Решение домашнего задания №

Роман Тарасов, группа 876

1. Задача первая

1.1 Пункт 1

η

Исходная задача:

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1 + 3|x_2 - 10| \\ \text{s.t.}\ & |x_1 + 2| + |x_2| \leq 5 \end{aligned}$$

Сделаем замены:

$$\begin{aligned} |x_2 - 10| &= t \\ x_2 - 10 &= y_1 \\ x_1 - 2 &= y_2 \\ p &= 5 \end{aligned}$$

Тогда можно переписать задачу в виде

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1 + 3t \\ \text{s.t.}\ & |y_1| = t \\ & |y_2| + |x_2| \leq p \\ & x_2 - 10 = y_1 \\ & x_1 - 2 = y_2 \\ & p = 5 \end{aligned}$$

Условие $|y_2| + |x_2| \leq p$ можно записать как

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ x_2 \\ p \end{pmatrix} \in K_1 \tag{1}$$

K_1 — конус, порождённый первой нормой. Обозначим этот конус за $\mathcal{C}_1$.

Переменная t присутствует только в одном ограничении $|y_1| = t$. Причём, в целевой функции t присутствует с положительным коэффициентом. Значит, можно заменить это условие на $|y_1| \le t$, и при этом оптимальное значение не изменится и будет достигаться при $|y_1| = t$. То есть

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ t \end{pmatrix} \in K_1 \tag{2}$$

K_1 — конус, порождённый первой нормой. Обозначим этот конус за $\mathcal{C}_2$.

Окончательно

$$\min\ 2x_1 + 3t \text{s.t.} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ p \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(x_1, y_1, t, y_2, x_2, p) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_1$$

Здесь $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_1$ — конус. Ограничения типа равенств мы переписали в матричном виде.

1.2 Пункт 2

Введём новую переменную $t = ||\mathbf{x}||_1$. Тогда задачу можно переписать как

$$\begin{aligned} &\min\ t \\ \text{s.t. } &||\mathbf{x}||_1 = t \\ &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

Здесь как и в предыдущей задаче переменная t участвует только в одном ограничении $||\mathbf{x}||_1 = t$. При этом в целевой функции она взята с положительным коэффициентом. Тогда можно заменить это ограничение на $||\mathbf{x}||_1 \le t$, то есть $(\mathbf{x}, t) \in K_1$. При этом оптимальное значение будет то же самое, то есть в случае равенства $||\mathbf{x}||_1 = t$. Итак, задача в каноническом виде выглядит:

$$\begin{aligned} &\min\ t \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &(\mathbf{x}, t) \in K_1 \end{aligned}$$

1.3 Пункт 3

$B(\mathbf{x}_c, R) = \{\mathbf{x} \mid ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_c|| \le R\}$.

Сделаем новые переменные $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_c$, и $\mathbf{z} = -\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Тогда в новых переменных условия перепишутся в виде $||\mathbf{y}|| \le R$, $\mathbf{z} \ge \mathbf{0}$. Это означает, что $(\mathbf{y}, R) \in K_{||.||}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m_+$. Здесь $K_{||.||}$ конус, порождённый той же нормой, что и шар.

Два ограничения типа равенства $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_c$ и $\mathbf{z} = -\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ можем переписать в матричном виде и тогда получим задачу в каноническом виде

$$
\begin{aligned}
&\min \; -R \\
&\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_c \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \\ R \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \times K_{||\cdot||}
\end{aligned}
$$

2. Задача вторая

Нарисуем допустимое множество:

