ќерка има $36$ години, внукот има $8$ години, а внуката има $6$ години. По колку години дедото ќе има толку години колку што ќе имаат заедно неговата ќерка, внукот и внуката?

**Решение.** Ќерката, внукот и внуката сега имаат $50$ години, односно $12$ години помалку. За секоја наредна година бројот на годините на дедото ќе се зголемува за $1$, а збирот на годините на останатите за $3$, односно за $2$ повеќе т.е. $2=3-1$. За да ги достигнат годините на дедото треба да поминат $12:2=6$ години.

**3942.** Одреди ги сите природни броеви од втората стотка, кои се 13 пати поголеми од збирот на своите цифри.

**Решение.** Природен број што е 13 пати поголем од друг број може да се запише како 13 помножен со тој друг број, што значи е делив со 13. Броевите од втората стотка што се деливи со 13 се: 104, 117, 130, 143, 156, 169, 182, 195. Тие при делење со 13 даваат количници 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, соодветно. Бараните броеви со даденото својство се: 117=$13\cdot 9$, 156= $13\cdot 12$ и 195= $13\cdot 15$.

**3943.** Анастас трча секој ден на патека. Во понеделник трча 2km, а секој следен ден до петок трча по половина километар повеќе од претходниот ден. Во сабота и недела Анастас трча по 3,6km. По колку километри неделно трча Анастас?

**Решение.** Анастас во понеделник трча 2 km, во вторник (2+0,5) km, во среда (2,5+0,5) km, во четврток (3+0,5) km и во петок (3,5+0,5) km, а во сабота и недела по 3,6 km. Со собирање на километрите кои ги трча секој ден од понеделник до недела, имаме

$$2+(2+0,5)+(2,5+0,5)+(3+0,5)+(3,5+0,5)+3,6+3,6=$$

$$=2+2,5+3+3,5+4+7,2=22,2\ ,$$

односно Анастас трча 22,2 km неделно.

**3944.** На писмената работа 56 ученици добиле петки. Бројот на ученици кои добиле петки е 7 пати поголем од бројот на ученици кои добиле двојки. Учениците кои добиле единици биле за 6 помалку од учениците кои добиле двојки. Колку ученици добиле единици?

**Решение.** Бројот на ученици кои добиле двојка е 7 пати помал од бројот на оние кои добиле петка. Значи, двојка добиле 56:7=8 ученици. Единица добиле за 6 помалку од оние кои добиле двојка, па единица добиле 8 – 6 = 2 ученика.

## 4 – 5 одделение

**3945.** Преполови го производот на збирот и разликата на броевите 47,654 и 35,837. Кој број го доби?

**Решение.** $\left[(47,654+35,837)\cdot(47,654-35,837)\right]:2=$

$$=\left[83,491\cdot 11,817\right]:2=986,613147:2=493,3065735\,.$$

**3946.** Кој збир е поголем: збирот на сите непарни природни броеви помали од 1000 или збирот на сите парни природни броеви од 1 до 1000? Пресметај ги двата збира! Пресметај ја разликата на поголемиот и помалиот збир?

**Решение.** Непарни природни броеви помали од $1000$ има $500$. Нивниот збир ќе го пресметаме со групирање на собироците чиј збир е точно 1000, па

$$1+3+5+...+497+499+501+503+...+995+997+999=$$
$$(1+999)+(3+997)+(5+995)+...+(497+503)+(499+501)=$$
$$\underbrace{1000+1000+1000+...+1000+1000}_{250\text{ собироци}}=250\cdot 1000=250\ 000.$$

Парни природни броеви помали од 1000, исто така има $500$. Нивниот збир може да го пресметаме на истиот начин. Забележуваме дека бројот 500 и бројот 1000 не ги групираме со друг број. Зошто?

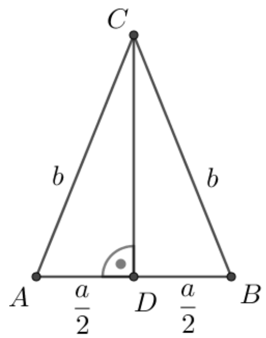
$$2+4+6+...+498+500+502+...+994+996+998+1000=$$
$$(2+998)+(4+996)+(6+994)+....+(498+502)+500+1000=$$
$$\underbrace{(1000+1000+1000+...+1000)}_{249\text{ собироци}}+500+1000=250\cdot 1000+500=250\ 500.$$

Разликата на поголемиот и помалиот збир е $250500-250000=500.$

**3947.** Во рамнокрак триаголник ABC врвот C е поврзан со средината D на страната AB. Периметарот на триаголникот ABC е

$36 \text{ cm}$, а периметарот на триаголникот ADC е $30 \text{ cm}$. Пресметај ја должината на отсечката CD.

**Решение.** *I начин:*




Во $\Delta ABC$, $L = a + 2b = 36$, па $a + 2b = 36$ …(1).

Во $\Delta ADC$, $L = \frac{a}{2} + b + \overline{CD} = 30$, па

$$\frac{a}{2} + b + \overline{CD} = 30 \ldots(2)$$

Ако двете страни на равенството (2) ги помножиме со бројот 2, добиваме:

$$a + 2b + 2 \cdot \overline{CD} = 60 \ldots(3)$$

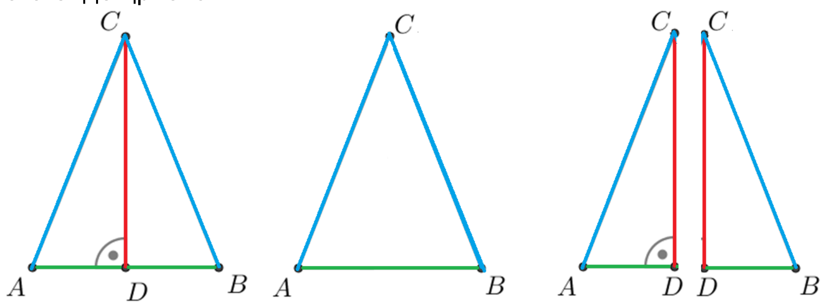
Според равенството (1), $a + 2b = 36$, па со замена во равенството (3) добиваме

$$36 + 2 \cdot \overline{CD} = 60$$

$$2 \cdot \overline{CD} = 60 - 36 = 24$$

$$\overline{CD} = 24 : 2 = 12 \text{ cm}.$$

*II начин:* Ќе го нацртаме триаголникот ABC со помош на боички така што само отсечките со иста должина да бидат нацртани со иста боја. На пример, краците AC и BC нека бидат сини, основата AB нека биде зелена, а отсечката CD, чија должина ја бараме, нека биде црвена.




