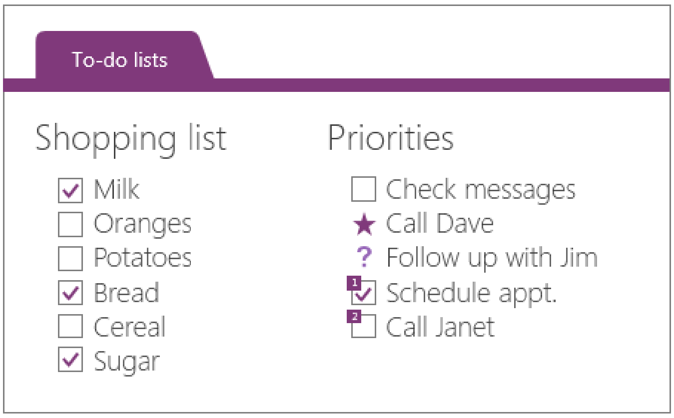
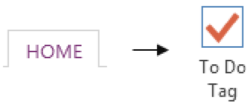
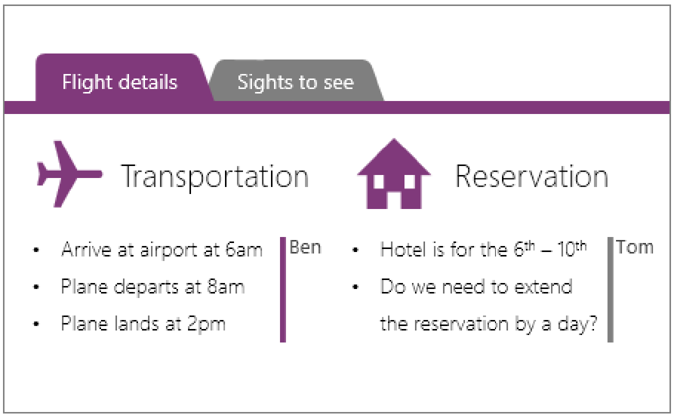
OneNote Basics



Remember everything

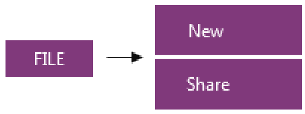
- Add Tags to any notes
- Make checklists and to-do lists
- Create your own custom tags





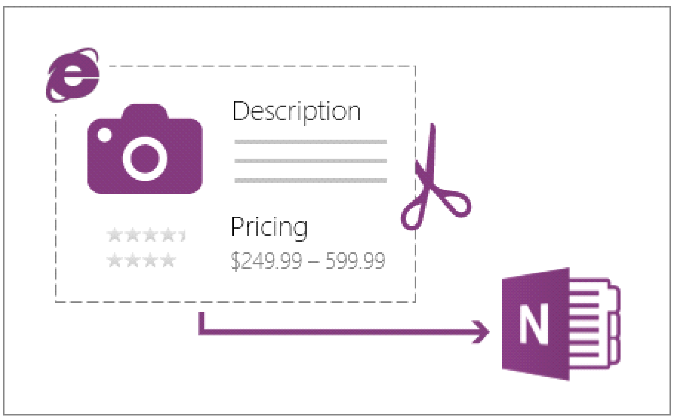
Collaborate with others

- Keep your notebooks on OneDrive
- Share with friends and family
- Anyone can edit in a browser



Keep everything in sync

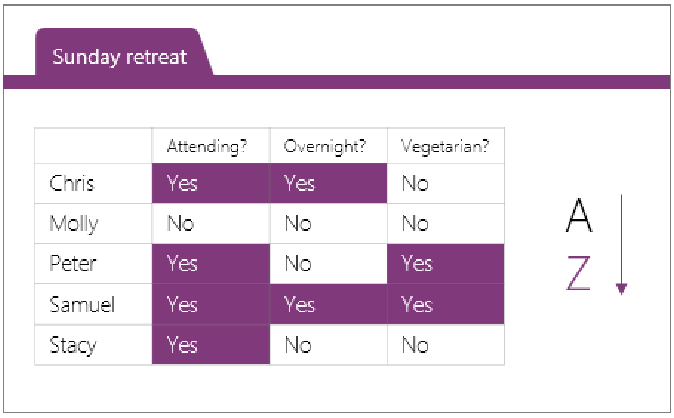
- People can edit pages at the same time
- Real-Time Sync on the same page
- Everything stored in the cloud
- Accessible from any device



Clip from the web

- Quickly clip anything on your screen
- Take screenshots of products online
- Save important news articles

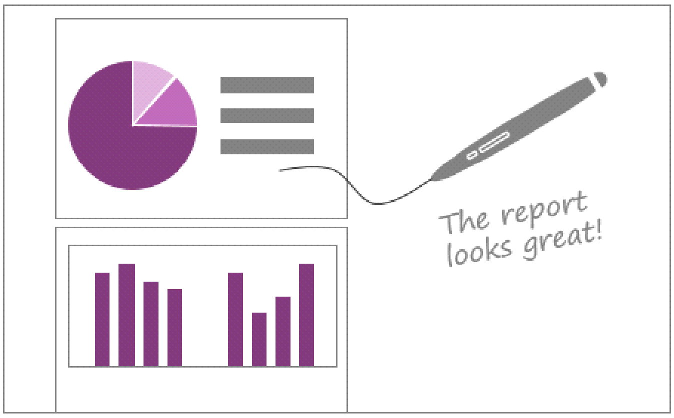
in your taskbar
OR
+ S on your keyboard



Organize with tables

- Type, then press TAB to create a table
- Quickly sort and shade tables
- Convert tables to Excel spreadsheets

TABLE TOOLS LAYOUT → Shading, Sort, Convert to Excel Spreadsheet



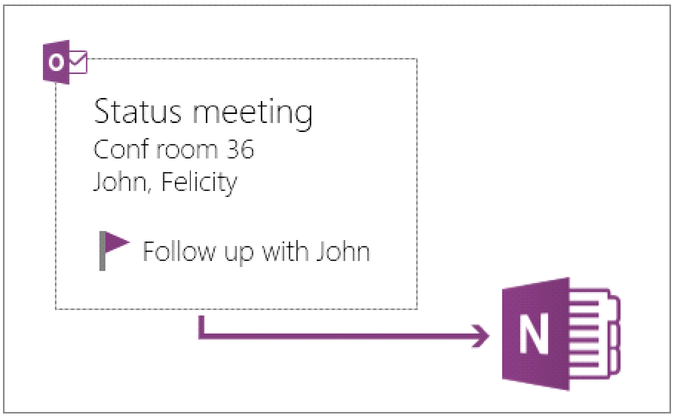
Write notes on slides

- Send PowerPoint or Word docs to OneNote
- Annotate with a stylus on your tablet
- Highlight and finger-paint

