Типы ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА
Алгоритмы решений

1. ДУ с разделяющимися переменными

Вид: $y' = f(x)g(x)$ или $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$

1.1 Вид: $y' = f(ax + by + k)$

---

2. Однородные ДУ первого порядка

2.1 Нулевого измерения

Вид:

$$y' = f(\frac{y}{x})$$

2.2 Одного измерения однородности

Вид:

$$M(x;y)dx + N(x;y)dy = 0$$

2.3 Приводящиеся к однородным

2.3.1 Вид:

$$y' = f(\frac{\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1}{\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2})$$

2.3.2. С помощью подстановки

$$y = u^m$$

---

3. Линейные ДУ первого порядка

Вид: $y' + p(x)y = q(x)$

3.1 Метод вариации произвольной постоянной

3.2 Метод Бернулли

---

4. ДУ в полных дифференциалах

Вид: $dU = P(x;y)dx + Q(x;y)dy$

4.1.1 ДУ в полных дифференциалах

4.1.2 С помощью криволинейного интеграла

4.2 ДУ с интегрирующим множителем

$$dU = \mu(x;y)P(x;y)dx + \mu(x;y)Q(x;y)dy$$

1. Алгоритм решения ДУ с разделяющимися переменными

Вид уравнения:

$$y' = f(x)g(x) \text{ или } f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$$

1.Записываем уравнение в формате $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$.

2.Делим обе части уравнения на $g_1(y)f_2(x)$. Получаем:

$$\frac{f_1}{f_2}dx + \frac{g_2}{g_1}dy = 0$$

3.Интегрируем $\int \frac{f_1}{f_2}dx + \int \frac{g_2}{g_1}dy = 0$.

4.Проверяем наличие особых решений из уравнения: $g_1(y)f_2(x) = 0$.

5.Записываем ответ $F(x) + G(y) = C$; *частные решения*.

Дополнительно для задачи Коши:

6.Подставляем начальное условие: $y(x_0)=y_0$

7.Находим константу C.

Подставляем константу C в общее решение.

8.Находим частное решение.

9. Записываем ответ, частное решение задачи Коши:

$$F(x) + G(y) = C$$

1.1. Вид уравнения: $y' = f(ax + by + k)$

1.Делаем замену:

$$\begin{bmatrix} z = ax + by + k \\ y' = \dfrac{z' - a}{b} \end{bmatrix}$$

2. Решаем по Алгоритму 1.

3. Делаем обратную замену: $z = ax + by + k$

4. Записываем ответ.

2.1 Однородное ДУ первого порядка нулевого измерения

Вид уравнения:

$$y' = f(\frac{y}{x})$$

Алгоритм решения:

1. Делаем замену:

$$\begin{bmatrix} y = zx \\ y' = z'x + z \end{bmatrix}$$

2. Решаем по Алгоритму 1.

3. Делаем обратную замену: $z = \frac{y}{x}$

4. Записываем ответ.

2.2 Однородное ДУ первого порядка одного измерения однородности

Вид уравнения:

$$M(x;y)dx + N(x;y)dy = 0$$

$$M(\alpha x;\alpha y) = \alpha^{n_1}M(x;y) \text{ и } N(\alpha x;\alpha y) = \alpha^{n_2}N(x;y)$$

$$n_1 = n_2$$

Алгоритм решения:

1. Делаем замену:

$$\begin{bmatrix} y = Ux \\ dy = xdU + Udx \end{bmatrix}$$

2. Решаем по Алгоритму 1.

3. Делаем обратную замену: $U = \frac{y}{x}$ или $\frac{1}{U} = \frac{x}{y}$

4. Записываем ответ.

2.3.1 ДУ первого порядка, приводящиеся к однородным

Вид уравнения:

$$y' = f\left(\frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}\right)$$

Алгоритм решения:

1.Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0 \end{cases}$$

где $(x_0; y_0)$ - решение системы.

2. Сделать замену:

$$\begin{cases} x^* = x - x_0;\ dx^* = dx \\ y^* = y - y_0; dy^* = dy \end{cases}; \ \frac{dx^*}{dy^*} = \frac{dx}{dy}$$

3. Решить по Алгоритму 1, применяя при необходимости другие замены.

4. Сделать обратную замену:

$$\begin{cases} x^* = x - x_0; \\ y^* = y - y_0; \end{cases}$$

5. Записать ответ.

2.3.2 ДУ первого порядка, приводящиеся к однородным с помощью подстановки

$$y = u^m$$

Вид уравнения:

$$M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0$$

$$M(\alpha x; \alpha y) = \alpha^{n_1} M(x; y) \text{ и } N(\alpha x; \alpha y) = \alpha^{n_2} N(x; y)$$

$$n_1 \neq n_2$$

Алгоритм решения:

1. Приводим уравнение к виду:

$$M(x; y)y' + N(x; y) = 0$$

2. Делаем в уравнении $M(x; y)y' + N(x; y) = 0$ замену:

$$\begin{cases} y = u^m \\ y' = mu^{m-1} \end{cases}$$

получаем:

$$M(x; u^m)mu^{m-1} + N(x; u^m) = 0$$

3. Складываем степени у каждого слагаемого, получаем суммы степеней каждого слагаемого.
4. Суммы степеней каждого слагаемого приравниваем друг к другу.
5. Находим m
6. Подставляем m в уравнение:

$$M(x; u^m)mu^{m-1} + N(x; u^m) = 0$$

7. Получаем однородное уравнение.
8. Решаем по Алгоритму 1, применяя при необходимости другие замены.
9. Делаем обратную замену: $u = y^{\frac{1}{m}}$
10. Записываем ответ.

