Комбинаторика - Математички игри и комбинаторна геометрија

Никола Велов

1. Јуни 2022

Batchet's Game

Пример 1. На табла е напишан бројот 0. Петар и Лука играат игра. Петар игра прв. Во секој чекор дозволено е на запишаниот број на таблата да му се додаде еден од броевите $1, 2, \ldots, 10$. Победува играчот што прв ќе дојде до 100. Кој од играчите има победничка стратегија и зошто?

Пример 2. На табла е напишан бројот 0. Петар и Лука играат игра. Петар игра прв. Во секој чекор дозволено е на бројот запишан на таблата да му се додаде било кој степен на двојка. Победува играчот што прв ќе дојде до 2022. Кој од играчите има победничка стратегија и зошто?

Пример 3. На 8×8 табла, на првата редица имаме 8 бели жетони а на последната редица имаме 8 црни жетони. Лука игра со бели жетони а Анастасија игра со црни жетони. Лука игра прв. Во секој чекор, играчот што е на ред избира еден жетон од својата боја и го поместува за неколку полиња напред, најдалеку до противничкиот жетон. Првиот играч што не може да одигра кога ќе дојде на ред ја губи играта. Да се одреди кој има победничка стратегија и зошто.

Игри со симетрија 2

Пример 4. Двајца играчи играат игра на голема правоаголна маса така што наизменично ставаат по една паричка од еден денар на масата. Првиот играч што не може да постави паричка кога ќе дојде не на ред ја губи играта. Да се одреди кој има победничка стратегија и зошто.

Игри со жетони

Пример 5. Имаме две купчиња со p и q жетони. Лена и Стефан играат игра и Лена игра прва. Во секој чекор дозволено е да се одземе еден жетон од некое купче или да се одземе по еден жетон од двете купчиња или да се префрли жетон од едно купче на друго. Во зависност од p и q да се одреди кој играч има победничка стратегија и зошто.

Пример 6. Имаме две купчиња со p и q жетони. Лена и Стефан играат игра и Лена игра прва. Во секој чекор дозволено е да се извади едно купче од играта а другото да се подели на две купчиња. Во зависност од p и q да се одреди кој има победничка стратегија и зошто.

Пример 7. (ЈММО 2010) Дадено е купче со 2010 жетони. Еден жетон вадиме од купчето, а остатокот го делиме на две купчиња. Понатаму, избираме произволно купче од добиените две купчиња, вадиме еден жетон а остатокот произволно го делиме на две купчиња итн. Дали е можно после конечен број на повторувања на оваа постапка да добиеме неколку купчиња така што во секое од нив да има по три жетони?

Комбинаторна геометрија 1

Пример 8. Нека S е непразно конечно множество на точки во рамнината со следното својство: ако точките A и B се во S, тогаш и нивната средина е во S. Да се докаже дека во S постои само една точка.

Помош: Да приметиме дека ако постојат барем две точки T_1 и T_2 во S, тогаш нивната средина T_3 е во S и важи $T_1T_3 < T_1T_2$. Слично, средината T_4 на T_1T_3 е во S и важи $T_1T_4 < T_1T_3$. На овој начин забележуваме дека се добива бесконачна низа на отсечки со должина која се намалува. Бидејќи имаме само конечно многу точки во S, идејата е да ја избереме отсечката со должина која не може повеќе да се намалува и да добиеме контрадикција.

Пример 9. Нека S е конечно множество на точки во рамнината со барем 3 елементи такво што во S не постојат три колинеарни точки и за секои три точки $A, B, C \in S$ важи Area$(\triangle ABC) \leq 1$. Докажи дека сите точки во S се содржани во некој триаголник со плоштина најмногу 4.

Помош: Ако фиксираме две точки P и Q, тогаш сите точки R такви што Area$(\triangle PQR) \leq 1$ се наоѓаат помеѓу двете паралелни прави на растојание $\frac{2}{PQ}$ од правата PQ. Освен тоа, ако сакаме сите точки од S да бидат во еден триаголник, логично е да почнеме со триаголник формиран од точки во S со најголемата плоштина и да пробаме да го прошириме до поголем триаголник што ги содржи сите точки од S и има плоштина најмногу 4

Пример 10. Дадени се 101 точки во круг со радиус 1. Докажи дека постојат две од нив на растојание не поголемо од $\frac{2}{9}$.

Помош: Две точки A и B се на растојание помало од $2r$ кога круговите $k(A,r)$ и $k(B,r)$ се сечат. Затоа има смисла околу секоја точка да конструираме круг со радиус $\frac{1}{9}$ и да покажеме дека некои два од нив се сечат. Освен тоа, треба да го искористиме и условот дека точките се во круг со радиус 1. Овој услов ни гарантира дека сите овие кругови се содржани во доволно голем круг со ограничена плоштина со што ќе заклучиме дека некои два од нив се сечат.