**ИСПИТ ОД МАТЕМАТИКА 1**

(Б и Г паралелка) 6.09.2021 год.

а) (8 п) Дадени се низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, каде што $a_n = \frac{5n+1}{7n^2-3}$ и $b_n = \cos\frac{7n}{5} + 1$. Колку е $\lim_{n\to\infty} a_n$? Дали низата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена? Колку е $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$? Во случај да користиш некое тврдење, формулирај го истото.

б) (7 п) Пресметај ја граничната вредност

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \cdots + \frac{1}{5^{n+2}}}.$$

**2**. а) (5 п) Дефинирај непрекинатост и диференцијабилност на функција $f(x)$ во точката $x_0$.

б) (15 поени) Дадена е функцијата

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}, & x > 1 \\ \dfrac{1}{x-1}(e^{x-1} - 1), & x < 1 \end{cases}.$$

Дали постои $\lim_{x\to 1} f(x)$? Испитај непрекинатост и диференцијабилност на функцијата $f(x)$ во точката $x = 1$. Во случај да користиш некое тврдење, формулирај го истото.

**3.** Со равенката $3x - 2y^2 e^{x-1} = 2, y = y(x)$ е дадена крива.

а) (7 п) Одреди ги $y'$ и $\frac{dy}{dx}$.

б) (8 п) Напиши ги равенките на тангентата и нормалата на кривата во точката во која кривата се сече со $x$-оската.

**4.** (25 п) Испитај ги особините и скицирај го графикот на функцијата

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2}.$$

**5**. а) (13 п) Пресметај го интегралот

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 3}.$$

б) (12 п) Со помош на определен интеграл, пресметај ја плоштината на ликот заграден меѓу кривите $y = 2\mathrm{tg}x$ и $y = \sin x$ за $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

1) а) Задени се низите со општ член:

(8п) $$a_n = \frac{5n+1}{7n^2-3} \quad и \quad b_n = \cos\frac{7n}{5} + 1$$

Колку е $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$? Дали низата $\{b_n\}$ е ограничена

Колку е $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$? (образложи го одговорот)

б) Пресметај ја граничната вредност

(7п) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{n+2}}}$$

Реш: а) (2п) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n+1}{7n^2-3} = 0$

(3п) Низата $\{b_n\}$ е ограничена бидејќи $-1 \le \cos\frac{7n}{5} \le 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$0 \le \cos\frac{7n}{5} + 1 \le 2, \ \forall n \in \mathbb{N}$

(3п) $\lim\limits_{n\to\infty}(\underbrace{a_n}_{\to 0} \cdot \underbrace{b_n}_{\text{ограничена низа}}) = 0$ (Лимес од производ на бесконечно мала низа и ограничена низа е 0)

б) (7п) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{n+2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) / \left(1 - \frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{5^2}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right) / \left(1 - \frac{1}{5}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}}}{\frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{\frac{4}{5}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{20}} = \frac{20}{2} = 10$$

(Се користи формулата за збир на првите n членови кај геометриска прогресија $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$)

(2) а) Дефинирај непрекинатост и диференцијабилност
(5п) на ф-ја $f(x)$ во точката $x_0$.

б) Дадена е ф-јата
(15п.)
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}, & x>1\\[2mm] \dfrac{1}{(x-1)}(e^{x-1}-1), & x<1\end{cases}$$

Дали постои $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$? Испитај непрекинатост во точката и диференцијабилност на $f(x)$ во точката $x=0$. (Во случај да користиш некое тврдење, формулирај го).

Реш:

б) $$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{x^2+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=$$

(5п) $$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x^4-x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+\sqrt{x})}=\lim\frac{x(\underbrace{x^3-1}_{(x-1)(x^2+x+1)})(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{\cancel{(x-1)}(x^2+\sqrt{x})}=\frac{1\cdot(1+1+1)\cancel{(1+1)}}{\cancel{(1+1)}}=3$$

(2п) $$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}(e^{x-1}-1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=\left\{\begin{array}{l}x-1=t\\ x\to 1^-\Rightarrow t\to 0^-\end{array}\right\}$$

$$=\lim_{t\to 0^-}\frac{e^t-1}{t}=1$$

(2п) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\Rightarrow\nexists\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

$f(x)$ има прекин од I ред (скок) во $x=1$ $\Rightarrow$ (2п) $f$ не е диференцијабилна во $x=1$

(2п) бидејќи $3=f(1^+)\neq f(1^-)=1$

(2п) (Се користи тврдењето: Ако $f(x)$ е диференц. во $x_0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ е непрекината во $x_0$.)