3.1 Метод вариации произвольной постоянной.

Вид уравнения: $y' + p(x)y = q(x)$ - ЛНДУ
(*линейное неоднородное дифференциальное уравнение*)

Вид уравнения: $y' + p(x)y = 0$- ЛОДУ
(*линейное однородное дифференциальное уравнение*)

Алгоритм решения ЛНДУ

1. Решить ЛОДУ: $y' + p(x)y = 0$ как уравнение с разделяющимися переменными.

2. Найти предварительное решение: $y = C(x)U(x)$
($C(x)$ пока не определено).

3. Найти y'.

4. Подставить y и y' в $y' + p(x)y = q(x)$ и решить уравнение. Найти $C\left(x; \overline{C}\right)$

4. Записать ответ: $y = C\left(x; \overline{C}\right)U(x)$

где $\overline{C}$ - произвольная постоянная.

3.2 Метод Бернулли. Алгоритм решения ЛНДУ

Вид уравнения:$y' + p(x)y = q(x)$ - ЛНДУ
(*линейное неоднородное дифференциальное уравнение*)

1. Выполняем замену Бернулли:$\begin{cases} y = uv \\ y' = u'v + uv' \end{cases}$

2. Получаем уравнение: $u'v + u(v' + p(x)) = q(x)$

3. Решаем систему уравнений:$\begin{cases} v' + p(x) = 0 \\ u'v = q(x) \end{cases}$

4. Находим $v(x); C = 0$

5. Находим $u(C; x)$

6. Записываем ответ: $y = u(x; C)v(x)$

где C - произвольная постоянная.

4.1.1 Алгоритм решения ДУ в полных дифференциалах.

Уравнение вида: $dU = P(x;y)dx + Q(x;y)dy$

1. Определяем $P(x;y)$ и $Q(x;y)$; $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x;y); \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x;y)$

2. Находим частные дифференциалы: $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$,

т.к.: $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$

3. Находим интеграл: $u(x;y) = \int P(x;y)\mathrm{d}x + \varphi(y)$

4. Находим частный дифференциал $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\int P(x;y)\mathrm{d}x + \varphi(y))$

5. Выделяем $\varphi'(y)$: $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)\mathrm{d}x + \varphi'(y)$

6. Приравниваем: $\frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)\mathrm{d}x + \varphi'(y) = Q(x;y)$,

Сокращаем подобные члены.

7. Выражаем: $\varphi'(y) = Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)\mathrm{d}x$

8. Интегрируем: $\varphi(y) = \int \Phi(y)\,\partial y$.

9. Находим: $u(x;y) = \int P(x;y)\mathrm{d}x + \varphi(y)$

10. При необходимости находим решение задачи Коши.

11. Записываем ответ в виде: $u(x;y) = C$ (т.к. $u(x;y) = 0$)

4.1.2 Алгоритм решения ДУ в полных дифференциалах с помощью криволинейного интеграла

1. пп. 1-2 из Алгоритма 4.1.1.

2. Находим криволинейный интеграл:

$$u(x;y) = \int\limits_{\substack{0 \\ y=0}}^{x} P(x;y)\mathrm{d}x + \int\limits_{\substack{0 \\ x=x}}^{y} Q(x;y)\mathrm{d}y$$

3. Записываем ответ в виде: $u(x;y) = C$ (т.к. $u(x;y) = 0$)

4.2 Алгоритм решения ДУ в полных дифференциалах с интегрирующим множителем μ(x) / μ(y).

Уравнение вида:

$$dU = P(x;y)dx + Q(x;y)dy$$

Для μ(x)	**Для μ(y)**
1. Определяем $P(x;y)dx$ и $Q(x;y)dy$	
2. Находим частные дифференциалы: $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$	
3. Находим $k(x) = \frac{P'_y - Q'_x}{Q}$	3. Находим $m(y) = \frac{Q'_x - P'_y}{P}$
4. Находим $\mu(x) = e^{\int k(x)dx}$	4. Находим $\mu(y) = e^{\int m(y)dy}$

5. Умножаем $P(x;y)$ на $\mu(x)$/ $\mu(y)$ и $Q(x;y)$ на $\mu(x)$ / $\mu(y)$

6. Получаем $\overline{P}(x;y)dx$ и $\overline{Q}(x;y)dy$

7. Находим частные дифференциалы: $\frac{\partial \overline{P}}{\partial y}$ и $\frac{\partial \overline{Q}}{\partial x}$, $\frac{\partial \overline{P}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{Q}}{\partial x}$

8. Далее по пп. 3-10 Алгоритма решения аналитического признака полного дифференциала.

9. Находим особые решения.

10. Записываем ответ в виде: $\mu =$; $U(x;y) = C$;
<u>*особые решения*</u> (если есть).