Programowanie Funkcyjne

Zarys Wstępu do Podstaw Teorii Dowodu

Piotr Polesiuk

ii-uwr

21 października 2024

Formuły logiczne i dowody

- Formuły są drzewami.
- W minimalnym intuicjonistycznym rachunku zdań formuły składają się z:
  - Zmiennych zdaniowych p, q, r, $\dots$
  - 0-arnego spójnika fałszu $\bot$
  - Binarnego spójnika implikacji $\rightarrow$.
- Formuły nie mają nawiasów. Nawiasy służą tylko do wypisywania drzew.
- Przykłady
  - p
  - $p \rightarrow \bot$
  - $p \rightarrow q \rightarrow r$
  - $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
- Strzałka zwyczajowo wiąże w prawo (ostatnie dwie formuły są różne).

Dowodliwość

- Dowodliwość ($\vdash$) jest relacją wiążącą skończony zbiór formuł Γ zwany przesłankami z formułą φ zwaną konkluzją.
- Dowodliwość zapisujemy $\Gamma \vdash \varphi$.
- Zbiór przesłanek zwyczajowo pomijamy gdy jest pusty, np.

$$\vdash p \to p$$

- Dowodliwość definiujemy indukcyjnie, jako najmniejszy zbiór par $\Gamma \vdash \varphi$ (zwanych osądami) zamknięty na pewien zestaw reguł (na następnym slajdzie).

Definicja dowodliwości

(To jest definicja, a nie własność!)

- Każdy osąd postaci $\{\varphi\} \vdash \varphi$ jest dowodliwy.
- Jeśli $\Gamma \vdash \psi$ jest dowodliwe, to $\Gamma \setminus \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$ też jest dowodliwe.
- Jeśli $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ oraz $\Delta \vdash \varphi$ są dowodliwe, to $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$ też jest dowodliwe.

Można jeszcze dołożyć regułę, choć da się ją wyprowadzić z pozostałych.

- Jeśli $\Gamma \vdash \psi$ jest dowodliwe, to $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ też jest dowodliwe

Dowodliwość to najmniejsza relacja zamknięta na powyższe reguły.

Reguły dowodzenia i drzewa dowodu

- Relację dowodliwości często przedstawia się w postaci reguł:

$$\frac{}{\{\varphi\} \vdash \varphi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \setminus \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \quad \Delta \vdash \varphi}{\Gamma \cup \Delta \vdash \psi}$$

- Natomiast dowodliwe osądy mają drzewo dowodu zbudowane z instancji powyższych reguł, np.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{p \to q\} \vdash p \to q} \qquad \dfrac{}{\{p\} \vdash p}}{\{p \to q, p\} \vdash q}}{\{p\} \vdash (p \to q) \to q}}{\vdash p \to (p \to q) \to q}$$

- Drzewa dowodu, to też drzewa i można na nich operować.
- Ale często nas interesuje tylko fakt istnienia takiego drzewa.

Reguły w przód i w tył

- Podane reguły to są tak zwane reguły w przód, które są wygodne do konstrukcji drzewa dowodu od liści do korzenia.
- W regułach w przód informacja o przesłankach płynie od liści do korzenia.
- Częściej w literaturze można spotkać reguły w tył, gdzie informacja o przesłankach płynie od korzenia do liści.

$$\frac{\varphi \in \Gamma}{\Gamma \vdash \varphi} \qquad \frac{\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$$

- W logice intuicjonistycznej łatwiej się konstruuje dowody w tył.
- Obie definicje są równoważne.