

Лабораторная работа 0. Численный расчёт производных

1. Общие положения. Варианты задания

Цель работы – закрепление знаний о методе численного расчёта производных; получение навыков численного расчёта производных различных порядков и построения графиков функций с использованием табличного процессора MS Excel.

Задача. С использованием метода численного расчёта производных найти производные первого порядка для заданной функции в табличном процессоре MS Excel. Оформить результаты расчётов в табличной и графической формах. Провести исследование и сделать выводы о влиянии заданной величины приращения аргумента на ошибку расчёта производной.

Ход выполнения работы:

1. Каждому студенту получить вариант задания (таблица) с коэффициентами исходной функциональной зависимости:

$$y = a_1 \cdot x \cdot \sin(x) + a_2 \cdot \sin^2(x) + a_3 \cdot x.$$

Варианты задания для работы 0

№ варианта	a_1	a_2	a_3
1	2,13	−1,30	0,95
2	1,29	−2,58	2,34
3	1,95	−1,86	−2,54
4	1,75	−0,63	0,09
5	−0,30	0,77	−2,59
6	−1,39	−1,77	0,75
7	0,99	−1,29	−1,95
8	−1,31	2,82	−2,31
9	2,46	−2,11	2,93
10	−1,26	0,26	0,96
11	−2,91	−0,30	2,05
12	−0,18	1,85	−2,92
13	1,08	1,42	−0,72
14	2,06	0,68	−2,35
15	−1,29	−1,40	2,36
16	1,07	1,92	−1,66
17	−2,14	−2,65	0,36
18	−0,98	−2,59	0,85
19	−0,34	2,33	0,95
20	−1,42	−2,97	−0,35
21	−0,35	0,90	−0,72
22	−1,89	2,56	0,50
23	−2,14	0,89	−1,89
24	2,24	−2,32	1,79

2. На Листе 1 рабочего файла MS Excel представить исходные данные (коэффициенты функциональной зависимости), указанные в выданном варианте задания, записать заданную функцию в виде алгебраического выражения. Составить таблицу значений заданной функции в пределах изменения независимой переменной $[-5; 5]$ с шагом 0,25; построить график заданной функции. Аналитически получить выражение производной первого порядка для заданной функции, представить его в виде алгебраического выражения.

3. На Листе 2 составить таблицу для построения функциональных зависимостей исходной функции и аналитического выражения её первой производной в пределах изменения независимой переменной $[-5; 5]$ с шагом 0,25. Изобразить графики обеих функций в единой системе координат.

4. В таблице на Листе 3 представить результаты численного расчёта производной первого порядка в пределах изменения независимой переменной $[-5; 5]$ с шагом 0,25 для различных значений приращения аргумента: 1,0, 0,5, 0,2, 0,1. Используя аналитическое выражение, найти абсолютные ошибки численного расчёта производных в каждой точке и их средние значения для каждого приращения.

5. На Листе 4 построить зависимость средней ошибки численного расчёта производной от величины приращения аргумента. Выполнить анализ зависимости и сделать выводы о влиянии выбора приращения аргумента на величину ошибки численного расчёта производной.

6. Студентам, полностью выполнившим задание, защитить работу, представив готовый Excel-файл, отчёт по работе, объяснив полученные результаты и ответив на дополнительные вопросы ведущего преподавателя.

Примерный перечень теоретических вопросов для допуска и защиты лабораторной работы:

1. Что называется производной?
2. Каков физический смысл производной?
3. Каков геометрический смысл производной?
4. Как аналитически найти производные высоких порядков?
5. Как численно, зная выражение функции, рассчитать значение её производной в заданной точке?
6. От чего зависит ошибка численного расчёта производных?
7. Как численно найти производные высоких порядков?

2. Пример выполнения и оформления работы в Microsoft Excel

Рассмотрим порядок выполнения и оформления лабораторной работы 0 на следующем примере. Требуется найти производные первого и второго порядков для функции вида: $y = x \cdot \sin(x) + \sin^2(x) + 2x$ на интервале $[-5; 5]$ с шагом 0,25 по независимой переменной.

