

Группа М3213

К работе допущен \_\_\_\_\_

Студент Алексеева Виктория,  
Балакирева Виктория

Работа выполнена \_\_\_\_\_

Преподаватель Громова Наира  
Рустемовна

Отчет принят \_\_\_\_\_

## Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №1.04

### Цели работы:

1. Проверка основного закона динамики вращения.
2. Проверка зависимости момента инерции от положения масс относительно оси вращения.

### Задачи:

1. Измерение времени падения груза при разной массе груза и разном положении утяжелителей на крестовине.
2. Расчёт ускорения груза, углового ускорения крестовины и момента силы натяжения нити.
3. Расчёт момента инерции крестовины с утяжелителями и момента силы трения.
4. Исследование зависимости момента силы натяжения нити от углового ускорения. Проверка основного закона динамики вращения.
5. Исследование зависимости момента инерции от положения масс относительно оси вращения. Проверка теоремы Штейнера.

## Объект исследования:

Вращательное движение. Маятник Обербека

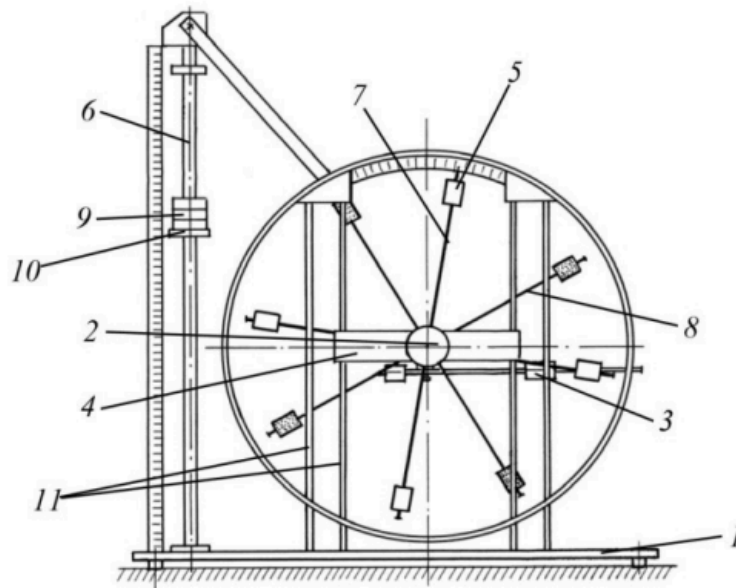
## Формулы:

Название	Формула	№
Второй закон Ньютона	$ma = mg - T$	1
Ускорение	$a = \frac{2h}{t^2}$	2
Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{2a}{d}$	3
Сила натяжения нити	$T = m(g-a)$	4
Момент силы	$M = \frac{md}{2} (g - a)$	5
Основной закон динамики вращения для крестовины	$I\varepsilon = M - M_{тр}$	6
Теорема Штейнера для момента инерции	$I = I_0 + 4m_{ут}R^2$	7
Момент силы натяжения нити	$M = I\varepsilon + M_{тр}$	8
Расстояние между осью О вращения и центром С утяжелителя	$R = l_1 + (n - 1)l_0 + \frac{1}{2}b$	9

$\sigma$ - среднеквадратично е отклонение среднего значения	$\sigma\langle t \rangle = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (t_i - t_{cp})^2}$	10
Формула коэффициента b прямой при МНК	$\frac{\sum (x_i - x')(y_i - y')}{\sum (x_i - x')^2}$	11
Формула коэффициента a прямой при МНК	$a = y' - b * x'$	12

Масса каретки	(47,0±0,5) г
Масса шайбы	(220,0±0,5) г
Масса грузов на крестовине	(408,0±0,5) г
Расстояние от оси вращения до первой риски	(57,0±0,5) мм
Расстояние между рисками	(25,0±0,2) мм
Диаметр ступицы	(46,0±0,5) мм
Диаметр груза на крестовине	(40,0±0,5) мм
Размер утяжелителя вдоль спицы	(40,0±0,5) мм
Значение коэффициента Стьюдента при доверительной вероятности $\alpha=0,95$ и числе измерений $N = 3$	$t_{\alpha,N} = 4,3$

## Установка:



1 – основание; 2 – рукоятка сцепления крестовин; 3 – устройство принудительного трения; 4 – поперечина; 5 – груз крестовины; 6 – трубчатая направляющая; 7 – передняя крестовина; 8 – задняя крестовина; 9 – шайбы каретки; 10 – каретка; 11 – система передних стоек.

