① Последица на теорема на Рол:

Нека $f(x)$ ги задоволува условите:

1) $f(x)$ е непрекината на $[a,b]$
2) $f(x)$ е диференцијабилна на (a,b) и $f'(x)\neq 0,\ \forall x\in(a,b)$
3) $f(a)\cdot f(b)<0$

Тогаш равенката $f(x)=0$ има само едно решение на (a,b)

Ја разгледуваме ф-јата $f(x)=e^{-4x}-20x$ на $[0,1]$.

1) $f(x)$ е непрекината на $[0,1]$
2) $f'(x)=-4e^{-4x}-20\in\mathbb{R},\ \forall x\in(0,1) \Rightarrow f$ е диференцијабилна на $(0,1)$

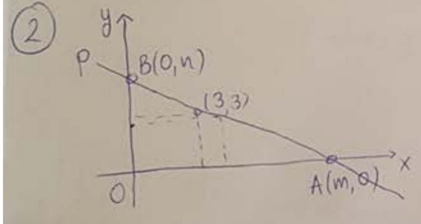
$f'(x)=-4e^{-4x}-20=0 \Leftrightarrow -4e^{-4x}=20 \Leftrightarrow e^{-4x}=-5$ нема решение во $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f'(x)\neq 0,\ \forall x\in(0,1)$

3) $f(0)=e^{0}-20\cdot 0=1$, $f(1)=e^{-4}-20=\frac{1}{e^{4}}-20<0 \Rightarrow f(0)\cdot f(1)<0$

Последица на Рол $\Rightarrow$ р-ката $f(x)=e^{-4x}-20x=0$ има единствено решение на $(0,1)$

②



$p: \frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1,\ m\neq 0, n\neq 0$

$(3,3)\in p \Rightarrow \frac{3}{m}+\frac{3}{n}=1 \Rightarrow \frac{3}{n}=1-\frac{3}{m}=\frac{m-3}{m} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{n=\frac{3m}{m-3}}$

$P_{\Delta ABO}=\frac{m\cdot n}{2}=\frac{1}{2}m\cdot\frac{3m}{m-3}=\frac{3m^2}{2(m-3)}$

$P(m)=\frac{3m^2}{2(m-3)}$ (Наоѓаме за кое m, ф-јата $P(m)$ достигнува минимум

$P'(m)=\frac{3}{2}\cdot\frac{2m(m-3)-m^2\cdot 1}{(m-3)^2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2m^2-6m-m^2}{(m-3)^2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{m^2-6m}{(m-3)^2}$

стационарни (критични) точки за $P(m)$: $m_1=3$ (не е можно од условот на задачата)

$P'(m)=0 \Rightarrow m^2-6m=0 \Rightarrow m(m-6)=0 \Rightarrow m_2=0$ (не е можно; $\boxed{m_3=6}$

$P''(m)=\frac{27}{(m-3)^3} \Rightarrow P''(6)=\frac{27}{(6-3)^3}=\frac{27}{3^3}>0 \Rightarrow P(m)$ има min во точката $m=6$.

$m=6 \Rightarrow n=\frac{3m}{m-3}=\frac{3\cdot 6}{6-3}=\frac{\cancel{3}\cdot 6}{\cancel{3}}=6$

$\boxed{p: \frac{x}{6}+\frac{y}{6}=1}$ - бараната права

③ а) $f(x)=\dfrac{1}{1+\ln x}$

1) $x>0$ и $1+\ln x\neq 0$
$\ln x\neq -1$
$x\neq e^{-1}$
$\Rightarrow \boxed{D_f=\left(0,\frac{1}{e}\right)\cup\left(\frac{1}{e},+\infty\right)}$

2) пресеци со коорд. оски
$x=0\notin D_f$
$y=0\Rightarrow \dfrac{1}{1+\ln x}=0$ нема решение во $\mathbb{R}$
$\Rightarrow$ нема пресеци со координатни оски

