

Домашнее задание № 3

Александр Катруца

Прислать до 02:00 23 ноября 2020

1. Запишите приведённые ниже оптимизационные задачи как задачи линейного программирования в канонической форме:

-

$$\begin{aligned} \min & 2x_1 + 3|x_2 - 10| \\ \text{s.t. } & |x_1 + 2| + |x_2| \leq 5 \end{aligned}$$

- найти максимально разреженное решение системы линейных уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $m < n$:

$$\begin{aligned} \min & \|\mathbf{x}\|_1 \\ \text{s.t. } & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

- найти Чебышёвский центр полиэдрального множества $P = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}_c} & R \\ \text{s.t. } & B(\mathbf{x}_c, R) \subset P, \end{aligned}$$

где $B(\mathbf{x}_c, R)$ — шар радиуса R с центром в точке \mathbf{x}_c .

2. Решите следующую задачу графически, то есть нарисуйте допустимое множество и найдите, в какой точке будет достигаться минимум целевой функции:

$$\begin{aligned} \min & -5x_1 - x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 8 \\ & x_{1,2} \geq 0 \end{aligned}$$

3. Для следующей задачи линейного программирования постройте двойственную. Найдите решение полученной двойственной задачи и с помощью решения двойственной задачи получите решение прямой задачи.

$$\begin{aligned} \min & -2x_1 + 5x_2 + 14x_3 \\ \text{s.t. } & 4x_1 + 3x_2 - x_3 \leq -3 \\ & 6x_2 + 2x_3 \leq 7 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Объясните, почему удалось восстановить решение прямой задачи.

4. Решите следующую задачу табличным симплекс-методом. Постарайтесь угадать начальную точку — это просто ☺

$$\begin{aligned} \min & x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\ \text{s.t.} & 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8 \\ & -x_1 + 2x_3 + x_4 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_3 + 2x_4 \leq 5 \\ & x_{1,2,3,4} \geq 0 \end{aligned}$$

5. Решите следующую задачу двухфазным симплекс-методом:

$$\begin{aligned} \min & 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 \\ \text{s.t.} & x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_5 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 2 \\ & -x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ & x_{1,2,3,4,5} \geq 0 \end{aligned}$$

6. Решите следующую задачу М-методом

$$\begin{aligned} \min & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ \text{s.t.} & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 10 \\ & x_1 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \\ & x_{1,3,4} \geq 0 \end{aligned}$$

7. С помощью техники конической двойственности постройте двойственную задачу для задачи

$$\min_{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^k \|\mathbf{A}_i \mathbf{x} - \mathbf{b}_i\|_1 + \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2,$$

где $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^m$ и $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ даны.