Тогаш, периметарот на триаголникот ABC, $36 \text{ cm}$, е збир на должините на двете сини и на зелената отсечка.

Периметарот на триаголникот ADC, $30 \text{ cm}$, е збир на должината на црвената отсечка, на една од сините отсечки и на половина од зелената отсечка. Исто толку е и периметарот на триаголникот BDC. Збирот на периметрите на овие два триаголници е $60 \text{ cm}$. Во овој збир, должината на црвената отсечка се јавува 2 пати.

За разлика од тоа, должината на црвената отсечка не се појавува како собирок во периметарот на триаголникот ABC, $36 \text{ cm}$. Оттука, разликата $60-36=24 \text{ cm}$ ја дава удвоената вредност на должината на црвената отсечка. Значи, црвената отсечка има должина $24:2=12 \text{ cm}$.

**3948.** Ѕидовите на една дрвена коцка се обоени црвено. Потоа коцката е пресечена на 27 помали коцкички со иста големина. Колку од помалите коцкички имаат точно:

а. 0 црвени ѕидови; б. 1 црвен ѕид;

в. 2 црвени ѕидови; г. 3 црвени ѕидови;

д. 4 или повеќе црвени ѕидови?

ѓ. Каква е врската меѓу броевите на мали коцкички со точно 1, точно 2 или точно 3 црвени ѕидови со бројот на ѕидови, бројот на рабови и бројот на темиња на големата коцка?

**Решение.** а. 1 б. 6 в. 12 г. 8 д. 0
ѓ. Точно еден црвен ѕид имаат онолку коцкички, колку што има ѕидови коцката. Точно два црвени ѕида имаат онолку коцкички колку што има рабови коцката. Точно три црвени ѕида имаат онолку коцкички колку што има темиња коцката.

## 5 – 6 одделение

**3949.** Страните на еден осумаголник имаат должини на страни кои се последователни природни броеви. Одреди ги должините на страните ако периметарот на осумаголникот е 216 cm.

**Решение.** Збирот на должините на страните е

$$\mathrm{n}+(\mathrm{n}+1)+(\mathrm{n}+2)+(\mathrm{n}+3)+(\mathrm{n}+4)+(\mathrm{n}+5)+(\mathrm{n}+6)+(\mathrm{n}+7)=8n+28$$

и тој е еднаков на 216. Па, $8n+28=216$, односно $8n=216-28$, од каде следува дека $8n=188$. Според тоа $n=188:8$, односно $n=23,5.$ Од условите на задачата $n$ е природен број, но 23,5 не е природен број, што значи дека таков осумаголник не постои.

**3950**. Три автобуси во 7 часот тргнуваат од станица во три различни правци. Првиот автобус се враќа во станицата после 1 час и 5 минути и повторно тргнува после пауза од 10 минути. Вториот автобус се враќа после 56 минути и по 4 минути пауза повторно тргнува на пат. Третиот автобус се враќа после 48 минути и по 2 минути пауза повторно тргнува на пат. После колку време трите автобуси ќе се сретнат на станицата во исто време?

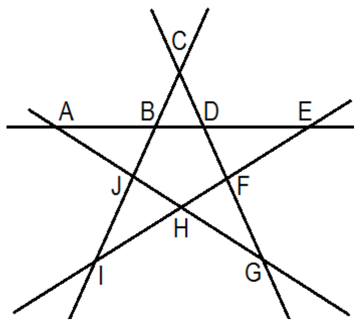
**Решение.** На првиот автобус му е потребно 65+10 = 75, односно 75 минути за да тргне повторно од станицата. На вториот му се потребни 56+4=60, односно 60 минути и на третиот 48+2=50, односно 50 минути за да тргне повторно од станицата. Бидејќи НЗС(75,60,50)=300, добиваме дека се потребни 300 минути, односно 5 часа за повторно да тргнат во исто време од станицата. Значи, тие ќе се сретнат на станицата во исто време после 4 часа и 58 минути, односно тогаш кога ќе пристигне третиот автобус, а првиот и вториот се веќе таму. Да забележиме дека 4 часа и 58 минути е најмалото потребно време за тие да се сретнат, односно 5 часа е најмалото потребно време за тие да тргнат повторно во исто време од станицата во текот на денот.

**3951.**Одреди го аголот кој го зафаќаат стрелките на часовникот во 13 часот и 20 минути!

**Решение.** Во 13 часот малата стрелка е точно на 13, а за 20 минути ќе помине уште $\frac{1}{3}$ од 30˚, колку што изнесува аголот меѓу 13 ч. и 14 ч. Оттука, имаме дека аголот е 30˚ + 30˚ + 2/3 · 30˚ = 80˚.

**3952.** Распореди 10 точки на 5 прави, така што на секоја права да има по 4 точки. Решението дај го со цртеж.

**Решение.**



## 6 – 7 одделение

**3953.** Која дропка е поголема $\frac{2022}{2023}$ или $\frac{202220222022}{202320232023}$?

**Решение.** За дропката $\frac{202220222022}{202320232023}$ имаме дека

$$\frac{202220222022}{202320232023}=\frac{2022\cdot 100010001}{2023\cdot 100010001}=\frac{2022}{2023}.$$

Значи, двете дропки се еднакви.

**3954.** Аглите $\alpha$ и $\beta$ се суплементни, а аглите $\frac{2}{5}\alpha$ и $\beta$ се комплементни. Пресметај ја разликата на аглите $\alpha$ и $\beta$.

**Решение.** Од условите на задачата имаме дека $\alpha+\beta=180^\circ$ и $\frac{2}{5}\alpha+\beta = 90^\circ$. Со одземање на левите и десните страни на овие две равенки добиваме дека $\frac{3}{5}\alpha=90^\circ$, односно $\alpha= 150^\circ$, па $\beta=180^\circ-\alpha=180^\circ-150^\circ=30^\circ$. Според тоа, $\alpha$-$\beta$=$180^\circ$.

**3955.** Одреди ги цифрите $a$ и $b$, така што бројот $\overline{78a9b}$ да биде делив со 18.

**Решение.** Според признаците за деливост на еден број со 18, знаеме дека бројот треба да биде делив истовремено со 2 и со 9. Тоа значи дека бараниот број е парен број (за да биде делив со 2), па цифрата b може да биде: 0, 2, 4, 6 или 8. Од друга страна збирот на цифрите на бараниот број треба да биде делив со 9, за тој да биде делив со 9. Според тоа, добиваме дека:

За $b=0$, имаме $a=3$, односно бараниот број е 78390;

За $b=2$, имаме $a=1$, односно бараниот број е 78192;

За $b=4$, имаме $a=8$, односно бараниот број е 78894;

За $b=6$, имаме $a=6$, односно бараниот број е 78696;

За $b=8$, имаме $a=4$, односно бараниот број е 78498.

