РОССИЙСКИЙ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Д.И. МЕНДЕЛЕЕВА
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ЛЕКЦИЯ 1:

- ✓Множества
- ✓Операции над множествами
- ✓Алгебра подмножеств

Множества

Определение: *Множеством* называется любая определенная совокупность объектов любой природы. Объекты, из которых составлено множество, называются его *элементами*.

Замечание: Элементы множества различны и отличимы друг от друга.

Чтобы определить множество, достаточно указать характеристическое свойство его элементов, то есть такое, которым обладают все элементы этого множества и только они.

Свойство, которым не обладает вообще ни один предмет, определяет *пустое* множество.

Множества

Обозначение: Обычно *множества* обозначаются прописными буквами латинского алфавита, а *элементы* множеств – строчными буквами.

Пустое множество обозначается символом $\emptyset$.

$$\emptyset = \{x \in U | x \neq x\}$$

То, что элемент x *принадлежит* множеству M записывают так: $x \in M$. Если же x *не принадлежит* множеству M, то так: $x \notin M$ или $x \overline{\in} M$.

Проблемы: 1. проблема отличимости элементов.

2. Проблематична возможность (без дополнительных усилий) указать, принадлежит ли данный элемент данному множеству или не принадлежит.

Множества

Замечание: Чтобы задать множество, нужно указать, какие элементы ему принадлежат.

Способы задания множеств:

1. *Перечислением* элементов (конечные множества):

$$M = \{a, b, c, d, e, f\}$$

2. *Характеристическим предикатом* – это некоторое условие, выраженное в форме логического утверждения или процедуры, возвращающей логическое значение.

3. *Порождающей процедурой* – это процедура, которая, будучи запущенной, порождает некоторые объекты – элементы определяемого множества.

Множества

Замечание: Задание множеств характеристическим предикатом может приводить к противоречиям.

Парадокс Рассела- Цермело

Рассмотрим множество тех множеств, которые не содержат себя в качестве элемента:

$Y = \{X | X \notin X\}$.

Рассуждение: Если множество Y существует, то возникает вопрос, принадлежности: $Y \in Y$? Пусть $Y \in Y$, тогда по определению множества $Y: Y \notin Y$. Если же изначально $Y \notin Y$, то в силу определения множества $Y: Y \in Y$. Логическое противоречие.

Множества

Парадокс брадобрея

В одной из деревень жил парикмахер. В его обязанность входило брить всех тех и только тех жителей деревни, кто не брился сам. Должен ли парикмахер брить самого себя?

Рассуждение: Если парикмахер станет брить самого себя, то как житель этой деревни, который бреется сам, он не может быть бритым парикмахером, то есть, самим собой. Но если парикмахер не станет бриться, то как житель этой деревни, который не бреется сам, он должен быть бритым парикмахером, то есть, самим собой.

Множества

Парадокс лжеца

«Я лжец», – сказал лжец. (Предполагается, что лжецы всегда лгут, а нелжецы всегда говорят правду).

Рассуждение: Некий лжец сообщает о себе, что он лжец. Тогда, если он сказал правду, то он нелжец. А это значит, что это высказывание следует понимать как: «Я лжец», – сказал нелжец. Но теперь получается, что правдивый человек сообщает о себе, что он лжец. Поверив правдивому человеку, мы приходим к выводу, что правильно считать его лжецом. Возникает неопределенность, относить ли человека к множеству лжецов или к множеству нелжецов. Также непонятно, истинны или ложны его высказывания.

Множества

Способы избежать парадоксы

1. Ограничить используемые характеристические предикаты видом $P(x) = (x \in U)\,\&\,Q(x)$, где U – известное, заведомо существующее множество (универсум). Обозначение: $\{x \in U | Q(x)\}$.
2. Теория типов. Объекты имеют тип 0, множества имеют тип 1, множества множеств – тип 2 и …
3. Характеристический предикат $P(x)$ задан в виде вычислимой функции (алгоритма).

Операции над множествами

Определение: Множество A *содержится* в множестве B (множество B *включает* множество A), если каждый элемент множества A есть элемент множества B: $A \subset B \coloneqq (x \in A) \Rightarrow (x \in B)$. В этом случае A называется *подмножеством* B, а B – *надмножеством* A.