(3) Со р-ката $3x-2y^2e^{x-1}=2$, $y=y(x)$ е дадена крива.

(7п) а) Одреди ги $y'(x)$ и $\frac{dy}{dx}$

(8п) б) Најди р-ката на тангентата и нормалата на кривата во точката во која кривата се сече со x-оската.

Реш: а) $3x-2y^2e^{x-1}=2 \quad /'_x$

$$3-2\left[(y^2)'_x e^{x-1}+y^2(e^{x-1})'\right]=0$$

$$3-2\left[2y\cdot y'e^{x-1}+y^2e^{x-1}\right]=0$$

$$-4yy'e^{x-1}=2y^2e^{x-1}-3$$

(5п) $$y'=\frac{2y^2e^{x-1}-3}{-4ye^{x-1}}=\frac{3-2y^2e^{x-1}}{4ye^{x-1}}$$

$$dy=y'dx=\frac{3-2y^2e^{x-1}}{4ye^{x-1}}\,dx$$

(2п) $$\frac{dy}{dx}=\frac{y'dx}{dx}=y'=\frac{3-2y^2e^{x-1}}{4ye^{x-1}}$$

$~~A\left(1,\frac{\sqrt2}{2}\right): y'(A)=\frac{3-2\cdot\frac{1}{2}\cdot e^0}{4\cdot\frac{\sqrt2}{2}\cdot e^0}~~=\frac{2}{2\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}$

б) пресек на кривата со x-оската

(8п) $y=0$

$3x-2\cdot0^2\cdot e^{x-1}=2$

$3x=2$

$\boxed{x=\frac{2}{3}}$ $\quad M\left(\frac{2}{3},0\right)$

$$y'(M)=\frac{3-2\cdot0^2e^{\frac{2}{3}-1}}{4\cdot0\,e^{\frac{2}{3}-1}}=\frac{3}{0}=\infty$$

$t: x=x_0$

$n: y=y_0$

$\boxed{t: x=\frac{2}{3} \quad n: y=0}$

(4) Испитај ги својствата и скицирај го графикот на ф-јата $f(x)=x+\frac{1}{x^2}$ (25п)

Реш:

1) $x\neq0$, $\boxed{D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}}$

2) $x\neq0$ нема пресек со y-оска

(5п) $y=0 \Rightarrow x+\frac{1}{x^2}=0 \Rightarrow \frac{x^3+1}{x^2}=0 \Rightarrow x^3+1=0 \Rightarrow (x+1)\underbrace{(x^2-x+1)}_{\text{нема реални реш}}=0$

$\Rightarrow x+1=0$

$\Rightarrow x=-1$

$\boxed{A(-1,0)}$

3) $f(-x)=-x+\frac{1}{(-x)^2}=-x+\frac{1}{x^2}\neq f(x)$, $\neq -f(x)$ н.п.н.н

4) а) вертикална асимптота $\lim\limits_{x\to0}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)=0+\frac{1}{0}=0+\infty=\infty \Rightarrow \boxed{x=0 \text{ в.а.}}$

(5п) б) хоризонтална асимптота $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)=(\pm\infty)+\left(\frac{1}{+\infty}\right)^{\to0}=\pm\infty$ $\boxed{\text{нема х.а.}}$

в) коса асимптота

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\frac{1}{x^2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3+1}{x^2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+1}{x^3}=1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\cancel{x}+\frac{1}{x^2}-\cancel{x}\right)=\frac{1}{\infty}=0$$

$\boxed{y=x \text{ е коса асимптота}}$

пресек со к.а.