in your taskbar

OR

+ N on your keyboard



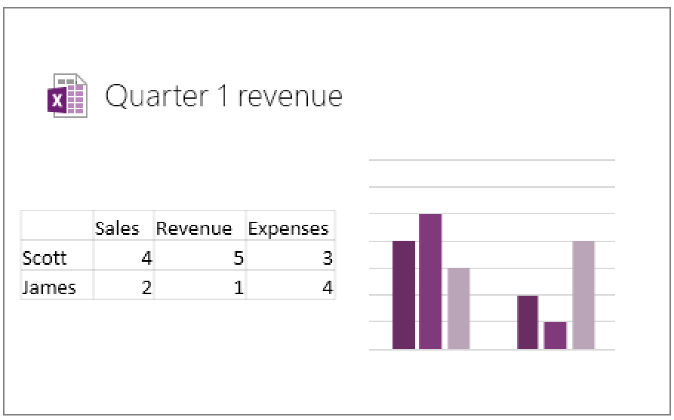
Integrate with Outlook

- Take notes on Outlook or Lync meetings
- Insert meeting details
- Add Outlook tasks from OneNote

HOME → Outlook Tasks, Meeting Details

From Outlook:

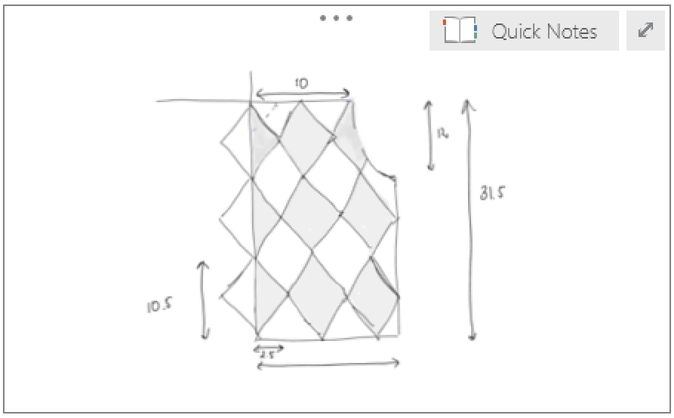
HOME → OneNote



Add Excel spreadsheets

- Track finances, budgets, & more
- Preview updates on the page

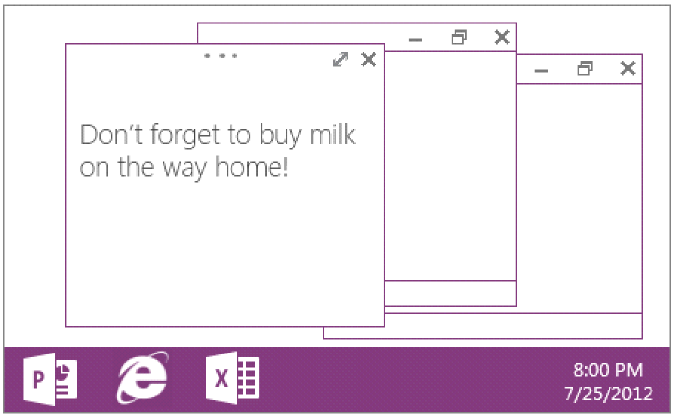
INSERT → Spreadsheet



Brainstorm without clutter

- Hide everything but the essentials
- Extra space to focus on your notes

in the top corner of the page



Take quick notes

- Quickly jot down thoughts and ideas
- They go into your Quick Notes section

in your taskbar

OR

+ N on your keyboard

Printout

понеделник, 23 мај 2022 15:14

Теорија на Броеви

Лука Хаџи Јорданов

СММ

2022

Диофантови равенки

$a x + b \sqrt[7]{y} = c$

Равенка од обликот $ax + by = c$ каде a, b, c се целобројни константи се нарекува линеарна диофантова равенка со 2 променливи.

Во општ случај, диофантови равенки се нарекува равенка која има целобројни коефициенти и каде што решенијата од интерес се исто така целобројни. При тоа, равенката се состои од собирање, множење или степенување на променливите.

Равенките $x + 2y = 3$, $x^2 + 3y + z = 14$, $xy + 2z^{14} = 0$ и $x^2 = y^3 - 2^z$ се диофантови равенки, при што само првата е линеарна. Последната равенка се нарекува експоненцијална равенка.

Диофантови равенки

Својство 1: Равенката $ax + by = c$ со целобројни a, b и c има целобројно решение ако и само ако $NZD(a, b)|c$.

Доказ: Ако дадената равенка има решение, тогаш бидејќи има цели броеви k, m така што $a = kd$ и $b = md$ каде $d = NZD(a, b)$, следува $c = ax + by = kdx + mdy = d(kx + my)$, односно $d = NZD(a, b)|c$.

Сега, нека $NZD(a, b) = d|c$. Имаме дека постои $k \in \mathbb{Z}$ така што $c = kd$, а според теоремата на Безу постојат $m, l \in \mathbb{Z}$ за кои важи $am + bl = d$, та со множење на последнава равенка со k добиваме $a(mk) + b(lk) = dk = c$, та равенката $ax + by = c$ има решение за $x = mk$ и $y = lk$.

$\to 2x + 4y = 1$

$2(x + 2y) = 1$

$2x + 4y + 24z = 3$

$NZD(2, 4, 24) = 2$

Облик на решенијата

Својство 2: Нека е дадена линеарна диофантова равенка $ax + by = c$ и нека истата има решение (x_0, y_0). Тогаш имаме дека парот (x, y) е решение на равенката акко $x = x_0 + \frac{b}{NZD(a,b)}t$ и $y = y_0 - \frac{a}{NZD(a,b)}t$ за некој цел број t.

Доказ: Ако важат $x = x_0 + \frac{b}{NZD(a,b)}t$ и $y = y_0 - \frac{b}{NZD(a,b)}t$, тогаш имаме

$$ax + by = a \cdot \left(x_0 + \frac{b}{NZD(a,b)}t\right) + b \cdot \left(y_0 - \frac{a}{NZD(a,b)}t\right) =$$

$$= ax_0 + by_0 + \frac{ab}{NZD(a,b)}t - \frac{ab}{NZD(a,b)}t = ax_0 + by_0 = c$$

бидејќи (x_0, y_0) е решение на дадената равенка.