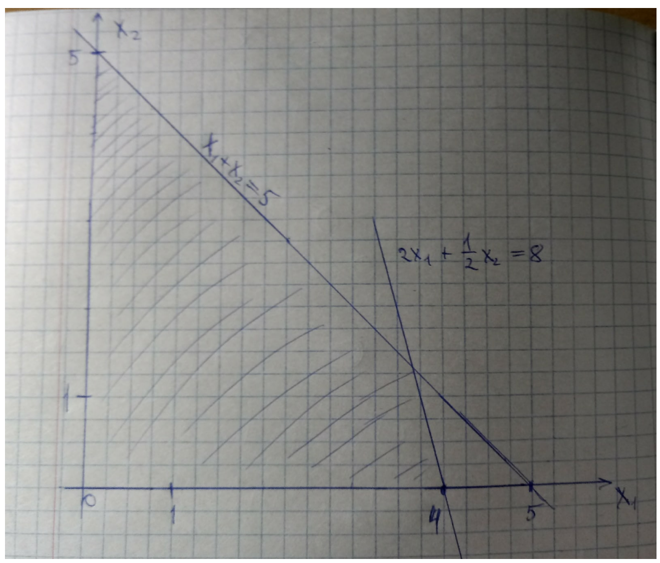

Рис. 1: Допустимое множество

Оно имеет 4 угловые точки: $(0,0), (0,5), (4,0), \left(\frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Последняя точка — точка пересечения прямых $x_1+x_2 = 5$ и $2x_1+\frac{1}{2}x_2 = 8$. В силу фундаментальной теоремы линейного программирования в одной из этих точек достигается минимум целевой функции $f(x_1, x_2) = -5x_1-x_2$. Можно просто перебрать их.

- $f(0,0) = 0$
- $f(0,5) = -5$
- $f(4,0) = -20$
- $f\left(\frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{-59}{3}$

Видим, что наименьшее значение достигается в точке $(4,0)$ и равно -20.

3. Задача третья

Задача линейного программирования с ограничениями типа неравенств:

$$\begin{aligned} &\min\ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \qquad (3)\\ &\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \qquad (4) \end{aligned}$$

В нашей задаче

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix};\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

На семинаре было показано, что для задачи такого вида $g(\mu) = -\mathbf{b}^\top \mu - f^*(-\mathbf{A}\mu)$. Для линейной функции $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ сопряжённая функция есть

$$f^*(\mathbf{y}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{y} = \mathbf{c} \\ +\infty & \mathbf{y} \ne \mathbf{c} \end{cases} \tag{6}$$

Случай с $+\infty$ нас не интересует, так как в двойственной задаче нам нужно отыскать максимум функции g. Поэтому двойственная задача выглядит так:

$$\begin{aligned} &\max\ -\mathbf{b}^\top \mu \qquad (7)\\ &\text{s.t. } -\mathbf{A}^\top \mu = \mathbf{c} \qquad (8)\\ &\mu \ge \mathbf{0} \qquad (9) \end{aligned}$$

Перепишем это в более удобной форме:

$$\begin{aligned} &\max\ 3\mu_1 - 7\mu_2 \\ &\text{s.t. } -\mu_1 + 2\mu_2 - \mu_5 = 2 \\ &3\mu_1 + 6\mu_2 - \mu_4 = -5 \\ &4\mu_1 - \mu_3 = -14 \\ &\mu_i \ge 0 \end{aligned}$$

μ_3, μ_4, μ_5 не используются в целевой функции, но зато неотрицательно, поэтому можем исключить их и заменить на неравенства

$$\begin{aligned} &\max\ 3\mu_1 - 7\mu_2 \\ &\text{s.t. } -\mu_1 + 2\mu_2 \ge -14 \qquad (1)\\ &3\mu_1 + 6\mu_2 \ge -5 \qquad (2)\\ &4\mu_1 \ge 2 \qquad (3)\\ &\mu_i \ge 0 \end{aligned}$$

Переменных всего 2, поэтому и тут можем решить проведя аналитические рассуждения. В силу неотрицательности переменных неравенство (2) выполнено всегда, поэтому его можно исключить. Умножим неравенство (2) на -3. Получили $3\mu_1 - 6\mu_2 \leq 42$. Тогда в силу того что $\mu_2 \geq 0$ получаем оценку для целевой функции: $3\mu_1 - 7\mu_2 = 3\mu_1 - 6\mu_2 - \mu_2 \leq 42 + 0 = 42$. При этом значение 42 достигается при $\mu_1 = 14, \ \mu_2 = 0$. При этом $-\mu_1 + 2\mu_2 = -14 \geq -14, \ 4\mu_1 = 56 \geq 2, \ \mu_1 \geq 0, \ \mu_2 \geq 0$. Значит, точка $(14, 0)$ входит в допустимое множество, а значит в ней достигается максимум.

Покажем, что для исходной задачи выполнено условие Слейтера. Тогда из этого будет следовать, что 42 есть минимум целевой функции в исходной задаче.