№	Наименование	Тип прибора	Используемый диапазон	Погрешность прибора
1	Секундомер	цифровой	0,00-15,00 с	0,005 с
2	Металлическая линейка	физический	0-750 мм	0,5 мм

## Ход работы:

Таблица 1. Результаты прямых измерений.

Масса груза, г		Положение утяжелителей					
		1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
m <sub>1</sub>	t <sub>1</sub>	4,48	5,62	6,7	7,39	8,23	9,98
	t <sub>2</sub>	4,05	5,53	6,9	7,36	8,51	9,55
	t <sub>3</sub>	4,15	5,75	6,78	7,58	7,53	9,5
	t <sub>ср</sub>	4,22667	5,63333	6,79333	7,44333	8,09	9,67667

m <sub>2</sub>	t <sub>1</sub>	3,06	3,88	4,85	5,4	6,01	6,91
	t <sub>2</sub>	3,43	4,15	5	5,41	6,13	7,01
	t <sub>3</sub>	3,3	4,00	4,65	5,41	6	7,01
	t <sub>ср</sub>	3,26333	4,01	4,83333	5,40667	6,04667	6,97667
m <sub>3</sub>	t <sub>1</sub>	2,85	3,51	3,66	4,34	4,8	5,81
	t <sub>2</sub>	2,63	3,46	3,9	4,28	5,15	5,8
	t <sub>3</sub>	2,68	3,51	3,98	4,31	5,04	6,1
	t <sub>ср</sub>	2,72	3,49	3,84667	4,31	4,99667	5,90333
m <sub>4</sub>	t <sub>1</sub>	2,3	2,9	3,28	3,86	4,32	4,88
	t <sub>2</sub>	2,55	2,66	3,19	3,88	4,66	5,13
	t <sub>3</sub>	2,53	3,03	3,16	3,84	4,4	4,95
	t <sub>ср</sub>	2,46	2,86333	3,21	3,86	4,46	4,98667

Таблица 2. Расчет результатов косвенных измерений

Масса груза, г		Положение утяжелителей					
		1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
m <sub>1</sub>	a, м/с <sup>2</sup>	0,07837	0,04412	0,03034	0,02527	0,02139	0,01495
	ε, рад/с <sup>2</sup>	<b>3,40725</b>	<b>1,91809</b>	<b>1,31897</b>	<b>1,09866</b>	<b>0,93004</b>	<b>0,65005</b>
	M, кг/м <sup>2</sup>	<b>0,0597</b>	<b>0,05991</b>	<b>0,06</b>	<b>0,06003</b>	<b>0,06005</b>	<b>0,06009</b>
	t <sub>ср</sub>	4,22667	5,63333	6,79333	7,44333	8,09	9,67667
m <sub>2</sub>	a, м/с <sup>2</sup>	0,131464	0,08706	0,05993	0,04789	0,03829	0,02876
	ε, рад/с <sup>2</sup>	<b>5,7158</b>	<b>3,7854</b>	<b>2,60559</b>	<b>2,08229</b>	<b>1,66482</b>	<b>1,25056</b>
	M, кг/м <sup>2</sup>	<b>0,1083</b>	<b>0,10879</b>	<b>0,1091</b>	<b>0,10923</b>	<b>0,10934</b>	<b>0,10945</b>
	t <sub>ср</sub>	3,26333	4,01	4,83333	5,40667	6,04667	6,97667
m <sub>3</sub>	a, м/с <sup>2</sup>	0,18923	0,11494	0,09461	0,07537	0,05607	0,04017
	ε, рад/с <sup>2</sup>	<b>8,2274</b>	<b>4,98793</b>	<b>4,11369</b>	<b>3,27677</b>	<b>2,43803</b>	<b>1,74665</b>