На Листе 1 книги MS Excel приводятся выражения исходной функции и её первой и второй производных (рис. 1). Также на данном рисунке представлен фрагмент таблицы для построения исходной функции и её график в заданных пределах изменения независимой переменной.

На Листе 2 (рис. 2) приводятся графики исходной функции (синяя линия) и первой производной (красная линия).

На Листе 3 в таблице (рис. 3) приведены промежуточные и результирующие расчёты производных в каждой точке при различных приращениях аргумента. Последовательно по столбцам в таблице представлены: значения аргумента, значения первой производной по аналитическому выражению, далее для каждого варианта приращения: значения функции со сдвигом аргумента вправо на половину приращения, значения функции со сдвигом аргумента влево на половину приращения, численно рассчитанные значения первой производной, абсолютные ошибки расчёта производной.

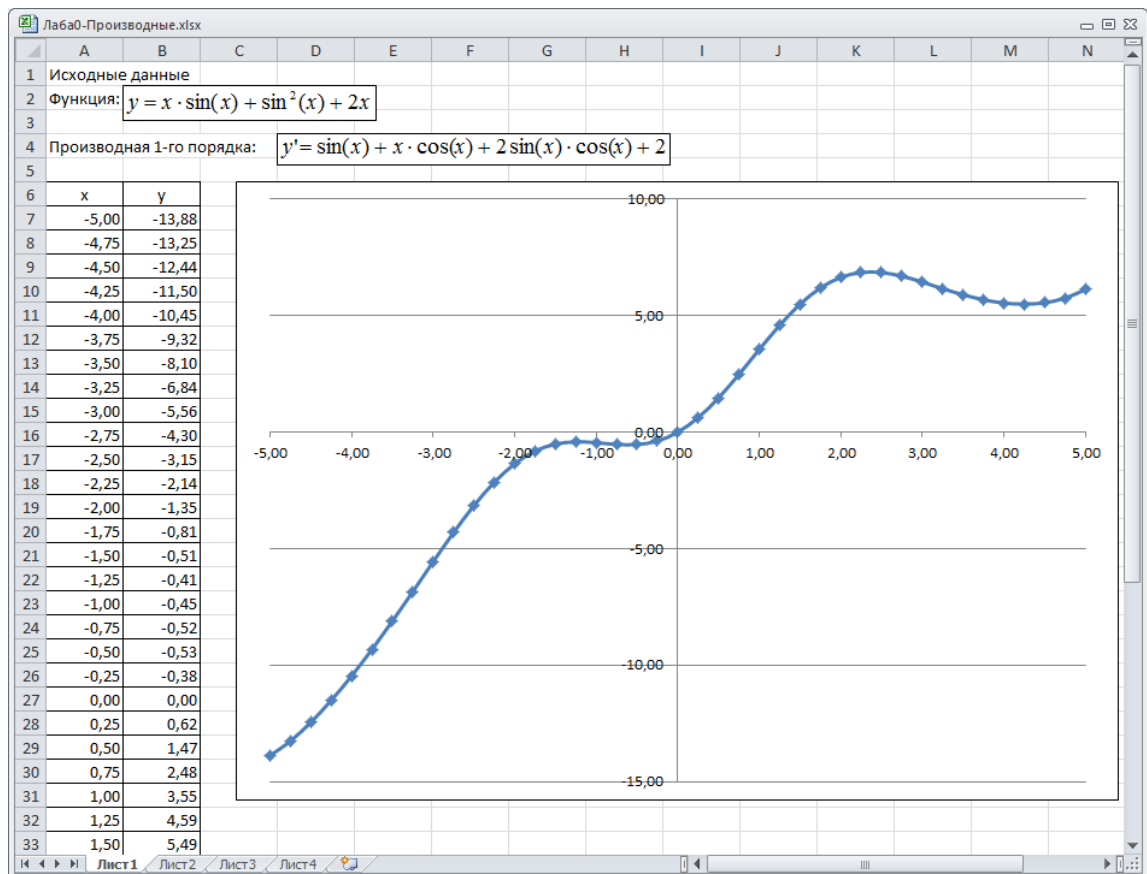


Рис. 1. Пример оформления Листа 1

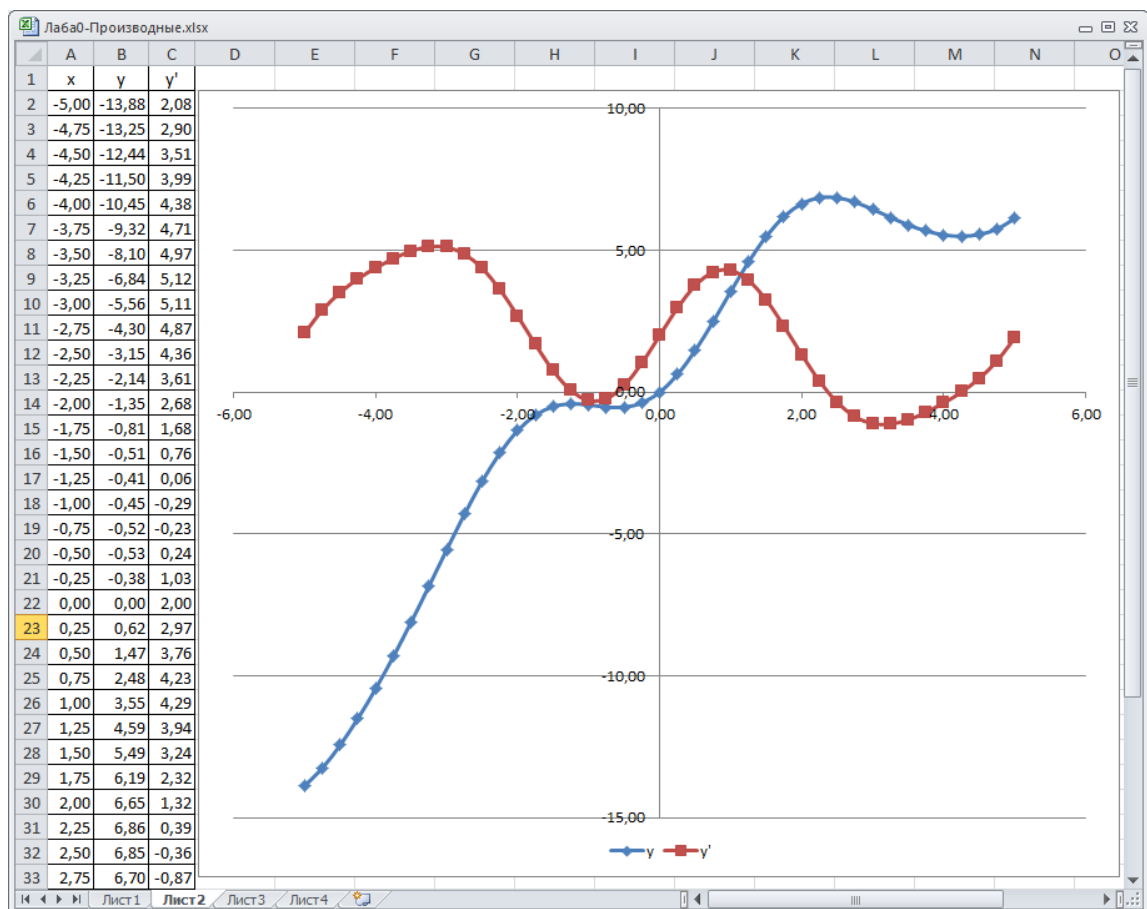


Рис. 2. Пример оформления Листа 2

Лаба0-Производные.xlsx																	
1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
	$\Delta x = 1,0$				$\Delta x = 0,5$				$\Delta x = 0,2$				$\Delta x = 0,1$				
2	x	y'	y(x+Δx)	y(x-Δx)	y'числ	AO	y(x+Δx)	y(x-Δx)	y'числ	AO	y(x+Δx)	y(x-Δx)	y'числ	AO	y(x+Δx)	y(x-Δx)	y'числ
3	-5,00	2,08	-12,44	-14,38	1,94	0,15	-13,25	-14,27	2,05	0,04	-13,65	-14,06	2,08	0,01	-13,77	-13,97	2,08
4	-4,75	2,90	-11,50	-14,27	2,77	0,13	-12,44	-13,88	2,86	0,03	-12,94	-13,52	2,89	0,01	-13,10	-13,39	2,89
