Математичко списание НУМЕРУС
за учениците од основното образование.

ISSN 1409-875X

Излегува во четири броја во текот на една учебна година.

Цената на еден примерок е 150 денари, а претплатата за 4 броја е 420 денари.

Порачките треба да се направат на web страната на СММ, https://smm.org.mk, во делот *Списанија и книги,* со пополнување на податоците наведени во *формата*.

Жиро сметка 300000001276071, ЕДБ 4030991121596, депонент на Комерцијална банка АД, СММ (со назнака за НУМЕРУС).

Електронска адреса за контакт, праќање прилози и решенија: numerus.smm@gmail.com

СОПСТВЕНИК И ИЗДАВАЧ Е СОЈУЗОТ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Елена Хаџиева
Универзитет „Св. Апостол Павле“, Охрид

МАТЕМАТИЧКИ СИМБОЛИ

Математиката е тесно поврзана со јазикот;
нејзината крајна цел е прецизност во изразувањето.

Вилијам Л. Шааф (William L. Schaaf),
1898-1992, наставник по математика.

Математиката ја сакаме од повеќе причини. Една важна причина е тоа што математиката го поттикнува логичкото и аналитичкото размислување, заради што можеме подобро да го разбереме секојдневието и да носиме мудри одлуки. Математиката овозможува да согледуваме врски помеѓу различни појави (понекогаш навидум и неповрзани појави). Исто така, математиката секогаш ја истакнува вистината. А една од причините заради кои јас многу ја сакам математиката е тоа што во јазикот на математиката има ред, прецизност, краткост и јасност. И не само тоа, туку математичкиот јазик е универзален јазик во светот. Една математичка формула ја разбираат познавачите на математиката од целата наша планета!

Математичките симболи кои денес ги користиме во математичките изрази се создавале постепено во историјата, како што доаѓала потребата од нив. До 15тиот век имало незначителни обиди за воведување симболи, а математичарите воглавно ги пишувале равенствата со зборови, на пример „1 плус 3 е еднакво на 4“. Патот од создавањето на математичките симболи до нивното прифаќање за широка употреба понекогаш бил многу интересен. На пример, биле воведени неколку различни знаци за еднаквост, собирање и одземање, пред да се зацврстат во употреба знаците кои и денес ги користиме. Не ретко се случувало два различни знаци да се користат за иста намена, или ист знак да се користи за различни намени, што често предизвикувало забуна. Всушност, околу 16-17 век постоеле дури 10 системи на запишување математички симболи, кои се натпреварувале еден со друг кој ќе преовладее. Некои од симболите биле за брзо напуштани, а некои останале во употреба до денес. Поедноставните симболи, полесно биле прифаќани за широка употреба, што е и за очекување.

Повеќето од симболите кои денес се употребуваат во математика се јасно одредени и неменливи. За нивното значење и форма е постигната согласност помеѓу математичарите од сите земји, што овозможува познавачите на математиката беспрекорно да се разбираат помеѓу себе.

Симболот за еднаквост „="

Еден од најважните математички симболи, симболот „=" за прв пат се појавува во печатена форма во 1575 година, во книга од алгебра на авторот Роберт Рекорд (*The Whetstone of Witte*, Robert Recorde). После 200 пати запишување во својата книга „е еднакво на", му здодеало, па ги заменил тие зборови со две паралелни линии „  " (ова му изгледало соодветно, бидејќи според него, немало ништо „поеднакво" од две паралелни линии). Пред симболот да биде прифатен во поширока употреба, за да се означи „е еднакво на" се користеле и следниве симболи:

- || (две паралелни вертикални линии, во книга од 1613, на Glorioso)
- | (една вертикална линија, во книга од 1698, на Reyher)
- ~ (во книга од 1691г., на Prestet)
- { (во книга од 1679г., на Fermat)

Симболите за собирање и одземање „+" и „–"

Симболот „+" во печатена форма за прв пат се јавува во 1360 година, во делото Algorismus Proponium од авторот Николас Оресме (Nicolas Oresme). Погоре спомнатиот автор Роберт Рекорд, во својата книга од алгебра, исто така го употребувал знакот „+" за собирање, но и знакот „-" за одземање.

Постојат записи и за претходни ознаки за собирање и одземање.

- Старите Египќани користеле знак со пар нозе свртени надесно (со значење „доаѓање, надоаѓање"), за да означат собирање, а пар нозе свртени налево (со значење „заминување") за да означат одземање.
- Диофант (математичар од третиот век) го користел знакот / за собирање и знакот  за одземање.
- Во XV век, италијанскиот математичар Лука Пациоли (Luca Pacioli) ги користел ознаките $\bar{p}$ за плус и $\bar{m}$ за минус.

Симболи за негативни броеви

Кинезите ги претставувале негативните броеви со црна боја, за разлика од позитивните, кои биле со црвена боја. Индијците ставале точка или крукче над или до бројот за да означат дека е негативен. Француски и италијански математичари од 15тиот и 16тиот век, користеле знаци m: или ставале цртичка над бројот за да означат дека е негативен. На пример, -8 го означувале како $m{:}\,8$ или $\bar{8}$. Пред да се усогласат математичарите околу денешните ознаки, имало уште неколку различни предлози за означувањето на негативните броеви:

- Да се пишуваат исто како позитивните, само легнати.
- Негативните да се пишуваат со знак ☾ , а позитивните со знакот ☽ пред бројот. Така на пример, на сликата подолу е напишан еден израз со овие симболи:

☾4 + ☽6 = 2

Истиот израз, запишан со цртичка над негативниот број би изгледал вака:

$$\bar{4} + 6 = 2.$$

А доколку се корист знакот m:, равенството би изгледало вака

$$m{:}\,4 + 6 = 2.$$

За среќа, со симболите кои денес ги користиме, ова равенство изгледа многу едноставно:

$$-4 + 6 = 2.$$

Симболот за множење „· “

Во врска со знакот за множење забележани се симболиве:

- M, (голема буква M, првата буква од латинскиот збор за множење, multiplicatio, користен во 1545г. од страна на Stifel)
- $\times$, (прв пат забележан во книга од 1618г., а популаризиран со книга од 1635г.)
- $\cdot$ (предложен од страна на Лајбниц, Leibniz, кога не му се допаднал знакот´$\times$ кој му личел на променливата x)
- Лајбниц предложил и други знаци: , (запирка), ; (точка запирка) и $*$ (ѕвездичка).

Како што знаеме, до денес како знаци за множење во употреба се задржале´$\times$, $\cdot$, $*$ (со тоа што последниов се употребува при кодирање во програмски јазик).

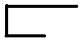
Симболот за делење „:“

Како симболи за делење, во литературата забележани се следниве симболи:

- D, (голема буква D, првата од латинскиот збор за делење, divisio, користен во 1545г. од страна на Stifel)
- хоризонтална линија помеѓу деленикот и делителот (што е всушност како денешната ознака за дропка)
- ÷ (воведен во книга од 1659г. на Johann Rahn)
- / (воведен во 1845г. од страна на De Morgan)
- $\smile$ и : ги користел Лајбниц,

До денес се задржале дробната црта и знаците : (две точки), / (коса црта) и ÷ (две точки со цртичка помеѓу) .

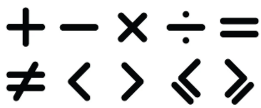
Уште неколку интересни факти за математичките симболи

- Италијанскиот математичар Niccolo Tartaglia ги вовел малите заградите во 1550г.
- Францускиот математичар и филозоф Rene Descartes во 1637 г. ги вовел горните индекси за да означува степени: $a, a^2, a^3, \ldots$ (Претходно забележани се ознаки како: $a, a\ quad, a\ cub, \ldots$ или $a, aa, aaa, \ldots.$)
- Симболите за „помало од“ и „поголемо од“ се воведени во 1631г. (Oughtred):  и  . Но дури еден век подоцна го добиле денешниот изглед.
- Симболот за бесконечност ∞ бил за прв пат воведен од страна на Walis во 1655.

Прашања за учениците:

1. Запиши го равенството $(-4)(-6) = 24$ на што е можно повеќе начини опишани во текстот.

2. Може ли да ги препознаете математичките симболи од сликава?



Извори:

[1] Mitchell, James E., "A Short History of Mathematical Symbolism" (1960). Plan B Papers. 66. https://thekeep.eiu.edu/plan_b/66

[2] “When And Why Did We Start Using Math Symbols”, 20.04.2022, Piyush Patel, https://www.scienceabc.com/pure-sciences/start-using-math-symbols.html

[3] “11 things you never knew about mathematical symbols”, Mathematics, University of Waterloo, Canada, https://uwaterloo.ca/math/eleven-things-math-symbols

[4] “The History of Negative Numbers”, Leo Rogers, 2009, University of Cambridge, Faculty of Mathematics, https://nrich.maths.org/5961

Ирена Стојковска,
Природно-математички факултет, Скопје

КОМБИНАТОРНИ ЗАДАЧИ

Едни од најинтересните логички задачи се комбинаторните задачи, за кои треба исклучително добро да се разбере поставениот проблем, а често потребно е и подлабоко да се размисли, најмногу заради нивниот „нематематички“ дел. Комбинаторните задачи може да бидат и многу сложени, со нив се занимавале и се занимаваат многу математичари – научници. Ние тука нема да ги работиме сложените комбинаторни задачи, туку ќе ги поставиме основите на логичкото размислување кое се користи во комбинаториката и пребројувањето. Задачите изложени во овој прилог ги работевме со учениците од IV одделение на Есенската математичка школа 2021.

Задача 1. На колку начини брат и сестра може да си поделат 10 бонбони?

Решение. Прво треба да согледаме дека не е кажано бонбоните да си ги поделат подеднакво, што значи, ќе постојат повеќе начини. Всушност постојат онолку начини, колку што има начини бројот 10 да го запишеме како збир на два ненегативни цели броеви и при тоа 3 + 7 = 10 и 7 + 3 = 10 ќе ги сметаме за различни записи, бидејќи во првиот случај братот добил 3 и сестрата добила 7 бонбони, а во вториот случај братот добил 7 и сестрата добила 3 бонбони. **Систематичниот пристап** при набројување на сите можни начини е најдобар за да не се прескокне некој од начините. Сите можни начини се дадени во табелата, има 11 начини на кои братот и сестрата може да си ги поделат бонбоните.

Број на бонбони	
брат	**сестра**
0	10
1	9
2	8
3	7
4	6
5	5
6	4
7	3
8	2
9	1
10	0

Начините може да ги запишеме и како *подредени парови*, во кои првата компонента ќе означува колку бонбони зел братот, а втората компонента ќе означува колку бонбони зела сестрата. Тогаш, сите 11 начини на поделба на бонбоните се следните:

(0, 10), (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1) и (10, 0). Да забележиме дека редоследот на броевите во подредените парови е важен, имено (3, 7) и (7, 3) се различни подредени парови.

Напоменуваме дека за да го одредиме бројот на начини, не е неопходно да се испишат сите начини. Може да расудуваме на следниот начин: братот може да земе некоја количина од 0 до 10 бонбони, а остатокот од бонбоните да ги земе сестрата. Постојат 11 различни ненегативни цели броеви од 0 до 10 (заедно со 0 и 10), значи постојат 11 начини за поделба на бонбоните.

Задача 2. Марко, Симон и Павел сакаат да си поделат 6 парички. На колку начини може да ја направат поделбата, така што секој од другарите да добие барем една паричка?

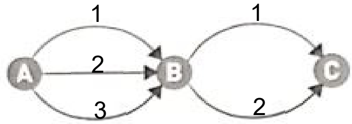
Решение. Ако систематски ги испишеме сите случаи на поделба на 6-те парички, така што секој од другарите да добие најмалку 1 паричка, ќе видиме дека поделбата може да се направи на 10 начини (види ја табелата).

Број на парички		
Марко	**Симон**	**Павел**
1	1	4
1	2	3
1	3	2
1	4	1
2	1	3
2	2	2
2	3	1
3	1	2
3	2	1
4	1	1

Начините може да ги испишеме и како *подредени тројки*, во кои првата компонента ќе означува колку парички зел Марко, втората компонента ќе означува колку парички зел Симон и третата компонента ќе означува колку парички зел Павел. Сите 10 начини на поделба на паричките се: (1, 1, 4), (1, 2, 3), (1, 3, 2), (1, 4, 1), (2, 1, 3), (2, 2, 2), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1) и (4, 1, 1). Наоѓањето на бројот на начини, без да се испишат сите начини е малку потежок комбинаторен проблем и нема да го разгледуваме.

Задача 3. Од градот A до градот B водат 3 пата, од градот B до градот C водат 2 пата. Од градот A до градот C може да се стигне само преку градот B. На колку различни начини може еден патник да стигне од градот A до градот C?

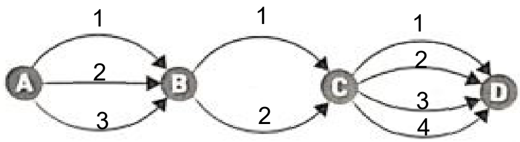
Решение. Градовите и сите можни патишта ќе ги претставиме на дијаграм, така што градовите ќе бидат кругчиња, а патиштата ќе бидат насочени (не мора прави) линии, при што од A до B ќе има три насочени линии означени со 1, 2 и 3, а од B до C ќе има две насочени линии означени со 1 и 2. Сите можни патишта од A до C преку B се: (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1) и (3, 2), каде првата компонента е патот од A до B, а втората компонента е патот од B до C. Има вкупно 6 начини да се стигне од A до C.



До овој број може да дојдеме и без да ги набројуваме сите можни начини. Имено, треба да го најдеме бројот на сите подредени парови, чија прва компонента прима 3 различни вредности: 1, 2 или 3, и за секоја од тие вредности, втората компонента прима 2 различни вредности: 1 или 2, па вкупниот број на такви подредени парови е $3 \cdot 2 = 6$, односно на 6 различни начини може да се стигне од A до C.

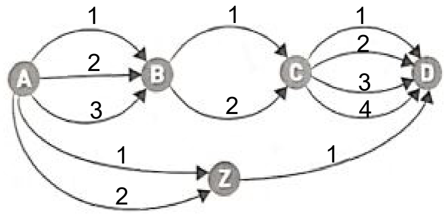
Задача 4. Од градот A до градот B водат 3 пата, од градот B до градот C водат 2 пата и од градот C до градот D водат 4 пата. Од градот A до градот D може да се стигне само преку градовите B и C. На колку различни начини може еден патник да стигне од градот A до градот D?

Решение. Треба да го најдеме бројот на сите подредени тројки, така што првата компонента прима 3 различни вредности: 1, 2 или 3, втората компонента прима 2 различни вредности: 1 или 2 и третата компонента прима 4 различни вредности: 1, 2, 3 или 4. Бројот на ваквите подредени тројки е $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$, т.е. постојат 24 начини да се стигне од градот A до градот D. За вежба, испишете ги сите подредени тројки за патиштата од A до D преку B и C.



