ВИДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА
АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЙ

1.1: $y'' = f(x)$

1.2: $y'' = f(x; y')$ **1.2.1:** $y'' = f(y')$

1.3: $y'' = f(y; y')$ **1.3.1:** $y'' = f(y)$

2: $y'' + py' + qy = 0$

3: $y'' + py' + qy = f(x)$

3.1:	**3.2:**	**3.3:**
где $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$	где $f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x$	где $f(x) = e^{\alpha x}(M_{m_1}(x)\cos\beta x + N_{m_2}(x)\sin\beta x)$

3.4: $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$

$f_{1,2}(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$ или $f_{1,2}(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$ или $f_{1,2}(x) = e^{\alpha x}(M_{m_1}(x) \cdot \cos\beta x + N_{m_2}(x) \cdot \sin\beta x)$

4: $y'' + py' + qy = f(x)$

где $f(x) \neq e^{\alpha x} \cdot P_n(x) \neq A \cdot \cos\beta x + B \cdot \sin\beta x \neq e^{\alpha x}(M_{m_1}(x) \cdot \cos\beta x + N_{m_2}(x) \cdot \sin\beta x)$

5:

$$\begin{cases} y' = a_{11}y + a_{12}z \\ z' = a_{21}y + a_{22}z \end{cases}$$

Алгоритмы решений

1.1. Вид уравнения:

$$y'' = f(x)$$

1.Находим: y'. Интегрируем: $y' = \int f(x)dx = \varphi_1(x) + C_1$.

2.Находим: y. Интегрируем: $y = \int(\varphi_1(x) + C_1)dx$.

3.При необходимости решаем задачу Коши.

4.Записываем ответ:

$y = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2$ - общее решение уравнения.

!!! Если дано уравнение: $y^n = f(x)$, интегрируем n раз.

1.2. Вид уравнения:

$$y'' = f(x; y')$$

(не содержит явно функцию y)

1.Делаем замену:$y' = p(x);\ y'' = p'$

$y'' = f(x; y')$ **=>** $p' = f(x; p)$

2. Решаем уравнение $p' = f(x; p)$. Решение: $p = \varphi(x; C_1)$

3. Находим общее решение: $y = \int \varphi(x; C_1)dx + C_2$

4. При необходимости решаем задачу(и) Коши.

5. Записываем ответ.

1.2.1. Вид уравнения:

$$y'' = f(y')$$

(частный случай **1.2.**)

1.Делаем замену:$y' = p(x);\ y'' = p' = \frac{dp}{dx};\ y'' = f(y')$ **=>** $p' = f(p)$

2. Решаем уравнение $p'_x = f(p)$. Решение: $p = \varphi(x; C_1)$

3. Находим общее решение: $y = \int(\varphi_1(x; C_1)dx + C_2$

4. При необходимости решаем задачу(и) Коши.

5. Записываем ответ.

1.3. Вид уравнения:

$$y'' = f(y; y')$$

(не содержит явно независимую переменную x)

1. Делаем замену: $y' = p(y(x))$.
2. Делаем замену: $y'' = p\frac{dp}{dy}$.
3. $y'' = f(y; y')$ **=>** $\frac{dp}{dy} = f(y; p)$.
4. $y' = p = \varphi(y; C_1)$
5. Интегрируем: $\int \frac{dy}{\varphi(y; C_1)} = x + C_2$
5. При необходимости решаем задачу(и) Коши.
6. Записываем ответ.

1.3.1. Вид уравнения:

$$y'' = f(y)$$

(частный случай **1.3.**)

1. Делаем замену: $y' = p(y(x))$.
2. Делаем замену: $y'' = p\frac{dp}{dy}$.
3. $y'' = f(y)$ **=>** $p\frac{dp}{dy} = f(y)$.
4. $y' = p = \varphi(y; C_1)$
5. Интегрируем: $\int \frac{dy}{\varphi(y; C_1)} = x + C_2$
6. При необходимости решаем задачу(и) Коши.
7. Записываем ответ.

2 Линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами

Вид уравнения: $y'' + py' + qy = 0$; p и q - действительные числа

Метод Эйлера. Алгоритм.