$\begin{cases}y=x\\ y=x+\frac{1}{x^2}\end{cases}$ $\quad x=x+\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^2}=0$ неможно

нема пресек со коса асимптота

5) $y'=1-\frac{1}{x^4}\cdot2x=1-\frac{2}{x^3}=\frac{x^3-2}{x^3}$

(5п) $y'=\frac{x^3-2}{x^3}=0 \Rightarrow x^3=2 \Rightarrow \begin{cases}x=\sqrt[3]{2} \text{ – стационарна точка}\\ x=0\notin D_f\end{cases}$

| | $-\infty$ | 0 | $\sqrt[3]{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | − | + | |
| | ↗ | ↘ | min ↗ | |

$y'(-1)=\frac{-1-2}{-1}>0$

$y'(1)=\frac{1-2}{1}<0$

$y'(2)=\frac{8-2}{8}>0$

$\min\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}+\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right)$

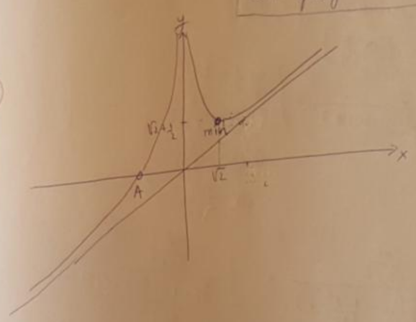
$f(\sqrt[3]{2})=\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{2}+\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

6) $y'=1-\frac{2}{x^3}$

(5п) $y''=-2\left(\frac{1}{x^3}\right)'=-2\cdot(x^{-3})'=(-2)(-3)x^{-4}=\frac{6}{x^4}$

$y''(x)>0,\ \forall x\in D_f \Rightarrow$ $\boxed{f(x) \cup \text{ на } D_f. \text{ нема превојни точки}}$

(5п)



(5) а) Да се пресмета $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+3}$ (13п)

б) Пресметај ја плоштината на ликот заграден меѓу кривите $y = 2\operatorname{tg} x$ и $y=\sin x$ за $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$. (12п)

Реш а) $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+3} = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right\} =$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\cdot\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}+3} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4t-1+t^2+3+3t^2}{1+t^2}} =$$

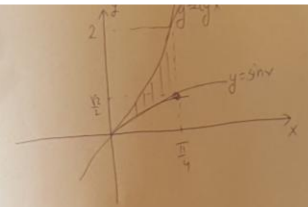
$$= 2\int \frac{dt}{4t^2+4t+2} = \frac{2}{4}\int \frac{dt}{t^2+t+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+t+(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}} = \left\{ \begin{array}{l} t+\frac{1}{2}=s \\ dt=ds \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int \frac{ds}{s^2+(\frac{1}{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg}\frac{s}{\frac{1}{2}} + C = \operatorname{arctg} 2s + C = \operatorname{arctg} 2(t+\tfrac{1}{2}) + C$$

$$= \operatorname{arctg}(2t+1) + C = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}+1) + C$$

б)




| $x$ | $\pi/4$ |
|---|---|
| $2\operatorname{tg} x$ | 2 |
| $\sin x$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |

пресек $\left\{ \begin{array}{l} y=2\operatorname{tg}x \\ y=\sin x \end{array} \right.$

$2\operatorname{tg}x = \sin x$

$2\operatorname{tg}x - \sin x = 0$

$2\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = 0$

$\sin x\left(\frac{2}{\cos x}-1\right)=0$

$\sin x = 0$, $x = k\pi$

$\frac{2}{\cos x}-1=0$

$\frac{2}{\cos x}=1$

$\cos x = 2$ нема реш

$$P = \int_0^{\pi/4} (2\operatorname{tg}x - \sin x)\,dx$$

$$= 2\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x}dx - \int_0^{\pi/4}\sin x\,dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt \end{array} \right\} = -2\int \frac{dt}{t} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -2\ln|t|\Big|_{t_0}^{t_1} + \underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \underset{1}{\cos 0} = -2\ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/4} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

$$= -2\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| + 2\ln|\cos 0| + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

$$= -2\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\underset{0}{\ln 1} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = -2\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$