Прв парцијален испит од Математика 1

28.11.2020 год.

(Б и Г паралелка)

1. Дадена е низата со општ член $a_n = -\frac{2^{n+2}}{(n+2)!}$, $n \in \mathbb{N}$.
   а) [3б] Најди ги првите три члена од низата.

   б) [5б] Испитај ја монотоноста на низата $\{a_n\}$.

   в) [4б] Испитај ја ограниченоста на низата $\{a_n\}$.

   г) [5б] Дали низата $\{a_n\}$ конвергира? Образложи го одговорот!

   д) [5б] Запиши една рекурентна врска за дадената низа.

2. Пресметај ги следниве гранични вредности:

   a) [7б] $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{3x^2+2} \sin\frac{1}{x}$,

   б) [7б] $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^3}{3x^2+2} \sin\frac{1}{x}$,

   в) [10б] $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{(e^{\frac{1}{x}}-5)\ |2x|}{ln(1+3x)}$.

3. [10б] Пресметај ја приближно вредноста $\ln(0{,}99)$ користејќи извод на функција.

4. Дадена е функцијата $f(x) = x^2$, $x \geq 0$.
   а) [10б] Напиши аналитички израз за функцијата $F(x)$, која претставува непарно продолжување на функцијата $f(x)$, а потоа испитај ја диференцијабилноста на функцијата $F(x)$ во точката $x = 0$. Запиши го аналитичкиот израз на функцијата $g(x) = F^{'}(x)$.

   б) [10б] Скицирај го графикот на функцијата $g(x) = F'(x)$ и од него утврди дали оваа функција е непрекината и диференцијабилна на целата реална оска. Образложи го одговорот!

5. Дадени се кривите $C_1: (x-a)^2 + y^2 = 8$ и $C_2: (x+a)^2 + y^2 = 8$ (a-const.)

   а) [6б] Најди го првиот извод на дадените функции.

   б) [10б] Најди ги пресечните точки на двете криви, а потоа напиши ги равенките на тангентите на секоја од кривите во пресечните точки.

   в) [8б] Каков услов треба да исполнува параметарот a за дадените криви да се сечат под прав агол (агол меѓу две криви е аголот помеѓу нивните тангенти во пресечната точка)?

Решенија на задачите:

1. $a_n = -\frac{2^{n+2}}{(n+2)!}$, $n \in \mathbb{N}$

а) $a_1 = -\frac{2^{1+2}}{(1+2)!} = -\frac{2^3}{3!} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$

$a_2 = -\frac{2^{2+2}}{(2+2)!} = -\frac{2^4}{4!} = -\frac{16}{24} = -\frac{2}{3}$

$a_3 = -\frac{2^{3+2}}{(3+2)!} = -\frac{2^5}{5!} = -\frac{32}{120} = -\frac{4}{15}$

б) $a_{n+1} - a_n = -\frac{2^{n+1+2}}{(n+1+2)!} + \frac{2^{n+2}}{(n+2)!} = -\frac{2^{n+3}}{(n+3)!} + \frac{2^{n+2}}{(n+2)!} = -\frac{2^{n+3}}{(n+3)(n+2)!} + \frac{2^{n+2}}{(n+2)!}$

$= \frac{-2^{n+3} + (n+3)2^{n+2}}{(n+3)(n+2)!} = \frac{2^{n+2}(n+3-2)}{(n+3)!} = \frac{2^{n+2}(n+1)}{(n+3)!} > 0$

$\Rightarrow a_{n+1} > a_n \Rightarrow \{a_n\}$ е монотоно растечка низа

Може да се провери и дека $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, $a_n < 0$, $n \in \mathbb{N}$

в) $a_1 = -\frac{4}{3} \le a_n = -\frac{2^{n+2}}{(n+2)!} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{a_n\}$ е ограничена одгоре и оддолу $\Rightarrow \{a_n\}$ е ограничена

г) Бидејќи $\{a_n\}$ е монотоно растечка и ограничена одгоре, следува дека е конвергентна низа.