Задача 5. Од градот A до градот B водат 3 пата, од градот B до градот C водат 2 пата и од градот C до градот D водат 4 пата. Од градот A до градот Z водат 2 пата, а од градот Z до градот D води 1 пат. Од градот A до градот D може да се стигне или преку градовите B и C или преку градот Z. На колку различни начини може еден патник да стигне од градот A до градот D?

Решение. Од градот A до градот D може да се стигне преку градовите B и C на 24 начини, додека од градот A до градот D преку градот Z, може да се стигне на 2 начина: (1,1) и (2, 1). Вкупниот број начини да се стигне од A до D е 24 + 2 = 26 начини.



Задача 6. Во својот куфер за зимување, Иван спакувал 2 пара чевли, 2 пара панталони и 6 блузи. На колку различни начини може тој да се облече, ако едно облекување се состои од пар чевли, пар панталони и блуза?

Решение. Едно облекување е подредена тројка, со прва компонента парот чевли: Ч1 или Ч2, втора компонента парот панталони: П1 или П2 и трета компонента блузата: Б1, Б2, Б3, Б4, Б5 или Б6. Бројот на различни начини на кои Иван може да се облече е $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$ начини, затоа што за секој пар од двата пара чевли, може да одбере некој од двата пара панталони, а за секој избор на чевли и панталони, може да одбере некоја од шесте блузи. За вежба, испишете ги сите начини на облекувања како подредени тројки.

Задача 7. Колку има непарни двоцифрени броеви? А колку има непарни двоцифрени броеви со различни цифри?

Решение. За да одговориме на првото прашање, најнапред треба да увидиме дека на местото од единици (Е) може да се запишат цифрите 1, 3, 5, 7 или 9, а на местото на десетки (Д) било која цифра од 1 до 9. Значи, имаме вкупно $9 \cdot 5 = 45$ непарни двоцфрени броеви. Друг начин да се дојде до овој број е прво да се воочи дека има 90 двоцифрени броеви, од кои половина се парни, а половина т.е. $90 : 2 = 45$ се непарни.

За да одредиме колку има непарни двоцифрени бреви со различни цифри, може да размислуваме на следниот начин: На местото од единици (Е) може да се запишат цифрите 1, 3, 5, 7 или 9, а на местото на десетки (Д) било која цифра од 1 до 9 која е различна од цифрата на единици (Е), што значи дека за секоја цифра на единици има 8 кандидати за цифра на десетки (Д). Значи, имаме вкупно $5 \cdot 8 = 40$ непарни двоцифрени броеви со различни цифри. До истиот број може да дојдеме и на следниот начин: Меѓу непарните двоцифрени броеви, има 5 броеви со исти цифри: 11, 33, 55, 77 и 99, па непарни двоцифрени броеви со различни цифри има $45 - 5 = 40$.

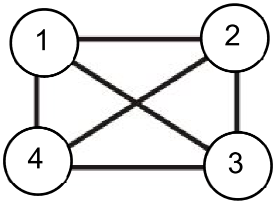
Задача 8. Колку има петцифрени броеви кои почнуваат на цифрата 2 и завршуваат на цифрата 7? А колку од нив се со различни цифри?

Решение. Всушност, треба да најдеме на колку начини може да се пополнат местата на десетки (Д), стотки (С) и илјади (И). Секое од тие места може да се пополни со некоја од цифрите од 0 до 9, значи на 10 начини, па вкупниот број начини е $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$, односно има 1000 петцифрени броеви кои почнуваат на цифрата 2 и завршуваат на цифрата 7.

За да најдеме колку од нив се со различни цифри, може да расудуваме на следниот начин: местото на илјади (И) може да го пополниме со некоја од цифрите 0 до 9 различна од 2 и 7, значи 8 можности, местото на стотки (С) може да го пополниме со некоја од цифрите 0 до 9 различна од 2 и 7 и различна од цифрата на илјади (И), значи 7 можности и местото на десетки (Д) може да го пополниме со некоја од цифрите 0 до 9 различна од 2 и 7 и различна од цифрата на илјади (И) и цифрата на стотки (С), значи 6 можности. Па, вкупно има $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ петцифрени броеви со различни цифри кои почнуваат на цифрата 2 и завршуваат на цифрата 7.

Задача 9. Четири пријатели се договориле да излезат на вечера во новиот ресторан во градот. Кога пристигнале на договореното место, секој со секого се поздравил по еднаш. Колку вкупно поздравувања се случиле?

Решение. Ќе ги означиме пријателите со 1, 2, 3 и 4. Средбата на пријателите може да прикажеме на дијаграм (наречен *граф*), каде пријателите се прикажани со кркучиња (наречени *јазли* на графот), а поздравувањата се линии кои ги поврзуваат кружчињата (наречени *ребра* на графот). Секои две кружчиња се поврзани со една линија, има вкупно 6 поврзувачки линии, односно се случиле вкупно 6 поздравувања.



Овие 6 поздравувања може и да ги наброиме. Со {1, 2} означуваме дека се случило поздравување меѓу пријателите 1 и 2. Тогаш, сите 6 поздравувања се: {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4} и {3, 4}, односно тоа се сите двоелементни подмножества од множеството од четири елементи {1, 2, 3, 4}. Во множествата не е важен редоследот на елементите, односно {2, 1} = {1, 2}, важен е само составот т.е. кои елементи припаѓаат на тоа множество.

Вкупниот број на поздравувања може да го најдеме и на следниот начин: Човекот со број 1 се поздравил со пријателите 2, 3 и 4, значи се направени 3 поздравувања, човекот со број 2 се поздравил уште со пријателите 3 и 4, значи уште 2 поздравувања и човекот со број 3 се поздравил уште со пријателот 4, значи уште 1 поздравување. Тогаш, вкупниот број на поздравувања е 3 + 2 + 1 = 6.

Задача 10. Во фудбалската прва лига играат 10 клубови. Колку вкупно натпревари ќе се одиграат, ако секој клуб игра со секого по 4 пати?

Решение. Клубовите и одиграните натпревари може да ги претставиме на граф и да ги изброиме ребрата (клубовите ќе бидат јазли на графот, а натпреварите ќе бидат ребра), но може да расудуваме и на следниот начин, за да прво го изброиме бројот на натпревари со различен состав: првиот клуб одиграл по еден натпревар со останатите 9 клуба, значи 9 натпревари, вториот клуб одиграл по еден натпревар со останатите 8 клуба, значи 8 натпревари итн. Вкупно натпревари со различен состав се 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45 натпревари. Бидејќи такви натпревари биле одиграни по 4 пати, затоа биле одиграни вкупно 45 · 4 = 180 натпревари.

Задача 11. Колку домина има во еден класичен комплет домина за играње (едно домино се состои од две полиња, секое поле има од 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 6 точки)?

Решение. Да ги изброиме прво домината кои имаат различен број точки на двете половини, такви домина има 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21. Потоа, има уште 7 домина кои имаат две исти полиња. Значи, еден класичен комлет домина има вкупно 21 + 7 = 28 домина.

Задачи за самостојна работа

1. На колку начини може 4 другари да поделат 10 колачиња, така што секој од нив да земе барем по 2 колачиња? Наведи ги сите начини. Работи систематски.

2. Во својот куфер за летување, Теодора спакувала 4 пара чевли, 2 здолништа, 5 блузи и 3 фустани. На колку различни начини може таа да одбере да се облече, ако едно облекување се состои од пар чевли, здолниште и блуза или пак од пар чевли и фустан?

3. Колку има парни трицифрени броеви кои почнуваат на цифрата 4? Колку од тие броеви се со цифри кои не се повторуваат?

4. На еден тениски турнир се пријавиле 8 тенисери. Колку партии биле одиграни на тенискиот турнир, ако секој тенисер играл со секого по еднаш?

Извори:

[1] И. Стојковска, *Логички задачи*, Предавања за учениците од IV одделение, Есенска математичка школа 2021, СММ, 2021.
[2] A. Burago, *Mathematical Circle Diaries, Year 1*, MSRI, AMS, 2010.

МАТЕМАТИЧКА ЗАГАТКА 1

Нека е даден правоаголен лист хартија чија должина е два пати поголема од ширината.

а) Подели го правоаголникот на три дела од кои може да составиш квадрат без преклопување на делчињата.

б) Подели го правоаголникот на два дела од кои може да составиш правоаголен триаголник без преклопување на делчињата.

Извор:

[1] B. Marinković, *Mala zbirka zanimljivih matematičkih zadataka za izoštravanje uma*, Arhimedes, Beograd, 1988.

Нина Трифуновска

ПРИМЕНА НА КОНГРУЕНЦИИТЕ ЗА ДОБИВАЊЕ НА КРИТЕРИУМИ ЗА ДЕЛИВОСТ СО ПРОСТИТЕ БРОЕВИ: 7, 11, 13, 17 И 19

Овој текст беше презентиран од авторот на LV Државен натпревар на младите истражувачи од Република Македонија во областа Применета математика.

Конгруентноста е релација која кажува дека при делењето на два броја со трет број се добиваат еднакви остатоци. Конгруентноста е: рефлексивна, симетрична и транзитивна релација, т.е. таа е релација за еквивалентнција. Когруенциите имаат голема примена во математиката и со нивна помош може да се решаваат задачи од следниве типови:

- одредување на цифра (цифри) на кои завршува некој број или броен степен;
- одредување на остаток на бројни степени при делење со некој број;
- докажување на деливост на броен израз со даден број;
- докажување на деливост на полином со даден број;
- докажување на деливост на израз составен од степени или полином со даден број;
- изведување на едноставни критериуми за деливост со: 2, 3, 4, 5, 8 и 9;
- изведување на посложени критериуми за деливост со: 7, 11, 13, 17 и 19.

Поим за конгруенција

Најпрвин ќе се потсетиме што се тоа конгруенции и за нивните основни својства. Некои од својствата ќе ги докажеме, а останатите ќе ги оставиме за вежба на читателите. Конгруенциите се тесно поврзани со поимот деливост и од својствата на деливоста произлегуваат најмногу од својствата на конгруенциите. Да се потсетиме: за a, $b \in \mathbb{Z}$, велиме дека b е делител на a ако постои $k \in \mathbb{Z}$ за кој $bk = a$. Пишуваме $b|a$.

Дефиниција 1. Ако $m|(a-b)$, тогаш велиме дека **бројот a е конгруентен со бројот b по модул m** и пишуваме: $a \equiv b \pmod{m}$. Ако $m\nmid(a-b)$, тогаш велиме дека бројот a не е конгруентен со бројот b по модул m и пишуваме $\boldsymbol{a \not\equiv b}$ **(mod $\boldsymbol{m}$)**.

Пример 1. Нека $a = 17$, $b = 11$ и $m = 3$. Имаме дека 3|(17 − 11), т.е. 3|6, па значи 17 ≡ 11 (mod 3).

Теорема 1. $a \equiv b$ (mod m) ако и само ако при делењето на броевите a и b со бројот m се добиваат еднакви остатоци.

Доказ. ⇒**:** Нека $a = mp +$, $b = mq + s$ и нека $a \equiv b$(mod m), т.е. $m|(a – b)$. Имаме

$m|(a - b) \Leftrightarrow m|(mp + r - mq - s) \Leftrightarrow m|(m(p - q) + r - s) \Leftrightarrow m|(r - s)$ каде $-m<(r-s)<m \Leftrightarrow (r-s) = 0 \Leftrightarrow r=s$ со што е докажана едната насока на тврдењето.

⇐: Обратно, нека $a = mp +$, $b = mq + r \Rightarrow a - b = mp + r - mq - r = m(p - q) \Leftrightarrow m|(a–b) \Leftrightarrow a \equiv b$ (mod m).

Пример 2. Бидејќи 33 = 4 · 8 + 1 и 25 = 3 · 8 + 1, имаме дека 33 ≡ 25 (mod 8).

Пример 3. Да покажеме дека се точни следниве конгруентни равенства 21 ≡ 49 (mod 4) и 29 ≡ −3(mod 4). Имаме дека важи 21 = 4 · 5 + 1, 49 = 4 · 12 + 1. Слично, второто конгруентно равенство е точно затоа што 29 = 4 · 7 + 1 , −3 = 4 · (−1) + 1.

Задача. Докажете дека 37 ≡ 9 (mod 7).

Теорема 2. $a \equiv b$ (mod m) акко постои $k \in \mathbb{Z}$ таков што $a = b + km$.
Доказ: Нека $a \equiv$ (mod m) $\Leftrightarrow m|(a – b) \Leftrightarrow a - b = km$ за некој $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a=b+km$.

Последица. Ако $a = km + r$ и $0 \le r <$, тогаш $a \equiv r$ (mod m).
Доказ. Нека $a - r = km \Rightarrow m|a - r$ т.е. $a \equiv r$ (mod m)

Последица. Ако $a \equiv 0$(mod m), тогаш $m|a$.

Теорема 3. Ако $a \equiv$ (mod m) и $c \equiv$ (mod m), тогаш: $(a + c) \equiv (b+d)$(mod m), $(a – c) \equiv (b−d)$(mod m), $ac \equiv bd$(mod m).

Последица 1. Ако $a \equiv$ (mod m), тогаш за секој $c \in \mathbb{Z}$, важи: $a + c \equiv (b + c)$(mod m), $a - c \equiv (b - c)$(mod m), $ac \equiv bc$(mod m).

Последица 2. Ако $a \equiv b$ (mod m) и $n \in \mathbb{N}$, тогаш $a^n \equiv$ (mod m)

Последица 3. Ако $a \equiv b$ (mod m) и $k \in \mathbb{Z}$, тогаш: $a \equiv (b \pm km)$ (mod m), $a \pm km \equiv b$ (mod m), $a \pm km \equiv (b \pm tm)$(mod m).

Во врска со деливоста, точни се следниве тврдења:

i) ако $a|b$ и $a|c$, тогаш $a|(b + c)$

ii) ако $a|(b + c)$ и $a|b$, тогаш $a|c$.

Ако a е n − цифрен природен број него го запишуваме како $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$.

Бројот a се запишува во развиен облик како

$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$

Записот во двата облика ќе го користиме во докажувањето на критериумите за деливост.

Критериуми за деливост

Критериум за деливост со број m претставува правило кое ни овозможува да провериме дали некој број a е делив бројот m без притоа да го поделиме a со m туку со користење само цифрите од записот на a.

