2 Линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами

Вид уравнения: $y'' + py' + qy = 0$; p и q - действительные числа

Метод Эйлера. Алгоритм.

1. Делаем замену: $\left[\begin{array}{l} y = e^{kx} \\ y' = ke^{kx} \\ y'' = k^2e^{kx} \end{array}\right.$

2. Подставляем в основное уравнение: $y'' + py' + qy = 0$. Получаем: $k^2e^{kx} + kpe^{kx} + qe^{kx} = 0$

3. Выполняем действие: $k^2e^{kx} + kpe^{kx} + qe^{kx} = 0 \ \Big|: e^{kx} \neq 0;\ (e^{kx} > 0)$

4. Получаем характеристическое уравнение: $k^2 + pk + q = 0$

5. Находим дискриминант: $D = p^2 - 4q$; решения уравнения: $k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}$

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
$D > 0$;	$D = 0$;	$D < 0$;
$k_1 \neq k_2$	$k_1 = k_2 = k$	$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

6. Записываем решение (ответ): $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$

$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$	$y = e^{kx}(C_1 + C_2x)$	$y = e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x)$

©Василенко В.А.

2.К Задача Коши

1. Переписываем условия задачи: $\left[\begin{array}{l} y'' + py' + qy = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{array}\right.$

2. Решаем ЛОДУ II-го порядка по алгоритму **2** Находим y

3. Находим y'

4. Подставляем в уравнения y и y' значения $y_0;\ y'_0;\ x_0$

5. Решаем систему уравнений, находим C_1 и C_2:

$$\begin{cases} a_1C_1 + b_1C_2 + d_1 = y_0 \\ a_2C_1 + b_2C_2 + d_2 = y'_0 \end{cases}$$

где $a_1;\ a_2;\ b_1;\ b_2;\ d_1;\ d_2$ - произвольные действительные числа, получившиеся при подстановке $y_0;\ y'_0;\ x_0$

6. В решение уравнения $y = \cdots$ подставляем значения C_1 и C_2

7. Записываем ответ, решение задачи Коши.

3.1. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами

Вид уравнения: $y'' + py' + qy = f(x)$

где p и q - действительные числа;

$$f(x) = e^{\alpha x}P_n(x);$$

где α - коэффициент, действительное число

n - степень многочлена $P_n(x)$:

$$\left[\begin{array}{l} n = 0;\ P_0(x) = A \\ n = 1;\ P_1(x) = Ax + B \\ n = 2;\ P_2(x) = Ax^2 + Bx + C \\ n = 3;\ P_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ n = N;\ P_N(x) = Ax^N + Bx^{N-1} + \cdots + Yx + Z \end{array}\right.$$

©Василенко В.А.

Метод неопределенных коэффициентов

Уравнение $y'' + py' + qy = f(x)$: имеет решение: $y = y_0 + \overline{y}$

где - $y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ - общее решение ЛОДУ (п. **6** алг. **2**)

$\overline{y} = e^{\alpha x} x^r Q_n(x)$ - частное решение ЛНДУ

Алгоритм

1. Находим n и α функции $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$

2. Решаем ЛОДУ 2-го порядка (алг. **2**): $y'' + py' + qy = 0$;
находим коэффициенты $k_1; k_2$;

находим общее решение ЛОДУ: $y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

3. Определяем вид частного решения: $\overline{y} = e^{\alpha x} x^r Q_n(x)$:

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
$\alpha \neq k_1;\ \alpha \neq k_2$	$\alpha = k_1 \neq k_2$	$\alpha = k_1 = k_2$

4. Определяем значение r:

$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$

5. Записываем $\overline{y} = e^{\alpha x} x^r Q_n(x)$ (n и α - п.1; r - п.4 алгоритма)

$Q_n(x)$ записываем как: $\left[\begin{array}{l} n = 0;\ Q_0(x) = A \\ n = 1;\ Q_1(x) = Ax + B \\ n = 2;\ Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$

6. Находим $\overline{y}'$; $\overline{y}''$

7. Подставляем $\overline{y};\ \overline{y}';\ \overline{y}''$ в $\overline{y}'' + p\overline{y}' + q\overline{y} = f(x)$

8. Решаем систему уравнений, находим $A; B; C\ \ldots$:
приравнивая коэффициенты n_{ij} при одинаковых степенях:

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array} \begin{cases} n_{11}A + n_{12}B + n_{13}C = N_1 \\ n_{21}A + n_{22}B + n_{23}C = N_2, \\ n_{31}A + n_{32}B + n_{33}C = N_3 \end{cases}$$

где $n_{ij}; N_v$ - действительные числа, получившиеся при подстановке.

9. Находим частное решение, подставив α; r; $A; B; C\ \ldots$в:

$$\overline{y} = e^{\alpha x} x^r Q_n(x)$$

10. Записываем ответ (общее решение): $y = y_0 + \overline{y}$

©Василенко В.А.

3.1.К Задача Коши

1. Переписываем условия задачи: $\left[\begin{array}{l} y'' + py' + qy = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{array}\right.$

2. Находим общее решение: $y = y_0 + \overline{y}$ по алгоритмам **2 и 3.1**

3. Находим y'

4. Подставляем в уравнения y и y' значения y_0; y'_0; x_0

5. Решаем систему уравнений, находим C_1 и C_2:

$$\begin{cases} a_1C_1 + b_1C_2 + d_1 = y_0 \\ a_2C_1 + b_2C_2 + d_2 = y'_0 \end{cases}$$

где a_1; a_2; b_1; b_2; d_1; d_2 - произвольные действительные числа, получившиеся при подстановке y_0; y'_0; x_0

6. В уравнение $y = \cdots$ подставляем значения C_1 и C_2

7. Записываем ответ, решение задачи Коши.

©Василенко В.А.