акко = ако и само ако

$4x + 7y = 1$

$NZD(4, 7) = 1 \mid 1$

$x_0 = 2 \quad y_0 = -1$

$4x_0 + 7y_0 = 4 \cdot 2 - 7 = 1$

Облик на решенијата

$ax_0 + by_0 = c$

$ax + by = c$

Сега, нека (x, y) е решение на диофантовата равенка. Нека $d = NZD(a, b)$ и $a = a_0 d$ и $b = b_0 d$, каде што се разбира $NZD(a_0, b_0) = 1$. Имаме $ax + by = c = ax_0 + by_0$, односно $a_0 \cancel{d} x + b_0 \cancel{d} y = a_0 \cancel{d} x_0 + b_0 \cancel{d} y_0$ односно $a_0 x + b_0 y = a_0 x_0 + b_0 y_0$, што е еквивалентно со $a_0(x - x_0) = b_0(y_0 - y)$. Оттука следува $a_0 | b_0(y_0 - y)$, но $NZD(a_0, b_0) = 1$, та $a_0 | y_0 - y$ т.е. $y_0 - y = a_0 t$ односно $y = y_0 - a_0 t = y_0 - \frac{a}{d} t = y_0 - \frac{a}{NZD(a,b)} t$. на сличен начин добиваме $x = x_0 + \frac{b}{NZD(a,b)} t$, што и требаше да докажеме.

Последица: Од ова својство можеме да приметиме дека ако најдеме едно решение на равенката $ax + by = c$, тогаш можеме да најдеме бесконечно (за секое $t \in \mathbb{Z}$ добиваме ново решение). Оттука следува дека линеарната диофантова равенка со 2 променливи или 0 или бесконечно многу решенија.

Диофантови равенки

Задача 1: Реши ја равенката $2x + 3y = 1$ во множеството цели броеви.

$$\underline{x} = \frac{1-3y}{2} = \frac{2-2y-y-1}{2} = \frac{2-2y}{2} - \frac{y+1}{2} =$$

$$= \underline{1-y} - \frac{y+1}{2} \qquad 2 \mid y+1$$

$$k \qquad \cancel{y+} \qquad \underline{\frac{y+1}{2} = k} \qquad y+1 = 2k \qquad \underline{y = 2k-1}$$

$$x = 1 - y - \frac{y+1}{2} = 1 - 2k + 1 - k = \underline{2 - 3k}$$

Ојлеров метод

$NZD(a, b)$

Пример 1: Реши ја равенката $738x + 621y = 45$ во множеството цели броеви.

Решение: Можеме да приметиме дека за разлика од претходната задача, наоѓањето на почетни решенија за оваа равенка не е воопшто лесна (поради големината на коефициентите). Сепак, $NZD(738, 621) = 9|45$, та според Својство 1 оваа равенка треба да има решение, а според Својство 2 треба да има бесконечно многу решенија. Бидејќи коефициентот пред y е помал од тој пред x, да го изразиме y преку x. Имаме $y = \frac{45-738x}{621} = -x + \frac{-117x+45}{621}$. Бидејќи y треба да биде цел број, како и x, следува дека и $\frac{-117x+45}{621} \in \mathbb{Z}$. Нека $t = \frac{-117x+45}{621}$.

$621t - 45 = -117x$

Диофантови равенки

Изразувајќи го x преку t добиваме $x = \frac{45-621t}{117} = -5t + \frac{-36t+45}{117}$, а повторно како x и $5t$ се цели броеви следува дека и $s = \frac{-36t+45}{117} \in \mathbb{Z}$. Продолжувајќи како претходно, $t = \frac{45-117s}{36} = -(3s-1) + \frac{-9s+9}{36} = -(3s-1) + \frac{-s+1}{4}$, та повторно $r = \frac{-s+1}{4} \in \mathbb{Z}$. Од последниов израз добиваме $s = 1 - 4r$, та следува $t = -(3s-1) + \frac{-s+1}{4} = -3s+1+r = -3(1-4r)+1+r = 13r-2$. Слично, $x = -5t + s = -5(13r-2) + 1 - 4r = -69r + 11$ и $y = -x + t = 69r - 11 + 13r - 2 = 82r - 13$, та за секој цел број r парот $(-69r + 11, 82r - 13)$ е решение на дадената диофантова равенка.

Проверка: $738x + 621y = 738(-69r + 11) + 621(82r - 13) = -50922r + 50922r + 8118 - 8073 = 45$. Се разбира параметарскиот облик на x и y претставува решение на равенката, та оваа проверка на решенијата не е потребна да ја правите.

$621 = q \cdot 117 + r$

$(-69r+11, 82r-13)$

$r=0$ $\quad$ $r=-1$

$r=1$ $\quad$ $r=-2$

$r=2$ $\quad$ $\vdots$

$\vdots$

Задачи

Задача 2: Реши ја равенката

$$(x^2+1)(y^2+1)+2(x-y)(1-xy)=4(1+xy)$$

во множеството цели броеви.

$4+4xy$

$(xy-1)^2$

$x^2y^2-2xy+1$

$x^2y^2+x^2+y^2+1+2(x-y)(1-xy)-4xy-4=0$

$-2xy$

$(x-y)^2$

$x^2-2xy+y^2$

$(x^2y^2-2xy+1)+(x^2-2xy+y^2)+$

$+2(x-y)(1-xy)-4=0$

$(xy-1)^2+(x-y)^2+2(x-y)(1-xy)-4=0$

$1-xy$ $\quad A^2+B^2+2AB=(A+B)^2$

Задачи

1° $(1-xy+x-y)^2=4$

$1-xy+x-y=2$

$x(1-y)+(1-y)=2$

$(1-y)(x+1)=2$

$1,2 \quad 2,1 \quad -1,-2 \quad -2,-1$

$1-y=1$, $x+1=2$: $\boxed{y=0,\ x=1}$

$1-y=2$, $x+1=1$: $\boxed{y=-1,\ x=0}$

$1-y=-1$, $x+1=-2$: $\boxed{y=2,\ x=-3}$

$1-y=-2$, $x+1=-1$: $\boxed{y=3,\ x=-2}$

2° $z^2=4$

$1-xy+x-y=-2$

$(1-y)(x+1)=-2$

$1-y=-2$, $x+1=1$: $\boxed{y=3,\ x=0}$

$1-y=2$, $x+1=-1$: $\boxed{y=-1,\ x=-2}$

$1-y=-1$, $x+1=2$: $\boxed{y=2,\ x=1}$

$1-y=1$, $x+1=-2$: $\boxed{y=0,\ x=-3}$

Задачи

$n = 3$

$n = 1$

Задача 3: Најди ги сите природни броеви n така што $\sqrt{n^2 + 4n - 5}$ е природен број.