1. Делаем замену: $\left[\begin{aligned} y &= e^{kx} \\ y' &= ke^{kx} \\ y'' &= k^2 e^{kx} \end{aligned}\right.$

2. Подставляем в основное уравнение: $y'' + py' + qy = 0$. Получаем: $k^2 e^{kx} + kpe^{kx} + qe^{kx} = 0$

3. Выполняем действие: $k^2 e^{kx} + kpe^{kx} + qe^{kx} = 0 \quad \Big|: e^{kx} \neq 0;\ (e^{kx} > 0)$

4. Получаем характеристическое уравнение: $k^2 + pk + q = 0$

5. Находим дискриминант: $D = p^2 - 4q$; решения уравнения: $k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}$

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
$D > 0$;	$D = 0$;	$D < 0$;
$k_1 \neq k_2$	$k_1 = k_2 = k$	$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

6. Записываем решение (ответ): $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$	$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$	$y = e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x)$

2.К Задача Коши

1. Переписываем условия задачи: $\left[\begin{array}{l} y'' + py' + qy = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{array}\right.$

2. Решаем ЛОДУ II-го порядка по алгоритму **2** Находим y

3. Находим y'

4. Подставляем в уравнения y и y' значения $y_0;\ y'_0;\ x_0$

5. Решаем систему уравнений, находим C_1 и C_2:

$$\begin{cases} a_1C_1 + b_1C_2 + d_1 = y_0 \\ a_2C_1 + b_2C_2 + d_2 = y'_0 \end{cases}$$

где $a_1;\ a_2;\ b_1;\ b_2;\ d_1;\ d_2$ - произвольные действительные числа, получившиеся при подстановке $y_0;\ y'_0;\ x_0$

6. В решение уравнения $y = \cdots$ подставляем значения C_1 и C_2

7. Записываем ответ, решение задачи Коши.

3.1. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами

Вид уравнения: $y'' + py' + qy = f(x)$

где p и q - действительные числа;

$$f(x) = e^{\alpha x}P_n(x);$$

где α - коэффициент, действительное число

n - степень многочлена $P_n(x)$:

$$\left[\begin{array}{l} n = 0;\ P_0(x) = A \\ n = 1;\ P_1(x) = Ax + B \\ n = 2;\ P_2(x) = Ax^2 + Bx + C \\ n = 3;\ P_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ n = N;\ P_N(x) = Ax^N + Bx^{N-1} + \cdots + Yx + Z \end{array}\right.$$

Метод неопределенных коэффициентов

Уравнение $y'' + py' + qy = f(x)$: имеет решение: $y = y_0 + \bar{y}$

где - $y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ - общее решение ЛОДУ (п. **6** алг. **2**)

$\bar{y} = e^{\alpha x} x^r Q_n(x)$ - частное решение ЛНДУ

Алгоритм

1. Находим n и α функции $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$

2. Решаем ЛОДУ 2-го порядка (алг. **2**): $y'' + py' + qy = 0$;
находим коэффициенты $k_1; k_2$;

находим общее решение ЛОДУ: $y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

3. Определяем вид частного решения: $\bar{y} = e^{\alpha x} x^r Q_n(x)$:

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
$\alpha \neq k_1;\ \alpha \neq k_2$	$\alpha = k_1 \neq k_2$	$\alpha = k_1 = k_2$

4. Определяем значение r:

$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$

5. Записываем $\bar{y} = e^{\alpha x} x^r Q_n(x)$ (n и α - п.1; r - п.4 алгоритма)

$Q_n(x)$ записываем как: $\left[\begin{array}{l} n = 0;\ Q_0(x) = A \\ n = 1;\ Q_1(x) = Ax + B \\ n = 2;\ Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$

6. Находим $\bar{y}'$; $\bar{y}''$

7. Подставляем $\bar{y};\ \bar{y}';\ \bar{y}''$ в $\bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y} = f(x)$

8. Решаем систему уравнений, находим $A; B; C \dots$:
приравнивая коэффициенты n_{ij} при одинаковых степенях:

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array} \begin{cases} n_{11}A + n_{12}B + n_{13}C = N_1 \\ n_{21}A + n_{22}B + n_{23}C = N_2, \\ n_{31}A + n_{32}B + n_{33}C = N_3 \end{cases}$$

где $n_{ij}; N_v$ - действительные числа, получившиеся при подстановке.