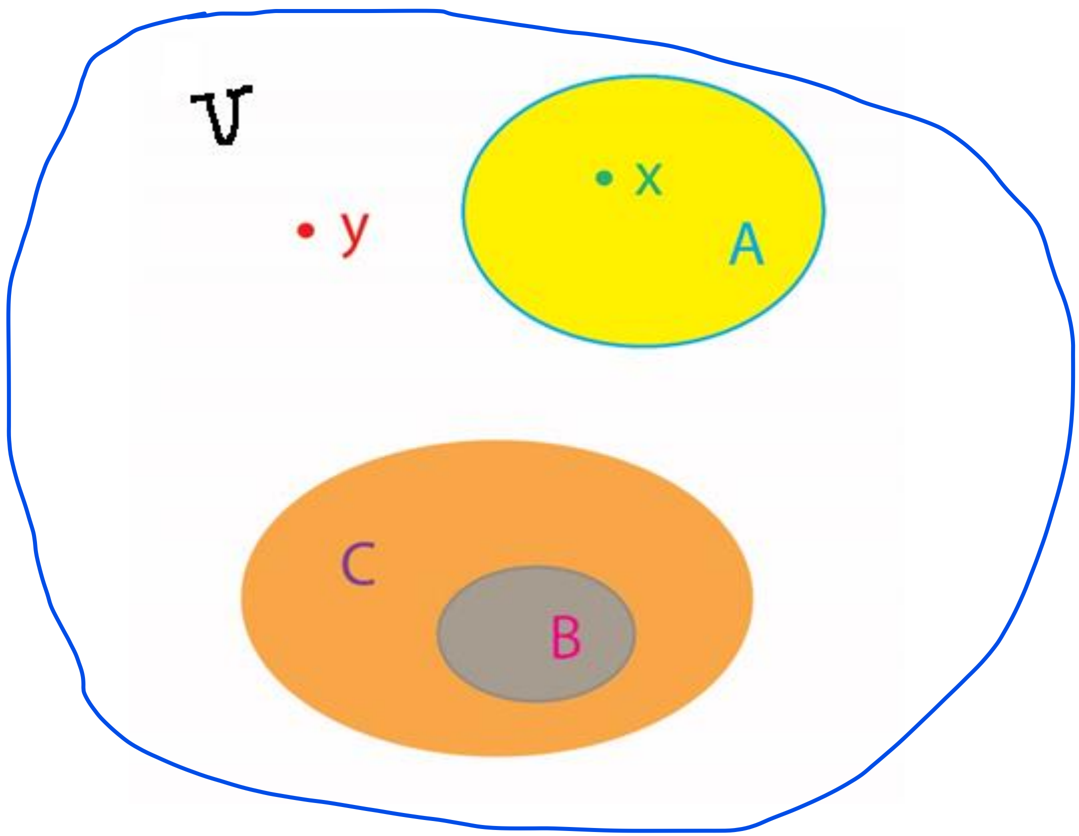
Если $A \subset B$ и $A \neq B$, то A называется собственным подмножеством B.

Замечание: $\forall M: M \subset M$ и $\forall M: \emptyset \subset M$.

$$A = B \coloneqq (A \subset B)\&(B \subset A).$$

Множества

- U –универсальное множество; $x \in A$; $y \overline{\in} A$; $B \subset C$.



Множества

- е) $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ – множество целых чисел.

$$2 \in \mathbb{Z}; \quad \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}; \quad 0 \in \mathbb{Z}; \quad -1 \in \mathbb{Z}; \quad \sqrt{5} \notin \mathbb{Z}; \quad \sqrt{-1} \notin \mathbb{Z}.$$

- ж) $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ – множество рациональных чисел.

$$2 \in \mathbb{Q}; \quad \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}; \quad 0 \in \mathbb{Q}; \quad -1 \in \mathbb{Q}; \quad \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}; \quad \sqrt{-1} \notin \mathbb{Q}.$$

- з) $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел.

$$2 \in \mathbb{R}; \quad \frac{1}{2} \in \mathbb{R}; \quad 0 \in \mathbb{R}; \quad -1 \in \mathbb{R}; \quad \sqrt{5} \in \mathbb{R}; \quad \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}.$$

- и) $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел.

$$2 \in \mathbb{C}; \quad \frac{1}{2} \in \mathbb{C}; \quad 0 \in \mathbb{C}; \quad -1 \in \mathbb{C}; \quad \sqrt{5} \in \mathbb{C}; \quad \sqrt{-1} \in \mathbb{C}.$$

- к) $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Общепринятые обозначения. Логические символы