$\sqrt{4} = 2$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

$m = \sqrt{n^2 + 4n - 5}$

$m^2 = n^2 + 4n - 5 = \underbrace{n^2 + 4n + 4}_{} - 9 =$

$9 = 3 \cdot 3$

$\cancel{1 \cdot 9}$

$9 \cdot 1$

$= (n+2)^2 - 3^2$

$3^2 = (n+2)^2 - m^2 = (n+2+m)(n+2-m)$

1° $n+2+m = 9$

$n+2-m = 1$

$2n + 4 = 10$

$n + 2 = 5$ $n = 3 \in N$ $m = 7 - n = 4$

2° $n+2+m = 3$

$n+2-m = 3$

$2n + 4 = 6$

$2n = 2$ $n = 1$

$m = 4 - n = 0$

Задачи

$a^4 + 4b^4 = (a^2)^2 + (2b^2)^2 + 2a^2 \cdot 2b^2 - 2a^2 \cdot 2b^2 =$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^2 + b^2$

$= (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2$

$(a^2)^2 + (2b^2)^2$

$(2ab)^2 =$

$= (a^2 + 2b^2 - 2ab) \cdot$

$\cdot (a^2 + 2b^2 + 2ab)$

П:

$a^4 + 4b^4 = p$

$(1,1)$ $(1,-1)$ $(-1,1)$ $(-1,-1)$ $\quad 4 - \bmod 16$

$y = 2k+1$

Задачи

Задача 4 (Софија Жермен): Најди ги сите цели броеви x и y за кои равенката $x^4 + 4 = py^4$ има решение, каде што p е даден прост број.

$p > 2$

$x^4 + 4 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) = p y^4$

$x = a$

$b = 1$

$d = NZD\,(\underbrace{x^2 + 2 - 2x}_{x(x-2)}, \underbrace{x^2 + 2 + 2x}_{})$

$x, y \overset{2}{\equiv} 1$

$d \mid x^2 + 2 - 2x$

$d \mid x^2 + 2 + 2x$

$d \mid 4x$

$\boxed{d \mid x}$

$\cancel{4}$ $(d, 4) = 1$

$4 \overset{16}{\not\equiv} \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}$

$p = 2$

$x^4 + 4 = 2y^4$

$x \overset{2}{\equiv} 0 \pmod 2$

$x \overset{?}{\equiv} \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ \vdots \end{matrix}$ $\quad x^4 \overset{16}{\equiv} 0$

$x = 2k$

$x^4 = 16k^4$

$4 \overset{16}{\equiv} 2y^4$

$y \overset{2}{\equiv} 0 \qquad y \overset{2}{\equiv} 1$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$y^4 \overset{16}{\equiv} 0 \qquad y^4 \overset{16}{\equiv} 1$

Задачи

$d = NZD(x^2+2x+2, x^2-2x+2)$

$a = k^4$

$ac = b^4$ $NZD(a, c) = 1$

$c = m^4$

$d \mid x$

$d \mid x^2+2x+2 - (x+2)x = \cancel{x^2}+2x+2-\cancel{x^2}-2x = $

$= 2$

$d \mid x^2+2x+2$

$d \mid 2$

$d = 1$ $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2) = py^4$

$\dfrac{x^2+2x+2}{p}$ a $\cdot \dfrac{(x^2-2x+2)}{c} = (y^2)^2$ b^4

$x^2+2x+2 = pk^4$

$x^2-2x+2 = m^4$

$(x-1)^2+1 = m^4$

$m^4-(x-1)^2 = 1$

$(m^2-x+1)(m^2+x-1) = 1$

$\cancel{m^2} - x + 1 = \cancel{m^2} + x - 1$

$x = 1$ $m^4 = 1$ $m = \pm 1$

$pk^4 = 5 \to p = 5$

$pk^4 = 1$ $k = \pm 1$

Задачи

Задача 5: Најди ги сите природни броеви m и n за кои равенката $\underbrace{5^n + 6^m}_{1} = \underbrace{123329}_{9}$ има решение.

$5^n \equiv_{10} 5$ $\qquad$ $6^m \equiv_{10} 6$ $\qquad$ $5^n + 6^m \equiv_{10}$

$5^1 \equiv_{10} 5$ $\qquad$ $6^2 \equiv_{10} 6$ $\qquad$ $\equiv_{10} 5 + 6 \equiv_{10} 1$

$5^2 \equiv_{10} 5$

$123329 \equiv_{10} 9$ $\qquad$ $\not\equiv$

Page 16

понеделник, 23 мај 2022 15:14

Задачи

Задачи

$x! = \underline{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot 1}$

Задача 6: Најди ги сите природни броеви x и прости броеви p за кои важи $x! + 2 = p^2$.

$x \geq 5$

$x! \equiv_{10} 0$

$p^2 \equiv x! + 2 \equiv_{10} 2$

$x \leq 4$

$x = 2 \quad p = 2$

$x \geq 2 \quad 2 \mid x!$

$p^2 = \cancel{x}! + 2 \equiv_2 0 + 2 \equiv_2 0$

$\Downarrow$

$p \equiv_2 0 \Rightarrow p = 2$

$x! + 2 = 4$

$x! = 2 \quad \underline{x = 2}$

$x = 1 \quad p^2 = 1 + 2 = 3$

$\boxed{a^2 \equiv_4 \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}}$

$a^2 \not\equiv_4 2 \quad a^2 \not\equiv_4 3$

$a^2 = 102$

$a^2 = 10\underbrace{0 \ldots 0}_{17}2$

1	2	3	4
1	2	6	24

Page 18

понеделник, 23 мај 2022 15:14

Задачи

Задачи

$x \geq 0$

Задача 7: Најди ги сите целобројни решенија на равенката $2^x + 1 = y^2$.

