Алгоритмы

Приложение

---

1. Необходимый признак сходимости (Достаточный признак расходимости)

Алгоритм решения

$$\exists \sum_{n=n_0}^{\infty} U_n;\ n \in N.$$

1. Находим:

$$\lim_{n\to\infty} U_n$$

Вариант 1

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0$$

Выполняется необходимый признак сходимости ряда

Требуются дальнейшие исследования на сходимость/расходимость ряда

Ответ: Признак выполняется

Вариант 2

$$\lim_{n\to\infty} U_n \neq 0$$

Выполняется достаточный признак расходимости ряда

Ответ: Ряд расходится

2 Достаточные признаки сходимости

2.1. 1й признак сравнения

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} U_n;\ \forall U_n \geq 0;\ \ \&\ \exists \sum_{n=1}^{\infty} V_n;\ \forall\, V_n \geq 0;\ n \in N.$$

$$U_n \leq V_n \ \forall\, n \in N$$

Вариант 1	***Вариант 2***
Если V_n сходится, то сходится и U_n	Если U_n расходится, то расходится и V_n

---

2.2. 2й признак сравнения (предельный признак сравнения)

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} U_n;\ \forall U_n \geq 0;\ \ \&\ \exists \sum_{n=1}^{\infty} V_n;\ \forall\, V_n \geq 0;\ n \in N.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{U_n}{V_n}\right) = Const \neq 0$$

Вариант 1	***Вариант 2***
U_n и V_n сходятся одновременно	U_n и V_n расходятся одновременно

Замечание 1 для рядов вида (многочленов):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{m(n)}}{Q_{k(n)}};\ \forall T_{m(n)} \geq 0;\ \forall Q_{k(n)} \geq 0;\ n \in N.$$

T_m– многочлен степени m;

Q_k– многочлен степени k.

Для сравнения выбирают ряд Дирихле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

где $p = k - m$.

Замечание 2:

если $p \leq 0$, то для исходного ряда не выполняется необходимое условие сходимости. Следовательно, исходный ряд расходится.

2.3. Интегральный признак Коши

$$\exists \sum_{n=n_0}^{\infty} U_n;\ U_n = f(n);\ n_0 \geq 1;\ \forall U_n \geq 0\,;n \in N.$$

Алгоритм.

1. Записываем $U_n = f(n)$ как $f(x)$.

2. Проверяем $f(x)$ на промежутке $x \geq n_0$ на:

2.1 Непрерывность.

2.2 Положительность.

2.3 Монотонность, находим $f'(x)$:

Вариант 1	***Вариант 2***
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Применяем	Не применяем

4. Вычисляем интеграл:

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{n_0}^{b} f(x)\,dx$$

Вариант 1	***Вариант 2***
$\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx = Const$	$\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$
Ряд сходится	Ряд расходится

5. Записываем ответ:

Несобственный интеграл сходится, соответственно, исходный ряд тоже сходится	Несобственный интеграл расходится, соответственно, исходный ряд тоже расходится

Замечание ко всем достаточным признакам сходимости

При записи решения обязательно должны быть фразы, комментарии решения:

*в начале: "**Применим ...признак...**" (указать признак)*

*в конце: "**По ...признаку... (исходный) ряд (ра)сходится**"*

*ответ: "**Ряд (ра)сходится**"*

2.4 Признак Даламбера

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} U_n;\ \forall U_n \geq 0;\ n \in N.$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} \left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) = q.$$

Вариант 1	***Вариант 2***	***Вариант 3***
$q < 1$	$q > 1 \lor q = +\infty$	$q = 1$
Ряд сходится	Ряд расходится	Нет ответа

Рекомендации по использованию Признака Даламбера:

Наличие (и/или):

- ✓ Факториала: $n!$
- ✓ Показательной функции a^n

Факториал:

$0! = 1! = 1$
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$
$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$
$6! = 4! \cdot 5 \cdot 6$

2.5 Радикальный признак Коши

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} U_n;\ \forall U_n \geq 0;\ n \in N.$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = q.$$

Вариант 1	***Вариант 2***	***Вариант 3***
$q < 1$	$q > 1 \lor q = +\infty$	$q = 1$
Ряд сходится	Ряд расходится	Нет ответа

Рекомендации по использованию Радикального признака Коши:

Наличие степенной функции: ${U_n}^{an}$, где $a = Const$.