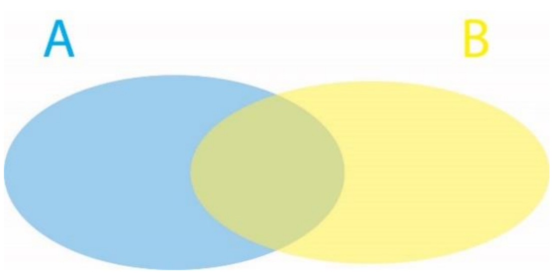
- Для краткости общепринято использовать особые математические значки, называемые кванторами:
- ∃ – «существует» (квантор существования);
- ∀ – «для любого», «для всех» (квантор всеобщности);
- ∃! – «существует единственный элемент»;
- ⇒ – «следует», «имеет место»;
- ⇔ – «если и только если», «тогда и только тогда, когда»;
- ¬ – «неверно, что» (знак отрицания);
- ⌋ – «если».

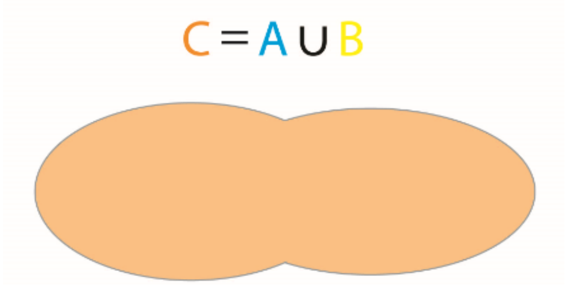
Операции над множествами

Определение 1.1.

Множество C называется *объединением* множеств A и B, если оно состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из указанных множеств.

Обозначение: $C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.



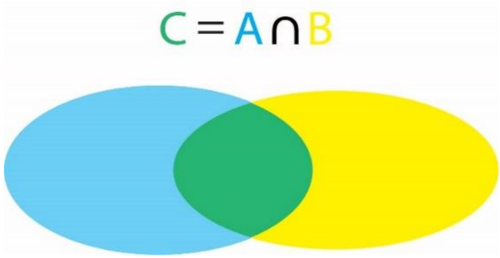


Операции над множествами

- **Определение 1.2.**

Множество C называется *пересечением* множеств A и B, если оно состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно и A, и B.

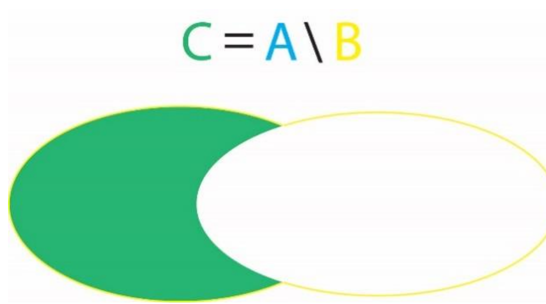
Обозначение: $C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.



Операции над множествами

- **Определение 1.3.**

Разностью $C = A \setminus B$ двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов A, не принадлежащих B.
Множество $A' = E \setminus A$ называется дополнением множества A.



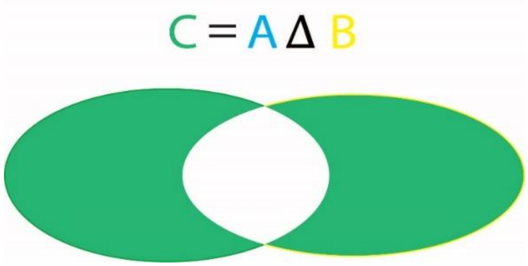
Операции над множествами

- **Определение 1.4.**

Симметрической разностью $C = A \Delta B$ двух множеств A и B называется множество

$$C = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Замечание: Можно показать, что $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Симметрическая разность определяет, насколько одно множество отличается от другого.