Критериуми за деливост со бројот 7

Прв критериум. $7|a \Leftrightarrow 7|(a_0 + a_6 + a_{12} + \cdots) - (a_3 + a_9 + a_{15} + \cdots)$
$+3[(a_1 + a_7 + a_{13} + \cdots) - (a_4 + a_{10} + a_{16} + \cdots)]$
$+2[(a_2 + a_8 + a_{14} + \cdots) - (a_5 + a_{11} + a_{17} + \cdots)]$
………… *

<u>**Доказ**</u>**:** Ќе ги искористиме својствата за конгруенции на степените на бројот 10:

$$\begin{array}{lcl}
1 \equiv 1 \pmod 7 / \cdot a_0 & & a_0 \equiv a_0 \pmod 7 \\
10 \equiv 3 \pmod 7 / \cdot a_1 & & 10a_1 \equiv 10a_1 \pmod 7 \\
10^2 \equiv 2 \pmod 7 / \cdot a_2 & & 10^2 a_2 \equiv 1 \cdot 2a_2 \pmod 7 \\
10^3 \equiv -1 \pmod 7 / \cdot a_3 & & 10^3 a_3 \equiv 10 \cdot 2a_3 \pmod 7 \\
10^4 \equiv -3 \pmod 7 / \cdot a_4 & \Rightarrow & 10^4 a_4 \equiv 1 \cdot 2^2 a_4 \pmod 7 \\
10^5 \equiv -2 \pmod 7 / \cdot a_5 & & 10^5 a_5 \equiv 10 \cdot 2^2 a_5 \pmod 7 \\
10^6 \equiv 1 \pmod 7 / \cdot a_6 & & 10^6 a_6 \equiv a_6 \pmod 7 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

од каде лесно се добива дека

$7|a \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + 10^3a_3 + \cdots + 10 \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a_0 + a_6 + a_{12} + \cdots) - (a_3 + a_9 + a_{15} + \cdots) + 3[(a_1 + a_7 + a_{13} + \cdots) - (a_4 + a_{10} + a_{16} + \cdots)] + 2[(a_2 + a_8 + a_{14} + \cdots) - (a_5 + a_{11} + a_{17} + \cdots)] \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 7|(a_0 + a_6 + a_{12} + \cdots) - (a_3 + a_9 + a_{15} + \cdots)$$
$$+3[(a_1 + a_7 + a_{13} + \cdots) - (a_4 + a_{10} + a_{16} + \cdots)]$$
$$+2[(a_2 + a_8 + a_{14} + \cdots) - (a_5 + a_{11} + a_{17} + \cdots)]$$

Втор критериум. $7|a \Leftrightarrow 7|(\overline{a_1a_0} + 2 \cdot \overline{a_3a_2} + 2^2 \cdot \overline{a_5a_4} + 2^3 \cdot \overline{a_7a_6} + \cdots)$

Доказ. Слично како и во првиот случај, ќе ги искористиме својствата за конгруенции на степените од бројот 10:

$$\begin{array}{lcl}
1 \equiv 1 \pmod 7 /\cdot a_0 & & a_0 \equiv 1 \cdot a_0 \pmod 7 \\
10 \equiv 10 \pmod 7 /\cdot a_1 & & 10a_1 \equiv 10a_1 \pmod 7 \\
10^2 \equiv 1 \cdot 2 \pmod 7 /\cdot a_2 & \Rightarrow & 10^2a_2 \equiv 1 \cdot 2a_2 \pmod 7 \\
10^3 \equiv 10 \cdot 2 \pmod 7 /\cdot a_3 & & 10^3a_3 \equiv 10 \cdot 2a_3 \pmod 7 \\
10^4 \equiv 1 \cdot 2^2 \pmod 7 /\cdot a_4 & & 10^4a_4 \equiv 1 \cdot 2^2 a_4 \pmod 7 \\
10^5 \equiv 10 \cdot 2^2 \pmod 7 /\cdot a_5 & & 10^5a_5 \equiv 10 \cdot 2^2 a_5 \pmod 7 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

Оттука, имаме $7 \mid a \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + 10^3a_3 + \cdots + 10^na_n \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow$ $a_0+10a_1+2a_2+2\cdot10a_3+2^2a_4+2^2\cdot10a_5+2^3a_6+2^3\cdot10a_7 + \cdots \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overline{a_1a_0} + 2 \cdot \overline{a_3a_2} + 2^2 \cdot \overline{a_5a_4} + 2^3 \cdot \overline{a_7a_6} + \cdots \equiv 0 \pmod 7)$$

Пример 1. Докажете дека 7|446497982.

Прв начин. Доволно е да се докаже дека

$7|a_0+a_6-(a_3 + a_9)+3[(a_1+a_7)-(a_4+a_{10})]+2[(a_2+a_8)-(a_5+a_{11})]$

Ако се заменат соодветните цифри, добиваме

$a_0 + a_6 - (a_3 + a_9) + 3[(a_1 + a_7) - (a_4 + a_{10})] + 2[(a_2 + a_8) - (a_5 + a_{11})] =$
$= 2 + 6 - (7 + 0) + 3[(8 + 4) - (9 + 0)] + 2[(9 + 4) - (4 + 0)] = 28 = 4 \cdot 7$
со што доказот е завршен.

Втор начин. $7 \mid 446497982 \Leftrightarrow 7|(\overline{a_1a_0} + 2 \cdot \overline{a_3a_2} + 2^2 \cdot \overline{a_5a_4} + 2^3 \cdot \overline{a_7a_6} + 2^3 \cdot \overline{a_9a_8})$

Имаме дека $\overline{a_1a_0} + 2 \cdot \overline{a_3a_2} + 2^2 \cdot \overline{a_5a_4} + 2^3 \cdot \overline{a_7a_6} + 2^3 \cdot \overline{a_9a_8} =$
$= 82 + 2 \cdot 79 + 4 \cdot 49 + 8 \cdot 46 + 16 \cdot 4 = 868 = 124 \cdot 7$

со што доказот е завршен.

Ќе формулираме уште два критериума за делење со 7. Нивните докази ги оставаме на читателите за вежба, а ќе ги презентираме во наредниот број.

Трет критериум. $7|a \Leftrightarrow 7|(\overline{a_2a_1a_0} + 6 \cdot \overline{a_5a_4a_3} + 6^2 \cdot \overline{a_8a_7a_6} + 6^3 \cdot \overline{a_{11}a_{10}a_9} + \cdots)$

Четврт критериум. $7|a \Leftrightarrow 7|(\overline{a_3a_2a_1a_0} + 4 \cdot \overline{a_7a_6a_5a_4} + 4^2 \cdot \overline{a_{11}a_{10}a_9a_8} + \cdots)$

Критериуми за деливост со бројот 11

Начинот за добивање на критериуми за деливост со 7 може да се примени за добивање на критериуми за деливост со други броеви. Ќе дадеме два критериума за деливост со 11.

Прв критериум. $11|a \Leftrightarrow 11|(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots)$
<u>Доказ</u>: Овој критериум ни кажува дека за да провериме деливост на даден број со 11 е доволно да се соберат цифрите на парна позиција и од нивниот збир да се одземе збирот на цифрите на непарните позиции во записот на бројот и да се провери дали добиената разлика е делива со 11.

Ќе ги искористиме својствата на конгруенциите на степените на бројот 10 со 11:

$$\begin{array}{lcl}
1 \equiv 1 \pmod{11} /\cdot a_0 & & a_0 \equiv a_0 \pmod{11} \\
10 \equiv -1 \pmod{11} /\cdot a_1 & & 10a_1 \equiv -a_1 \pmod{11} \\
10^2 \equiv 1 \pmod{11} /\cdot a_2 & & 10^2a_2 \equiv a_2 \pmod{11} \\
10^3 \equiv -1 \pmod{11} /\cdot a_3 & \Rightarrow & 10^3a_3 \equiv -a_3 \pmod{11} \\
10^4 \equiv 1 \pmod{11} /\cdot a_4 & & 10^4a_4 \equiv a_4 \pmod{11} \\
10^5 \equiv -1 \pmod{11} /\cdot a_5 & & 10^5a_5 \equiv -a_5 \pmod{11} \\
10^6 \equiv 1 \pmod{11} /\cdot a_6 & & 10^6a_6 \equiv a_6 \pmod{11} \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

од каде лесно се добива дека

$11|a \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{11} \Leftrightarrow a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + 10^3a_3 + \cdots + 10 \equiv 0 \pmod{11} \Leftrightarrow (a_0+a_2+a_4+\cdots) - (a_1+a_3+a_5+\cdots) \equiv 0 \pmod{11} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 11|\,[(a_0+a_2+a_4+\cdots) - (a_1+a_3+a_5+\cdots)]$

Втор критериум. $11| \Leftrightarrow 11|\,(\overline{a_1a_0} + \overline{a_3a_2} + \overline{a_5a_4} + \overline{a_7a_6} + \cdots)$.
<u>Доказ</u>: Овој критериум ни кажува дека за да провериме деливост на даден број со 11 е доволно бројот да се раздели на двоцифрени броеви, почнувајќи од најдесно од цифрата за единици, а потоа добиените двоцифрени броеви се собираат и се проверува дали збирот е делив со 11.

Ќе ги искористиме својствата за конгруенции на степените на бројот 10 со 11:

$$\begin{array}{lcl}
1 \equiv 1 \pmod{11} /\cdot a_0 & \Rightarrow & a_0 \equiv a_0 \pmod{11} \\
10 \equiv 10 \pmod{11} /\cdot a_1 & & 10a_1 \equiv 10a_1 \pmod{11}
\end{array}$$

$10^2 \equiv (-1)^2 \pmod{11} / \cdot a_2$ $\qquad$ $10^2 a_2 \equiv a_2 \pmod{11}$
$10^3 \equiv 10 \pmod{11} / \cdot a_3$ $\qquad$ $10^3 a_3 \equiv 10 a_3 \pmod{11}$
$10^4 \equiv (-1)^2 \pmod{11} / \cdot a_4$ $\qquad$ $10^4 a_4 \equiv a_4 \pmod{11}$
$10^5 \equiv 10 \pmod{11} / \cdot a_5$ $\qquad$ $10^5 a_5 \equiv 10 a_5 \pmod{11}$
$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$

од каде лесно се добива дека

$a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + 10^3a_3 + \cdots + 10^n a_n \equiv 0 \pmod{11} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a_0 + 10a_1 + 1 \cdot a_2 + 1 \cdot 10a_3 + 1^2 \cdot a_4 + 1^2 \cdot 10a_5 + 1^3 \cdot a_6 + 1^3 \cdot 10a_7 + \cdots \equiv 0 \pmod{11} \Leftrightarrow \overline{a_1a_0} + \overline{a_3a_2} + \overline{a_5a_4} + \overline{a_7a_6} + \cdots \equiv 0 \pmod{11}$
$\Leftrightarrow 11 \mid (\overline{a_1a_0} + \overline{a_3a_2} + \overline{a_5a_4} + \overline{a_7a_6} + \cdots)$

Пример 2. Проверете дали 11|718564.

Прв начин. Ќе провериме дали $11 \mid (a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots)$. Имаме дека
$(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots) = (4 + 5 + 1) - (6 + 8 + 7) = 10 - 21 = -11 = -1 \cdot 11$ од каде следува точноста на тврдењето.

Втор начин. $11 \mid 718564 \Leftrightarrow 11 \mid (64 + 85 + 71) \Leftrightarrow 11 \mid 220$ што е точно бидејќи $220 = 20 \cdot 11$

Критериум за деливост со бројот 13

Прв критериум. $13 \mid a \Leftrightarrow 13 \mid (a_0 + a_6 + a_{12} + \cdots) - (a_3 + a_9 + a_{15} + \cdots) + 10[(a_1 + a_7 + a_{13} + \cdots) - (a_4 + a_{10} + a_{16} + \cdots)] + 9[(a_2 + a_8 + a_{14} + \cdots) - (a_5 + a_{11} + a_{17} + \cdots)]$

Доказ: $13 \mid a \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{13} \Leftrightarrow a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + 10^3a_3 + \cdots + 10^n a_n \equiv 0 \pmod{13}$

Ќе ги искористиме својствата за конгруенции на степените на бројот 10 со 13:

$$\begin{array}{lcl}
1 \equiv 1 \pmod{13} / \cdot a_0 & & a_0 \equiv a_0 \pmod{13} \\
10 \equiv 10 \pmod{13} / \cdot a_1 & & 10a_1 \equiv 10a_1 \pmod{13} \\
10^2 \equiv 9 \pmod{13} / \cdot a_2 & & 10^2a_2 \equiv 9a_2 \pmod{13} \\
10^3 \equiv -1 \pmod{13} / \cdot a_3 & & 10^3a_3 \equiv -a_3 \pmod{13} \\
10^4 \equiv -10 \pmod{13} / \cdot a_4 & \Rightarrow & 10^4a_4 \equiv -10a_4 \pmod{13} \\
10^5 \equiv -9 \pmod{13} / \cdot a_5 & & 10^5a_5 \equiv -9a_5 \pmod{13} \\
10^6 \equiv 1 \pmod{13} / \cdot a_6 & & 10^6a_6 \equiv a_6 \pmod{13} \\
10^7 \equiv 10 \pmod{13} / \cdot a_7 & & 10^7a_7 \equiv 10a_7 \pmod{13} \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

Значи, $13 \mid a \Leftrightarrow [(a_0 + a_6 + a_{12} + \cdots) - (a_3 + a_9 + a_{15} + \cdots)] +$
$+10[(a_1 + a_7 + a_{13} + \cdots) - (a_4 + a_{10} + a_{16} + \cdots)]$
$+9[(a_2 + a_8 + a_{14} + \cdots) - (a_5 + a_{11} + a_{17} + \cdots)] \equiv 0 \pmod{13}$

$\Leftrightarrow\quad 13 \mid (a_0 + a_6 + a_{12} + \cdots) - (a_3 + a_9 + a_{15} + \cdots)$
$+10\,[(a_1 + a_7 + a_{13} + \cdots) - (a_4 + a_{10} + a_{16} + \cdots)]$
$+9\,[(a_2 + a_8 + a_{14} + \cdots) - (a_5 + a_{11} + a_{17} + \cdots)]$

Втор критериум. $13|a \Leftrightarrow 13 \mid (\overline{a_1a_0} + 9\cdot\overline{a_3a_2} + 9^2\cdot\overline{a_5a_4} + 9^3\cdot\overline{a_7a_6} + \cdots)$

Доказ: $13|a \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{13} \Leftrightarrow a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + 10^3a_3 + \cdots + 10^n a_n \equiv 0 \pmod{13}$

Важат следниве конгруенции

$$
\begin{array}{lcl}
1 \equiv 1 \pmod{13} / \cdot a_0 & & a_0 \equiv a_0 \pmod{13} \\
10 \equiv 10 \pmod{13} / \cdot a_1 & & 10a_1 \equiv 10a_1 \pmod{13} \\
10^2 \equiv 9 \pmod{13} / \cdot a_2 & & 10^2a_2 \equiv 9\,a_2 \pmod{13} \\
10^3 \equiv 9\cdot 10 \pmod{13} / \cdot a_3 & & 10^3a_3 \equiv 9\cdot 10\,a_3 \pmod{13} \\
10^4 \equiv 9^2 \pmod{13} / \cdot a_4 & \Rightarrow & 10^4a_4 \equiv 9^2\cdot a_4 \pmod{13} \\
10^5 \equiv 9^2\cdot 10 \pmod{13} / \cdot a_5 & & 10^5a_5 \equiv 9^2\cdot 10\,a_5 \pmod{13} \\
10^6 \equiv 9^3 \pmod{13} / \cdot a_6 & & 10^6a_6 \equiv 9^3\cdot a_6 \pmod{13} \\
10^7 \equiv 9^3\cdot 10 \pmod{13} / \cdot a_7 & & 10^7a_7 \equiv 9^3\cdot 10\,a_7 \pmod{13} \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Оттука, имаме

$13|a \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{13} \Leftrightarrow a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + 10^3a_3 + \cdots + 10^n a_n \equiv 0 \pmod{13} \Leftrightarrow a_0 + 10a_1 + 9a_2 + 9\cdot 10a_3 + 9^2a_4 + 9^2\cdot 10a_5 + 9^3a_6 + 9^3\cdot 10a_7 + \cdots \equiv 0 \pmod{13} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overline{a_1a_0} + 9\cdot\overline{a_3a_2} + 9^2\cdot\overline{a_5a_4} + 9^3\cdot\overline{a_7a_6} + \cdots \equiv 0 \pmod{13})$$

Пример 3: Докажете дека 13 | 850694 .