$y \geq 0$

$2^x = y^2 - 1^2 = (y-1)(y+1)$

$y - 1 = 2^a \qquad y + 1 = 2^b$

$2^a < 2^b$

$2 = \cancel{y} + 1 - (\cancel{y} - 1) = 2^b - 2^a$

$b = 2 \qquad a = 1$

$2^2 - 2 = 2 \qquad \boxed{y = 3}$

$2^x = 8$

$\boxed{x = 3}$

$x = -t$

$2^{-t} + 1 = y^2$

$2^{-t} = y^2 - 1$

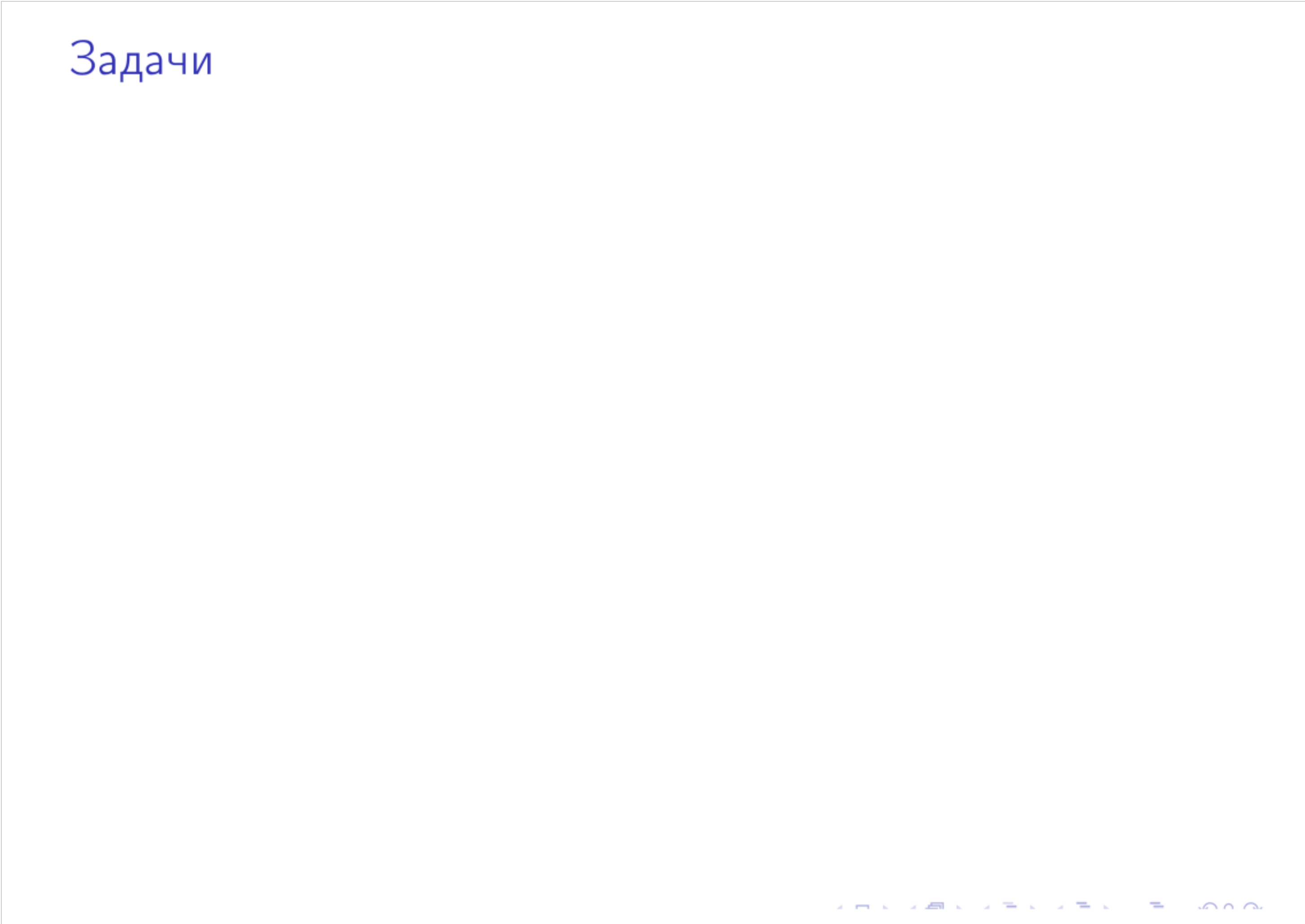
$\frac{1}{2^t}$

$t \geq 1$

$\boxed{x = 3 \quad y = -3}$

Page 20

понеделник, 23 мај 2022 15:14



Задачи

Задача 8: Реши ја равенката $x^5 - y^2 = 4$ во множеството цели броеви.

$$N Z S(5, 2) + 1 = 11$$

mod 11

$$x^a - y^b = c$$

$$NZS(a, b) + 1$$

Page 22

понеделник, 23 мај 2022 15:14

Задачи

Задачи

Задача 9: Најди ги сите ненегативни цели броеви кои ја задоволуваат равенката $x^3 + 2y^3 = 4z^3$.

$x_1 + y_1 + z_1 = \dfrac{x_0 + y_0 + z_0}{2} < x_0 + y_0 + z_0$

1 $x_0 + y_0 + z_0 \geq 0 + 0 + 0 = 0$

$\boxed{x_0 = y_0 = z_0 = 0}$

$0 + 0 = 0$

2 $x_0^3 + 2y_0^3 = 4z_0^3$ $\quad x_0 = 2x_1$

3 $8x_1^3 + 2y_0^3 = 4z_0^3 \rightarrow 4x_1^3 + y_0^3 = 2z_0^3$ $\quad y_0 = 2y_1$