3) парност, непарност
D_f не е симетрична област во однос на 0
$\Rightarrow$ f е ниту парна, ниту непарна

4) а) вертикална асимптота

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+\ln x}=\dfrac{1}{1+\ln 0^+}=\dfrac{1}{1-\infty}=\dfrac{1}{-\infty}=0^-$

$\lim\limits_{x\to \frac{1}{e}^+}\dfrac{1}{1+\ln x}=\dfrac{1}{1+\ln(e^{-1})^+}=\dfrac{1}{-1^+}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to \frac{1}{e}^-}\dfrac{1}{1+\ln x}=\dfrac{1}{1+\ln(e^{-1})^-}=\dfrac{1}{1-1^-}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$

$\Rightarrow$ $x=\frac{1}{e}$ е вертикална асимптота

б) хоризонтални асимптоти

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{1+\ln x}=\dfrac{1}{1+\ln(+\infty)}=\dfrac{1}{1+\infty}=\dfrac{1}{+\infty}=0^+ \Rightarrow$ $y=0$ е хоризонтална кога $x\to+\infty$ $\Rightarrow$ нема коса асимптота

5) монотоност, екстреми

$y'=-\dfrac{1}{(1+\ln x)^2}\cdot\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{\underbrace{x}_{>0}\underbrace{(1+\ln x)^2}_{>0}}<0,\ \forall x\in D_f=\left(0,\frac{1}{e}\right)\cup\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$

$\Rightarrow$ $f \searrow$ на D_f $\Rightarrow$ нема екстреми

6) конкавност, конвексност, превојни точки

$y''=\dfrac{3+\ln x}{x^2(1+\ln x)^3}$ $\Rightarrow$ можни превои се: $\boxed{x_1=0}$

$1+\ln x=0\Rightarrow \ln x=-1\Rightarrow \boxed{x_2=e^{-1}=\frac{1}{e}}$

$y''=0\Rightarrow 3+\ln x=0\Rightarrow \ln x=-3\Rightarrow \boxed{x_3=e^{-3}=\frac{1}{e^3}}$

	0	$\frac{1}{e^3}$	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
знак на y''	+	−	+	
	∪	∩	∪	

$f''(e^{-4})=\dfrac{3+\ln e^{-4}}{\underbrace{(e^{-4})^2}_{>0}(1+\ln e^{-4})^3}=\dfrac{3-4}{e^{-8}\cdot(1-4)^3}=\dfrac{-1}{e^{-8}(-3)^3}=\dfrac{+1}{e^{-8}\cdot 3^3}>0$

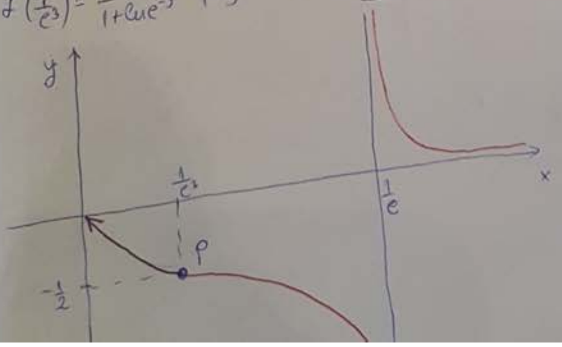
$f''(e^{-2})=\dfrac{3+\ln e^{-2}}{(e^{-2})^2(1+\ln e^{-2})^3}=\dfrac{3-2}{e^{-4}(1-2)^3}=\dfrac{-1}{e^{-4}}<0$

$f''(e)=\dfrac{3+\ln e}{e^2(1+\ln e)^3}=\dfrac{3+1}{e^2\cdot(1+1)^3}=\dfrac{4}{e^2\cdot 8}>0$

$\frac{1}{e}\notin D_f$

$\Rightarrow P\left(\frac{1}{e^3}, f\left(\frac{1}{e^3}\right)\right)$ е превој

$f\left(\frac{1}{e^3}\right)=\dfrac{1}{1+\ln e^{-3}}=\dfrac{1}{1-3}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow \boxed{P\left(\frac{1}{e^3},-\frac{1}{2}\right)\text{ е превој}}$