**3956.** Најди ги сите природни броеви $a,$ за коишто дропката $\frac{a+89}{a-2}$ е природен број.

**Решение.** Дадената дропка можеме да ја запишеме во облик

$$\frac{a+89}{a-2}=\frac{a-2+2+89}{a-2}=\frac{a-2+91}{a-2}=\frac{a-2}{a-2}+\frac{91}{a-2}=1+\frac{91}{a-2}.$$

Од $91=7\cdot 13$, имаме дека 91 има 4 делители: 1, 7, 13 и 91. Оттука добиваме 4 можности:

1) $a-2=1$, односно $a=3.$

2) $a-2=7,$ односно $a=9.$

3) $a-2=13,$ односно $a=15.$

4) $a-2=91,$ односно $a=93.$

Бараните броеви се 3, 9, 15 и 93.

## 7 – 8 одделение

**3957.** Во низата од шест различни природни броеви, третиот и секој нареден е еднаков на збирот на двата претходни. Најди ги тие броеви ако петтиот број од низата е бројот 8.

**Решение:** Нека $a$, $b$, $c$, $d$, $8$ и $e$ се шесте различни природни броеви од бараната низа. Од условот на задачата следуваат следните равенства:

$$a+b=c\,,\ b+c=d\,,\ c+d=8\,,\ d+8=e$$

Од првото и од второто равенство добиваме дека $a+b=d-b$, па од ова равенство следува $d=a+2b$.
Имаме дека $c+d=a+b+a+2b=8$, од каде добиваме $2a+3b=8.$ Бидејќи $a$ и $b$ се различни природни броеви, равенката $2a+3b=8$ има единствено решение $a=1$, $b=2$. Тогаш $c=3$, $d=8-3=5$ и $e=5+8=13$. Следува дека бараната низа броеви е $1, 2, 3, 5, 8, 13.$

**3958.** Збирот на $36$ последователни природни броеви е еднаков на збирот на трите последователни парни броеви чиј среден број е $2022$. Најди ги овие 36 последователни природни броеви.

**Решение.** Со $x$ го означуваме првиот број во низата последователни природни броеви со даденото својство. Тогаш, од условите на задачата добиваме дека

$$x+(x+1)+(x+2)+\cdots+(x+35)=2020+2022+2024.$$

Од последното равенство добиваме:

$$36x+(1+2+\cdots 35)=6066 \Leftrightarrow 36x+\frac{35(1+35)}{2}=6066$$

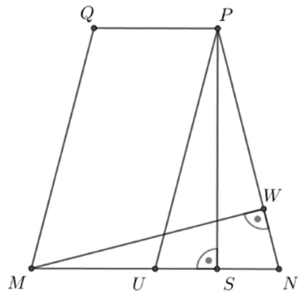
$$\Leftrightarrow 36x+35\cdot 18=6066 \Leftrightarrow 2x+35=337$$

$$\Leftrightarrow 2x=337-35 \Leftrightarrow 2x=302 \Leftrightarrow x=151 .$$

Значи, бараните броеви се $151$, $152$, $153,...,186$.

**3959.** За рамнокракиот трапез $MNPQ$ со основи $MN$ и $PQ$ важи следново: $\overline{MN}=\overline{NP}=2\overline{PQ}$. Ако точката $W$ е подножје на висината спуштена од темето $M$ кон кракот $NP$, покажи дека важи $\overline{NW}:\overline{WP}=1:3$.

**Решение.** Низ точката $P$ повлекуваме права паралелна на правата $MQ$ која ја сече основата $MN$ во точката $U$. Четириаголникот $MUPQ$ е паралелограм. Од последново и од условот на задачата добиваме:




$$\overline{MU}=\overline{UN}=\overline{PQ}=\frac{\overline{MN}}{2}.$$

Бидејќи важи $\overline{MU}=\overline{PQ}$, следува $\overline{MQ}=\overline{UP}=\overline{NP}$. Тогаш триаголникот $\Delta UNP$ е рамнокрак.

Нека $S$ е подножјето на висината спуштена од темето $P$ кон основата $UN$ на рамнокракиот триаголник $\Delta UNP$.

Следува $\overline{SU}=\overline{SN}=\frac{\overline{UN}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{MN}}{2}=\frac{\overline{MN}}{4}$.

Од $\angle PSU=\angle MWN=90^\circ$ и $\angle SUP=\angle PNS\equiv\angle WNM$ добиваме дека и $\angle UPS=\angle NMW$.

Од условите на задачата имаме $\overline{MN}=\overline{NP}=\overline{UP}$.

Од признакот за складност САС следува $\Delta PSU\cong\Delta MWN$.

Од докажаната складност следува дека $\overline{NW} = \overline{SU} = \frac{1}{4}\overline{MN}$, а

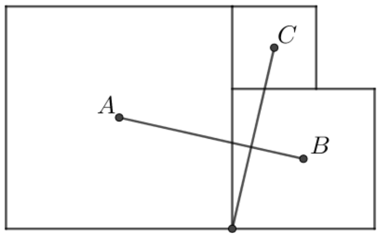
од $\overline{MN} = \overline{NP}$ следува равенството $\overline{NW} = \frac{1}{4}\overline{NP}$, што значи дека

$\overline{WP} = \frac{3}{4}\overline{NP}$.

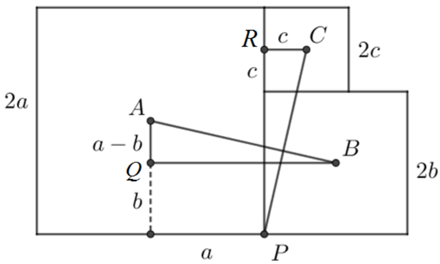
Од $\overline{NP} = 4\overline{NW}$ следува дека $\overline{WP} = \frac{3}{4}\cdot 4\overline{NW}$ или $\overline{WP} = 3\overline{NW}$, што

значи $\overline{NW} : \overline{WP} = 1:3$.

**3960.** На цртежот се дадени три квадрати со своите центри $A$, $B$ и $C$. Точката $P$ е заедничко теме на квадратите со центри $A$ и $B$. Пресметај го односот $\frac{\overline{AB}}{\overline{PC}}$.




**Решение:** Со повлекување на паралелни линии со страните на квадратите ги конструираме правоаголните триаголници $AQB$ и $CRP$ (како на цртежот). Нека должините на страните на квадратите со центри $A$, $B$ и $C$ се $2a$, $2b$ и $2c$, соодветно. Бидејќи




$$2a = 2b + 2c, \text{ т.е. } a = b + c,$$

следува дека

$$\overline{AQ} = a - b = c = \overline{CR} \text{ и}$$

$$\overline{RP} = c + 2b = (a-b) + 2b = a + b = \overline{QB}.$$

Значи, правоаголните триаголници $\Delta AQB$ и $\Delta CRP$ се складни според признакот САС. Следува дека $\overline{AB} = \overline{PC}$, т.е. $\frac{\overline{AB}}{\overline{PC}} = 1$.

