Домашна задача 1 - Електростатика

Викторија Митревска
151/2021
Паралелка В

(1) Доколку претпоставиме дека некое количество матомен електрицитет е внесено во внатрешноста на спроводно тело и дека спроводниот материјал се простира бесконечно во просторот, слободните електрични полнежи би требало да се оддалечат до бесконечност, но бидејќи спроводното тело зафаќа ограничен простор, слободните електрични полнежи најдалеку што можат да отидат е граничната површина на телото. и при тоа тие не можат да ја напуштат. Дебелината на слојот на вишокот електрични полнежи на површината е многу тенок и може да се смета дека настанува идеална површинска распределба на електрични полнежи. Штом тие стигнат до површината настанува рамнотежна состојба, при која вкупната сила е нула и настанува мирување. При тоа треба да се исполнат неколку услови и тоа:

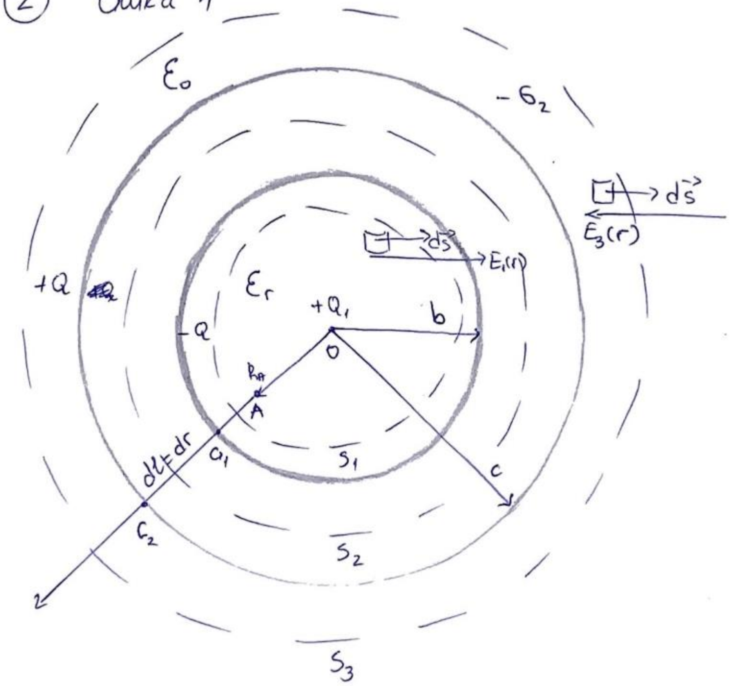
- Нема вишок електрични полнежи во внатрешноста на спроводникот $Q = 0$
- Електричното поле во внатрешноста на спроводникот е еднакво на нула $E = 0$
- На површината на спроводникот постои само нормална компонента на електрично поле односно $E_{tang} = 0$
- Потенцијалот е константен на површината и во внатрешноста на спроводникот. $V = const$

Релацијата што ги поврзува векторот на електрично поместување и векторот на електрично поле е $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

Домашна Задача 1

Викторија Митревска
151/2021
Паралелка B

(2) Слика 4



$Q_1 = 100\ pC$

$Q_2 = 50\ pC$

$\sigma_1 = 3/(4\pi)\ nC/m^2$

$\sigma_2 = 2/(4\pi)\ nC/m^2$

$a = 1cm$

$b = 3cm$

$c = 4cm$

$R_A = 2cm$

$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \approx 10^{-9}/36\pi\ F/m$

$\varepsilon_r = 3$

б)

$r \leq b$

$$\oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = \Sigma Q$$

$$\oint_{S_1} \vec{D}_1\, d\vec{S}_1 = Q_1$$

$$\oint_{S_1} \vec{D}_1\, dS_1 \cos 0 = Q_1$$

$$D_1 \oint_{S_1} dS_1 = Q_1$$

$$D_1 S_1 = Q_1$$

$$D_1(r) = \frac{Q_1}{4\pi r^2} \quad (C/m^2)$$

$$E_1(r) = \frac{D_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\frac{Q_1}{4\pi r^2}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$E_1(r) = \frac{Q_1}{4\pi r^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad (V/m)$$

$c \geq r \geq b$

$$\oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = \Sigma Q$$

$$\oint_{S_2} \vec{D}_2\, d\vec{S}_2 = Q_1 - Q_1$$

$$\Rightarrow D_2 = 0$$

$$\Rightarrow E_2 = 0$$

$r \geq c$

$$\oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = \Sigma Q$$

$$\oint_{S_3} \vec{D}_3\, d\vec{S}_3 = Q_1 + Q_1 - Q_1 - Q_2$$

$$\oint_{S_3} \vec{D}_3\, dS_3 \cos\pi = Q_1 - Q_2$$

$$\cancel{D_3 S_3 =} 0$$

$$-D_3 \oint_{S_3} dS_3 = Q_1 - Q_2$$

$$-D_3 S_3 = Q_1 - Q_2$$

$$D_3(r) = \frac{Q_2 - Q_1}{4\pi r^2} \quad (C/m^2)$$

$$E_3(r) = \frac{Q_2 - Q_1}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \quad (V/m)$$

$$D_3(r) = \frac{4\pi c^2 \sigma_2 - Q_1}{4\pi r^2} \quad (C/m^2)$$

$$E_3(r) = \frac{4\pi c^2 \sigma_2 - Q_1}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \quad (V/m)$$