б) Ја разгледуваме $f(x)=\dfrac{1}{1+\ln x}$, $x\in[e,e^2]$

$f(x)$ нема локални екстреми во (e,e^2)

$f(e)=\dfrac{1}{1+\ln e}=\dfrac{1}{2}$, $f(e^2)=\dfrac{1}{1+\ln e^2}=\dfrac{1}{1+2}=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3}\le f(x)\le\dfrac{1}{2},\ \forall x\in[e,e^2]$

$\underset{\text{на определен интеграл}}{\overset{\text{особини}}{\Longrightarrow}}$ $\dfrac{1}{3}\int\limits_e^{e^2}dx\le\int\limits_e^{e^2}f(x)\,dx\le\dfrac{1}{2}\int\limits_e^{e^2}dx$

$\boxed{\frac{1}{3}(e^2-e)\le I\le\frac{1}{2}(e^2-e)}$

④ $I = \int\limits_{-\pi/3}^{-\pi/6} \frac{dx}{|\sin x|\,\sin 2x} = -\int\limits_{-\pi/3}^{-\pi/6} \frac{dx}{\sin x \cdot \sin 2x} = \Big($ бидејќи $\sin x < 0$ за $x \in [-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}]$

$\Rightarrow |\sin x| = -\sin x$, за $x \in [-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}]\Big)$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/3}^{-\pi/6} \frac{dx}{\sin x \cdot \sin x\cos x} = -\frac{1}{2}\underbrace{\int\limits_{-\pi/3}^{-\pi/6} \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x}}_{J}$$

$$J = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x}} = \left\{ \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x\, dx = dt \end{matrix} \right\} = \int \frac{dt}{t^2(1-t^2)}$$

$$\frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{t^2(1-t)(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{1-t} + \frac{D}{1+t}$$

$$1 = At(1-t^2) + B(1-t^2) + Ct^2(1+t) + Dt^2(1-t)$$

$$\begin{cases} -A + C - D = 0 \\ -B + C + D = 0 \\ A = 0 \\ B = 1 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} A = 0 \\ B = 1 \\ C = D = \frac{1}{2} \end{vmatrix} \qquad \Rightarrow \frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+t}$$

$$\Rightarrow J = \int \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t}$$

$$J = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\ln|1-t| + \frac{1}{2}\ln|1+t| + C$$

$$J = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\left[\ln|1+t| - \ln|1-t|\right] + C$$

$$\boxed{J = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C} \qquad t = \sin x$$

$$I = -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\right]\Bigg|_{-\pi/3}^{-\pi/6}$$

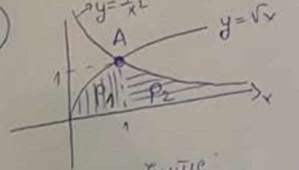
$$= -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\sin(-\frac{\pi}{6})} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin(-\pi/6)}{1-\sin(-\pi/6)}\right| + \frac{1}{\sin(-\pi/3)} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin(-\pi/3)}{1-\sin(-\pi/3)}\right|\right]$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}, \qquad \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$I = -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\right| + \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right|\right]$$

$$I = -1 - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right| = \underline{-1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4}\ln 3 + \frac{1}{4}\ln\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$$

⑤



$$P = P_1 + P_2$$

$$P_1 = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$P_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{B\to+\infty}\int_1^B \frac{dx}{x^2} = \lim_{B\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^B = \lim_{B\to+\infty}\left(-\frac{1}{B} + 1\right) = 1$$

$$P = \frac{2}{3} + 1 = \boxed{\frac{5}{3}}$$

Пресек на кривите

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = \frac{1}{x^2} \end{cases} \qquad \sqrt{x} = \frac{1}{x^2} \quad /^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{x^4} \Rightarrow x^5 = 1$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[5]{1} = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1} = 1$$

$A(1, 1)$