## 8 – 9 одделение

**3961.** Збирот на $2022$ различни природни броеви е $2045255.$ Најди ги сите можни вредности на разликата меѓу најголемиот и најмалиот од броевите.

**Решение.** Збирот на првите $2022$ природни броеви е

$$1+2+...+2022=\frac{2022}{2}\cdot(2022+1)=1011\cdot2023=2045253$$

Од последното заклучуваме дека бараниот збир и збирот на првите $2022$ природни броеви се разликуваат за $2$ . Според тоа, ги имаме следниве две можности:

1) $1+2+...+2020+2021+2024$
2) $1+2+...+2020+2022+2023$

Во првиот случај разликата меѓу најголемиот и најмалиот број е $2023$ , а во вториот случај е $2022$ .

**3962.** Во внатрешноста на паралелограмот $ABCD$ е избрана точка $T$ , и повлечени се отсечките $AT$ , $BT$ , $CT$ и $DT$ . Со тоа, паралелограмот е поделен на четири триаголници, при што три од нив имаат плоштини од $2\,\mathrm{cm}^2$ , $3\,\mathrm{cm}^2$ и $4\,\mathrm{cm}^2$ (во некој редослед). Најди ги сите можни вредности на плоштината на четвртиот триаголник.

**Решение.** Според условите на задачата постојат три можности за четвртата плоштина.

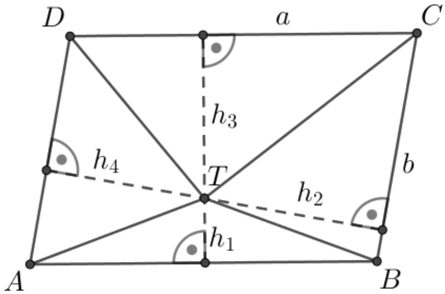
Нека $a=\overline{AB}$ , $b=\overline{BC}$ , $P_1=P_{\Delta ABT}=2\,\mathrm{cm}^2$ , $P_2=P_{\Delta BCT}=3\,\mathrm{cm}^2$ , $P_3=P_{\Delta CDT}=4\,\mathrm{cm}^2$ и $P_4=P_{\Delta DAT}$ .

Нека $h_1$ , $h_2$ , $h_3$ и $h_4$ се соодветните висини во триаголниците $P_{\Delta ABT}$ , $P_{\Delta BCT}$ , $P_{\Delta CDT}$ и $P_{\Delta DAT}$ .

Тогаш од

$$\frac{ah_1}{2}=2\Rightarrow ah_1=4\Rightarrow h_1=\frac{4}{a}$$ и

$$\frac{ah_3}{2}=4\Rightarrow ah_3=8\Rightarrow h_3=\frac{8}{a}$$



следува $h_a = h_1 + h_3 = \frac{4}{a} + \frac{8}{a} = \frac{12}{a}$. Од $P_2 = P_{\Delta BCT} = 3\,\mathrm{cm}^2$ имаме $h_2 b = 6$. Користејќи го фактот дека $h_4 = h_b - h_2$ и претходната дискусија, со замена во формулата за $P_4 = P_{\Delta DAT}$ имаме

$$P_4 = \frac{bh_4}{2} = \frac{b(h_b - h_2)}{2} = \frac{bh_b - bh_2}{2} = \frac{ah_a - 6}{2}$$

$$P_4 = \frac{a \cdot \frac{12}{a} - 6}{2} = \frac{12-6}{2} = 3\,\mathrm{cm}^2.$$

Во останатите два случаи аналогно се докажува дека $P_4 = 1\,\mathrm{cm}^2$, односно $P_4 = 5\,\mathrm{cm}^2$.

**3963.** Марко и Никола замислиле по еден прост број. Ако бројот на Марко се намали за $2$, тогаш тој е делив со бројот на Никола. Ако бројот на Марко намален за $45$ се подели со бројот на Никола зголемен за $8$ се добива количник $2$ и остаток $0$. Кои броеви ги замислиле Марко и Никола?

**Решение.** Со $m$ и $n$ ги означуваме броевите кои ги замислиле Марко и Никола, соодветно.
Бидејќи бројот на Марко намален за 2, $m-2$, е делив со бројот на Никола, $n$, добиваме дека $\frac{m-2}{n} = k$, $k \in \mathbb{Z}$, односно $m-2 = kn.$

Од тоа што, бројот на Марко намален за $45$, $m-45$, поделен со бројот на Никола зголемен за $8$, $n+8$, дава количник 2 и остаток 0, добиваме дека $\frac{m-45}{n+8} = 2$, односно $m-45 = 2(n+8).$ Според тоа го бараме решението на следниот систем равенки

$$\begin{cases} m-2 = kn \\ m-45 = 2(n+8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = kn+2 \\ kn+2-45 = 2n+16 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = kn+2 \\ kn-2n = 16+43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = kn+2 \\ (k-2)n = 59 \end{cases}.$$

Од втората равенка на системот, $(k-2)n = 59$ и од тоа што $k \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$ добиваме дека

$$\begin{cases} k-2=59 \\ n=1 \end{cases}, \text{ односно } \begin{cases} k=61 \\ n=1 \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} k-2=1 \\ n=59 \end{cases}, \text{ односно } \begin{cases} k=3 \\ n=59 \end{cases}.$$

Од условот на задачата $m$ и $n$ се прости броеви, па единственото решение на задачата е за $k=3$ и $n=59$, од каде добиваме дека $m=kn+2=179$. Според тоа, Марко го замислил бројот $179$, а Никола го замислил бројот $59$.

**3964.** Аглите на триаголникот $\Delta ABC$ се однесуваат како $1:2:3$. Определи ја вредноста на изразот $\frac{L^2}{P}$, каде што $L$ е периметарот, а $P$ е плоштината на $\Delta ABC$.