Прв начин. Според првиот критериум, доволно е да се провери дали важи $13 \mid [a_0 - a_3 + 10(a_1 - a_4) + 9(a_2 - a_5)]$.

Имаме дека $a_0 = 4$, $a_1 = 9$, $a_2=6$, $a_3=0$, $a_4=5$, $a_5=8$, од каде се добива дека
$a_0 - a_3 + 10(a_1 - a_4) + 9(a_2 - a_5) = 4 - 0 + 10(9 - 5) + 9(6 - 8) = 4 + 10 - 18 = 26 = 13\cdot 2$ од каде следува точноста на тврдењето.

Втор начин. $13 \mid 850694 \Leftrightarrow 13 \mid (\overline{a_1a_0} + 9\cdot\overline{a_3a_2} + 9^2\cdot\overline{a_5a_4} + 9^3\cdot\overline{a_7a_6} + \cdots) \Leftrightarrow 13 \mid (94 + 9\cdot 6 + 9^2\cdot 85) \Leftrightarrow 13|7033 \Leftrightarrow 13 \mid 13\cdot 541$ од каде следува точноста на тврдењето.

Секој од претходните критериуми може да се употреби неколку пати едноподруго при што се добиваат сѐ помали броеви за кои треба да се провери деливоста. Така, во последната задача може да се провери дали 7033 е делив со 13 така што ќе провериме дали бројот $33 + 9 \cdot 70 = 663$ е делив со 13. Постапката може да продолжи и понатаму така што се проверува дали $63 + 9 \cdot 6 = 117$ е делив со 13, или дали 17+$9 \cdot 1 = 26$ е делив со 13.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

Задача 1. Проверете дали бројот 1263379223538432 е делив со 7, 11, 13, со употреба на секој од критериумите за деливост кои ги обработивме.

КОРИСТЕНА ЛИТЕРАТУРА:

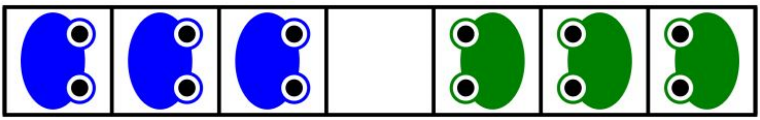
[1] Н. Целакоски, Ж. Мадевски, *Математика за I година на природноматематичка струка*, Скопје: 1990.

[2] Р. Малчески, Д. Димовски, Костадин Тренчевски, *Вовед во теорија на броеви*, Скопје: 1993.

[3] D. S. Mitrinovic, *Prirucnik za takmicenja srednjoskolaca u matematici*, D. C. B. Marsh, Beograd: 1968.

МАТЕМАТИЧКА ЗАГАТКА 2

Шест жаби се сместени како на сликата, три сини жаби од левата страна и три зелени жаби од десната страна. Секоја жаба е на посебен лотосов цвет и меѓу нив има еден лотосов цвет. Секоја жаба може да скокне на слободен лотосов цвет до неа или на слободен лотосов цвет преку една жаба. Како треба да скокаат жабите за да си ги заменат местата, сините жаби да отидат на десната страна, а зелените на левата?



Извор:

[1] Jumpig Frog Puzzle, https://primefactorisation.com/frogpuzzle/

Делчо Лешковски
Меѓународен балкански универзитет, Скопје

ОСНОВНИ ПРИНЦИПИ НА ПРЕБРОЈУВАЊЕ

Ова *Олимписко катче* го посветуваме на основните принципи на пребројување и нивна примена при решавањето на комбинаторни задачи кои се дел од натпреварите по математика.

Два основни принципи на пребројување

(***Принцип на збир***) Дадени се m различни множества, такви што пресекот на секои две од нив е празно множество (множествата се попарно дисјунктни). Ако во првото множество има n_1 елементи, во второто множество има n_2 елементи, ..., и во m -тото множество има n_m елементи, тогаш бројот на начини да се избере елемент од едно од m -те множества е $n_1+n_2+...+n_m$.

(***Принцип на производ***) Да претпоставиме дека при една постапка што се состои од m чекори, во првиот чекор имаме n_1 можности да избереме еден елемент, во вториот чекор имаме n_2 можности,..., и во m -от чекор имаме n_m можности. Ако при овие m чекори, на крајот секогаш се добива различен избор од m елементи, тогаш со оваа постапка целиот избор можеме да го направиме на вкупно $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_m$ различни начини.

Пример 1. Во еден ресторан се сервираат 6 видови супа, 9 видови главно јадење и 4 видови десерт. Колку различни менија, што содржат супа, главно јадење и десерт, можеме да составиме?

Решение. За првата чинија имаме 6 можности, за втората 9, а за третата 4. Вкупниот број на менија е $6 \cdot 9 \cdot 4 = 216$.

Пример 2. Во една азбука има n букви. Колку различни зборови од k букви можеме да составиме? (Под збор ќе подразбираме произволна конечна низа од букви која не секогаш има смисла)

Решение. За секоја од позициите има по n можности, така што бараниот број е n^k.

Бројот на различни начини на кој n елементи можат да се распоредат на k позиции (со можни повторувања) е n^k.

Пример 3. Колку различни зборови можеме да формираме со прередување на буквите од зборот СИДРО?

Решение. За првата позиција имаме 5 можности, за втората 4, па 3 и.т.н. Бараниот број е $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Производот на природните броеви од 1 до n се бележи со $n!$ (се чита n факториел). На пример, во горната задача добивме $5! = 120$. Јасно е дека $n! = n \cdot (n-1)!$. За да последното биде точно и при $n = 1$ (а и од други причини), земаме дека $0! = 1$.

Пример 4. Одреди го бројот на непарни четирицифрени броеви со различни цифри.

Решение. Да забележиме дека цифрата на почетокот е различна од 0. Бидејќи бројот е непарен, цифрата на единиците може да биде 1, 3, 5, 7 или 9. Оттука, имаме 5 можности за цифрата на единиците. Бидејќи бројот е со различни цифри, на местото на илјадите може да стои секоја цифра, освен нулата и таа што сме ја избрале на местото на единиците, значи вкупно 8 можности. На местото на стотките може да стои која било цифра освен оние што претходно сме ги одбрале за местата за единици и илјади, повторно 8 можности. На крајот, на местото на десетките може да стои која било цифра, освен претходно избраните три цифри, значи вкупно 7 можности. Од принципот на производ следува дека бројот на непарни четирицифрени броеви со различни цифри е $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 2240.$

Следно, ќе наведеме уште три принципи, *принципот на исклучување, принципот на вклучување и обопштениот принцип на вклучување.* Тврдењата ќе бидат дадени без докази, но со одредени насоки кои би му помогнале на заинтересираниот читател сам да ги докаже.

Принципот на исклучување следува директно од принципот на збир.

(***Принцип на исклучување)*** Ако $A \subseteq M$ тогаш $|M \setminus A| = |M| - |A|$, каде што $|A|$ го означува бројот на елементите на множеството A, додека $M \setminus A = \{x | \, x \in M \wedge x \notin A\}$.

Од принципите на збир и исклучување се добива и следниот принцип.

(***Принцип на вклучување)*** За произволни множества A и B важи:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

(***Обопштен принцип на вклучување)*** За произволни множества $A_1, A_2, ..., A_n$ важи:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| =$$

$$= \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| + ... + (-1)^n \sum |A_i \cap .. \cap A_k|.$$

Забелешка. Доказот на ова тврдење се изведува со помош на принципот на математичка индукција.

Пример 5. Во едно одделение има 30 ученици. Од нив, десет ученици имаат оценка пет по математика, 20 ученици имаат оценка пет по историја, додека 27 ученици имаат барем една оценка пет по предметите математика и историја. Колку ученици имаат оценка пет по двата предмети математика и историја.

Решение. Нека *A* е множеството ученици што имаат оценка пет по математика и нека *B* е множеството ученици што имаат пет по историја. Од условите на задачата, $|A| = 10, |B| = 20$ и $|A \cup B| = 27$, а се бара $|A \cap B|$. Од принципот на вклучување следува дека $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 10 + 20 - 27 = 3.$

Значи, 3 ученици имале оценка пет и по математика и по историја.

Пример 6. Во едно училиште на испит по математика биле дадени три задачи, од алгебра, геометрија и тригонометрија. Испитот го полагале 1000 ученици. Задачата по алгебра ја решиле 800 ученици, по геометрија 700 ученици, а по тригонометрија 600 ученици. Двете задачи по алгебра и геометрија ги решиле 600 ученици, по алгебра и тригонометрија ги решиле 500 ученици, а по геометрија и тригонометрија ги решиле 400 ученици. Сите задачи биле решени од 300 ученици. Колку ученици не решиле ниту една задача?

Решение. Нека *A*, *G* и *T* се множествата од ученици што ја решиле соодветно задачата од алгебра, геометрија, тригонометрија, а нека *M* е множеството од сите ученици што биле на испитот. Тогаш, $|A|=800, |G|=700, |T|=600, |M|=1000,$

$|A\cap G|=600, |A\cap T|=500, |G\cap T|=400, |A\cap G\cap T|=300,$ а

се бара $|M\setminus(A\cup G\cup T)|$.

Од принципот на исклучување и обопштениот принцип на вклучување добиваме дека

$$\begin{aligned}|M\setminus(A\cup G\cup T)|&=|M|-|A\cup G\cup T|\\&=|M|-\left(|A|+|G|+|T|-|A\cap G|-|A\cap T|-|G\cap T|+|A\cap G\cap T|\right)\\&=1000-(800+700+600-600-500-400+300)=100.\end{aligned}$$

Значи, 100 ученици не решиле ниту една задача.

Пермутации, варијации и комбинации

Пермутација претставува произволен распоред на *n* елементи. Бројот на пермутации на *n* различни елементи е $n!$.

Пример 7. На колку различни начини може да се фатат *n* луѓе на оро?

Решение. Вкупниот број начини е $(n-1)!$ бидејќи пред застанувањето на првиот во орото, нема ориентир за позициите.

Варијација без повторување на n елементи од класа k се нарекува секое подредување на *n* елементи на *k* позиции, без повторување. Вкупниот број на сите такви подредувања изнесува

$$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пример 8. Одреди го бројот на сите зборови составени од четири различни букви, од азбука со 31 буква.

Одговор. За првата позиција имаме 31 можност, за втората 30, за третата 29 и за последната 28.

Бараниот број е $31\cdot 30\cdot 29\cdot 28=\dfrac{31!}{27!}=755160.$

Пример 9. Колку различни зборови можеме да формираме од буквите на зборот ПИПЕР?

Решение. Ако ја замениме едната буква П со К, за првата позиција имаме 5 можности, за втората 4, па 3, и.т.н; бараниот број е $5!=120$. Но сега, размената на П и К води до еден ист збор (На пример, ПИКЕР и КИПЕР соодветствуваат на еден ист збор-ПИПЕР). Така што, реалниот број на прераспределувања на буквите во ПИПЕР е два пати помал, т.е. 120:2=60.

Пример 10. Колку различни зборови можеме да формираме од буквите на зборот САЛАТА?

Решение. Ако трите букви А беа соодветно О, Е и И (т.е. имавме СОЛЕТИ), бројот на зборови ќе беше $6!=720$. Но сега, во секој збор размената на трите самогласки води до еден ист збор (Трите самогласки можат да се разместат на $3!=6$ начини). Така, вистинскиот број на прераспределувања на буквите во САЛАТА е

$6!:3!=6\cdot 5\cdot 4=120.$

Пример 11. Одреди го бројот на петцифрени броеви со различни цифри, формирани од цифрите 1, 2, 3, 4 и 5, поголеми од 21300.

Решение. Бројот на сите петцифрени броеви формирани од цифрите 1, 2, 3, 4 и 5 е $5!=120$. Бројот на петцифрени броеви составени од истите цифри, а помали или еднакви на 21300, е $4!=24$ (оние што почнуваат со цифрата 1). Оттука, бројот на петцифрени броеви што ги задоволуваат условите на задачата е $5!-4!=120-24=96.$

Пример 12. На колку начини, од група од осум деца, можат да се изберат три деца?

Решение. Да ги нумерираме осумте деца. Да составиме азбука од осум букви, составена од три букви ,,Д” и пет букви ,,Н”

(За 3 ,,Да” и 5 ,,Не”), која ќе ни го кодира изборот. На пример, ако сме го избрале првото, четвртото и седмото дете, кодираниот збор е ,,ДННДННДН”. Според претходните примери (Пример 9 и 10), бројот на овие зборови, а со тоа и можните избори, е $\frac{8!}{3!5!}=56.$

Комбинација без повторување на n елементи од класа k се нарекува секој избор на *k* елементи (редоследот на избирање не е битен) од дадени *n* елементи, $0 \le k \le n$. Бројот на овие комбинации се бележи со $\binom{n}{k}$ и изнесува $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Јасно, $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ и $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n.$

Пример 13. Докажи дека важи $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$.

Решение.

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

$$=\frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}=\binom{n+1}{k+1}.$$

Пример 14. Докажи дека $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n}=2^n$.

Решение. Да прашаме секое од *n* деца дали сака јаболко. Секое дете одговара со ,,да” или ,,не”. За секое од децата има по две можности, така што имаме 2^n можни резултати, т.е 2^n зборови со *n* букви составени од Д и/или Н. Бројот на зборовите во кои има точно *k* букви Д е $\binom{n}{k}$. Тука *k* прима вредности од 0 до *n*, од каде следува левата страна на равенството.

Забелешка. Збирот $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n}$ може да се запише скратено $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

Пример 15. Од 8 жени и 5 мажи се избира делегација. На колку начини може да се избере делегација:

(а) од 5 луѓе од кои 2 се жени и 3 се мажи?

(б) од 5 луѓе од кои барем 2 се жени?

(в) од 5 луѓе од кои 1 е однапред определена жена?