Все функции ограничений и целевая линейны, поэтому задача выпукла. Также существует точка $\left(\frac{1}{10^{137}}, \frac{1}{9^{98}}, 3.25\right)$, для которой все неравенства строгие:

$$6 \cdot \frac{1}{9^{98}} + 2 \cdot 3.25 = 6 \cdot \frac{1}{9^{98}} + 6.5 < 7$$

$$4 \cdot \frac{1}{10^{137}} + 3 \cdot \frac{1}{9^{98}} - 3.25 < -3$$

$$\frac{1}{9^{98}} > 0$$

$$\frac{1}{10^{137}} > 0$$

$$3.25 > 0$$

Следовательно, 42 — решение прямой задачи.

4. Задача четвёртая

Разделим для удобства первое равенство на 2. И введём новые переменные x_5, x_6, чтобы превратить неравенства в равенства.

$$\begin{aligned}
\min \ & x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\
\text{s.t.} \ & 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\
& -x_1 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\
& x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_6 = 5 \\
x_{123456} \geq 0 &
\end{aligned}$$

Угадаем начальную точку $(0, 4, 0, 0, 3, 5)$. Для неё $\mathbf{c}_{\mathcal{B},} = (1, 0, 0)^\top$, $\mathbf{x}_{\mathcal{B}_0} = (4, 3, 5)^\top$. Тогда $-\mathbf{c}_{\mathcal{B},}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}_0} = -4$. Вычислим также и оценки замещения $c'_j = c_j - \mathbf{c}_{\mathcal{B},}^\top \mathbf{a}_j$. $c'_2 = c'_5 = c'_6 = 0$, так как эти переменные базисные. Для остальных:

$$c'_1 = 1 - (1, 0, 0)(2, -1, 1)^\top = -1$$

$$c'_3 = 2 - (1, 0, 0)(1, 2, 2)^\top = 1$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B},}^{\top}\mathbf{x}_{\mathcal{B}_0} = -4$	-1	0	1	-4	0	0
$x_2 = 4$	2	1	1	2	0	0
$x_5 = 3$	-1	0	2	1	1	0
$x_6 = 5$	1	0	2	2	0	1

$$c'_4 = -2 - (1,0,0)(2,1,2)^{\top} = -4$$

Среди отрицательных оценок замещения выбираем ту, у которой наименьший индекс. Это оценка для переменной x_1. То есть, $j^* - 1$.

Матрица базиса единичная, поэтому $\mathbf{u} = B^{-1}\mathbf{a}_1 = (2,-1,1)^{\top}$. $\theta^* = min\left(\frac{4}{2}, \frac{5}{1}\right) = 2$, и отсюда $l = 2$. Далее выполняем операции со строками матрицы, чтобы столбцы новой базисной марицы стали единичными, а оценка замещения для x_1 занулилась.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}_1}^{\top}\mathbf{x}_{\mathcal{B}_1} = -2$	0	0.5	1.5	-3	0	0
$x_1 = 2$	1	0.5	0.5	1	0	0
$x_5 = 5$	0	0.5	2.5	2	1	0
$x_6 = 3$	0	0.5	1.5	1	0	1

Проделываем аналогичные вычисления. Здесь $j^* = 4$, $l = 1$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}_2}^{\top}\mathbf{x}_{\mathcal{B}_2} = 4$	3	2	2	0	0	0
$x_1 = 4$	1	0.5	0.5	1	0	0
$x_5 = 1$	-2	-0.5	1.5	0	1	0
$x_6 = 1$	-1	0	1	0	0	1

Все оценки замещения неотрицательны, значит, в точке $((0,0,0,2,1,1)$ достигается минимум целевой функции, который равен $\mathbf{c}_{\mathcal{B}_2}^{\top}\mathbf{x}_{\mathcal{B}_2} = -4$.

5. Задача пятая

Фаза 1

Вспомогательная задача:

$$\begin{aligned}
\min\ & x_6 + x_7 + x_8 \\
\text{s.t. } & x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_5 + x_6 = 2 \\
& x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 + x_7 = 2 \\
& -x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_8 = 1 \\
& x_1, \ldots, x_8 \geq 0
\end{aligned}$$

Начальная точка $(0,0,0,0,0,2,2,1)$, $\mathbf{c}_{\mathcal{B}_0}^\top = (1,1,1)^\top$. Решаем вспомогательную задачу:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}_0}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}_0} = -5$	-1	-1	-3	-1	-2	0	0	0
$x_6 = 2$	1	3	0	4	1	1	0	0
$x_7 = 2$	1	2	0	-3	1	0	1	0
$x_8 = 1$	-1	4	3	0	0	0	0	1