5	-4,50	3,51	-10,45	-13,88	3,42	0,09	-11,50	-13,25	3,49	0,02	-12,08	-12,78	3,51	0,00	-12,26	-12,62	3,51
6	-4,25	3,99	-9,32	-13,25	3,93	0,06	-10,45	-12,44	3,98	0,01	-11,10	-11,89	3,99	0,00	-11,30	-11,70	3,99
7	-4,00	4,38	-8,10	-12,44	4,34	0,04	-9,32	-11,50	4,37	0,01	-10,01	-10,89	4,38	0,00	-10,23	-10,67	4,38
8	-3,75	4,71	-6,84	-11,50	4,66	0,05	-8,10	-10,45	4,70	0,01	-8,84	-9,78	4,71	0,00	-9,08	-9,55	4,71
9	-3,50	4,97	-5,56	-10,45	4,90	0,07	-6,84	-9,32	4,95	0,02	-7,60	-8,60	4,97	0,00	-7,86	-8,35	4,97
10	-3,25	5,12	-4,30	-9,32	5,01	0,11	-5,56	-8,10	5,10	0,03	-6,33	-7,35	5,12	0,00	-6,58	-7,10	5,12
11	-3,00	5,11	-3,15	-8,10	4,96	0,15	-4,30	-6,84	5,07	0,04	-5,05	-6,07	5,10	0,01	-5,30	-5,81	5,11
12	-2,75	4,87	-2,14	-6,84	4,70	0,17	-3,15	-5,56	4,82	0,04	-3,83	-4,80	4,86	0,01	-4,06	-4,55	4,86
13	-2,50	4,36	-1,35	-5,56	4,20	0,16	-2,14	-4,30	4,32	0,04	-2,72	-3,59	4,36	0,01	-2,93	-3,37	4,36
14	-2,25	3,61	-0,81	-4,30	3,49	0,12	-1,35	-3,15	3,58	0,03	-1,80	-2,52	3,61	0,00	-1,97	-2,33	3,61
15	-2,00	2,68	-0,51	-3,15	2,64	0,04	-0,81	-2,14	2,67	0,01	-1,11	-1,64	2,68	0,00	-1,23	-1,49	2,68
16	-1,75	1,68	-0,41	-2,14	1,73	0,05	-0,51	-1,35	1,69	0,01	-0,66	-1,00	1,68	0,00	-0,73	-0,90	1,68
17	-1,50	0,97	-0,45	-1,35	0,90	0,15	-0,41	-0,81	0,79	0,04	-0,45	-0,60	0,76	0,01	-0,48	-0,55	0,76
18	-1,25	0,06	-0,52	-0,81	0,29	0,23	-0,45	-0,51	0,12	0,06	-0,42	-0,43	0,07	0,01	-0,41	-0,42	0,06
19	-1,00	-0,29	-0,53	-0,51	-0,02	0,27	-0,52	-0,41	-0,22	0,07	-0,48	-0,43	-0,28	0,01	-0,47	-0,44	-0,29
20	-0,75	-0,23	-0,38	-0,41	0,04	0,26	-0,53	-0,45	-0,16	0,07	-0,54	-0,50	-0,22	0,01	-0,53	-0,51	-0,23