Решение. (а) Две жени може да се изберат на $\binom{8}{2}$ начини, а тројца мажи на $\binom{5}{3}$ начини. Значи, бараниот број е $28\cdot 10=280.$

(б) Во делегацијата може да има 2, 3, 4 или 5 жени. Според тоа, бараниот број е

$$\binom{8}{2}\cdot\binom{5}{3}+\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{2}+\binom{8}{4}\cdot\binom{5}{1}+\binom{8}{5}\cdot\binom{5}{0}=1246.$$

(в) Ако еден член во делегацијата е однапред определена жена, тогаш преостанатите четири члена можат да се изберат од $8+5-1=12$ луѓе. Значи, бараниот број е $\binom{12}{4}=495$.

Пример 16. На колку различни начини можеме да купиме *k* колачиња од слаткарница во која се продаваат *n* вида колачиња во неограничени количини?

Решение. Да ја кодираме покупката со збор, составен од *k* букви ,,К” (колаче) и $n-1$ буква ,,С” (салфетка). Добивајќи ја оваа наредба (порачка), продавачката ја чита од лево на десно, така што буквата ,,К” значи ,,Дај ми колаче од тој вид”, а ,,С” значи ,,Подготви се да ми дадеш колаче од следниот вид”. Потребно е да ги одредиме позициите за *k* букви ,,К” во збор од $n+k-1$ букви, а тоа може да се направи на $\binom{n+k-1}{k}$ начини.

Комбинација со повторување на n елементи од класа k се нарекува секој избор на *k* објекти (редоследот на бирањето не е важен) од понудени *n* типови на објекти (секој во неограничена количина). Бројот на овие комбинации е еднаков на $\binom{n+k-1}{k}$.

Пример 17. Во една цвеќарница се продаваат 8 вида цвеќе. На колку различни начини може да се направи букет од 15 цветови?

Решение. Во букетот ќе се повторуваат некои видови цветови, а некои видови може и воопшто да ги нема. Станува збор за комбинации со повторување на 8 елементи од класа 15 и нивниот број изнесува $\binom{8+15-1}{15} = \binom{22}{15}$.

Задачи за самостојна работа

1. Во едно училиште, од 100 ученици, 24 не учат ниту еден од јазиците англиски, француски и германски. Понатаму, 48 учат англиски, 8 и англиски и француски, 26 учат германски, 8 учат и германски и англиски, 13 учат и германски и француски, а 28 учат француски. Колку ученици ги учат сите три јазици?
2. Колку различни зборови можеме да формираме со прераспоредување на буквите од зборот МАТЕМАТИКА?

3. Докажи дека $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

4. За извршување на некоја работа се јавиле 15 кандидати, од кои 6 биле жени. Треба да бидат избрани 8 од пријавените кандидати. На колку начини може да се изврши изборот, ако во избраните кандидати треба да има барем 3 жени?
5. За еден збор во македонската азбука велиме дека е *добар*, ако секоја буква во него се јавува најмногу еднаш и буквите ,,**а**” и ,,**б**” не се наоѓаат една до друга. Одреди го бројот на сите добри зборови од седум букви.

Извори:

[1] Ивайло Кортезов, Светлозар Дойчев, Състезателни задачи по математика за 7. - 8. клас, 2010.
[2] Дончо Димовски, Костадин Тренчевски, Ристо Малчески, Борис Јосифовски, Практикум по елементарна математика, 1992.
[3] Yao Zhang, Combinatorial Problems in Mathematical Competitions, 2011
[4] https://www.mf.ukim.edu.mk/sites/default/files/files/Kombinatorika.pdf

Петар Филиповски
ООУ „Кузман Јосифовски-Питу“, Скопје

26 ЈУНИОРСКА МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

1. Одреди ги сите позитивни цели броеви a, b и c за кои е исполнето равенството $a^2+b^2+1=c!$.

Решение. Доколку $c\geq 4$, тогаш $4\,|\,c!$. Да забележиме дека за секој цел број x важи $x^2\equiv 0,1(\mathrm{mod}\,4)$. Затоа имаме дека $a^2+b^2+1\equiv 1,2,3(\mathrm{mod}\,4)$. Меѓутоа, $4\,|\,c!$ повлекува $4\,|\,a^2+b^2+1$, што е контрадикција. Заклучуваме дека $1\leq c\leq 3$. Со директна проверка за $c=1,2,3$ добиваме дека единствените решенија во позитивни цели броеви се $(a,b,c)=(1,2,3)$ и $(a,b,c)=(2,1,3)$.

2. Нека a, b и c се позитивни реални броеви за кои важи $a+b+c=3$. Докажи дека

$$\frac{a^3}{a^2+1}+\frac{b^3}{b^2+1}+\frac{c^3}{c^2+1}\geq\frac{3}{2}.$$

Решение. Нека левата страна од неравенството кое треба да го покажеме ја означиме со A, односно

$$A=\frac{a^3}{a^2+1}+\frac{b^3}{b^2+1}+\frac{c^3}{c^2+1}.$$

Да забележиме дека

$$3-A=a+b+c-A=(a-\frac{a^3}{a^2+1})+(b-\frac{b^3}{b^2+1})+(c-\frac{c^3}{c^2+1})$$
$$=\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}.$$

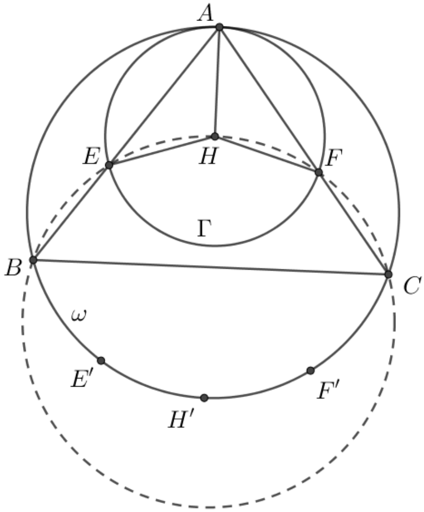
Сега, од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме дека $a^2+1\geq 2a$, $b^2+1\geq 2b$ и $c^2+1\geq 2c$ па

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\leq\frac{a}{2a}+\frac{b}{2b}+\frac{c}{2c}=\frac{3}{2}.$$

Оттука, $3-A\leq\frac{3}{2}$, што е еквивалентно со $A\geq\frac{3}{2}$, што и требаше да се докаже.

3. Нека $\triangle ABC$ е остроаголен триаголник со ортоцентар H. Кружницата Γ цо центар во H и радиус AH ги сече правите AB

и AC во точките E и F, соодветно. Нека E', F' и H' се слики на точките E, F и H, соодветно, при осна симетрија во однос на правата BC. Докажи дека точките A, E', F' и H' лежат на иста кружница.



Решение. Сакаме да докажеме дека точките E', F' и H' лежат на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, што ќе ја означиме со ω.

Да го увидиме следново: $AH = EH = FH$, $CH \perp AB$ и $BH \perp AC$. Следува BH и CH се симетрали на отсечките AF и AE, соодветно. Оттука, добиваме $AB = FB$ и $AC = EC$. Сега имаме:

$$\angle CBH = \angle CAH = \angle EAC - \angle EAH$$

$$= \angle AEC - \angle AEH = \angle CEH,$$

од каде следува дека четириаголникот $BEHC$ е тетивен. Аналогно, и $BFHC$ е тетивен. Како слика на E при осна симетрија во однос на BC, за E' важи

$$\angle BE'C = \angle BEC = \angle BHC = 180^\circ - \angle BAC,$$

па следува E' лежи на ω. Аналогно се докажува дека и F' лежи на ω. Конечно, имаме дека $\angle BH'C = \angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$, што значи и H' лежи на ω. Оттука имаме дека E', F' и H' сите се на ω, што значи дека $AE'H'F'$ е тетивен.

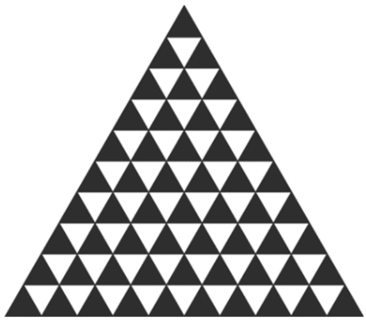
4. Рамностран триаголник T, со страна 2022, е поделен со прави паралелни на неговите страни на рамнострани триаголничиња со страна еден. Триаголникот се покрива со фигурите на цртежот, при што фигурите се составени од по 4 рамнострани триаголничиња со страна еден и при покривањето може да се ротираат за агол $k \cdot 60^\circ$ за $k \in \{1,2,3,4,5\}$.

Покривањето ги задоволува следните услови:

- Може да нема фигура од некој тип и може да има повеќе фигури од ист тип. Триаголничињата на фигурите се поклопуваат со триаголничињата на кои е поделен триаголникот T .
- Секое триаголниче од T е покриено, никои две фигури не се преклопуваат и никоја фигура не излегува надвор од T .

Кој е најмалиот можен број на фигури од тип 1 кои се искористени при вакво покривање?

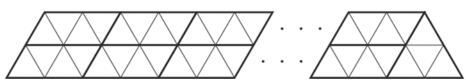
Решение. На триаголникот ги боиме малите триаголничиња наизменично со црна и бела боја, при што триаголничињата кои содржат теме од T се црни (како што е прикажано на цртежот за триаголник со страна 10).



Да забележиме дека фигурите од тип 2, 3 и 4 ќе покриваат по две бели и две црни полиња, а фигурите од тип 1 покриваат 3 полиња од една боја и едно од другата. Ова може да се види од следниот цртеж, при што штрафираните полиња се во една боја, а останатите во другата боја.

Од друга страна во секој „ред“ во T има едно повеќе црно триаголниче, отколку бели (наизменично се менуваат боите, а се почнува и завршува со црно). Според ова во T има 2022 црни полиња повеќе од бели, па мора да се употреби најмалку $\frac{2022}{2}=1011$ фигура од тип 1.

На следниот цртеж е прикажано покривање на два „реда“ со една фигура од тип 1 и фигури од тип 2, со што докажуваме постоење на покривање со точно $\frac{2022}{2}=1011$ фигури од тип 1 и фигури од тип 2.



5. Нека n е позитивен цел број таков што $n^5+n^3+2n^2+2n+2$ е полн куб. Докажи дека $2n^2+n+2$ не може да биде полн куб.

Решение. Да претпоставиме спротивно. Нека $n^5+n^3+2n^2+2n+2$ и $2n^2+n+2$ се полни кубови, односно, постојат цели броеви x и y такви што

$$n^5+n^3+2n^2+2n+2=x^3,$$
$$2n^2+n+2=y^3.$$

Тогаш имаме

$$x^3-y^3=n^5+n^3+n=n(n^2+n+1)(n^2-n+1),$$

што може да се презапише како

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=n(n^2+n+1)(n^2-n+1).$$

Да забележиме дека десната страна од последното равенство е делива со 3. Тоа повлекува дека $3\,|\,x-y$ или $3\,|\,x^2+xy+y^2$. Бидејќи $x^2+xy+y^2=(x-y)^2+3xy$, следува дека $3\,|\,x^2+xy+y^2$ ако и само ако $3\,|\,x-y$, па заклучуваме дека секако $3\,|\,x-y$.

Од претходната дискусија имаме дека и $3\,|\,x^2+xy+y^2$, од каде заклучуваме дека $9\,|\,x^3-y^3$, па затоа и $9\,|\,n(n^2+n+1)(n^2-n+1)$. Сега да забележиме дека никои два од броевите n, n^2+n+1 и n^2-n+1 не може истовремено да бидат деливи со 3, со што ги добиваме следните случаи:

Случај 1°**:** Ако $9\,|\,n$, тогаш

$$x^3\equiv n^5+n^3+2n^2+2n+2\equiv 2\pmod 9,$$

што не е можно, бидејќи 2 не е кубен остаток по модул 9

Случај 2°**:** Ако $9\,|\,n^2+n+1$, тогаш

$$n(n+1)=n^2+n\equiv 8\pmod 9,$$

но, со директна проверка може да се утврди дека производ на два последователни цели броеви никогаш не дава остаток 8 по модул 9.

Случај 3°**:** Ако $9\,|\,n^2-n+1$, тогаш

$$n(n-1)=n^2-n\equiv 8\pmod 9,$$

што исто така не е возможно како во претходниот случај.

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

4 одделение

3941. Дедото сега има 62 години, неговата ќерка има 36 години, внукот има 8 години, а внуката има 6 години. По колку години дедото ќе има толку години колку што ќе имаат заедно неговата ќерка, внукот и внуката?

3942. Одреди ги сите природни броеви од втората стотка, кои се 13 пати поголеми од збирот на своите цифри.

3943. Анастас трча секој ден на патека. Во понеделник трча 2 km, а секој следен ден до петок трча по половина километар повеќе од претходниот ден. Во сабота и недела Анастас трча по 3,6 km. По колку километри неделно трча Анастас?

3944. На писмената работа 56 ученици добиле петки. Бројот на ученици кои добиле петки е 7 пати поголем од бројот на ученици кои добиле двојки. Учениците кои добиле единици биле за 6 помалку од учениците кои добиле двојки. Колку ученици добиле единици?

4 – 5 одделение

3945. Преполови го производот на збирот и разликата на броевите 47,654 и 35,837.

3946. Кој збир е поголем: збирот на сите непарни природни броеви помали од 1000 или збирот на сите парни природни броеви од 1 до 1000? Пресметај ги двата збира! Пресметај ја разликата на поголемиот и помалиот збир?

3947. Во рамнокрак триаголник ABC врвот C е поврзан со средината D на страната AB. Периметарот на триаголникот ABC е $36\ cm$, а периметарот на триаголникот ADC е $30\ cm$. Пресметај ја должината на отсечката CD.

3948. Ѕидовите на една дрвена коцка се обоени црвено. Потоа коцката е пресечена на 27 помали коцкички со иста големина. Колку од помалите коцкички имаат точно:

а. 0 црвени ѕидови; б. 1 црвен ѕид; в. 2 црвени ѕидови;

г. 3 црвени ѕидови; д. 4 или повеќе црвени ѕидови?

ѓ. Каква е врската меѓу броевите на мали коцкички со точно 1, точно 2 или точно 3 црвени ѕидови со бројот на ѕидови, бројот на рабови и бројот на темиња на големата коцка?

5 – 6 одделение

3949. Страните на еден осумаголник имаат должини на страни кои се последователни природни броеви. Одреди ги должините на страните ако периметарот на осумаголникот е 216 cm.

3950. Три автобуси во 7 часот тргнуваат од станица во три различни правци. Првиот автобус се враќа во станицата после 1 час и 5 минути и повторно тргнува после пауза од 10 минути. Вториот автобус се враќа после 56 минути и по 4 минути пауза повторно тргнува на пат. Третиот автобус се враќа после 48 минути и по 2 минути пауза повторно тргнува на пат. После колку време трите автобуси ќе се сретнат на станицата во исто време?

3951. Одреди го аголот кој го зафаќаат стрелките на часовникот во 13 часот и 20 минути!