Домашна задача 1

Викторија Митревска
151/2021

Паралелка В

в) $V_A = \int_A^{Ref} \vec{E}\, d\vec{l} = \int_A^{\infty} \vec{E}\, d\vec{r} = \int_A^{G_1} \vec{E}_1\, d\vec{r} + \int_{G_1}^{G_2} \cancelto{0}{\vec{E}_2}\, d\vec{r} + \int_{G_2}^{\infty} \vec{E}_3\, d\vec{r} =$

$$= \int_A^{G_1} E_1(r)\, dr \cos 0 + \int_{G_2}^{\infty} E_3(r)\, dr \cos\pi = \int_{R_A}^{b} \frac{Q_1}{4\pi r^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r}\, dr - \int_c^{\infty} \frac{4\pi c^2 \sigma_2 - Q_1}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\, dr =$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{R_A}^{b} - \frac{4\pi c^2 \sigma_2 - Q_1}{4\pi \varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{c}^{\infty} =$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}\left(-\frac{1}{R_A} + \frac{1}{b}\right) - \frac{4\pi c^2 \sigma_2 - Q_1}{4\pi \varepsilon_0 c} \quad (V)$$

г) $W_e = W_{e_1} + W_{e_2} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \int_V (E_1(r))^2\, dV + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V (E_3(r))^2\, dV =$

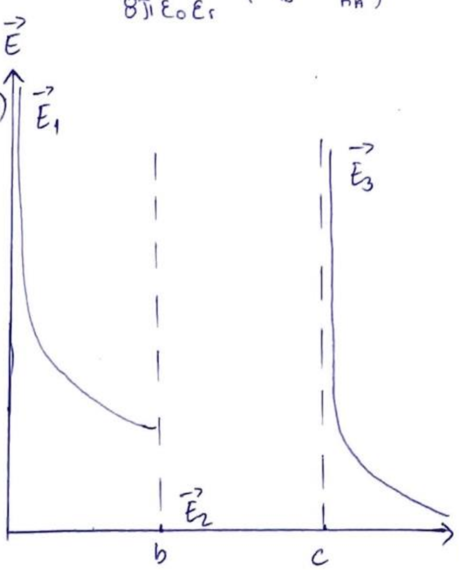
$$= \frac{1}{2} \cancel{\varepsilon_0} \cancel{\varepsilon_r} \int_{R_A}^{b} \frac{Q_1^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0^2 \varepsilon_r^2 r^4} \cdot 4\pi r^2\, dr + \frac{1}{2} \cancel{\varepsilon_0} \int_c^{\infty} \frac{(4\pi c^2 \sigma_2 - Q_1)^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0^2 r^4} \cdot 4\pi r^2\, dr =$$

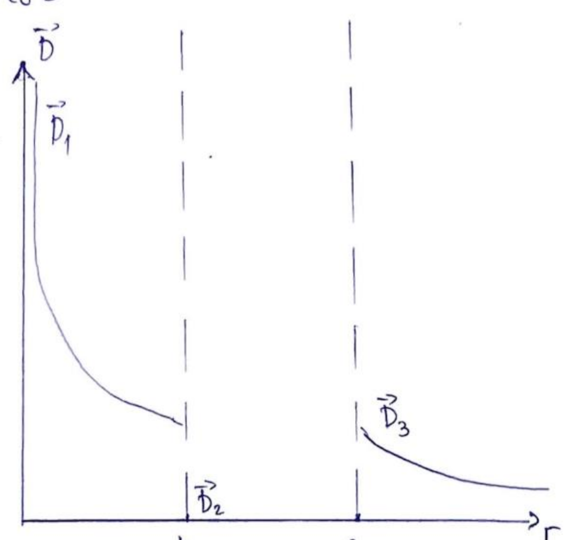
$$= \frac{1}{2} \int_{R_A}^{b} \frac{Q_1^2}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}\, dr + \frac{1}{2} \int_c^{\infty} \frac{(4\pi c^2 \sigma_2 - Q_1)^2}{4\pi \varepsilon_0 r^2}\, dr =$$

$$= \frac{Q_1^2}{8\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{R_A}^{b} + \frac{(4\pi c^2 \sigma_2 - Q_1)^2}{8\pi \varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{c}^{\infty} =$$

$$= \frac{Q_1^2}{8\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{R_A}\right) + \frac{(4\pi c^2 \sigma_2 - Q_1)^2}{8\pi \varepsilon_0 c} \quad (J)$$