21	-0,50	0,24	0,00	-0,45	0,45	0,21	-0,38	-0,52	0,29	0,05	-0,49	-0,54	0,25	0,01	-0,52	-0,54	0,24
22	-0,25	1,03	0,62	-0,52	1,15	0,12	0,00	-0,53	1,06	0,03	-0,26	-0,46	1,04	0,00	-0,32	-0,42	1,03
23	0,00	2,00	1,47	-0,53	2,00	0,00	0,62	-0,38	2,00	0,00	0,22	-0,18	2,00	0,00	0,10	-0,10	2,00
24	0,25	2,97	2,48	-0,38	2,85	0,12	1,47	0,00	2,94	0,03	0,94	0,34	2,96	0,00	0,78	0,48	2,97
25	0,50	3,76	3,55	0,00	3,55	0,21	2,48	0,62	3,71	0,05	1,86	1,11	3,75	0,01	1,66	1,28	3,76
26	0,75	4,23	4,59	0,62	3,96	0,26	3,55	1,47	4,16	0,07	2,90	2,06	4,22	0,01	2,69	2,27	4,23
27	1,00	4,29	5,49	1,47	4,02	0,27	4,59	2,48	4,22	0,07	3,97	3,12	4,28	0,01	3,76	3,33	4,29
28	1,25	3,94	6,19	2,48	3,71	0,23	5,49	3,55	3,88	0,06	4,97	4,18	3,93	0,01	4,78	4,39	3,94
29	1,50	3,24	6,65	3,55	3,10	0,15	6,19	4,59	3,21	0,04	5,80	5,15	3,24	0,01	5,65	5,32	3,24
30	1,75	2,32	6,86	4,59	2,27	0,05	6,65	5,49	2,31	0,01	6,40	5,94	2,32	0,00	6,30	6,07	2,32
31	2,00	1,32	6,85	5,49	1,36	0,04	6,86	6,19	1,33	0,01	6,76	6,49	1,32	0,00	6,71	6,57	1,32
32	2,25	0,39	6,70	6,19	0,51	0,12	6,85	6,65	0,42	0,03	6,88	6,80	0,39	0,00	6,87	6,83	0,39
33	2,50	-0,36	6,44	6,65	-0,20	0,16	6,70	6,86	-0,32	0,04	6,81	6,88	-0,36	0,01	6,83	6,87	-0,36
34	2,75	-0,87	6,16	6,86	-0,70	0,17	6,44	6,85	-0,82	0,04	6,60	6,77	-0,86	0,01	6,65	6,74	-0,86
35	3,00	-1,11	5,90	6,85	-0,96	0,15	6,16	6,70	-1,07	0,04	6,33	6,55	-1,10	0,01	6,39	6,50	-1,11
36	3,25	-1,12	5,68	6,70	-1,01	0,11	5,90	6,44	-1,10	0,03	6,05	6,27	-1,12	0,00	6,10	6,22	-1,12
37	3,50	-0,97	5,55	6,44	-0,90	0,07	5,68	6,16	-0,95	0,02	5,80	6,00	-0,97	0,00	5,85	5,94	-0,97