9. Находим частное решение, подставив α; r; $A; B; C$ …в:

$$\bar{y} = e^{\alpha x} x^r Q_n(x)$$

10. Записываем ответ (общее решение): $y = y_0 + \bar{y}$

3.1.К Задача Коши

1. Переписываем условия задачи: $\left[\begin{array}{l} y'' + py' + qy = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{array}\right.$

2. Находим общее решение: $y = y_0 + \overline{y}$ по алгоритмам **2 и 3.1**

3. Находим y'

4. Подставляем в уравнения y и y' значения y_0; y'_0; x_0

5. Решаем систему уравнений, находим C_1 и C_2:

$$\begin{cases} a_1C_1 + b_1C_2 + d_1 = y_0 \\ a_2C_1 + b_2C_2 + d_2 = y_0' \end{cases}$$

где a_1; a_2; b_1; b_2; d_1; d_2 - произвольные действительные числа, получившиеся при подстановке y_0; y'_0; x_0

6. В уравнение $y = \cdots$ подставляем значения C_1 и C_2

7. Записываем ответ, решение задачи Коши.

3.2 Алгоритм

Вид уравнения: $y'' + py' + qy = f(x)$

где p и q - действительные числа;

$$f(x) = Mcos\beta x + Nsin\beta x;$$

где $M; N; \beta$ - коэффициенты, действительные числа.

1. Решаем ЛОДУ 2-го порядка (алг. **2**): $y'' + py' + qy = 0$; находим коэффициенты $k_1; k_2$; записываем y_0

2. Записываем β функции $f(x) = Mcos\beta x + Nsin\beta x$

3. Определяем вид частного решения: $\overline{y} = x^r(Acos\beta x + Bsin\beta x)$:

Вариант 1	Вариант 2
$\beta i \neq k_{1,2}$	$\beta i = k_{1,2}$

4. Определяем значение r:

$r = 0$	$r = 1$

5. Записываем $\overline{y} = x^r Q_n(x)$; $Q_n(x) = Acos\beta x + Bsin\beta x$

$$\overline{y} = x^r(Acos\beta x + Bsin\beta x)$$

6. Находим $\overline{y}'$; $\overline{y}''$

7. Подставляем $\overline{y}; \overline{y}'; \overline{y}''$ в $\overline{y}'' + p\overline{y}' + q\overline{y} = f(x)$

8. Решаем систему уравнений, находим $M; N$

$$\begin{matrix} sin\beta x: \\ cos\beta x: \end{matrix} \begin{cases} p_{11}A + p_{12}B = P_1 \\ p_{21}A + p_{22}B = P_2 \end{cases}$$

где $p_{ij}; P_v$ - действительные числа, получившиеся при подстановке.

9. Находим частное решение, подставив $r; A; B; \beta$ в:

$$\overline{y} = x^r(Acos\beta x + Bsin\beta x)$$

10. Записываем ответ (общее решение): $y = y_0 + \overline{y}$

11. При необходимости решаем задачу Коши.

3.3 Алгоритм

Вид уравнения: $y'' + py' + qy = f(x)$

$$f(x) = e^{\alpha x}(M_{m_1}(x) \cdot cos\beta x + N_{m_2}(x) \cdot sin\beta x)$$

1. Решаем ЛОДУ 2-го порядка (алг. **2**): $y'' + py' + qy = 0$; находим коэффициенты $k_1; k_2$; записываем y_0

2. Определяем $\alpha; \beta; M_{m_1}(x);\ N_{m_2}(x);\ m_1;\ m_2$ из функции $f(x)$

3. Определяем вид частного решения:
$\overline{y} = x^r e^{\alpha x}(P_l(x)cos\beta x + Q_l(x)sin\beta x)$:

Вариант 1	Вариант 2
$\alpha \pm \beta i \neq k_{1,2}$	$\alpha \pm \beta i = k_{1,2}$

4. Определяем значение r:

$r = 0$	$r = 1$

5. Определяем значение $l = max(m_1;\ m_2)$

Записываем $\overline{y} = x^r e^{\alpha x}(P_l(x)cos\beta x + Q_l(x)sin\beta x)$

$P_l(x);\ Q_l(x)$ записываем как:

$$\left[\begin{array}{l} l = 0;\ P_0(x) = A; Q_0(x) = B \\ l = 1;\ P_1(x) = Ax + B; Q_1(x) = Cx + D \\ l = 2;\ P_2(x) = Ax^2 + Bx + C; Q_2(x) = Dx^2 + Ex + F \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array}\right.$$

6. Находим $\overline{y}'$; $\overline{y}''$

7. Подставляем $\overline{y}; \overline{y}'; \overline{y}''$ в $\overline{y}'' + p\overline{y}' + q\overline{y} = f(x)$

8. Решаем систему уравнений:

$$\begin{array}{r} sin\beta x \\ x \cdot sin\beta x \\ cos\beta x \\ x \cdot cos\beta x \end{array}\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right.$$

9. Находим частное решение, подставив $r;\ \alpha;\ \beta;\ P_l(x); Q_l(x)$в уравнение: $\overline{y} = x^r e^{\alpha x}(P_l(x)cos\beta x + Q_l(x)sin\beta x)$

10. Записываем ответ (общее решение): $y = y_0 + \overline{y}$

11. При необходимости решаем задачу Коши.