3952. Распореди 10 точки на 5 прави, така што на секоја права да има по 4 точки. Решението дај го со цртеж.

6 – 7 одделение

3953. Која дропка е поголема $\frac{2022}{2023}$ или $\frac{202220222022}{202320232023}$?

3954. Аглите α и β се суплементни, а аглите $\frac{2}{5}\alpha$ и β се комплементни. Пресметај ја разликата на аглите α и β.

3955. Одреди ги цифрите a и b, така што бројот $\overline{78a9b}$ да биде делив со 18.

3956. Најди ги сите природни броеви a, за кои што дропката $\frac{a+89}{a-2}$ е природен број.

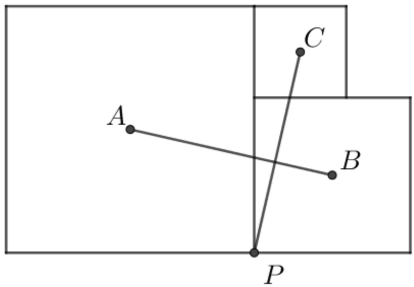
7 – 8 одделение

3957. Во низата од шест различни природни броеви, третиот и секој нареден е еднаков на збирот на двата претходни. Најди ги тие броеви ако петтиот број од низата е бројот 8.

3958. Збирот на 36 последователни природни броеви е еднаков на збирот на трите последователни парни броеви чиј среден број е 2022. Најди ги овие 36 последователни природни броеви.

3959. За рамнокракиот трапез $MNPQ$ со основи MN и PQ важи следново: $\overline{MN}=\overline{NP}=2\overline{PQ}$. Ако точката W е подножје на висината спуштена од темето M кон кракот NP, покажи дека важи $\overline{NW}:\overline{WP}=1:3$.

3960. На цртежот се дадени три квадрати со своите центри A, B и C. Точката P е заедничко теме на квадратите со центри A и B. Пресметај го односот $\frac{\overline{AB}}{\overline{PC}}$.



8 – 9 одделение

3961. Збирот на 2022 различни природни броеви е 2045255. Најди ги сите можни вредности на разликата меѓу најголемиот и најмалиот од броевите.

3962. Во внатрешноста на паралелограмот $ABCD$ е избрана точка T, и повлечени се отсечките AT, BT, CT и DT. Со тоа, паралелограмот е поделен на четири триаголници, при што три од нив имаат плоштини од $2cm^2$, $3cm^2$ и $4cm^2$ (во некој редослед). Најди ги сите можни вредности на плоштината на четвртиот триаголник.

3963. Марко и Никола замислиле по еден прост број. Ако бројот на Марко се намали за 2, тогаш тој е делив со бројот на Никола. Ако бројот на Марко намален за 45 се подели со бројот на Никола зголемен за 8 се добива количник 2 и остаток 0. Кои броеви ги замислиле Марко и Никола?

3964. Аглите на триаголникот ΔABC се однесуваат како $1:2:3$. Определи ја вредноста на изразот $\frac{L^2}{P}$, каде што L е периметарот, а P е плоштината на ΔABC.

9 одделение

3965. Ана замислила три трицифрени броеви a, b и c. Боби треба да каже три броеви x, y и z, по што Ана ја кажува вредноста на изразот $ax+by+cz$. Дали е можно Боби да избере броеви x, y и z така што да може точно да ги погоди броевите што ги замислила Ана? (Одговорот да се образложи!)

3966. Определи ја вредноста на изразот a^2+b^2, ако a и b се два последователни цели броја за кои важи равенството $8a^a b^b = 7b^a a^b$.

3967. Аце, Боби и Симе заедно работат на училишен проект. Ако Аце не помага, тогаш проектот ќе го завршат за 2 часа. Ако Боби не помага, тогаш проектот ќе го завршат за 3 часа. Ако Симе не помага, тогаш проектот ќе го завршат за 4 часа. Случајно дознале дека Даре ќе им помогне. Ако Даре работи сам на проектот, тогаш ќе му треба половина ден да го заврши проектот. Кое е најмалото потребно време за да го завршат проектот, ако работат сите четворица заедно?

3968. Нека $x+y+xy=1$, каде што x и y се реални броеви различни од нула. Пресметај ја вредноста на изразот

$$A = xy + \frac{1}{xy} - \frac{y}{x} - \frac{x}{y}.$$

МАТЕМАТИЧКА ЗАГАТКА 3

а) Со користење на некои од основните операции и загради, напиши броен израз чија вредност е 100 со помош на:

а.1) 4 деветки, а.2) 5 петки, а.3) 6 шестки.

б) Со користење на 6 двојки, некои од основните операции и загради, напиши броен израз чија вредност е:

б.1) 11, б.2) 22, б.3) 33, б.4) 44, б.5) 66, б.6) 88.

Извор:

[1] И. Стојковска, *Стратегии за решавање проблемски задачи*, Предавања за учениците од 5 одделение на ЕМШ2022, 2022.

Трајче Ѓорѓијевски

НАГРАДНИ ЗАДАЧИ

1. Нека $S = 1^{2023} + 2^{2023} + 3^{2023} + \cdots + 2022^{2023} + 2023^{2023}$. Докажи дека $2023|S$.

2. Нека страната на квадратот $ABCD$ е долга $10\ cm$ и нека $M,\ N$ се точки на страните $BC,\ CD$ избрани така што

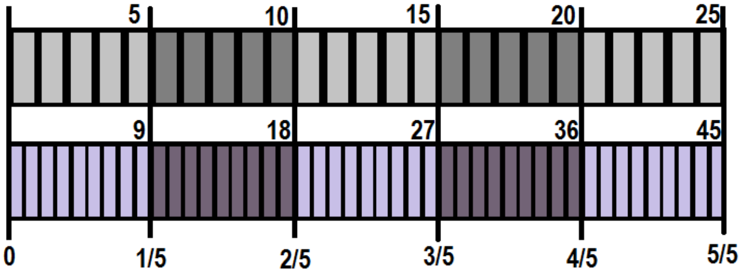
$$\measuredangle MAB = \measuredangle NAD = 15^0.$$

Пресметај ја $P_{\triangle AMN}$ на триаголникот AMN впишан во квадратот.

РЕШНИЈА НА КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ ОД НУМЕРУС XLVII-4
4 одделение

3913. На една полица може да се стават или 25 дебели книги или 45 тенки книги. Дали може на истата полица да се стават 20 дебели книги и 9 тенки книги? Образложи го одговорот!

Решение. Бидејќи со 25 дебели книги се пополнува цела полица, со 20 дебели книги се пополнети само 4/5 од целата полица. Останува 1/5 од полицата да се покрие со тенки книги.
Од друга страна, целата полица може да се пополни со 45 тенки книги, па 9 тенки книги пополнуваат точно 1/5 од целата полица.
На истата полица може да се стават 20 дебели и 9 тенки книги.



3914. Со помош на 4 тројки и со користење загради и некои од знаците за аритметичките операции $+, -, :, \cdot$, да се напишат бројни изрази така што ќе се добијат целите броеви од 0 до 5.

Решение. Еден начин за составување на бројните изрази е:

$$3 - 3 + 3 - 3 = 0$$
$$3 - 3 + 3 : 3 = 1$$
$$3 : 3 + 3 : 3 = 2$$
$$(3 + 3 + 3\ ): 3 = 3$$
$$(3 \cdot 3 + 3) : 3 = 4$$
$$3 + 3 - 3 : 3 = 5$$

3915. Автомобил поминал 80 km, кои се 10 пати повеќе од изминатите километри на еден пешак. Моторциклист поминал пет пати повеќе километри од пешакот. Колку километри поминал моторциклистот? Запиши броен израз!

Решение. Бројниот израз е $(80:10)\cdot 5=8\cdot 5=40.$

Пешакот поминал 8 km (10 пати помалку од автомобилот), а моторциклистот 40 km (5 пати повеќе од пешакот).

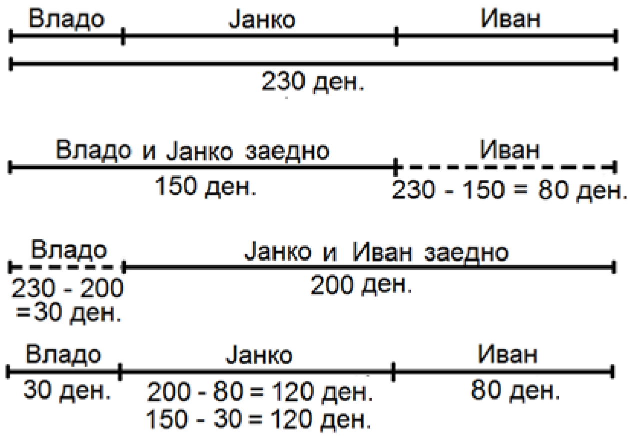
3916. Владо, Иван и Јанко ги потрошиле сите свои пари за да купат топка за 230 денари. Владо и Јанко заедно пред купувањето имале 150 денари, а Иван и Јанко 200 денари. Колку денари имал секој од нив пред купувањето?

Решение. *Прв начин (со равенки)*:

В + И + Ј = 230, В + Ј = 150, И + Ј = 200.

Заради првото и третото равенство Владо имал 230 – 200 = 30 денари. Заменувајќи во В + Ј = 150, добиваме дека Јанко имал 150 – 30 = 120 денари, а со замена во третото равенство добиваме дека Иван имал 200 – 120 = 80 денари.

Втор начин (*метод на отсечки*):

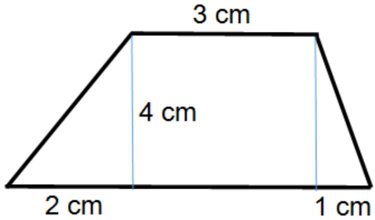


4 – 5 одделение

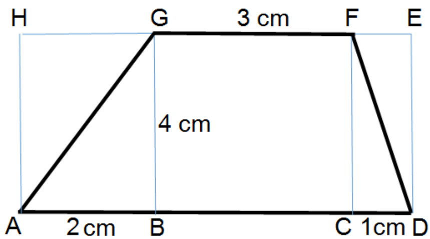
3917. На роденденот на дедо Митре, внуците го прашале колку години полни, и тој рекол дека полни 788400 часови. Колку години полни дедо Митре? (Сметајте дека годината има 365 дена.)

Решение. Од тоа што $788400 : 24 = 32850$, дедо Митре има 32850 денови, а од $32850 : 365 = 90$, дедо Митре полни 90 години.

3918. Маре сака да состави правоаголен картон со должини на страни коишто се цели броеви. Таа има картон со трапезна форма (како на цртежот). Дали Маре може целиот овој картон да го претвори во правоаголник со целобројни должини на страните, со сечење и лепење без преклопување?



Решение. Треба да ја пресметаме плоштината на картонот и да провериме дали таа плоштина е производ на два природни броеви кои би претставувале страни на правоаголникот. Ако е така, тогаш тие броеви се должините на страните на правоаголникот кој Маре сака да го формира од картонот.
Ќе ги означиме темињата како на цртежот.



Плоштината на целата трапезна форма ќе ја означиме со P, а плоштините на нејзините делови, триаголникот ABG, правоаголникот $BCFG$ и триаголникот CDF, ќе ги означиме со P_1, P_2, P_3 соодветно. Тогаш P_1 е половина од плоштината на правоаголникот $ABGH$, односно $P_1 = \frac{2 \cdot 4}{2} cm^2 = 4 \text{ cm}^2$. Потоа, $P_2 = 3 \cdot 4 = 12 \text{ cm}^2$, а плоштината P_3 изнесува половина од плоштината на правоаголникот $CDEF$, односно $P_3 = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2 \text{ cm}^2$. Сега имаме

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 12 + 4 + 2 = 18 \, cm^2,$$

што значи дека Маре има три различни можности да го состави посакуваниот правоаголен картон. Тој може да биде со страни 1 cm и 18 cm, со страни 2 cm и 9 cm или со страни 3 cm и 6 cm.

3919. Периметарот на еден триаголник изнесува 34 cm. Ако едната од страните се зголеми за 3 cm, другата за 2 cm, а третата се намали за 3 cm, се добива нов триаголник кој е рамностран. Да се најде должината на неговата страна.

Решение. *Прв начин:* Со a ќе ја означиме страната на новодобиениот (рамностран) триаголник. Тогаш, страните на почетниот триаголник се $a-3$, $a-2$ и $a+3$. Бидејќи периметарот на почетниот триаголник изнесува 34 cm, имаме:

$$(a-3)+(a-2)+(a+3)=34 \text{ cm}$$

$$3\cdot a=36 \text{ cm}$$

$$a=12 \text{ cm}.$$

Втор начин: Кога ќе се зголеми или намали должината на некоја од страните на триаголникот за некој број, периметарот на триаголникот се менува. Со зголемување на едната страна за 3 cm, со зголемување на втората страна за 2 cm, а намалување на третата страна за 3 cm, периметарот на триаголникот ќе биде 34 + 3 + 2 – 3 = 36 cm. Бидејќи на тој начин се добива рамностран триаголник, должината на неговата страна ќе биде 36 : 3 = 12 cm.

3920. Колку има трицифрени броеви чијшто производ на цифрите е еднаков на 4?

Решение. Бидејќи бројот 4 е делив само со броевите 1, 2 и 4, имаме шест трицифрени броеви чиј производ на цифрите е еднаков на 4 и тоа се: 411, 141, 114, 221, 212, 122.

5 – 6 одделение

3921. Еден правоаголник има плоштина $216\ cm^2$ и неговите страни се природни броеви кои се деливи со 3. Одреди ги сите такви правоаголници коишто имаат различни периметри!

Решение. Плоштината на правоаголник е еднаква на производот на должините на неговите страни. Оттука, доволно е да ги најдеме паровите броеви чиј производ е бројот 216. Тие се: 1 и 216, 2 и 108, 3 и 72, 4 и 54, 6 и 36, 8 и 27, 9 и 24, 12 и 18.

Има точно 4 правоаголници чија плоштина е 216 cm^2 и чиишто должини на страни се природни броеви деливи со 3 и тоа се: правоаголникот со страни 3 cm и 72 cm, правоаголникот со страни 6 cm и 36 cm, правоаголникот со страни 9 cm и 24 cm, правоаголникот со страни 12 cm и 18 cm.

3922. За првенство во фудбал во едно училиште формирани се 10 екипи. Колку натпревари ќе се одиграат во текот на првенството ако секоја екипа со секоја друга екипа одигра четири натпревари?