	M, кг/м <sup>2</sup>	<b>0,15628</b>	<b>0,15749</b>	<b>0,15782</b>	<b>0,15813</b>	<b>0,15845</b>	<b>0,15871</b>
	t <sub>ср</sub>	2,72	3,49	3,84667	4,31	4,99667	5,90333
m <sub>4</sub>	a, м/с <sup>2</sup>	0,23134	0,17076	0,13587	0,09396	0,07038	0,0563
	ε, рад/с <sup>2</sup>	<b>10,05843</b>	<b>7,42431</b>	<b>5,90732</b>	<b>4,08532</b>	<b>3,06006</b>	<b>2,44782</b>
	M, кг/м <sup>2</sup>	<b>0,20401</b>	<b>0,20531</b>	<b>0,20605</b>	<b>0,20694</b>	<b>0,20745</b>	<b>0,20775</b>
	t <sub>ср</sub>	2,46	2,86333	3,21	3,86	4,46	4,98667

Рассчитаем для каждого положения утяжелителей по методу наименьших квадратов (МНК) момент инерции крестовины I с утяжелителями и момент силы трения M<sub>тр</sub>. Теоретическая связь между моментом силы натяжения нити и угловым ускорением крестовины описывается уравнением:  $M = M_{тр} + Iε$ .

Для начала найдем средние значения M и ε:

$$M' = \frac{1}{n} \sum M_i$$

$$\varepsilon' = \frac{1}{n} \sum \varepsilon_i$$

Используя формулу для МНК, вычислим I по формуле:

$$I = \frac{\sum (\varepsilon_i - \varepsilon') (M_i - M')}{\sum (\varepsilon_i - \varepsilon')^2}$$

Найдем момент силы трения M<sub>тр</sub> по формуле:

$$M_{тр} = M' - I\varepsilon'$$

Найдем для каждого положения утяжелителей расстояние R между осью вращения и центром утяжелителя:

$$R = l_1 + (n - 1)l_0 + \frac{1}{2}b$$

где l<sub>1</sub> – расстояние от оси вращения до первой риски; n – номер риски, на которой установлены утяжелители; l<sub>0</sub> – расстояние между соседними рисками; b – размер утяжелителя вдоль спицы.

Номер риски	I, кг/м	M <sub>тр</sub> , Н*М	R, м	R <sup>2</sup> , м <sup>2</sup>
1	0,021329	-0,014080	0,077	0,00592
2	0,026901	0,011040	0,102	0,01040
3	0,031693	0,022749	0,127	0,01612
4	0,047983	0,007110	0,152	0,02310

5	0,068458	-0,004683	0,177	0,03133
6	0,083224	0,007186	0,202	0,04080

На основе найденных значений  $I$  и  $R^2$  с помощью МНК определим значения  $I_0$  и  $t_{\text{мт}}$ , а также их погрешности  $\Delta I_0$  и  $\Delta t_{\text{мт}}$ .

$$I = I_0 + 4t_{\text{мт}}R^2$$

По МНК:

$$I' = \frac{1}{n} \sum I_i = 0,0466 \text{ кг/м}^2$$

$$R^{2'} = \frac{1}{n} \sum R_i^2 = 0,02128 \text{ м}^2$$

$$4t_{\text{мт}} = \frac{\sum (R_i - R^{2'}) (I_i - I')}{\sum (R_i - R^{2'})^2} = 1,86631 \text{ кг}$$

$$I_0 = I' - 4t_{\text{мт}}R^2 = 0,00688 \text{ кг/м}^2$$

## Погрешности:

1. Найдем погрешность среднего значения времени для первого значения в таблице.

$$t_{\text{ср}} = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{3} = 4,22667 - \text{среднее время измерений.}$$

$$\Delta t_1 = \sqrt{(t_1 - t_{\text{ср}})^2 + (t_2 - t_{\text{ср}})^2 + (t_3 - t_{\text{ср}})^2} =$$

$$\sqrt{(4,48 - 4,22667)^2 + (4,05 - 4,22667)^2 + (4,15 - 4,22667)^2} = 0,31822 \text{ с}$$

$$\sigma\langle t \rangle = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (t_i - t_{\text{ср}})^2} = 0,129915 - \text{среднеквадратичное отклонение среднего значения.}$$

$\alpha = 0,95$ ,  $t_{\alpha, N} = 4,3$  - коэффициент Стьюдента.

