1. $a_1 = 3$, $2a_{n+1} = a_n + 5$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{2}$$

а) $a_2 = \frac{a_1+5}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$

$a_3 = \frac{a_2+5}{2} = \frac{9}{2}$ $\quad a_4 = \frac{a_3+5}{2} = \frac{\frac{9}{2}+5}{2} = \frac{19}{4}$

б) Ограниченост

Ќе покажеме дека $3 \le a_n < 5$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. $a_1 = 3 \Rightarrow 3 \le a_1 < 5$ е точно
2. Нека за $n=k$ важи $3 \le a_k < 5$ (индукциска претпоставка)
3. За $n=k+1$ имаме

$a_{k+1} = \frac{a_k+5}{2} < \frac{5+5}{2} = 5$

$a_{k+1} = \frac{a_k+5}{2} \geq \frac{3+5}{2} = 4 > 3$

$\Rightarrow 3 < a_{k+1} < 5$

Според принципот на математичка индукција, $\forall n \in \mathbb{N}$, $3 \le a_n < 5$, па заклучуваме дека низата $\{a_n\}$ е ограничена.

Монотоност

$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n+5}{2} - a_n = \frac{a_n+5-2a_n}{2} = \frac{5-a_n}{2}$

Но, $a_n < 5$, па $5 - a_n > 0$. Според тоа,

$a_{n+1} - a_n = \frac{5-a_n}{2} > 0$, што значи дека низата $\{a_n\}$ е монотоно растечка.

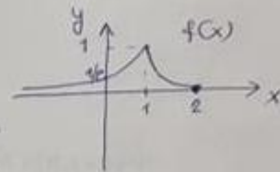
в) Според теоремата за монотони и ограничени низи, ако низата е монотоно растечка и ограничена, таа е конвергентна. Значи, $\{a_n\}$ е чена одгоре, таа е конвергентна низа, т.е. постои број $L \in \mathbb{R}$ така што $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Но, тогаш и $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = L$, па добиваме $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n+5}{2} = L$

$$\frac{L+5}{2} = L \Rightarrow L = 5.$$

Значи, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$.

2.

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & x < 1 \\ x^2 - 4x + 4, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$



а) $D_f = (-\infty, 2]$, $\quad V_f = [0, 1]$

б) За $x < 1$ и $1 < x < 2$ ф-јата е елементарна (експоненцијална, односно полиномна), па следува дека е непрекината.

Можен прекин е точката $x = 1$.

$f(1) = 1 - 4 + 4 = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} e^{x-1} = e^0 = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 4x + 4) = 1$

$f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow f(x)$ е непрекината во $x = 1$

$f(2) = 4 - 8 + 4 = 0$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow f(x)$ е непрекината одлево во $x = 2$.

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & x < 1 \\ 2x - 4, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

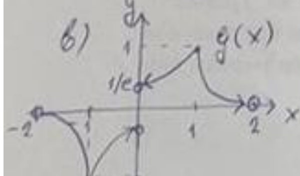
$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\cancel{1}+\Delta x - \cancel{1}} - 1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

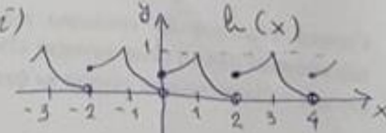
$$f'_+(1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(1 + \Delta x - 2)^2 - 1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\cancel{1} - 2\Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{1}}{\Delta x} = -2$$

$f'_-(1) \ne f'_+(1) \Rightarrow f(x)$ не е диференцијабилна во $x = 1$.

в) 

$g(x)$ има прекин од 1. ред во $x = 0$ $\Rightarrow$ не е диференцијабилна во $x = 0$.

г) 

$T_0 = 2$

д) Не постои $f^{-1}(x)$, бидејќи не е задоволен хоризонталниот тест

3. a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x}{\sin^2 x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(-1 + \frac{\cos x(\cos x - 1)}{\sin^2 x}\right) = -1 - \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x \cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x} \cdot \frac{x^2}{(\frac{x}{2})^2}\cdot\frac{1}{4} =$

$= -1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

2. начин, со Лопиталово правило

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{\sin^2 x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-2\sin 2x + \sin x}{2\sin x \cos x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{-2\sin 2x + \sin x}{\sin 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-4\cos 2x + \cos x}{2\cos 2x} = -\frac{3}{2}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+3) - \ln x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x+3}{x}\right)^x = (1^\infty)$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3} = \ln e^3 = 3$

4. a) $\begin{cases} x = 3t - t^2 \\ y = 2t - t^3 \end{cases}$ $y_0 = 3$

$t^3 + 2t + 3 = 0$
$t^3 - t + 3t + 3 = 0$
$t(t^2 - 1) + 3(t+1) = 0$
$(t+1)(t^2 + t + 3) = 0 \Rightarrow t = -1$
$x_0 = x(-1) = -3 - 1 = -4$

$x_0 = -4,\ y_0 = 3$

$y' = \frac{\dot y}{\dot x} = \frac{-2 - 3t^2}{3 - 2t}$ $\quad y'(-1) = \frac{-2-3}{3+2} = -1$

$n:\ y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$ $\quad n:\ y - 3 = 1(x+4)$

$\boxed{n:\ y = x + 7}$

б) $x^3y^2 - x - y = 4$

$y_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 4$

$3x^2y^2 + 2x^3yy' - 1 - y' = 0$

$y'(2x^3y - 1) = 1 - 3x^2y^2$

$y' = \frac{1 - 3x^2y^2}{2x^3y - 1}$

$y'(x_0) = \frac{1-0}{0-1} = -1$

$t:\ y - 0 = -(x - 4)$

$\boxed{t:\ y = -x + 4}$

в) $k_1 = 1 = -\frac{1}{k_2}$

$\Rightarrow$ правите n и t се нормални.