Рис. 3. Пример оформления Листа 3

На Листе 4 в таблице (рис. 4) приведены средние значения ошибок расчёта первой производной при различных приращениях аргумента. Эти же значения показаны на графике рядом.

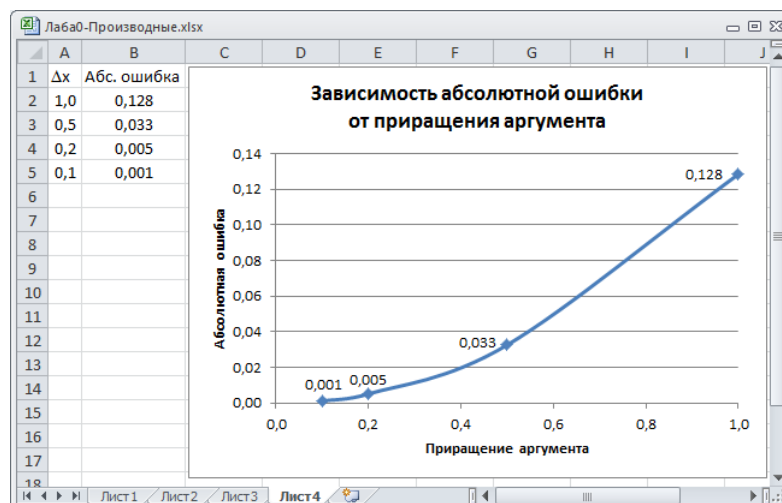


Рис. 4. Пример оформления Листа 4