**Решение.** Со $\alpha, \beta, \gamma$ ги означуваме аглите при темињата $A, B, C$ на триаголникот, соодветно. Од условот на задачата имаме дека $\alpha:\beta:\gamma=1:2:3$, односно $\alpha=k$, $\beta=2k$ и $\gamma=3k$. Од друга страна, збирот на аглите во еден триаголник е еднаков на $180^\circ$, па $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$. Со замена за $\alpha=k$, $\beta=2k$ и $\gamma=3k$ во $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, добиваме дека $k+2k+3k=180^\circ$, односно $k=30^\circ$. Тогаш $\alpha=30^\circ$, $\beta=60^\circ$ и $\gamma=90^\circ$. Значи, триаголникот $ABC$ е правоаголен со прав агол во темето $C$. Тогаш $\overline{AB}=2\overline{BC}$. Со примена на Питагоровата теорема на $\Delta ABC$ и $\overline{AB}=2\overline{BC}$, добиваме дека

$$\begin{aligned} &\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2 \Leftrightarrow 4\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2 \\ &\Leftrightarrow \overline{AC}^2=3\overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}=\sqrt{3}\cdot\overline{BC} \end{aligned}.$$

Според тоа, $L=\left(3+\sqrt{3}\right)\overline{BC}$ и $P=\frac{\sqrt{3}\cdot\overline{BC}^2}{2}$.

Добиваме

$$\frac{L^2}{P}=\frac{\left(\left(3+\sqrt{3}\right)\overline{BC}\right)^2}{\frac{\sqrt{3}\overline{BC}^2}{2}}=\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2\overline{BC}^2}{\frac{\sqrt{3}\overline{BC}^2}{2}}=\frac{2\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{3}=4\left(3+2\sqrt{3}\right).$$

## 9 одделение

**3965.** Ана замислила три трицифрени броеви $a$, $b$ и $c$. Боби треба да каже три броеви $x$, $y$ и $z$, по што Ана ја кажува вредноста на изразот $ax+by+cz$ .Дали е можно Боби да избере броеви $x$, $y$ и $z$ така што да може точно да ги погоди броевите што ги замислила Ана? (Одговорот да се образложи!)

**Решение.** Одговорот е потврден.

Нека $a=\overline{a_1a_2a_3}$, $b=\overline{b_1b_2b_3}$ и $c=\overline{c_1c_2c_3}$. Тогаш, ако Боби одбере $x=1000000$, $y=1000$ и $z=1$, Ана ќе ја каже вредноста на $ax+by+cz=\overline{a_1a_2a_3}\cdot 100000+\overline{b_1b_2b_3}\cdot 1000+\overline{c_1c_2c_3}\cdot 1$, а тоа е $\overline{a_1a_2a_3b_1b_2b_3c_1c_2c_3}$. Според ова, јасно е дека Боби ќе знае кои три броеви ги замислила Ана.

**3966.** Определи ја вредноста на изразот $a^2+b^2$, ако $a$ и $b$ се два последователни цели броја за кои важи равенството $8a^ab^b=7b^aa^b$.

**Решение.** Да претпоставиме дека $a<b$. Од претпоставката и условот на задачата, $b=a+1$, па даденото равенство преминува во облик

$$8a^a\left(a+1\right)^{a+1}=7\left(a+1\right)^a a^{a+1}.$$

Со средување на последното равенство добиваме дека

$$8a^a\cdot\left(a+1\right)^{a+1}=7\cdot\left(a+1\right)^a\cdot a^{a+1}\Leftrightarrow$$

$$8a^a\cdot\left(a+1\right)^a\cdot\left(a+1\right)=7\cdot\left(a+1\right)^a\cdot a^a\cdot a\Leftrightarrow,$$

$$8\cdot\left(a+1\right)=7a$$

односно $8a+8=7a\Leftrightarrow a=-8$ и $b=a+1=-8+1=-7$.

Со замена за $a=-8$ и $b=-7$ во $a^2+b^2$, добиваме дека $a^2+b^2=\left(-8\right)^2+\left(-7\right)^2=113$.

(Заради симетричност, истиот резултат се добива и под претпоставка дека $b<a$).

**3967.** Аце, Боби и Симе заедно работат на училишен проект. Ако Аце не помага, тогаш проектот ќе го завршат за 2 часа. Ако Боби не помага, тогаш проектот ќе го завршат за 3 часа. Ако Симе не помага, тогаш проектот ќе го завршат за 4 часа. Случајно дознале дека Даре ќе им помогне. Ако Даре работи сам на проектот, тогаш ќе му треба половина ден да го заврши проектот. Кое е најмалото потребно време за да го завршат проектот, ако работат сите четворица заедно?

**Решение.** Нека $a$, $b$, $c$ и $d$ се времињата што им се потребни на Аце, Боби, Симе и Даре, соодветно, самостојно да го завршат проектот. Тоа значи дека за 1 час, Аце сам би завршил $\frac{1}{a}$ од проектот, Боби $\frac{1}{b}$ од проектот, Симе $\frac{1}{c}$ од проектот, а Даре $\frac{1}{d}$ од проектот. Ги добиваме следниве равенки:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{d}=\frac{1}{12}.$$

Најмалото потребно време $x$ за да го завршат проектот се добива ако работат заедно сите четири ученици. За 1 час заедно ќе завршат:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d},$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{d},$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{d},$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]+\frac{1}{d},$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{12},$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{12}+\frac{1}{12},$$

$$\frac{1}{x}=\frac{5}{8}.$$

Оттука добиваме дека најмалото потребно време е $x=\frac{8}{5}$ часа, односно $96$ минути.

**3968.** Нека $x+y+xy=1$, каде што $x$ и $y$ се реални броеви различни од нула. Пресметај ја вредноста на изразот

$$A=xy+\frac{1}{xy}-\frac{y}{x}-\frac{x}{y}.$$

**Решение.** Дадениот израз го запишуваме во облик

$$A=xy+\frac{1}{xy}-\frac{y}{x}-\frac{x}{y}=\frac{x^2y^2+1-y^2-x^2}{xy}=$$

$$=\frac{y^2(x^2-1)-(x^2-1)}{xy}=\frac{(x^2-1)(y^2-1)}{xy}=$$

$$=\frac{(x-1)(x+1)(y-1)(y+1)}{xy}=(x+1)(y+1)\frac{(x-1)(y-1)}{xy}=$$

$$=(xy+x+y+1)\frac{(xy-x-y+1)}{xy}.$$

Со замена за $x+y+xy=1$, добиваме дека

$$A=(1+1)\cdot\frac{(xy-x-y+1)}{xy}=2\cdot\left(\frac{1}{xy}-\frac{1}{y}-\frac{1}{x}+1\right)$$

Равенството $x+y+xy=1$ го делиме со $xy$ и добиваме $1+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{1}{xy}$, што е еквивалентно со $\frac{1}{xy}-\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=1$. Конечно, $A=2\cdot(1+1)=4$.