4 $4x_1^3 + 8y_1^3 = 2z_0^3$ $\quad 2x_1^3 + 4y_1^3 = z_0^3$ $\quad z_0 = 2z_1$

5 $2x_1^3 + 4y_1^3 = 8z_1^3$ $\quad x_1^3 + 2y_1^3 = 4z_1^3$ $\quad x_1 = 2x_2$

Page 24

понеделник, 23 мај 2022 15:14

Задачи

Задачи

Задача 10 (ЈММО 2015, Задача 1): Во множеството на цели броеви реши ја равенката

$$x^2 + y^4 + 1 = 6^z$$

$z \geq 2$

$6^z \equiv_4 0$ $\qquad x^2 \equiv_4 0, 1$ $\qquad y^4 \equiv_4 0, 1$

$0 \equiv_4 6^z = x^2 + y^4 + 1 \equiv 0, 1 + 0, 1 + 1 = 1, 2, 3$

$z < 0$

$z = -t$ $\qquad t \geq 1$

$\underline{x^2 + y^4 + 1} = 6^{-t} = \frac{1}{6^t}$

$\boxed{z = 0}$

$x^2 + y^4 + 1 = 6^0 = 1$

$x^2 + y^4 = 0$

$\boxed{x = 0 \quad y = 0}$

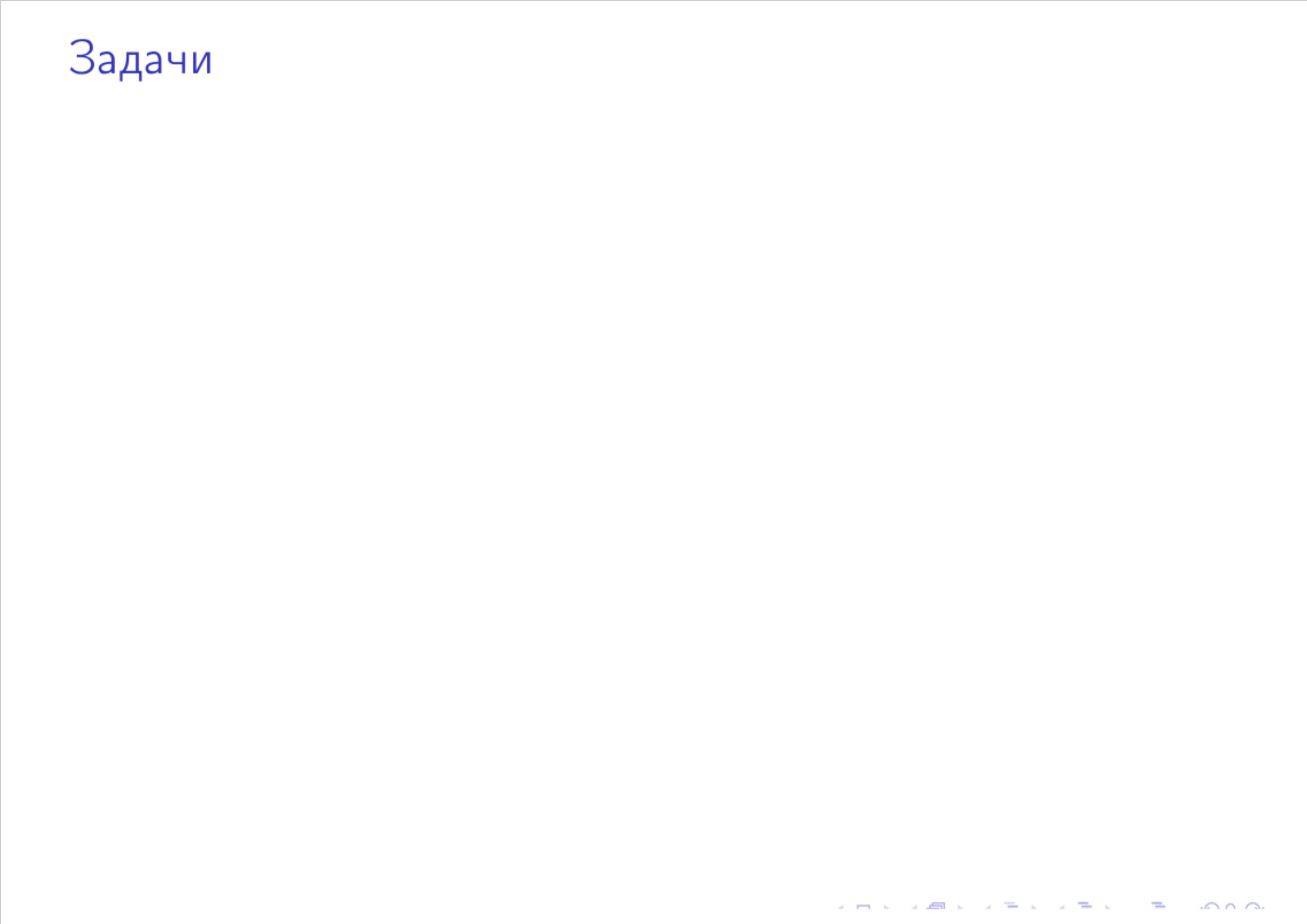
$\boxed{z = 1}$

$x^2 + y^4 = 6^1 - 1 = 5$

$y \geq 2$ $\qquad 5 = x^2 + y^4 \geq 8$ ↯

$\boxed{y = 1}$ $\qquad x^2 = 4$ $\qquad \boxed{x = \pm 2}$

$y = 0$ $\qquad x^2 = 5$



Задачи

Задачи

Задача 11 (JMMO 2016, Задача 1): Во множеството цели броеви, реши ја равенката

$$x_1^4 + x_2^4 + ... + x_{14}^4 = 2016^3 - 1$$

$$x^4 \equiv_4 \overset{0}{1} \quad \overset{0}{1} \quad \overset{0}{1} \quad \overset{0}{1}$$

$$2016^3 - 1 \equiv_{16} 0 - 1 \equiv_{16} 15$$

$0, 1, 2, ..., 14$

Page 28

понеделник, 23 мај 2022 15:14

Задачи

Задачи

Задача 12 (ЈММО 2017, Задача 1): Нека p е прост број и нека $3p+10$ е збир на квадратите на 6 последователни природни броеви. Докажи дека $36 | p-7$.

$n \quad n+1 \quad n+2 \quad \dots \quad n+5$

$n-2 \quad n-1 \quad n \quad n+1 \quad n+2 \quad n+3$

$$3p+10 = (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = 6n^2 + 6n + 19$$