а)





$$D_1 = \frac{Q_1}{4\pi r^2} = \frac{Q_1}{4\pi b^2} = \frac{100\cdot 10^{-12}}{4\pi\cdot 9} = \frac{100\cdot 10^{-12}}{36\pi} \approx \frac{3\cdot 10^{-12}}{\pi} \; (C/m^2)$$

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi r^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q_1}{4\pi b^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{100\cdot 10^{-12}}{\cancel{4\pi}\cdot\cancel{9}\cdot\frac{10^{-9}}{\cancel{36\pi}}\cdot 3} = \frac{100\cdot 10^{-12}}{3\cdot 10^{-9}} \approx 33\cdot 10^{-3} \; (V/m)$$

$$D_3 = \frac{4\pi c^2 \sigma_2 - Q_1}{4\pi r^2} = \frac{4\pi c^2\sigma_2 - Q_1}{4\pi c^2} = \frac{\cancel{4\pi}\cdot 16\cdot\frac{2}{\cancel{4\pi}}\cdot 10^{-9} - 100\cdot 10^{-12}}{4\pi\cdot 16} =$$

$$= \frac{32\cdot 10^{-9} - 100\cdot 10^{-12}}{64\pi} \approx \frac{\cancel{32}\cdot 10^{-9}}{\cancel{64}\pi} = \frac{10^{-9}}{2\pi} \; (C/m^2)$$

$$E_3 = \frac{4\pi c^2\sigma_2 - Q_1}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{4\pi c^2\sigma_2 - Q_1}{4\pi c^2 \varepsilon_0} = \frac{\cancel{4\pi}\cdot 16\cdot\frac{2}{\cancel{4\pi}}\cdot 10^{-9} - 100\cdot 10^{-12}}{\cancel{4\pi}\cdot 16\cdot\frac{10^{-9}}{\cancel{36\pi}_{\,9}}} =$$

$$= \frac{32\cdot 10^{-9} - 100\cdot 10^{-12}}{\frac{16\cdot 10^{-9}}{9}} = \frac{\cancel{10^{-9}}(32 - 100\cdot 10^{-3})}{\frac{16\cdot\cancel{10^{-9}}}{9}} = \frac{9\cdot(31,9)}{16} \approx 18 \; (V/m)$$

$$V_A = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{R_A}\right) - \frac{4\pi c^2\sigma_2 - Q_1}{4\pi\varepsilon_0 c} = \frac{100\cdot 10^{-12}}{\cancel{4\pi}\cdot\frac{10^{-9}}{\cancel{36\pi}_{\,\cancel{9}\,3}}\cdot\cancel{3}}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) -$$

$$- \frac{\cancel{4\pi}\cdot 16\cdot\frac{2}{\cancel{4\pi}} - 100\cdot 10^{-12}}{\cancel{4\pi}\cdot\frac{10^{-9}}{\cancel{36\pi}_{\,9}}\cdot\cancel{3}\,4} = \frac{100\cdot 10^{-12}}{3}\left(\frac{3-2}{6}\right) - \frac{32 - 100\cdot 10^{-12}}{\frac{4\cdot 10^{-9}}{9}} =$$

$$= \frac{100\cdot 10^{-12}}{9} - \frac{9\cdot 31,9}{4\cdot 10^{-9}} = 72\cdot 10^{9} \; (V)$$

$$W_e = \frac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{R_A}\right) + \frac{(4\pi c^2\sigma_2 - Q_1)^2}{8\pi\varepsilon_0 c} = \frac{(100\cdot 10^{-12})^2}{8\cancel{\pi}\cdot\frac{10^{-9}}{\cancel{36\pi}_{\,12}}\cdot\cancel{3}}\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{(\cancel{4\pi}\cdot 16\cdot\frac{2}{\cancel{4\pi}} - 100\cdot 10^{-12})^2}{8\cancel{\pi}\cdot\frac{10^{-9}}{\cancel{36\pi}_{\,9}}\cdot\cancel{4}}$$

$$= \frac{(100\cdot 10^{-12})^2}{\frac{4\,\cancel{8}\cdot 10^{-9}}{12}}\cdot\frac{1}{\cancel{6}\,3} + \frac{(32 - 100\cdot 10^{-12})^2}{\frac{8\cdot 10^{-9}}{9}} = \frac{\cancel{12}(100\cdot 10^{-12})^2}{\cancel{12}\cdot 10^{-9}} + \frac{9(32 - 10\cdot 10^{-12})^2}{8\cdot 10^{-9}} =$$

$$= \frac{8(100\cdot 10^{-12})^2 + 9(31,9)^2}{8\cdot 10^{-9}} = \frac{8\cdot 10^{-20} + 9216}{8\cdot 10^{-9}} = \frac{\cancel{8}(10^{-20} + 1152)}{\cancel{8}\cdot 10^{-9}} =$$

$$\approx \frac{1152}{10^{-9}} = 1,15\cdot 10^{12} \; (J)$$