Решение. Првата од десетте екипи со останатите 9 ќе одигра $4 \cdot 9 = 36$ натпревари. Втората со останатите 8 екипи ќе одигра $4 \cdot 8 = 32$ натпревари (четирите натпревари кои ќе ги одигра со првата екипа не ги броиме бидејќи се веќе избројани). Третата со останатите 7 ќе одигра $4 \cdot 7 = 28$ (четирите натпревари кои ќе ги одигра со првата и четирите со втората екипа се веќе пребројани), итн. Така добиваме дека вкупно ќе се одиграат:

$$4{\cdot}9 + 4{\cdot}8 + 4{\cdot}7 + 4{\cdot}6 + 4{\cdot}5 + 4{\cdot}4 + 4{\cdot}3 + 4{\cdot}2 + 4{\cdot}1 =$$
$$4 \cdot (9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 4 \cdot 45 = 180 \text{ натпревари.}$$

3923. Во една фабрика, три десетини од сите дрвени играчки се обоени во сина боја. Една четвртина од сите дрвени играчки се обоени во зелена боја. Една третина од преостанатите дрвени играчки се во жолта боја. Колку играчки има во зелена и жолта боја, ако има 9738 сини играчки?

Решение. Бидејќи $\frac{3}{10}$ од вкупниот број се 9738, вкупно играчки се $\frac{9738 \cdot 10}{3} = 32460$. Потоа, $\frac{1}{4}$ *од* 32460 играчки се зелени, а тоа се 8115 играчки. Остануваат 32460 – (9738 + 8115) = 14607. Жолти играчки се $\frac{1}{3}$ од 14607 играчки, што значи 4869 играчки се жолти.

3924. Средната возраст на единаесетте фудбалери од некој тим била 26 години. За време на натпреварот еден фудбалер се повредил и ја напуштил играта. Средната возраст на десетте фудбалери кои останале на теренот пред влегувањето на замената била 25 години. Колку години има фудбалерот што ја напуштил играта?

Решение. Нека аритметичката средина на годините на единаесетте фудбалери е 26 години. Значи збирот на годините на единаесетте фудбалери е $S_{11} = 11 \cdot 26 = 286.$ Збирот на годините на останатите 10 фудбалери е

$$S_{10} = 25 \cdot 10 = 250.$$

Фудбалерот кој ја напуштил играта има $S_{11} - S_{10} = 286 - 250 = 36$ години.

6 – 7 одделение

3925. Колку 2022-цифрени броеви постојат на кој збирот на цифрите е 2?

Решение. Збирот на цифрите на броевите е 2 ако цифрите се:
а) 2 и 2021 нула; б) 1, 1 и 2020 нули.
а) Само еден број го задоволува условот и тоа е бројот 200...00.
б) Цифрата 1 мора да биде на првото место во бројот, а другата 1 може да биде на било кое 2021 место, па во овој случај има 2021 број кај коишто збирот на цифрите е 2.

Значи постојат вкупно 1+ 2021 = 2022 броја чијшто збир на цифри е 2, а тие се 2022-цифрени броеви.

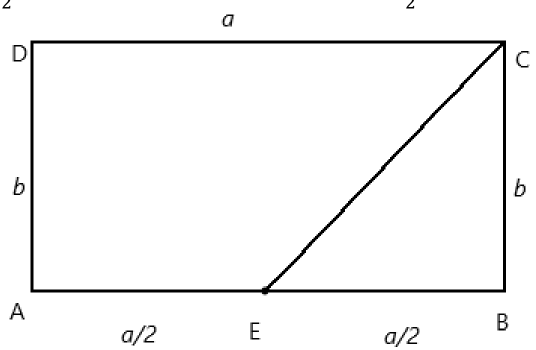
3926. Ако помалиот остар агол се намали за 5 %, за колку проценти ќе се зголеми поголемиот остар агол во правоаголен триаголник во којшто соодносот на острите агли е 4 : 5?

Решение. Збирот на острите агли во правоаголен триаголник е 90°, $\alpha + \beta = 90°$. Од условот на задачата $\alpha : \beta = 4 : 5$ следи $4k + 5k = 90°$, т.е. $k = 10°$. Се добива дека $\alpha = 40°$ и $\beta = 50°$. Помалиот агол α се намалува за 5%, што изнесува $0,05 \cdot 40 = 2°$. Се добива дека $\alpha_1 = 40 - 2 = 38°$. Тогаш аголот β_1 се зголемува за 2°, што претставува зголемување за $\frac{2}{50} \cdot 100\% = 4\%$. Поголемиот агол е зголемен за 4%.

3927. Периметарот на правоаголникот ABCD е 66 cm. Точката E ја преполовува страната AB. Периметарот на триаголникот EBC е 36 cm, а периметарот на четириаголникот ECDA е 60 cm. Колку е плоштината на триаголникот EBC?

Решение. Периметарот на правоаголникот е $2a + 2b = 66$. Оттука $a + b = 33$. Нека c е должината на отсечката EC. Тогаш:

$$\frac{1}{2}a + b + c = 36, \text{ односно } a + b + \frac{1}{2}a + c = 60.$$



Може да запишеме:

$$60 = a + b + \frac{1}{2}a + c = a + \left(\frac{1}{2}a + b + c\right) = a + 36.$$

Се добива дека $a = 60 - 36 = 24\ cm,$ па $b = 33 - 24 = 9\ cm$. Плоштината на правоаголниот триаголник EBC е

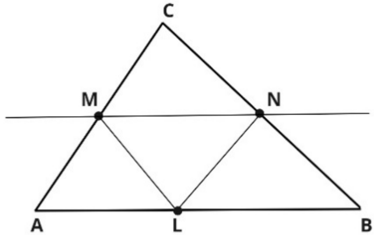
$$P = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54\ cm^2.$$

3928. Весна и Јана саделе овошки. Од засадените овошки $\frac{2}{3}$ биле вишни, $\frac{1}{8}$ биле круши, а останатите јаболка. Колку најмногу јаболка засадиле Весна и Јана, ако засадиле помалку од 360 овошки?

Решение. Од вкупно засадените овошки $\frac{16}{24}$ биле вишни, $\frac{3}{24}$ биле круши, од каде следи дека $\frac{5}{24}$ од вкупно засадените овошки се јаболка. Нека со x е вкупниот број на засадени овошки. Тогаш, $\frac{5}{24}x$ треба да е најголемиот цел број за $x < 360$. Бидејќи 5 и 24 се заемно прости броеви (нивниот најголем заеднички делител е 1), тогаш x треба да е најголемиот број помал од 360 и делив со 24, т.е. $x = 336$. Бројот на засадени јаболка е $\frac{5}{24}x = \frac{5}{24} \cdot 336 = 70$.

7 – 8 одделение

3929. Во остроаголниот триаголник ABC точките M и N се соодветно средини на страните AC и BC. Ако правите кои ги преполовуваат аглите, т.е. симетралите на аглите $\measuredangle AMN$ и $\measuredangle BNM$ се сечат во точка која лежи на страната AB, покажи дека важи равенството $\overline{AB} = \frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{2}$.



Решение. Нека L е точката од страната AB во која се сечат симетралите на аглите $\measuredangle AMN$ и $\measuredangle BNM$, како што е дадено на сликата десно.

Од M средина на AC и N средина на BC следува дека MN е средна линија на триаголникот ABC, која што е паралелена на страната AB. Ова повлекува дека $\measuredangle LMN = \measuredangle ALM$ (како наизменични агли на трансверзала на паралелни прави), па од условот на задачата следува $\measuredangle AML = \measuredangle ALM$ тогаш $\triangle AML$ е рамнокрак со краци $\overline{AM} = \overline{AL} = \frac{\overline{AC}}{2}$. На ист начин се покажува дека $\measuredangle BLN = \measuredangle MNL$ (како наизменични агли на трансверзала на паралелни прави) па од условот $\measuredangle LNB = \measuredangle BLN$ следи дека $\triangle BNL$ е рамнокрак за кој важи $\overline{BN} = \overline{BL} = \frac{\overline{BC}}{2}$. Тогаш важи $\overline{AB} = \overline{AL} + \overline{BL} = \frac{\overline{AC}}{2} + \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{2}$.

3930. За писмена работа по математика зададени се три задачи. Секој ученик решил барем една задача, а никој не ја решил третата задача.Првата задача ја решиле 27 ученици, втората задача ја решиле 29 ученици, а 20 ученици ги решиле првата и втората задача.Колку ученици ја работеле писмената работа по математика?

Решение. Бројот на ученици кои ја решиле само првата задача е $27 - 20 = 7$, а бројот на ученици кои ја решиле само втората е $29 - 20 = 9$. Писмената ја работеле $7 + 9 + 20 = 36$ ученици.

3931. Две прави се сечат во точка О и образуваат четири агли: два остри и два тапи агли. Едниот остар агол е $\frac{1}{11}$ од тапиот агол. Одреди ја големината на секој од четирите агли.

Решение. Во пресечната точка О два по два агли се накрсни и еднакви агли. Еден остар и еден тап агол се соседни агли, па тие се суплементни. Нека остриот агол го означиме со α. Тогаш тој е $\frac{1}{11}$ од тапиот агол, т.е тапиот агол е 11 пати поголем од остриот агол α. Значи, $11\alpha + \alpha = 180^0$ т.е. $\alpha = 15^0$. Тапиот агол ќе има големина од $11 \cdot 15 = 165^0$.
Четирите агли формирани со пресекот на две прави во точката О се со големини $15^0, 15^0, 165^0, 165^0$.

3932. Мајсторот изработува еден производ за 5 минути, а чиракот истиот производ го изработува за 9 минути. Работејќи исто време тие изработиле заедно 84 производи. Колку од производите изработил мајсторот, а колку чиракот?

Решение. Нека мајсторот изработил x производи. За тоа време чиракот ќе изработи $84-x$ производи. Според условот на задачата имаме

$$5\cdot x=9\cdot(84-x)$$
$$5x=756-9x$$
$$5x+9x=756$$
$$14x=756$$
$$x=54.$$

Значи мајсторот изработил 54 производи, а чиракот изработил $84-54=30$ производи.

8 – 9 одделение

3933. Докажи дека $7^{10000}-1$ е делив со 10.

Решение. $7^1=7$, $7^2=49$, $7^3=343$, $7^4=2401$.
Бидејќи $10000=4\cdot 2500$, следува:

$$7^{10000}-1=\left(7^4\right)^{2500}-1=2401^{2500}-1$$

Производот на два броја чија последна цифра е 1 е број чија последна цифра е исто така 1.

2401^{2500} е производот $2401\cdot 2401\cdot 2401\cdot ...\cdot 2401$, каде 2401 се појавува како множител 2500 пати. Затоа, можеме да заклучиме дека последната цифра на овој производ е 1. Од ова следува дека $(2401)^{2500}-1$ има последна цифра 0, што значи дека $7^{10000}-1$ е делив со 10.

3934. Ема купувала книги. За првата книга платила $\frac{1}{3}$ од парите што ги носела со себе. За втората книга платила $\frac{2}{7}$ од остатокот после првото купување. И за третата книга платила $\frac{3}{5}$ од преостанатите пари после второто купување. Дома вратила 240 денари. Колку денари Ема носела со себе пред купувањето на првата книга и по колку денари платила за секоја книга?

Решение. Нека Ема, на почетокот, носела со себе x денари. Првата книга ја платила $\frac{x}{3}$ денари, па и останале $\frac{2x}{3}$ денари. За втората книга платила $\frac{2}{7}\cdot\frac{2x}{3}=\frac{4x}{21}$ денари. Значи и останале $\frac{5}{7}\cdot\frac{2x}{3}=\frac{10x}{21}$ денари. За третата книга платила $\frac{3}{5}\cdot\frac{10x}{21}=\frac{2x}{7}$ денари, а и останале $\frac{2}{5}\cdot\frac{10x}{21}=\frac{4x}{21}$ денари. Бидејќи дома вратила 240 денари, добиваме

$$\frac{4x}{21}=240 \Leftrightarrow 4x=21\cdot 240 \Leftrightarrow x=\frac{21\cdot 240}{4} \Leftrightarrow x=1260.$$

Значи Ема, пред купувањето на првата книга носела со себе 1260 денари. За првата книга платила 1260 : 3 = 420 денари. За втората книга платила $\frac{4\cdot 1260}{21}=240$ денари, а за третата книга платила $\frac{2\cdot 1260}{7}=360$ денари.

3935. Дадени се три правоаголни триаголника со плоштини 10 cm^2, така што збирот на должините на катетите на првиот триаголник е 12 cm, на вториот 9 cm и на третиот 21 cm. Пресметај го збирот од квадратите на катетите на трите триаголника.

Решение. Нека со $a_1,\, b_1,\, P_1$ ги означиме катетите и плоштината на првиот триаголник, соодветно, со $a_2,\, b_2,\, P_2$ на вториот и со $a_3,\, b_3,\, P_3$ на третиот триаголник. Треба да ја пресметаме вредноста на изразот $a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+a_3^2+b_3^2$. Од условите на задачата $P_1=P_2=P_3=10\text{ cm}^2$ и $a_1+b_1=12$, $a_2+b_2=9$, $a_3+b_3=21$. Од друга страна $P_1=\frac{a_1\cdot b_1}{2}$, $P_2=\frac{a_2\cdot b_2}{2}$ и $P_3=\frac{a_3\cdot b_3}{2}$, односно $a_1\cdot b_1=20$, $a_2\cdot b_2=20$ и $a_3\cdot b_3=20$. Според тоа со квадрирање на левите и на десните страни на равенствата $a_1+b_1=12$, $a_2+b_2=9$, $a_3+b_3=21$ и примена на формулите за скратено множење добиваме

$$(a_1+b_1)^2=12^2 \Leftrightarrow a_1^2+2a_1b_1+b_1^2=144 \Leftrightarrow a_1^2+b_1^2=144-2a_1b_1,$$
$$\Leftrightarrow a_1^2+b_1^2=104$$

$$\left(a_2+b_2\right)^2=9^2 \Leftrightarrow a_2^2+2a_2b_2+b_2^2=81 \Leftrightarrow a_2^2+b_2^2=81-2a_2b_2$$
$$\Leftrightarrow a_2^2+b_2^2=41 \text{ и}$$
$$\left(a_3+b_3\right)^2=21^2 \Leftrightarrow a_3^2+2a_3b_3+b_3^2=441 \Leftrightarrow a_3^2+b_3^2=441-2a_3b_3$$
$$\Leftrightarrow a_3^2+b_3^2=401.$$

Збирот од квадратите на катетите на трите правоаголни триаголника е еднаков на

$$a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+a_3^2+b_3^2=104+41+401=546\,.$$

3936. Сања и рекла на својата другарка Ана дека нацртала триаголник ABC во кој висината на страната AC минува точно низ пресечната точка на симетралата на аголот BAC и симетралата на страната AB. На тоа, Ана рекла: „Од тие податоци може да се одреди големината на аголот BAC“. Провери дали Ана е во право. Ако е во право, одреди ја големината на аголот BAC.

Решение. Нека O е пресечната точка на симетралата s_α на аголот BAC и симетралата s на страната AB. Нека висината BD минува низ точката O.

Бидејќи O е точка од симетралата s на страната AB, важи $\overline{OA}=\overline{OB}$. Значи триаголникот ABO е рамнокрак, па имаме дека

$$\angle BAO=\angle ABO=\frac{\alpha}{2}\,.$$

Бидејќи ΔABD е правоаголен, се добива $\angle BAD+\angle ABD=90^\circ$.