$-\cancel{4n} \quad -\cancel{2n} \quad \cancel{2n} \quad \cancel{4n} \quad 6n$

$4 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 9$

$$3p = 6n^2 + 6n + 9$$

$$p = 2n^2 + 2n + 3$$

$$p = \underline{2n(n+1)} + \underline{3} > 3$$

$\underline{n \equiv_3 0}$ $\quad n+1 \equiv_3 0$

$\underline{n \equiv_3 2}$

$n \equiv_3 1 \qquad n = 3k+1$

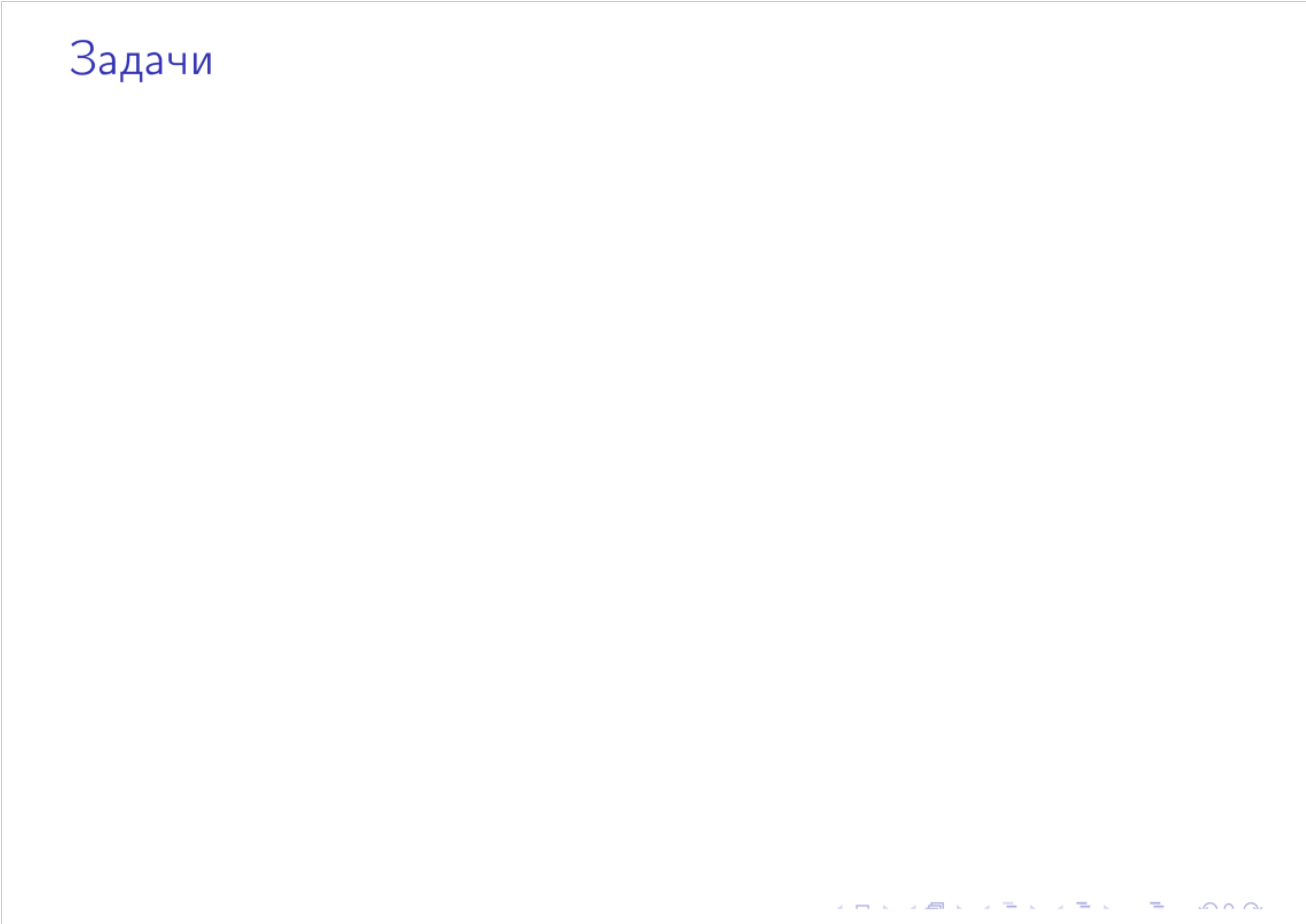
$$p = 2(3k+1)(3k+2) + 3 = (6k+2)(3k+2) + 3$$

$$= (18k^2 + 18k + 4) + 3 = 18k(k+1) + 7$$

$$p - 7 = 18k(k+1) = 36t \qquad \boxed{36 | p-7}$$

Page 30

понеделник, 23 мај 2022 15:14



Задачи

Задача 13 (ЈММО 2012, Задача 1): Најди ги сите прости броеви од обликот $\frac{\overbrace{11\ldots1}^{2n}}{11}$, каде n е природен број.

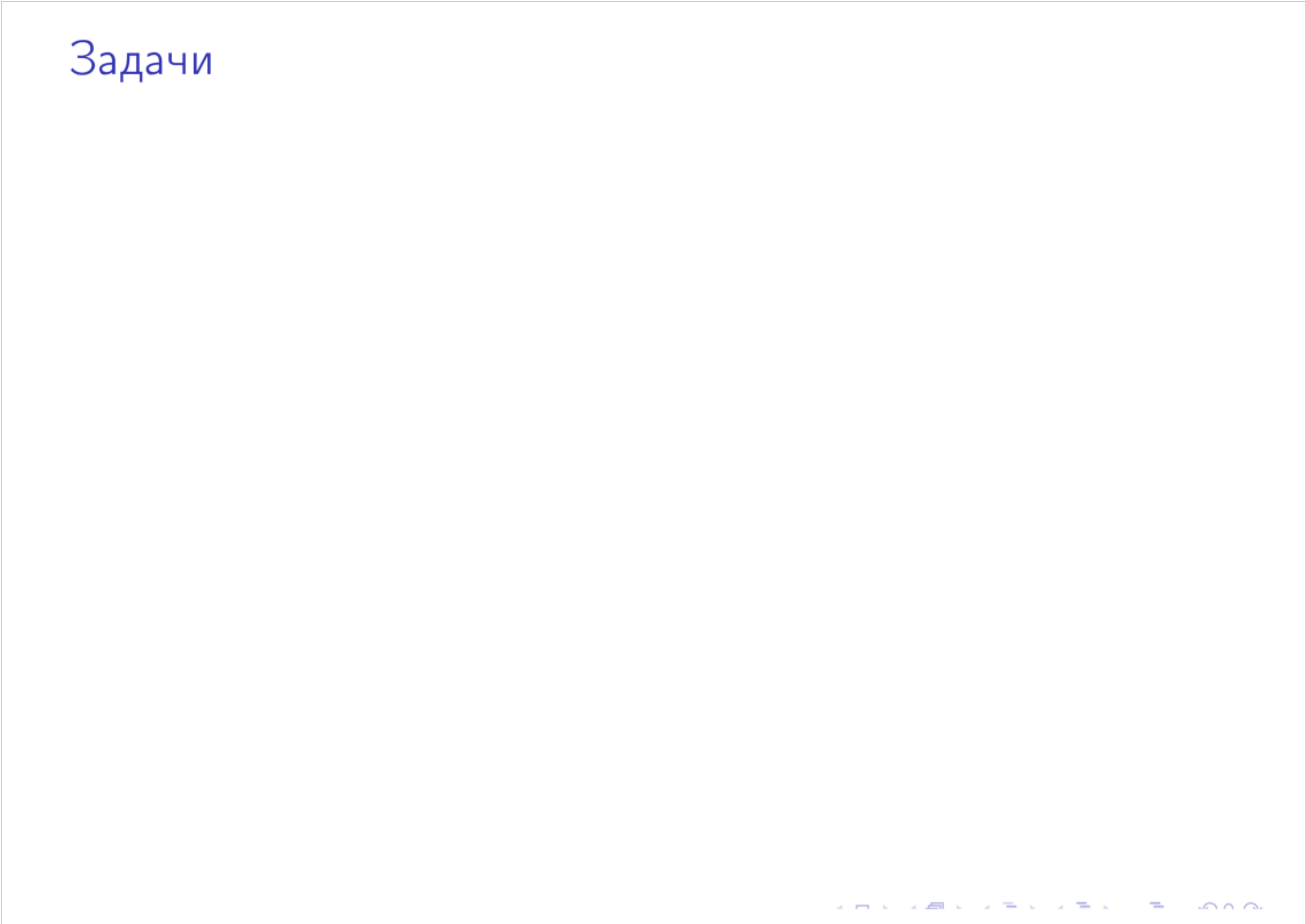
$n \equiv_2 0 \qquad n \equiv_2 1$

$$\underbrace{11\ldots1}_{n} = \frac{1}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{n} = \frac{1}{9}\cdot\left(1\underbrace{00\ldots0}_{n}-1\right) = \frac{1}{9}\left(10^n-1\right) = \boxed{\frac{10^n-1}{9}}$$

