Комбинаторика - Боење и оптимизација

Никола Велов

29. Мај 2022

Воведни примери

- **Пример 1.** Имаме шаховска табла 8×8. Ако исечеме едно ќоше од таблата, дали преостанатиот дел може да се покрие со 2×1 и 1×2 домини без преклопување?
- **Пример 2.** Ако исечеме две ќошиња на истата дијагонала од шаховската табла, дали тогаш преостанатиот дел може да се покрие со домини без преклопување?
- **Пример 3.** Имаме $n \times n$ табла каде што сите полиња се бели. Колку најмногу полиња можеме да обоиме во црно така што во секоја редица и секоја колона имаме најмногу едно црно поле?

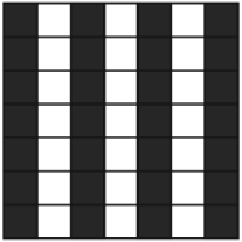
Задачи со боење 1

- **Пример 4.** Дали 10×10 табла може да се покрие со 1×4 и 4×1 правоаголни фигури?
- Ако ја обоиме таблата како на сликата подолу, можеме да приметиме дека хоризонталните фигури покриваат по еден квадрат од секоја боја, додека вертикалните фигури покриваат по 4 од истата боја.
- Ако a е бројот на полиња со боја 3 покриени со вертикална фигура, тогаш бројот на полиња со боја 0 покриени со вертикална фигура е $a + 10$, што не е возможно, затоа што и двете треба да се деливи со 4.

0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1

Задачи со боење 2

- **Пример 5.** (ЈММО 2003) Дали е возможно 2003×2003 да се покрие без преклопување со хоризонтални 1×2 и вертикални 3×1 фигури?



- Ќе ги обоиме непарните колони од лево на десно (почнувајќи од првата) црно и парните колони бело. Тогаш секоја домина покрива точно едно бело и едно црно поле, додека тримините се или целосно бели или целосно црни.

- Да претпоставиме дека постои вакво покривање и дека имаме d домини, b бели тримини и c црни тримини. Тогаш бројот на бели полиња е $d + 3b$, додека бројот на црни полиња е $d + 3c$.
- Имаме една црна колона повеќе, бидејќи 2003 е непарен, што значи дека:

$$2003 = (d + 3c) - (d + 3b) = 3(c - b).$$

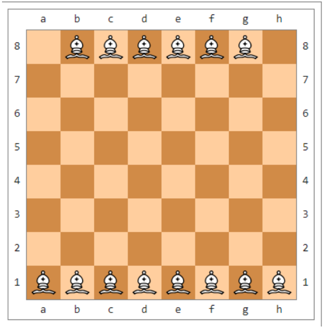
- Добиваме контрадикција, бидејќи бројот 2003 не е делив со 3.

Задачи со оптимизација 1

- **Пример 6.** Имаме бела 8×8 табла. Колку најмногу полиња можеме да обоиме во црно така што никои два црни полиња немаат заедничка точка?
- Прво да приметиме дека во секој 2×2 квадрат можеме да имаме најмногу едно црно поле, што значи дека можеме да обоиме најмногу 16 квадрати во црно.
- Ако таблата ја поделиме на 2×2 квадрати, тогаш во секој од нив можеме да го обоиме горното десно ќоше, со што добиваме точно 16 црни полиња.

Задачи со оптимизација 2

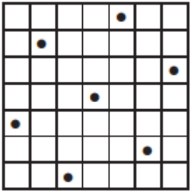
- **Пример 7.** Колку најмногу ловци можеме да поставиме на 8×8 шаховска табла така што не постојат два од нив што се напаѓаат?
- Ако ги поставиме ловците како на сликата подолу, добиваме дека можеме да поставиме барем 14 ловци.



- Да приметиме дека имаме вкупно 15 дијагонали од доле лево кон горе десно. На секоја од нив можеме да имаме најмногу еден ловец.
- Не можеме истовремено да имаме ловец на првата и последната дијагонала, затоа што тогаш се на истата дијагонала од горе лево кон доле десно. Затоа имаме најмногу 14 ловци.

Задачи со оптимизација 3

- **Пример 8.** Колку најмногу жетони можеме да поставиме на 7×7 табла така што ниту еден правоаголник со плоштина 6 не содржи повеќе од еден жетон?
- Сликата подолу покажува како можеме да поставиме 7 жетони на бараниот начин. Зошто не можеме да поставиме повеќе?



Оптимизација и множества 1

- **Пример 9.** Колку најмногу елементи можеме да избереме од множеството $S = \{1, 2, ..., 2n\}$ така што не постојат два избрани елементи што се заемно прости?
- Ако ги избереме елементите $2, 4, ..., 2n$, тогаш немаме два што се заемно прости, бидејќи сите се деливи со 2. Тоа значи дека можеме да избереме барем n елементи.
- Да претпоставиме дека можеме да избереме $n + 1$ елементи. Ако S го разбиеме на множествата $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$,...,$\{2n - 1, 2n\}$, тогаш според принципот на Дирихле имаме барем две избрани елементи од истото множество, на пример $2i - 1$ и $2i$. Меѓутоа, $(2i - 1, 2i) = 1$, што е контрадикција.

Оптимизација и множества 2

- **Пример 10.** Колку најмногу елементи можеме да избереме од множеството $S = \{1, 2, ..., 2n\}$ така што не постојат два избрани елементи со збирот $2n + 1$?
- Можеме да избереме барем n елементи: ако ги избереме елементите $n + 1$, $n + 2$, ..., $2n$, тогаш не постојат два избрани елементи со збирот $2n + 1$ бидејќи

$$(n + i) + (n + j) = 2n + i + j \geq 2n + 1 + 1 \neq 2n + 1.$$

- Ако го запишеме S како унија на следните n множества: $\{1, 2n\}$, $\{2, 2n - 1\}$, ..., $\{n, n + 1\}$, тогаш од секое множество можеме да избереме најмногу еден елемент. Затоа не можеме да избереме повеќе од n елементи.

Оптимизација и множества 3

- **Пример 11.** Колку најмногу подможества од множеството $S = \{1, 2, ..., n\}$ можеме да избереме така што секои два од нив имаат барем еден заеднички елемент?
- Ако ги избереме сите множества што го содржаат 1 добиваме 2^{n-1} вакви подмножества.
- На секое множество $A \subset S$ му одговара комплементарно множество $S \setminus A$. Сите подмножества од S можеме да ги поделиме во парови $(A, S \setminus A)$. Вкупно имаме $\frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}$ вакви парови, што значи дека можеме да избереме најмногу 2^{n-1} подмножества.

Боење и геометрија 1

- **Пример 12.** Секоја точка во рамнината е обоена во црвено или во жолто. Докажи дека постојат две точки со иста боја на растојание 1.
- Нека $\triangle ABC$ е рамностран триаголник со страна 1. Тогаш според принципот на Дирихле барем две од темињата A, B и C се обоени со истата боја. На пример, нека A и B се обоени во жолта. Тогаш овие две точки се на растојание 1 и се обоени со иста боја, што и требаше да се докаже.

Боење и геометрија 2

- **Пример 13.** Секоја точка во рамнината е обоена во една од боите означени со $1, 2, 3, 4$. Докажи дека постои правоаголник чии темиња се обоени со иста боја.
- Да разгледаме фиксирана 5×4^5 мрежа на целобројни точки во рамнината. Тогаш постојат две идентично обоени колони. Според принципот на Дирихле, во едната од нив постојат две точки обоени во иста боја. Бидејќи колоните се идентични, добиваме еднобоен правоаголник.