$j^* = 1$, $l = 6$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}_1}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}_1} = -3$	0	2	-3	3	-1	1	0	0
$x_1 = 2$	1	3	0	4	1	1	0	0
$x_7 = 0$	0	-1	0	-7	0	-1	1	0
$x_8 = 3$	0	-1	3	4	1	1	0	1

$j^* = 3$, $l = 8$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}_2}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}_2} = 0$	0	1	0	7	0	2	0	0
$x_1 = 2$	1	3	0	4	1	1	0	0
$x_7 = 0$	0	-1	0	-7	0	-1	1	0
$x_3 = 1$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

Итак, решение вспомогательной задачи нулевое. Следовательно, исходная задача имеет решение и начальная точка есть $(2,0,1,0,0)$. Строку со вспомогательной переменной x_7 можно исключить из таблицы.

Фаза 2

$\mathbf{c}_{\mathcal{B}_0}^\top = (2,3)^\top$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}_0}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}_0} = -7$	0	-2	0	-11	-5
$x_1 = 2$	1	3	0	4	1
$x_3 = 1$	0	-$\frac{1}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$

$j^* = 2$, $l = 1$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}_1}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}_1} = -\frac{17}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{25}{3}$	$-\frac{13}{3}$
$x_2 = \frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$
$x_3 = \frac{11}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	1	$\frac{16}{9}$	$\frac{4}{9}$

$j^* = 4$, $l = 2$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}_2}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}_2} = -\frac{3}{2}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{29}{4}$	0	0	$-\frac{9}{4}$
$x_4 = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$
$x_3 = \frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	1	0	0

$j^* = 5$, $l = 4$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}_3}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}_3} = -3$	5	14	0	9	0
$x_5 = 2$	1	3	0	4	1
$x_3 = \frac{1}{3}$	—	—	1	—	—

Итак, минимум функции достигается на наборе $\left(0, 0, \frac{1}{3}, 0, 2\right)$ и равен -3.

6. Задача шестая

Введём новые переменные, чтобы превратить неравенства в равенства

Введём новые переменные $\mathbf{z}$ и $\mathbf{y}$ и параметр M. Запишем вспомогательную задачу для M-метода:

$$
\begin{aligned}
&\min\ z_1 + 2z_2 + 3z_3 + 4z_4 + M(y_1 + y_2 + y_3) \\
\text{s.t.}\ \ &4z_1 + 3z_2 + 2z_3 + z_4 + z_5 + y_1 = 10 \\
&z_1 - z_3 + 2z_4 + y_2 \\
&z_1 + z_2 + z_3 + z_4 - z_6 + y_3 = 1 \\
&\mathbf{z} \geq \mathbf{0} \\
&\mathbf{y} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Начальная точка для этой задачи $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$, $\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^\top$. Далее будем решать задачу табличным методом, при этом помня, что M можно взять достаточно большой.

	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	y_1	y_2	y_3
$\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}}$ =-13M	1-6M	2-4M	3-2M	4-4M	-M	M	0	0	0
y_1=10	4	3	2	1	1	0	1	0	0
y_2=2	1	0	-1	2	0	0	0	1	0
y_3=1	1	1	1	1	0	-1	0	0	1

$j^* = z_1$, $l = y_3$

	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	y_1	y_2	y_3
$\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}}$ =-7M-1	0	2M+1	4M+2	2M+3	-M	-5M+1	0	0	6M-1
y_1=6	0	-1	-2	-3	1	4	1	0	-4
y_2=1	0	-1	-2	1	0	1	0	1	-1
z_1=1	1	1	1	1	0	-1	0	0	1

$j^* = z_5$, $l = y_1$

	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	y_1	y_2	y_3
$\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}}$ =-M-1	0	M+1	2M+2	-M+3	0	-M+1	M	0	2M-1
z_5=6	0	-1	-2	-3	1	4	1	0	-4
y_2=1	0	-1	-2	1	0	1	0	1	-1
z_1=1	1	1	1	1	0	-1	0	0	1

$j^* = z_6$, $l = y_2$

	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	y_1	y_2	y_3
$\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}}$ =-2	0	2	4	2	0	0	M	M-1	M
z_5=6	0	3	6	-7	1	0	1	-4	0
z_6=1	0	-1	-2	1	0	1	0	1	-1
z_1=1	1	0	-1	2	0	0	0	1	0

Таким образом, оптимальное значение функции достигается на наборе $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 0, 0)$ и равно 2.