3. Алгоритм проверки знакопеременного ряда на абсолютную и условную сходимость

∃ знакопеременный ряд:

$$U_1+U_2+\dots+U_n+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}U_n;\ \ n\in N.$$

1. Проверка на абсолютную сходимость.

1.1. Записываем абсолютный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|U_n|.$$

1.2. Исследуем $\sum_{n=1}^{\infty}|U_n|$ на абсолютную сходимость (применяем один из достаточных признаков сходимости):

Вариант 1	***Вариант 2***
$\sum_{n=1}^{\infty}|U_n|$.сходится, Ответ: ряд сходится абсолютно	$\sum_{n=1}^{\infty}|U_n|$.расходится Проверяем на условную сходимость

2. Проверка на условную сходимость (применяем признак Лейбница).

2.1. Условие 1: $\lim\limits_{n\to\infty}|U_n|=0.$

Вариант 1	***Вариант 2***
$\lim\limits_{n\to\infty}|U_n|=0.$ Проверяем признак 2	$\lim\limits_{n\to\infty}|U_n|\neq 0.$ Ответ: исходный ряд расходится

2.2. Условие 2: $|U_n|>|U_{n+1}|.$

Вариант 1	***Вариант 2***
Выполняется Ответ: ряд сходится условно	Не выполняется Требуются дальнейшие исследования ряда на сходимость/расходимость

4. Поиск области сходимости степенного функционального ряда

∃ степенной функциональный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n;$$

$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_n$ - постоянные числа, коэффициенты ряда

Алгоритм

1. Определяем x_0 - центр сходимости

2. Записываем абсолютный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x - x_0)^n|.$$

3. По признаку Даламбера или радикальному признаку Коши находим:

Признак Даламбера	***Радикальный признак Коши***
$\exists \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right)$	$\exists \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}$

4. Определяем R

Вариант 1	***Вариант 2***
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right) \neq 0; \vee \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n} \neq 0.$	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right) = 0; \vee \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n} = 0.$
Продолжаем исследование ряда	Ответ: $(-\infty; +\infty)$ - область сходимости

5. Ищем область сходимости, записываем: $\lim\limits_{n\to\infty} < 1$

6. Записываем неравенство: $x_0 - R < x < x_0 + R;$

7. Определяем интервал сходимости $(x_0 - R; x_0 + R);$

R - радиус сходимости степенного ряда.

8. Исследуем концы интервала сходимости на сходимость.

8.1 Первым рекомендуется исследовать конец интервала, содержащий знакоположительный ряд.

8.2 На концах интервала нельзя применять признак Даламбера или радикальный признак Коши (пределы будут равны 1).

9. Записываем ответ: область сходимости.

Приложение

Замечательные пределы

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; 2. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$

Ряды Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}; \ p = Const; \ p \in R; \ n \in N.$$

Вариант 1	***Вариант 2***
$p > 1$	$p \leq 1$
Ряд сходится	Ряд расходится

Гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}; \ n \in N.$$

Ряд расходится

Ряды с геометрической прогрессией

$$\sum_{n=1}^{\infty} b \cdot q^{n-1}; \ b = Const \neq 0; \ b \in R; \ n \in N.$$

Вариант 1	***Вариант 2***
$\lvert q \rvert < 1; \ q = Const; \ q \in R.$	$\lvert q \rvert \geq 1; \ q = Const; q \in R.$
Ряд сходится	Ряд расходится