## УЧЕНИЦИ КОИ ИСПРАТИЈА ТОЧНИ РЕШЕНИЈА НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ ОД НУМЕРУС XLVIII–1, 2022/2023

| Задачи | Ученик | Одд. | Училиште | Место |
|---|---|---|---|---|
| 3961-3964 3965-3968 | Марија Муканова | 9 | Александар Македонски | Скопје |

## УЧЕНИЦИ КОИ ИСПРАТИЈА ТОЧНИ РЕШЕНИЈА НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ ОД НУМЕРУС XLVII–4, 2021/2022

| Задачи | Ученик | Одд. | Училиште | Место |
|---|---|---|---|---|
| 3914, 3915, 3917 | Илија Ганчев | 3 | Гоце Делчев | Кавадарци |
| 3914-3916 | Петар Велковски | 5 | Лазо Трповски | Скопје |
| 3925-3928 3929-3932 | Андреј Тасиќ | 7 | Ѓорѓија Пулевски | Скопје |
| 3929-3932 3933-3936 | Марија Муканова | 8 | Александар Македонски | Скопје |

## УЧЕНИЦИ КОИ ИСПРАТИЈА ТОЧНИ РЕШЕНИЈА НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ ОД НУМЕРУС XLVII–3, 2022/2023

| Задачи | Ученик | Одд. |
|---|---|---|
| 3885-3893, 3896 | Никола Савев | 5 |
| 3897-3900, 3901-3903 | Василијан Здравковски | 7 |

**Трајче Ѓорѓијевски**

## РЕШЕНИЈА НА НАГРАДНИТЕ ЗАДАЧИ
## ОД ПРЕТХОДНИОТ БРОЈ

**1.** Нека $S = 1^{2023} + 2^{2023} + 3^{2023} + \cdots + 2022^{2023} + 2023^{2023}$. Докажи дека $2023|S$.

**Решение.** Со примена на конгруенции имаме:

$$
\begin{aligned}
&2023 \equiv 0(mod 2023)\\
&2022 \equiv -1(mod 2023)\\
&2021 \equiv -2(mod 2023)\\
&\quad\vdots\\
&1012 \equiv -1011(mod 2023)\\
&\qquad\qquad \Downarrow\\
&2023^{2023} \equiv 0^{2023}(mod 2023)\\
&2022^{2023} \equiv -1^{2023}(mod 2023)\\
&2021^{2023} \equiv -2^{2023}(mod 2023)\\
&\quad\vdots\\
&1012^{2023} \equiv -1011^{2023}(mod 2023)\\
&\qquad\qquad \Downarrow\\
&1^{2023} + 2^{2023} + 3^{2023} + \cdots + 2022^{2023} + 2023^{2023}\\
&\qquad\qquad \equiv 0(mod 2023)\\
&\Longrightarrow 2023|S.
\end{aligned}
$$

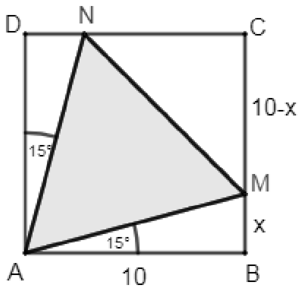
**2.** Нека страната на квадратот $ABCD$ е долга $10\ cm$ и нека $M, N$ се точки на страните $BC, CD$ избрани така што

$$\measuredangle MAB = \measuredangle NAD = 15^0.$$

Пресметај ја $P_{\triangle AMN}$ на триаголникот $AMN$ впишан во квадратот.

**Решение.** Јасно е дека $\triangle AMN$ е рамностран. Нека $\overline{BM} = \overline{DN} = x$. Тогаш

$$\overline{CM} = \overline{CN} = 10 - x.$$




Триаголниците $\triangle AMN$ и $\triangle AMN$ се правоаголни, па имаме:

$$100 + x^2 = 2(10 - x)^2$$

Значи:

$$
\begin{aligned}
&x^2 - 40x + 100 = 0\\
\Longrightarrow\quad &x^2 - 40x + 400 - 400 + 100 = 0\\
\Longrightarrow\quad &(x - 20)^2 = 300 \Longrightarrow x = 20 - 10\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Плоштината на триаголникот $AMN$ изнесува

$$P_{\triangle AMN} = \frac{(100+x^2)\sqrt{3}}{4} = 100\left(2\sqrt{3} - 3\right)\ cm^2.$$

## РЕШАВАЧИ КОИ ИСПРАТИЈА ТОЧНИ РЕШЕНИЈА НА НАГРАДНИТЕ ЗАДАЧИ ОД НУМЕРУС XLVIII–1, 2022/2023

| Задачи | Решавач |
|---|---|
| 1 и 2 | Виктор Максимовски |
| 2 | Марија Муканова |

## ОДГОВОРИ/РЕШЕНИЈА

### Решенија на задачите за самостојна работа од ПАЛИНДРОМИ

**1.** 1991.

**2.** $9\cdot 10^{1010}$.

**3.** Плоштината на квадратот може да биде: $121\ \mathrm{cm}^2,\ 484\ \mathrm{cm}^2,\ 676\ \mathrm{cm}^2$, па соодветно неговата страна е: $11\ \mathrm{cm}, 22\ \mathrm{cm}, 26\ \mathrm{cm}$, а периметарот е: $44\ \mathrm{cm}, 88\ \mathrm{cm}, 104\ \mathrm{cm}$.

**4.** а) $V = 343\ \mathrm{cm}^3$, б) $V = 1331\ \mathrm{cm}^3$.

**5.** 252, 434, 616, 686, 868.

**6.** а) 2772, 6336, б) 2772, 9009.

**7.** 8 начини: 11+191=202, 11+292=303, 11+393=404, 11+494=505, 11+595=606, 11+696=707, 11+797=808, 11+898=909.

### Решенија на задачите за самостојна работа од НЕКОЛКУ ЗАДАЧИ ЗА КВАДРАТ

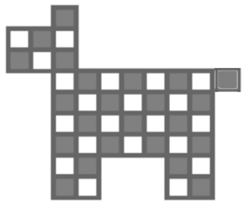
**1.** Периметрите на двата квадрати се $120\ cm$ и $80\ cm$. Плоштините се $900\ \mathrm{cm}^2$ и $400\ \mathrm{cm}^2$.

**2.** $a = 2$.

**3.** Плоштината на првиот квадрат е $144\ \mathrm{cm}^2$, а плоштината на вториот квадрат е $196\ \mathrm{cm}^2$.

### ОДГОВОР НА МАТЕМАТИЧКА ЗАГАТКА 1

Да го обоиме кученцето како што се обоени полињата во шахот. Тогаш, во било која положба и да го поставиме доминото, тоа секогаш ќе покрие две полиња од кои едното бело, а другото црно. Од сликата забележуваме дека бројот на црни полиња е 23, а бројот на бели полиња е 21. Па, ако поплочувањето со домина беше возможно, тогаш тие ќе покриеја еднаков број на бели и црни полиња. Значи, кученцето не може да се поплочи со домина.