Значи Ана била во право и $\angle BAC=60^\circ$.

9 одделение

3937. Кире и Петре, ученици од 8-мо одделение, се членови на математичката секција составена од ученици од 8 одделение и од 9 одделение. Во групата повеќе од 70% од учениците се од 9 одделение. Колку најмалку членови има секцијата?

Решение: Нека x е број на членови во групата. Бидејќи во групата повеќе од 70% ученици се од 9-то одделение, следува дека помалку од 30% , т.е. $\frac{30}{100}x$ се ученици од 8-мо одделение. Кире и Петре се два ученика од 8-мо одделение, па $\frac{30}{100}x \geq 2$. Решението на неравенката е $3x \geq 20,$ т.е. $x \geq 6,(6).$

Значи, секцијата има најмалку 7 членови.

3938. Дадена е еднакворабна триаголна пирамида $ABCD$. Нека $\overline{DO}$ е висина на пирамидата. Ако $M \in \overline{DO}$, така што $MA \perp MB,$ докажи дека M е средишна точка на $\overline{DO}$.

Решение. Триаголниците ΔMOA и ΔMOB се правоаголни со $\angle MOA = \angle MOB = 90^\circ$.

Нека a е должина на работ на пирамидата и $x = \overline{MO}$. Нека AO ја сече BC во точката $N.$ Тогаш

$$\overline{AN} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BN}^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ и}$$

$$\overline{OA} = \frac{2}{3}\overline{AN} = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} .$$

Слично, $\overline{OB} = \overline{OC} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Од правоаголните триаголници ΔMOA и ΔMOB имаме дека

$$\overline{MA}^2 = x^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = x^2 + \frac{a^2}{3} \text{ и } \overline{MB}^2 = x^2 + \frac{a^2}{3} .$$

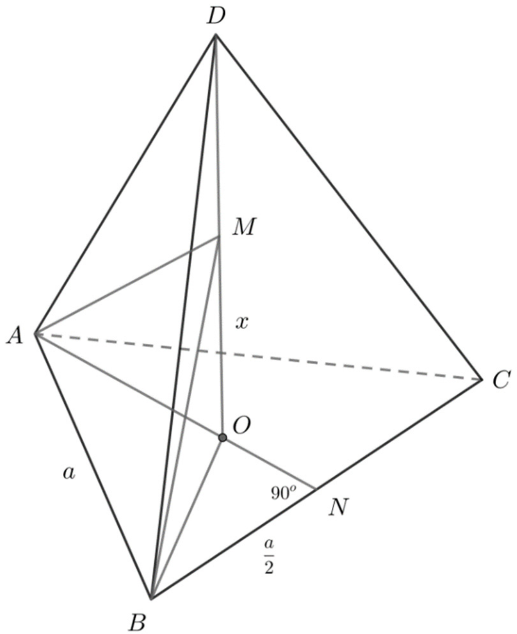
Според Питагоровата теорема, од правоаголниот триаголник ΔMAB добиваме дека

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{AB}^2 ,$$

$$x^2 + \frac{a^2}{3} + x^2 + \frac{a^2}{3} = a^2 ,$$

$$x^2 = \frac{a^2}{6} \text{, т.е. } x = \frac{a}{\sqrt{6}} ,$$

односно $x = \frac{a}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6} = \overline{MO}$ …..(1)



Од триаголникот ΔDOA имаме дека

$$\overline{DO}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{2a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

односно $\overline{DO}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$ …..(2)

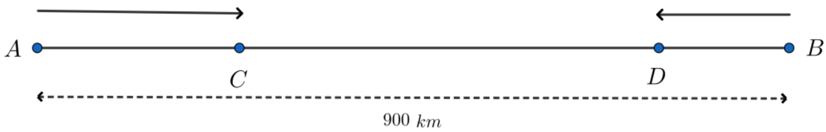
Од (1) и (2) добиваме дека

$$2\cdot\overline{MO}=2\cdot\frac{a\sqrt{6}}{6}=\frac{a\sqrt{6}}{3}=\overline{DO}.$$

Следува дека M е средишна точка на $\overline{DO}$.

3939. Градовите A и B се оддалечени $900\ km$ еден од друг. Од нив, во исто време, тргнуваат два воза еден спроти друг. Брзината на еден од возовите е $20\ km/h$ поголема од брзината на другиот воз. По $3\ h$ од тргнувањето збирот од растојанијата што го минуваат возовите е $120\ km$ помало од преостанатото растојание. Пресметај ги брзините на возовите.

Решение.



Нека е $\overline{AC}$ патот што го поминува првиот воз за $3\ h$ со брзина v_1, т.е. $\overline{AC}=3v_1$. Нека $\overline{BD}$ е патот што го поминува вториот воз за 3 h со брзина v_2, т.е. $\overline{BD}=3v_2$ и нека $v_1=v_2+20$. Според условот во задачата, преостанатото растојание е

$$\overline{CD}=\overline{AC}+\overline{BD}+120.$$

Растојанието меѓу градовите е $\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CD}+\overline{BD}$. Оттука,

$$900=\overline{AC}+\overline{AC}+\overline{BD}+120+\overline{BD},$$

$$900=2\cdot\overline{AC}+2\cdot\overline{BD}+120,$$

$$\overline{AC}+\overline{BD}=390.$$

Со замена за $\overline{AC}=3v_1$ и $\overline{BD}=3v_2$, добиваме $3v_1+3v_2=390$, односно $v_1+v_2=130$.

Брзините на возовите ги добиваме со решавање на системот равенки

$$\begin{cases} v_1=v_2+20 \\ v_1+v_2=130 \end{cases}.$$

Решението на системот равенки е $v_1=75\ km/h$ $v_2=55\ km/h$.

3940. Реши ја равенката $11^y-11^{y-2}=1320\sqrt{11}$.

Решение. Со средување на левата страна на равенката добиваме: $11^y-11^{y-2}=11^y-\frac{11^y}{11^2}=11^y\cdot\left(1-\frac{1}{11^2}\right)=11^y\cdot\frac{120}{11^2}$. Тогаш

$$11^y\cdot\frac{120}{11^2}=1320\sqrt{11}\Leftrightarrow 11^y\cdot\frac{1}{11^2}=11\sqrt{11}\Leftrightarrow$$

$$11^y=11^3\sqrt{11}\Leftrightarrow 11^y=11^{\frac{7}{2}}$$

па $y=\frac{7}{2}$.

Трајче Ѓорѓијевски

РЕШЕНИЈА НА НАГРАДНИТЕ ЗАДАЧИ ОД ПРЕТХОДНИОТ БРОЈ

1. Докажи дека за секој природен број $k \geq 3$ постојат k различни природни броеви $a_1, a_2, \ldots, a_k$ за кои важи равенството

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}=1.$$

Решение: Воочи дека $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1$. Така на пример, користејќи дека $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$, за $k=4$ посакуван запис е

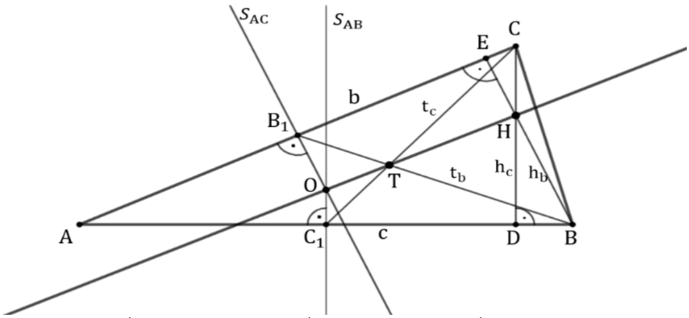
$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12};$$

за $k=5$ посакуван запис е

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}; \text{ итн.}$$

2. Нека е даден ΔABC каде A_1, B_1, C_1 се средини на страните BC, CA, AB соодветно.Нека O е центар на опишана кружница,T е тежиште и H е ортоцентар,тогаш докажи дека точките O, T, H припаѓаат на иста права наречена **ојлерова права.**

Решение:



Имаме $\overrightarrow{TA_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{TA}$; $\overrightarrow{TB_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{TB}$; $\overrightarrow{TC_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{TC}$.

Тоа значи дека χ е хомотетија со центар T и коефициент $-\frac{1}{2}$ односно $A_1=\chi_T^{-\frac{1}{2}}(A)$; $B_1=\chi_T^{-\frac{1}{2}}(B)$; $C_1=\chi_T^{-\frac{1}{2}}(C)$, т.е. триаголниците $A_1B_1C_1$ *и* ABC се хомотетични со *центар* T и коефициент $-\frac{1}{2}$.

Да ја одредиме точката која е слика на H *при* $\chi_T^{-\frac{1}{2}}(H)$.

Правата CD се пресликува во паралелна права s_{AB} која во пресек со другите две симетрали ја дава точката O.

Значи $O=\chi_T^{-\frac{1}{2}}(H)$, т.е. $\overrightarrow{TO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{TH}$ односно точките T, H *и* O се колинеарни.

КАЛЕНДАР ЗА НАТПРЕВАРИТЕ ПО МАТЕМАТИКА ВО ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ ВО УЧЕБНАТА 2022/2023 ГОДИНА

Општински натпревар, 4.02.2023 година.
Регионален натпревар, 4.03.2023 година.
Државен натпревар, 13.05.2023 година.

ЕСЕНСКА МАТЕМАТИЧКА ШКОЛА 2022

Есенската математичка школа 2022 е наменета за учениците од 4 до 9 одделение од основните училишта и од 1 до 4 година од средните училишта. Таа се организира по четврти пат, а оваа година, по две години онлјан настава, предавањата ќе бидат на Природно-математичкиот факултет во Скопје, од 15 октомври до 19 ноември 2022, со завршен тест на 3 декември 2022 година. Темите за учениците од основните училишта кои се обработуваат оваа година на школата се: 4 одд. – Предизвикот на дропките, 5 одд. – Стратегии за решавање проблемски задачи, 6 одд. – Проблеми со цели броеви и Вовед во геометрија и решавање основни геометриски проблеми, 7 одд. – Рационални броеви и Складност на триаголници, 8 одд. – Тетивен и тангентен четириаголник и Полиноми, 9 одд. – Сличности и некои поважни теореми и Принцип на Дирихле. Повеќе информации за Есенската математичка школа 2022 може да најдете на интернет страницата на школата: https://smm.org.mk/skoli/matematicki-skoli/.

ОДГОВОРИ/РЕШЕНИЈА

Решенија на задачите за самостојна работа од МАТЕМАТИЧКИ СИМБОЛИ

1. Еве три начини: $(m:4)\cdot(m:5)=24,\ \bar{4}\cdot\bar{6}=24,\ (-4)M(-6)||24$.

2. Симболите редоследно означуваат: собирање, одземање, множење, делење, еднаквост, нееднаквост, помало, поголемо, помало или еднакво, поголемо или еднакво.

Решенија на задачите за самостојна работа од КОМБИНАТОРНИ ЗАДАЧИ

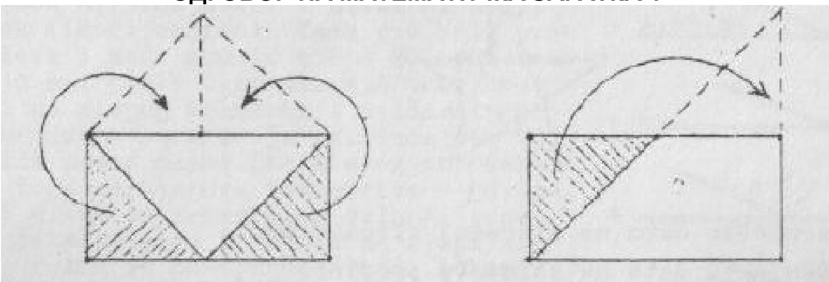
1. Постојат 10 начини, тоа се: (2, 2, 2, 4), (2, 2, 3, 3), (2, 2, 4, 2), (2, 3, 2, 3), (2, 3, 3, 2), (2, 4, 2, 2), (3, 2, 2, 3), (3, 2, 3, 2), (3, 3, 2, 2) и (4, 2, 2, 2).

2. Теодора може да облече пар чевли, здолниште и блуза на $4\cdot 2\cdot 5=40$ различни налини, а пар чевли и фустан може да облече на $4\cdot 3=12$ начини. Значи, Теодора може да се облече на $40+12=52$ различни начини.

---

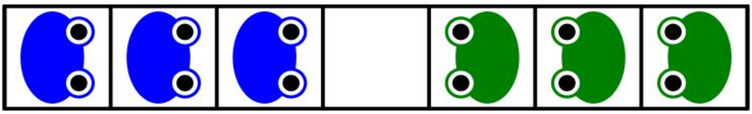
3. На местото на единици (Е) може да биде некоја од 5-те цифри 0, 2, 4, 6 или 8, а на местото на десетки (Д) може да биде било која од 10-те цифри од 0 до 9. Значи, вкупно има 5 · 10 = 50 трицифрени парни броеви кои почнуваат на цифрата 4.
Ако сакаме да најдеме колку од нив се со цифри кои не се повторуваат, да забележиме дека на местото на единици (Е) може да биде некоја од 4-те цифри 0, 2, 6 или 8, а на местото на десетки (Д) може да биде некоја од цифрите од 0 до 9, различна од 4 и од цифрата на единици (Е), значи 8 можности. Тогаш, има вкупно 4 · 8 = 32 парни трицифрени броеви кои почнуваат на цифрата 4 во кои сите цифри се различни.
4. На турнирот биле одиграни вкупно 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28 партии.

ОДГОВОР НА МАТЕМАТИЧКА ЗАГАТКА 1



ОДГОВОР НА МАТЕМАТИЧКА ЗАГАТКА 2

Да ги означиме жабите како на сликата:



А3 А2 А1 В1 В2 В3

Редоследот по кој жебите треба да скокаат е: А1, В1, В2, А1, А2, А3, В1, В2, В3, А1, А2, А3, В2, В3, А3.

ОДГОВОР НА МАТЕМАТИЧКА ЗАГАТКА 3

Еден од начините да се состави таков броен израз е следниот:
а.1) 99 + 9 : 9 = 99 + 1 = 100
а.2) (5 + 5 + 5 + 5) · 5 = 20 · 5 = 100
а.3) (666 – 66) : 6 = 600 : 6 =100
б.1) 2 · 2 · 2 + 2 + 2 : 2 = 8 + 2 + 1 = 11
б.2) 22 : 2 + 22 : 2 = 11 + 11 = 22
б.3) 22 : 2 · (2 : 2 + 2) = 11 · (1 + 2) = 11 · 3 = 33
б.4) (22 + 22) : (2 : 2) = 44 : 1 = 44
б.5) 22 : 2 · (2 + 2 + 2) = 11 · 6 = 66
б.6) 22 : 2 · (2 · 2 · 2) = 11 · 8 = 88

СОДРЖИНА