3.4 Алгоритм

Вид уравнения: $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$

где p и q - действительные числа;

$f_{1,2}(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$
или $f_{1,2}(x) = A cos\beta x + B sin\beta x$
или $f_{1,2}(x) = e^{\alpha x}(M_{m_1}(x) cos\beta x + N_{m_2}(x) sin\beta x)$

1. Решаем ЛОДУ 2-го порядка (алг. **2**): $y'' + py' + qy = 0$;
находим коэффициенты $k_1; k_2$; записываем y_0

2. Определяем вид функций $f_1(x); f_2(x)$

3. Решаем независимо 2 уравнения:

$$\overline{y_1}'' + p\overline{y_1}' + q\overline{y_1} = f_1(x)$$

$$\overline{y_2}'' + p\overline{y_2}' + q\overline{y_2} = f_2(x)$$

4. Записываем ответ (общее решение): $y = y_0 + \overline{y_1} + \overline{y_2}$

5. При необходимости решаем задачу Коши.

4 Метод вариации произвольных постоянных

Вид уравнения: $y'' + py' + qy = f(x)$

где $f(x) \neq e^{\alpha x} P_n(x)$

$f(x) \neq A\cos\beta x + B\sin\beta x$

$f(x) \neq e^{\alpha x}(M_{m_1}(x)\cos\beta x + N_{m_2}(x)B\sin\beta x)$

Алгоритм

1. Решаем ЛОДУ 2-го порядка (алг. **2**): $y'' + py' + qy = 0$; находим коэффициенты $k_1; k_2$;

2. Записываем $y_0 = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$

3. Записываем вид общего решения:

$$y = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x)$$

4. Находим: $y_1'(x)$; $y_2'(x)$;

5. Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

находим $C_1'(x) = \varphi_1(x)$; $C_2'(x) = \varphi_2(x)$

6. Находим $C_1(x) = \int \varphi_1(x) + \overline{C_1}$ и $C_2(x) = \int \varphi_2(x) + \overline{C_2}$

7. Находим общее решение, записываем ответ:

$$y = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x)$$

Метод Крамера. Алгоритм

1. Решаем систему: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$

2.Находим: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$; $\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$; $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

3. Находим: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$

5 Метод исключения для системы уравнений 2-го порядка

Вид системы уравнений:

$$\begin{cases} y' = a_{11}y + a_{12}z \\ z' = a_{21}y + a_{22}z \end{cases}$$

где $y; z$ - неизвестные функции; a_{21}- заданные числа, коэффициенты.

В системе уравнений могут быть записаны пары уравнений:

$y_1(x);\ y_2(x)$ или $y(t); z(t)$ или с использованием любых буквенных обозначений функций и/или переменных/

В данном алгоритме будут использованы обозначения: $y(x);\ z(x)$

Алгоритм будет описан на следующем примере:

$$\begin{cases} y' = 2y + z \\ z' = 4z - y \end{cases}$$

Алгоритм решения системы 2-го порядка методом исключения

1. Из первого уравнения выражаем функцию z через y и y':

$$z = y' - 2y$$

2. z подставляем во второе уравнение:

$$(y' - 2y)' = 4(y' - 2y) - y$$

3. Упрощаем и приводим к ЛОДУ 2го порядка:

$$y'' - 2y' = 4y' - 8y - y$$

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

4. Решаем ЛОДУ 2го порядка (**алг. 2**), получаем ответ:

$$y(x) = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$$

5. Делаем обратную (п.1 алгоритма) подстановку:

$$z = y' - 2y = (C_1e^{3x} + C_2xe^{3x})' - 2(C_1e^{3x} + C_2xe^{3x})$$

6. Находим z:

$$z = C_1e^{3x} + C_2e^{3x} + C_2xe^{3x}$$

7. Записываем ответ, систему уравнений:

$$\begin{cases} y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} \\ z = C_1e^{3x} + C_2e^{3x} + C_2xe^{3x} \end{cases}$$