### Решенија на задачите за самостојна работа од ПРИМЕНА НА КОНГРУЕНЦИИТЕ ЗА ДОБИВАЊЕ НА КРИТЕРИУМИ ЗА ДЕЛИВОСТ СО ПРОСТИТЕ БРОЕВИ: 7, 11, 13, 17 И 19 (ВТОР ДЕЛ)

**1.** Доказ на критериумите за деливост со 19.

Ќе ги искористиме својствата на конгруенциите на степените на бројот 10 со 19:

| | | |
|---|---|---|
| $1 \equiv 1 \pmod{19} / \cdot\ a_0$ | $\Rightarrow$ | $a_0 \equiv a_0 \pmod{19}$ |
| $10 \equiv 10 \equiv -9 \pmod{19} / \cdot\ a_1$ | | $10a_1 \equiv -9 \cdot a_1 \pmod{19}$ |

| | | |
|---|---|---|
| $10^2 \equiv 5 \pmod{19} / \cdot a_2$ | | $10^2 a_2 \equiv 5 \cdot a_2 \pmod{19}$ |
| $10^3 \equiv 12 \equiv -7 \pmod{19} / \cdot a_3$ | | $10^3 a_3 \equiv -7 \cdot a_3 \pmod{19}$ |
| $10^4 \equiv 6 \pmod{19} / \cdot a_4$ | | $10^4 a_4 \equiv 6 \cdot a_4 \pmod{19}$ |
| $10^5 \equiv 3 \pmod{19} / \cdot a_5$ | | $10^5 a_5 \equiv 3 \cdot a_5 \pmod{19}$ |
| $10^6 \equiv 11 \equiv -8 \pmod{19} / \cdot a_6$ | | $10^6 a_6 \equiv -8 \cdot a_6 \pmod{19}$ |
| $10^7 \equiv 15 \equiv -4 \pmod{19} / \cdot a_7$ | | $10^7 a_7 \equiv -4 \cdot a_7 \pmod{19}$ |
| $10^8 \equiv 17 \equiv -2 \pmod{19} / \cdot a_8$ | | $10^8 a_8 \equiv -2 \pmod{19}$ |
| $10^9 \equiv -1 \pmod{19} / \cdot a_9$ | | $10^9 a_9 \equiv -1 \cdot a_9 \pmod{19}$ |
| $10^{10} \equiv 9 \pmod{19} / \cdot a_{10}$ | | $10^{10} a_{10} \equiv 9 \cdot a_{10} \pmod{19}$ |
| $10^{11} \equiv -5 \pmod{19} / \cdot a_{11}$ | | $10^{11} a_{11} \equiv -5 \cdot a_{11} \pmod{19}$ |
| $10^{12} \equiv 7 \pmod{19} / \cdot a_{12}$ | | $10^{12} a_{12} \equiv 7 \cdot a_{12} \pmod{19}$ |
| $10^{13} \equiv -6 \pmod{19} / \cdot a_{13}$ | | $10^{13} a_{13} \equiv -6 \cdot a_{13} \pmod{19}$ |
| $10^{14} \equiv -3 \pmod{19} / \cdot a_{14}$ | | $10^{14} a_{14} \equiv -3 \cdot a_{14} \pmod{19}$ |
| $10^{15} \equiv 8 \pmod{19} / \cdot a_{15}$ | | $10^{15} a_{15} \equiv 8 \cdot a_{15} \pmod{19}$ |
| $10^{16} \equiv 4 \pmod{19} / \cdot a_{16}$ | | $10^{16} a_{16} \equiv 4 \cdot a_{16} \pmod{19}$ |
| $10^{17} \equiv 2 \pmod{19} / \cdot a_{17}$ | | $10^{17} a_{17} \equiv 2 \cdot a_{17} \pmod{19}$ |
| $10^{18} \equiv 1 \pmod{19} / \cdot a_{18}$ | | $10^{18} a_{18} \equiv 1 \cdot a_{18} \pmod{19}$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ |

од каде се добива дека остатоците кои се добиваат формираат низа која се повторува: 1, -9, 5, -7, 6, 3, -8, -4, -2, -1, 9, -5, 7, -6, -3, 8, 4, 2.

Според тоа остатокот при делење со 19 на $10^n$ е еднаков на остатокот при делење со 19 на бројот $10^{n+18}$, т.е. се користи дека $10^{18} \equiv 1 \pmod{19}$.

$19|a \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{19} \Leftrightarrow a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + 10^3a_3 + \cdots + 10 \equiv 0 \pmod{19} \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow 19 \mid (a_0 + a_{18} + \cdots) - (a_9 + a_{27} \ldots) + 10[(a_1 + a_{19} + \cdots) - (a_{10} + a_{28} + \cdots)] + \\ &+5[(a_2 + a_{20} + \cdots) - (a_{11} + a_{29} + \cdots)] + 12[(a_3 + a_{21} + \cdots) - (a_{12} + a_{30} + \cdots)] + \\ &+6[(a_4 + a_{22} + \cdots) - (a_{13} + a_{31} + \cdots)] + 3[(a_5 + a_{23} + \cdots) - (a_{14} + a_{32} + \cdots)] + \\ &+11[(a_6 + a_{24} + \cdots) - (a_{15} + a_{33} + \cdots)] + 15[(a_7 + a_{25} + \cdots) - (a_{16} + a_{34} + \cdots)] + \\ &+17[(a_8 + a_{26} + \cdots) - (a_{17} + a_{35} + \cdots)] \equiv 0 \pmod{19}\end{aligned}$$

**Втор критериум.** $19 \,|a \Leftrightarrow 19 \mid (\overline{a_1a_0} + 5 \cdot \overline{a_3a_2} + 5^2 \cdot \overline{a_5a_4} + 5^3 \cdot \overline{a_7a_6} + \cdots).$

<u>Доказ</u>: Овој критериум ни кажува дека за да провериме деливост на даден број со 19 е доволно бројот да се раздели на двоцифрени броеви, почнувајќи од најдесно, т.е. од цифрата за единици, а потоа добиените двоцифрени броеви се множат со степените на 5, производите се собираат и се проверува дали збирот е делив со 19.