Доверительный интервал:

$$\Delta t_1 = t_{\alpha, N} \cdot \sigma\langle t \rangle = 4,3 \cdot 0,129915 = 0,558632$$

2. Найдем погрешность для первых значений ускорения груза ( $a$ ), углового ускорения ( $\epsilon$ ), момента силы ( $M$ ).

$$\Delta a_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial h} \Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial t} \Delta t\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{t^2} \Delta h\right)^2 + \left(\frac{4h}{t^3} \Delta t\right)^2}$$

$$\Delta a_1 = \sqrt{\left(\frac{2}{4,22667^2} \cdot 0,005\right)^2 + \left(\frac{4 \cdot 0,07}{4,22667^3} \cdot 0,31822\right)^2} = 0,0118135$$

$$\Delta \varepsilon_1 = \sqrt{\left(\frac{2}{0,046} * 0,0118135\right)^2 + \left(\frac{2^{*0,07837}}{0,046^2} \Delta * 0,0005\right)} = 0,514964$$

$$\Delta M1 = \sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial m} \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial d} \Delta d\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{md(g-1)}{2} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{d(g-a)}{2} \Delta m\right)^2 + \left(\frac{m(g-a)}{2} \Delta d\right)^2}$$

$$\Delta M1 = \sqrt{\left(\frac{0,267*0,046(9,81-1)}{2} * 0,0118135\right)^2 + \left(\frac{0,0046(9,81-0,07837)}{2} * 0,0005\right)^2 + \left(\frac{0,267(9,81-0,07837)}{2} * 0,0005\right)^2} = 0,000918141$$

$$\Delta I_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial I_0}{\partial I'} \Delta I'\right)^2 + \left(\frac{\partial I_0}{\partial (4m_Y T)} \Delta 4m_Y T\right)^2 + \left(\frac{\partial I_0}{\partial R^2} \Delta R^2\right)^2} = 0,0059 \text{ K/M}^2$$

$$\Delta m_{YT} = \sqrt{\left(\frac{\partial m_{YT}}{\partial R_i} \Delta R_i\right)^2 + \left(\frac{\partial m_{YT}}{\partial I_i} \Delta I_i\right)^2} = 0,15595 \text{ кг}$$

График 1. Зависимости момента силы натяжения нити и углового ускорения крестовины для всех положений утяжелителей  $M(\epsilon)$