$$22\ldots2 = \frac{1}{\cancel{2}}2\cdot 11\ldots1 = 2\cdot\frac{10^n-1}{9} = \left(10^n-1\right)\cdot\frac{2}{9}$$

Page 32

понеделник, 23 мај 2022 15:14



Задачи

$$1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Задача 14 (ЈММО 2019, Задача 1): Најди ги сите прости броеви од облик $1+2^p+3^p+\dots+p^p$, каде p е прост број.

$$1+2^5+3^5+4^5+5^5$$

$\cancel{p>2}$

$$\boxed{p=2 \quad 1+2^2=5}$$

$p>2$

$$1+2^p+\dots+p^p \equiv_p \underline{1+2+\dots+(p-1)}+0 \equiv_p \frac{(p-1)p}{2} \equiv_p 0$$

$$a^p \equiv_p a \qquad 1+2^p+\dots+p^p > p^p > p \qquad ↯$$

$$\frac{p-1}{2}\cdot p \equiv_p 0 \qquad 2 \nmid p$$

Page 34

понеделник, 23 мај 2022 15:14

Задачи

Задачи

Задача 15 (ЈММО 2018, Задача 1): Определи ги сите природни броеви $n > 2$, такви што $n = a^3 + b^3$, каде што a е најмалиот природен делител на n поголем од 1 и b е произволен делител на n.

1° $n \equiv_2 1$ $\quad n = a^3 + b^3 \equiv_2 1 + 1 \equiv_2 0 \Rightarrow 2 \mid n$

$a \equiv_2 b \equiv_2 1$

$n \equiv_2 0$

$a = 2$

2° $n \equiv_2 0$ $\quad \boxed{a = 2}$

$n = 8 + b^3$

$b \mid n \quad b \mid b^3 \Rightarrow b \mid n - b^3 = 8$

$b = 1 \lor \boxed{b = 2} \lor \boxed{b = 4} \lor \boxed{b = 8}$

$n = 8 + 1 = 9 \not\equiv_2 0$

$n = 8 + 8 = \boxed{16}$

$n = 8 + 64 = \boxed{72}$

$n = 8 + 512 = \boxed{520}$

$8 \mid 520$

Page 36

понеделник, 23 мај 2022 15:14

Задачи

Задачи

Задача 16 (ЈММО 2020, Задача 3): Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^5 + 2 = 3 \cdot 101^y.$$

$y < 0 \quad y = -t \quad t \geq 1$

$x^5 + 2 = 3 \cdot 101^{-t} = \frac{3}{101^t} \Rightarrow 101^t (x^5 + 2) = 3$

$101 \mid 101^t \mid 3$

$\boxed{y = 0} \quad x^5 + 2 = 3 \quad x^5 = 1 \quad \boxed{x = 1}$

$y > 0 \quad 101 \mid 3 \cdot 101^y \equiv_{101} 0 \quad x^5 + 2 \equiv_{101} 0 \quad \boxed{x^5 \equiv_{101} -2}$

$(x, 101) = 1 \quad x^{101-1} \equiv_{101} 1 \equiv_{101} x^{100} \equiv (x^5)^{20} \equiv_{101} (-2)^{20} \equiv$

Задачи

a k $1 \equiv_{101} (-2)^{20} \equiv_{101} 2^{20} \equiv_{101} (2^{10})^2 \equiv$

$\equiv_{101} (1024)^2 \equiv_{101} (\underbrace{1010}_{101 \cdot 10}+14)^2 \equiv_{101} 14^2 \equiv_{101} 196 \equiv_{101} 95$

$95 \equiv_{101} 1$ ↯

$(x, y) = (1, 0)$

Задачи

Задача 17 (ЈММО 2016, Задача 5): Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x + y^2 + (NZD(x,y))^2 = x \cdot y \cdot NZD(x,y)$$

$NZD(x,y) = d$

$\boxed{x = ad}$ $\boxed{y = bd}$

$NZD(a,b) = 1$

$x + y^2 + d^2 = xyd$ $\quad ad + b^2d^2 + d^2 = abd^3$

$a + b^2d + d = abd^2 \Rightarrow d \mid a \Rightarrow \boxed{a = cd}$

$cd + b^2d + d = bcd^3$ $\quad c + b^2 + 1 = bcd^2$ $\quad b^2 + 1 = c(bd^2 - 1)$

$= b(bd^2 - 1)$ $\quad bd^2 > 1$

$\boxed{c = \frac{b^2+1}{bd^2-1}}$ $\quad cd^2 = \frac{b^2d^2 + d^2}{bd^2 - 1} = \frac{b \cdot bd^2 - b + b + d^2}{bd^2 - 1} =$

$= b + \frac{b + d^2}{bd^2 - 1}$

$c = b + \dfrac{b+d^2}{bd^2-1}$

$bd^2 - 1 \le b + d^2$

$bd^2 - b - (d^2+1) \le 0$

$bd^2 - b - (d^2-1) \le 2$

$b(d^2-1)$

$\boxed{c = \dfrac{b^2+1}{bd^2-1}}$

$(b-1)(d^2-1) \le 2$

$b > 3$, $b \ge 4$: $(b-1)(d^2-1) > 3(d^2-1) > 2$

$d = 1$

$b = 1$: $c = \dfrac{2}{d^2-1}$, $d^2 - 1 = 1, 2$, $d^2 = 2, 3$

$\boxed{b=2}$: $c = \dfrac{5}{2d^2-1}$, $2d^2 = 6, 2$, $d^2 = 3, 1$

$\boxed{d=1}$ $\boxed{c=5}$

$\boxed{b=3}$: $\cancel{2}(d^2-1) \le \cancel{2}$, $d^2 \le 1$, $\boxed{d=1}$, $\boxed{c=5}$

x y: $(5, 2)$

x y: $(5, 3)$