Ќе ги искористиме својствата за конгруенции на степените на бројот 10 со 19:

| | | |
|---|---|---|
| $1 \equiv 1 \pmod{19} / \cdot a_0$ | | $a_0 \equiv a_0 \pmod{19}$ |
| $10 \equiv 10 \pmod{19} / \cdot a_1$ | | $10a_1 \equiv 10a_1 \pmod{19}$ |
| $10^2 \equiv 5 \cdot 1 \pmod{19} / \cdot a_2$ | | $10^2 a_2 \equiv 5 \cdot a_2 \pmod{19}$ |
| $10^3 \equiv 5 \cdot 10 \pmod{19} / \cdot a_3$ | $\Rightarrow$ | $10^3 a_3 \equiv 5 \cdot 10 a_3 \pmod{19}$ |
| $10^4 \equiv 5^2 \cdot 1 \pmod{19} / \cdot a_4$ | | $10^4 a_4 \equiv 5^2 \cdot a_4 \pmod{19}$ |
| $10^5 \equiv 5^2 \cdot 10 \pmod{19} / \cdot a_5$ | | $10^5 a_5 \equiv 5^2 \cdot 10 a_5 \pmod{19}$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ |

од каде лесно се добива дека $a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + 10^3a_3 + \cdots + 10^na_n \equiv 0 \pmod{19} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_0 + 10a_1 + 5a_2 + 5 \cdot 10a_3 + 5^2a_4 + 5^2 \cdot 10a_5 + 5^3a_6 + 5^3 \cdot 10a_7 + \cdots \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 19) \Leftrightarrow (\overline{a_1a_0} + 5 \cdot \overline{a_3a_2} + 5^2 \cdot \overline{a_5a_4} + 5^3 \cdot \overline{a_7a_6} + \cdots \equiv 0 \pmod{19})$

$$\Leftrightarrow 19 | (\overline{a_1a_0} + 5 \cdot \overline{a_3a_2} + 5^2 \cdot \overline{a_5a_4} + 5^3 \cdot \overline{a_7a_6} + \cdots)$$

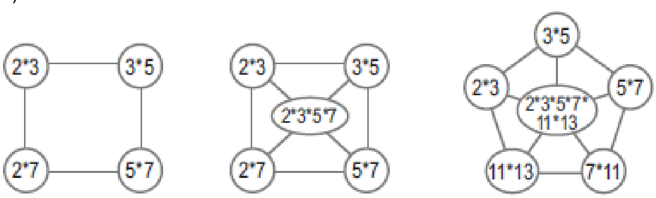
**2**. а) Одговор: 17 | 957338.
Доказ. Прв начин: $a_0 + 10a_1 + 15a_2 + 14a_3 + 4a_4 + 6a_5 = a_0 + 10a_1 + 15a_2 + 14a_3 + 4a_4 + 6a_5 = 8 + 30 + 45 + 98 + 20 + 54 = 225 = 17 \cdot 15$
Втор начин: $17 \mid 957338 \Leftrightarrow 17 \mid (38 + 15 \cdot 73 + 225 \cdot 95) = 22508 = 17 \cdot 1324$
б) Одговор: 19 | 816335. Прв начин: ќе провериме дали $19 \mid (a_0+10a_1+5a_2+12a_3+6a_4+3a_5)$. Имаме дека $a_0+10a_1+5a_2+12a_3+6a_4+3a_5 = 5+10 \cdot 3+5 \cdot 3+12 \cdot 6+6 \cdot 1+3 \cdot 8 = 5 + 30 + 15 + 72 + 6 + 24 = 152 = 19 \cdot 8$
Втор начин: $3 + 5 \cdot 63 + 25 \cdot 81 = 2375 = 19 \cdot 125$
**3.** а) Деливост со 7 (трет критериум): го запишуваме бројот како 64 150 611 525. Имаме $7 \mid 64150611525 \Leftrightarrow 7 \mid (525 + 6 \cdot 611 + 6^2 \cdot 150 + 6^3 \cdot 64) \Leftrightarrow 7 \mid 23\,415 \Leftrightarrow 7 \mid (415 + 6 \cdot 23) \Leftrightarrow 7 \mid 553 = 7 \cdot 79$
Деливост со 7 (четврт критериум): го запишуваме бројот како
641 5061 1525. Имаме: $7 \mid 64150611525 \Leftrightarrow 7 \mid (1525 + 4 \cdot 5061 + 4^2 \cdot 641) \Leftrightarrow 7 \mid 32025 \Leftrightarrow 7 \mid (2025 + 4 \cdot 3) \Leftrightarrow 7 \mid 2037 = 7 \cdot 291$
Бројот 64150611525 е делив со 7.
б) Деливост со 17 (прв критериум): $17 \mid 64150611525 \Leftrightarrow 17 \mid [(5-1) - 7(2-4) - 2(5-6) - 3(1-0) + 4(1-0) + 6(6-0) - 8(0-0) + 5(5-0)] \Leftrightarrow$
$17 \mid (4+14+2-3+4+36-0+25) \Leftrightarrow 17 \mid 82$ што не е точно. Бројот 64150611525 не е делив со 17.
в) Деливост со 19 (прв критериум): го запишуваме бројот како 64 150611525. Имаме $19 \mid 64150611525 \Leftrightarrow 19 \mid (5-4) - 9(2-6) + 5(5-0) - 7(1-0) + 6(1-0) + 3(6-0) - 8(0-0) - 4(5-0) - 2(1-0) \Leftrightarrow 19 \mid (1+36+25-7+6+18-0-20-2) \Leftrightarrow 19 \mid 57$ што не е точно. Бројот 64150611525 е делив со 19.
**4.** Го запишуваме бројот како 37 46 8X. За да е делив со 17 треба да важи дека
$17 \mid (\overline{8X} - 2 \cdot 46 + 2^2 \cdot 37) \Leftrightarrow 17 \mid (80 + X - 92 + 148) \Leftrightarrow 17 \mid (136 + X)$. Бидејќи $17 \mid 136$, мора $17 \mid X$ па $X=0$. Лесно се проверува дека $19 \mid 374680$ бидејќи $80 + 5 \cdot 46 + 5^2 \cdot 37 = 1235$ и $35 + 5 \cdot 12 = 95 = 5 \cdot 19$.

## ОДГОВОР НА МАТЕМАТИЧКА ЗАГАТКА 2

Г-дин Абрамович и г-дин Богданов не може да ги дале изјавите во недела, кога и двајцата ја зборуваат вистината, бидејќи тоа би значело дека во сабота и двајцата лажат, но според условот во сабота само г-дин Богданов лаже. Значи дека, изјавите се дадени во ден кога едниот лаже, а другиот ја зборува вистината, и тоа е токму денот кога тој што до претходниот ден лажел, тој ден почнал да ја кажува вистината, и обратно, тој што ја зборувал вистината до претходниот ден, на денот на изјавите почнал да лаже. Па, денот на изјавите е четврток.

## ОДГОВОР НА МАТЕМАТИЧКА ЗАГАТКА 3

Еден можен начин да се пополнат празните кружчиња е следниот (со * е означено множењето):



## СОДРЖИНА