7. Задача седьмая

Введём новые переменные $\mathbf{y}_i = \mathbf{A}_i\mathbf{x} - \mathbf{b}_i,\ i = 1, \ldots, k,\ \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Тогда задачу можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \min\ & \sum_{i=1}^{k} ||\mathbf{y}_i||_1 + \frac{1}{2}||\mathbf{z}||_2^2 \\ \text{s.t. } & \mathbf{y}_i = \mathbf{A}_i\mathbf{x} - \mathbf{b}_i,\ i = 1, \ldots, k \\ & \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

Целевая функция $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i, \ldots, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}) = \sum\limits_{i=1}^{k} ||\mathbf{y}_i||_1 + \frac{1}{2}||\mathbf{z}||_2^2$ не зависит явно от $\mathbf{x}$. Ограничения можно переписать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & -I & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \ldots & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{O} & -I & \mathbf{O} & \ldots & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \ldots & & & & \ldots & & \ldots \\ \mathbf{A}_k & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \ldots & -I & \mathbf{O} \\ I & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \ldots & \mathbf{O} & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}_1 \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{y}_k \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{b}_k \\ \mathbf{x}_0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Обозначим большую блочную матрицу за $\mathbf{A}$, а последний вектор за $\mathbf{b}$. Пусть вектор переменных Лагранжа есть

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{\mathbf{1}} \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_{\mathbf{k}} \\ \mu \end{pmatrix} \tag{11}$$

Здесь подвектор $\lambda_{\mathbf{i}}$ отвечает за ограничение $\mathbf{A}_i\mathbf{x} - \mathbf{y}_i = \mathbf{b}_i$, а подвектор μ за ограничение $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{z}$. На семинаре было показано, что двойственная функция будет равна $g(\lambda_{\mathbf{1}}, \ldots, \lambda_{\mathbf{k}}, \mu) = g(\lambda) = -\lambda^\top \mathbf{b} - f^*(-\mathbf{A}^\top \lambda)$. Распишем подробнее произведение $-\mathbf{A}^\top \lambda$:

$$-\mathbf{A}^\top \lambda = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^k \mathbf{A}_i^\top \lambda_i - \mu \\ \lambda_1 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_{\mathbf{k}} \\ \mu \end{pmatrix} \tag{12}$$

$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i, \ldots, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}) = \sum\limits_{i=1}^{k} ||\mathbf{y}_i||_1 + \frac{1}{2}||\mathbf{z}||_2^2 = h(\mathbf{x}) + \sum\limits_{i=1}^{k} f_k(\mathbf{y}_i) + f_0(\mathbf{z})$, где $f_i(\mathbf{y}_i) = ||\mathbf{y}_i||_1$, а $f_0(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}||\mathbf{z}||_2^2$, $h(\mathbf{x}) \equiv 0$. Тогда

$$f^*(-\mathbf{A}^\top \lambda) = f^*(-\sum_{i=1}^k \mathbf{A}_i^\top \lambda_i - \mu, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu) = h^*(-\sum_{i=1}^k \mathbf{A}_i^\top \lambda_i - \mu) + \sum_{i=1}^k f_i^*(\lambda_i) + f_0^*(\mu)$$

$$h^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \begin{cases} 0 & \mathbf{y} = 0 \\ +\infty & \mathbf{y} \neq 0 \end{cases} \tag{13}$$

На семинаре было показано, что

$$f_i^*(\lambda_i) = \begin{cases} 0 & ||\lambda_i||_\infty \leq 1 \\ +\infty & ||\lambda_i||_\infty > 1 \end{cases} \tag{14}$$

$$f_0^*(\mu) = \frac{1}{2}||\mu||_2^2$$

Так как мы ищем максимум двойственной функции, то нас не интересует значение функции $f_i^* = +\infty$, поэтому можем принять все $f_i^* = 0$ и добавить условие $||\lambda_i||_\infty \leq 1$. Также нужно добавить условие $-\sum_{i=1}^k \mathbf{A}_i^\top \lambda_i - \mu = \mathbf{0}$ для равенства нули функции h^*. Получим

$$\max\ -\lambda^\top \mathbf{b} - \frac{1}{2}||\mu||_2^2$$
$$\text{s.t. } ||\lambda_i||_\infty \leq 1,\ i = 1, \ldots, k$$
$$-\sum_{i=1}^k \mathbf{A}_i^\top \lambda_i - \mu = \mathbf{0}$$