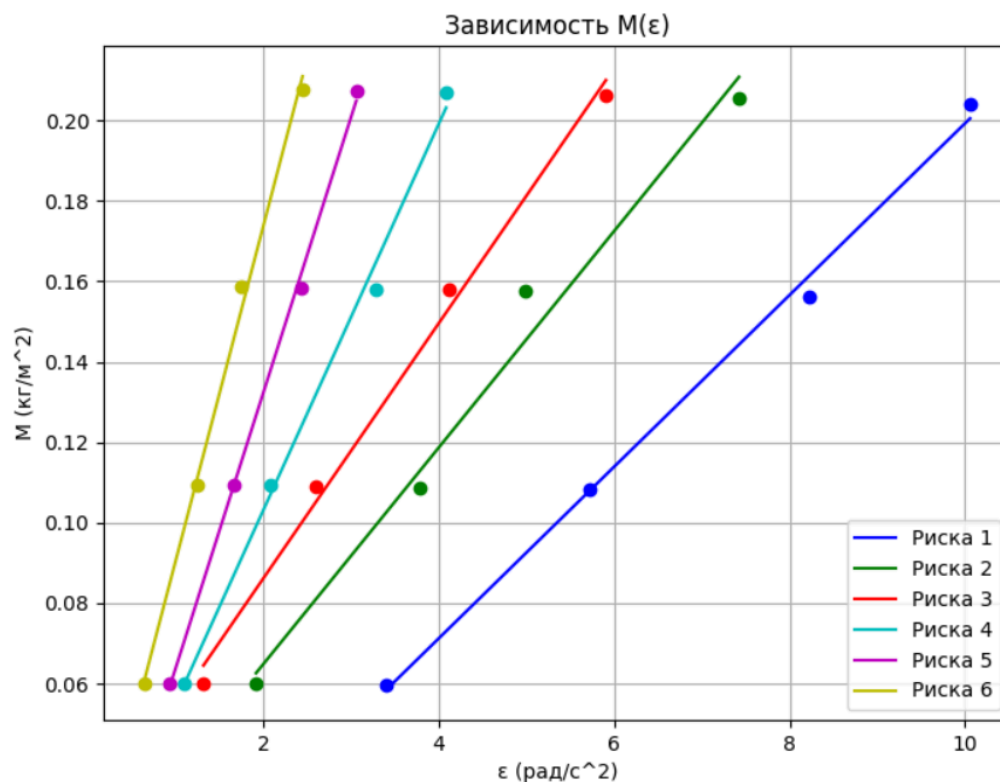
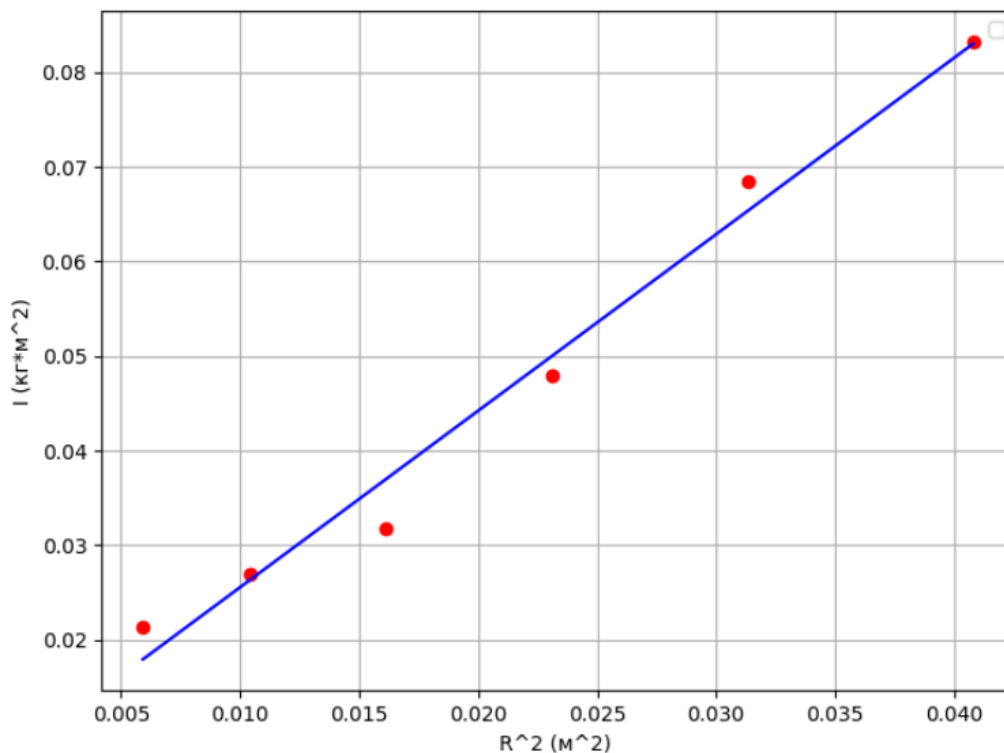




График 2. Зависимость момента инерции крестовины от расстояния между центрами грузов и осью вращения  $I(R^2)$ .



## Вывод:

В результате проверки основного закона динамики вращения установлено, что момент силы натяжения нити  $M$  линейно зависит от углового ускорения крестовины  $\epsilon$ , что подтверждает закон динамики вращательного движения. Изучение зависимости момента инерции от положения масс относительно оси вращения показало, что с увеличением расстояния утяжелителей от оси вращения момент инерции возрастает, что соответствует теореме Штейнера.

Были произведены измерения времени падения груза при различных массах и положении утяжелителей на крестовине, рассчитаны ускорение груза, угловое ускорение крестовины, момент силы натяжения нити, момент инерции системы и момент силы трения. Анализ зависимостей показал, что положения утяжелителей значительно влияют на момент инерции, что подтверждает экспериментальную часть теории.