Домашнее задание № 2

Александр Катруца

Прислать до 02:00 2 ноября 2020

1. Условия оптимальности для безусловных задач (3 pts)

1. (1 pts) Решите задачу с помощью субдифференциального критерия оптимальности

$$\begin{aligned} \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} & \; |x| + |y| \\ \text{s.t. } & (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1. \end{aligned}$$

2. (1 pts) Решите задачу при всех значений вектора $\mathbf{c}$ с помощью субдифференциального критерия оптимальности:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} & \; \|\mathbf{x}\|_2 + \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } & x_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

3. (1 pts) На основе обсуждения на семинаре задачи

$$\min_{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2} x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 + e^{x_1 + x_2}$$

рассмотрите различные методы численного решения получаемого нелинейного уравнения (чем больше, тем лучше) и проанализируйте скорость их сходимости. Для этого определите как Вы будете считать точность решения и постройте график зависимости точности от количества итераций. График должен быть нарисован в логарифмическом масштабе с читабельными подписями к осям, числами на осях и легендой для каждой изображённой линии. Для более качественного отображения сохраняйте график в PDF или другом векторном формате. Jupyter Notebook с реализацией методов и отрисовкой картинки также пришлите.

Бонус: приведите теоретический анализ скорости сходимости для рассматриваемых методов и сравните его с Вашими графиками.

2. Вычисление сопряжённых функций (4 pts)

1. (1 pts) Найдите сопряжённую функцию к степенной функции $f(x) = x^p$ при $p > 1$ и $p < 0$

2. (1 pts) Пусть для функции $f(\mathbf{x})$ Вы знаете сопряжённую $f^*(\mathbf{y})$. Выразите через $f^*(\mathbf{y})$ функцию, сопряжённую к $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})$

3. (1 pts) Найдите сопряжённую функцию к $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^\top \mathbf{x} + c$ при $\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n_+$ и при $\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n_{++}$

4. (1 pts) Найдите сопряжённую функцию для функции $f(\mathbf{x}) = \max\limits_{i=1,\dots,n} x_i$

3. Условия оптимальности KKT (6 pts)

1. (1 pts) Решите задачу методом множителей Лагранжа:

$$
\begin{aligned}
&\min_{(x,y)} (x-3)^2 - (y-2)^2 \\
\text{s.t. } & y = x + 1 \\
& y \leq -x + 3
\end{aligned}
$$

2. (1 pts) Для задачи

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} x_1^2 + 2x_2^2 + x_3 \\
\text{s.t. } & |x_1 - 2x_2 + 3x_3| \leq 4
\end{aligned}
$$

найдите множество стационарных точек и проверьте будут ли они решениями или являются седловыми. Обратите внимание, что функуия ограничений-неравенств не является дифференцируемой.

3. (1 pts) Для задачи

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2 \\
\text{s.t. } & \max(x_1 + x_2 + 1, x_1 - x_2 - 1) + 1 \leq 0
\end{aligned}
$$

найдите множество стационарных точек и проверьте будут ли они решениями или являются седловыми. Обратите внимание, что функуия ограничений-неравенств не является дифференцируемой.

4. (2 pts) Получите выражение для решения следующей задачи:

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{X}\in\mathbf{S}^n_{++}} \operatorname{trace}(\mathbf{X}) - \log\det \mathbf{X} \\
\text{s.t. } & \mathbf{X}\mathbf{z} = \mathbf{y},
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{y}^\top \mathbf{z} = 1$.

5. (1 pts) Рассмотрите задачу

$$
\begin{aligned}
&\min -3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2(x_1 + x_2 + x_3) \\
\text{s.t. } & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1
\end{aligned}
$$

   (a) Решите задачу, используя условия ККТ, при необходимости воспользуйтесь алгоритмами численного решения нелинейных уравнений

   (b) Является ли задача выпуклой?

4. Введение в теорию двойственности (6 pts)

1. (1 pts) Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &\min x^2 + 1 \\ \text{s.t. } &(x-1)(x-4) \le 0 \end{aligned} \tag{1}$$

   (a) Решите прямую задачу с помощью необходимых условий экстремума

   (b) Нарисуйте целевую функцию, допустимое множество, покажите оптимальное значение[1].

   (c) Нарисуйте график лагранжиана для нескольких (> 2) неотрицательных значений λ. Проверьте, что $p^* \ge \inf_x L(x, \lambda)$

   (d) Сформулируйте и решите двойственную задачу. Выполняется ли сильная двойственность?

2. (2 pts) Покажите, что задача о минимальном разрезе двойственна задаче о максимальном потоке. Выполняется ли сильная двойственность?

3. (2 pts) Найдите двойственную задачу к задаче бинарного линейного программирования:

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } &x_i(1 - x_i) = 0, \; i = 1, \dots, n \\ &\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \end{aligned} \tag{2}$$

   Метод поиска приближённых решений в задачах дискретной оптимизации, основанный на построении двойственной задачи уже в непрерывном пространстве называется *релаксацией Лагранжа*.

   Докажите, что нижняя оценка, которую даёт релаксация Лагранжа совпадает с оценкой, которую даёт решение непрерывной релаксации исходной задачи

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } &0 \le x_i \le 1, \; i = 1, \dots, n \\ &\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \end{aligned} \tag{3}$$

   Также покажите, что решение этой задачи действительно даёт оценку снизу на решение задачи (2).

4. (1 pts) Рассмотрите задачу

$$\begin{aligned} &\min_{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_{++}} e^{-x} \\ \text{s.t. } &\frac{x^2}{y} \le 0 \end{aligned}$$

   и проверьте является ли она выпуклой. Найдите её решение. Постройте двойственную задачу и найдите её решение. Чему равен зазор двойственности и выполняется ли сильная двойственность? Почему?

[1]Рисовать можно ручкой на листочке и прислать фото. Главное, чтобы рисунок был читаем! Если рисунок будет выполнен в TikZ, Вы получите бонусные баллы