д) $a_n = -\frac{2^{n+2}}{(n+2)!} = -\frac{2 \cdot 2^{n+1}}{(n+2)(n+1)!} = +\frac{2}{n+2}\left(-\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\right) = \frac{2}{n+2} a_{n-1}$

$a_n = \frac{2a_{n-1}}{n+2}$, $a_0 = -\frac{4}{3}$, $n \in \mathbb{N}$

2. а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{3x^2+2} \sin\frac{1}{x} = 0$ бидејќи $\sin\frac{1}{x}$ е ограничена ф-ја $\left(-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1\right)$, а $\frac{x^3}{3x^2+2}$ е бесконечно мала ф-ја $\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{3x^2+2} = 0\right)$

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3}{3x^2+2} \sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{3x^2+2} \cdot \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$

в) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{(e^{\frac{1}{x}} - 5)|2x|}{\ln(1+3x)} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{(e^{\frac{1}{x}} - 5)(-2x)}{\ln(1+3x)} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-2(\overset{0}{e^{\frac{1}{x}}} - 5)}{3\underbrace{\frac{\ln(1+3x)}{3x}}_{1}} = \frac{10}{3}$

3. $\ln 0{,}99 = ?$

$f(x) = \ln x$, $D_f = (0, \infty)$

$x_0 = 1$, $\Delta x = -0{,}01$

$f(x_0) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f'(x_0) = 1$

$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$

$\ln 0{,}99 \approx f(1) + f'(1)(-0{,}01)$

$\ln 0{,}99 \approx 0 - 0{,}01$

$\underline{\ln 0{,}99 \approx -0{,}01}$

4. $f(x)=x^2,\ x\geq 0$

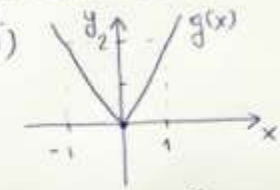
а) $F(x)=\begin{cases}x^2, & x\geq 0\\ -x^2, & x<0\end{cases}$ $\quad F'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{F(0+\Delta x)-F(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{-(\Delta x)^2-0}{\Delta x}=0$

$F'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{F(0+\Delta x)-F(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{(\Delta x)^2-0}{\Delta x}=0$

$\Rightarrow F'(0)=0$ = $F(x)$ е диференцијабилна во $x=0$.

$g(x)=F'(x)=\begin{cases}2x, & x\geq 0\\ -2x, & x<0\end{cases}=|2x|$

б)



$g(x)$ е непрекината ф-ја (нејзиниот график може да се нацрта без да се подигне раката од хартијата), но не е диференцијабилна (има шилц во $x=0$, односно наклоните на кривата лево и десно во $x=0$ се различни)

5. $C_1:(x-a)^2+y^2=8$
$C_2:(x+a)^2+y^2=8$
$a=const$

а) $2(x-a)+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x-a}{y}=\frac{a-x}{y}$

$2(x+a)+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x+a}{y}$

б) $C_1\cap C_2=?$

$(x-a)^2+\cancel{y^2}=(x+a)^2+\cancel{y^2}$

$\cancel{x^2}-2ax+a^2=\cancel{x^2}+2ax+a^2$

$-2ax=2ax \Rightarrow -4ax=0$

Ако $a\neq 0$, пресекот на кривите е во точките $x=0,\ y=\pm\sqrt{8-a^2}$

Ако $a=0$ кривите се совпаѓаат, т.е. имаат бесконечно многу заеднички точки.

За C_1: $t:\ y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$

$y\mp\sqrt{8-a^2}=\frac{a}{\pm\sqrt{8-a^2}}\cdot x$

$y=\frac{ax}{\pm\sqrt{8-a^2}}\pm\sqrt{8-a^2}$

За C_2: $y=-\frac{ax}{\pm\sqrt{8-a^2}}\pm\sqrt{8-a^2}$

в) За кривите C_1 и C_2 да се сечат под прав агол треба $k_1=-\frac{1}{k_2}$, односно $k_1\cdot k_2=-1$, при што k_1 и k_2 се коефициентите на правец на тангентите на кривите во пресечните точки, соодветно

$k_1=-\frac{x_0-a}{y_0}\qquad k_2=-\frac{x_0+a}{y_0}$

$k_1\cdot k_2=\frac{(x_0-a)(x_0+a)}{y_0^2}=$

$=\frac{x_0^2-a^2}{y_0^2}=\frac{0-a^2}{8-a^2}=\frac{a^2}{a^2-8}$

$\Rightarrow \frac{a^2}{a^2-8}=-1$

$a^2=-a^2+8$

$2a^2=8$

$a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2$