Операции над множествами

Операции над множествами:

(U – универсальное множество)

пересечение: $A \cap B := \{x | (x \in A) \,\&\, (x \in B)\}$;

объединение: $A \cup B := \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$;

разность: $A \setminus B := \{x | (x \in A) \,\&\, (x \notin B)\}$;

симметрическая разность: $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$A \Delta B = \{x | (x \in A) \,\&\, (x \notin B) \vee (x \notin A) \,\&\, (x \in B)\}$;

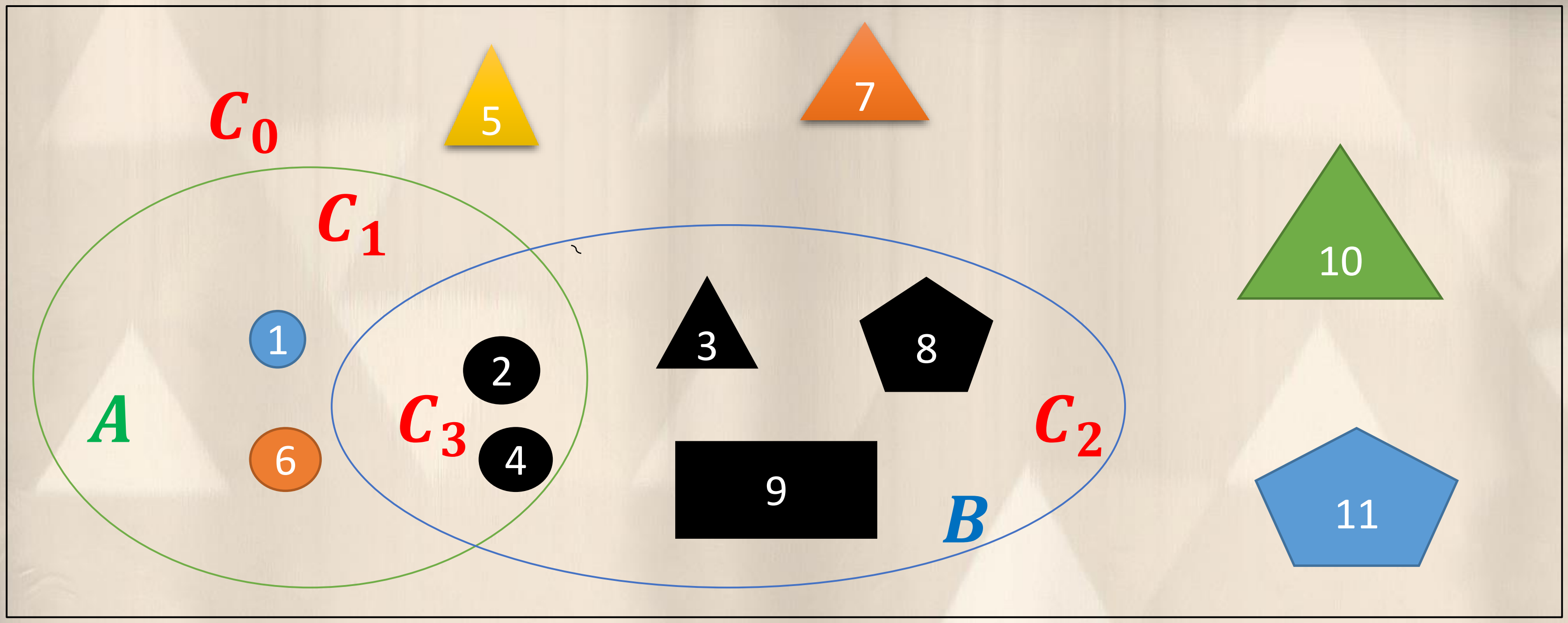
дополнение: $\bar{A} := U \setminus A = \{x | (x \in U) \,\&\, (x \notin A)\}$.

Операции над множествами

Примеры: Рассмотрим универсальное множество $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$. Пусть предметы под номерами $1, 2, 4$ и 6 – круглые, а $2, 3, 4, 8$ и 9 – черные. Тогда множество U будет содержать подмножества $A = \{1,2,4,6\}$ и $B = \{2,3,4,8,9\}$.

Тогда мы имеем 4 набора: $C_0 = \{5,7,10,11\}$ – элементы, которые не круглые и не черные; $C_1 = \{1,6\}$ – элементы, обладающие только свойством A (быть круглыми); $C_2 = \{3,8,9\}$ – элементы, обладающие только свойством B (быть черными); $C_3 = \{2,4\}$ – элементы, которые одновременно и круглые и черные.

Операции над множествами



$A \cup B = C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \{1,2,3,4,6,8,9\}$

$A \cap B = C_3 = \{2,4\}$, $A \backslash B = C_1 = \{1,6\}$, $B \backslash A = C_2 = \{3,8,9\}$,

$A \Delta B = C_1 \cup C_2 = \{1,6,3,8,9\}$, $\bar{A} = C_0 \cup C_2 = \{3,5,7,8,9,10,11\}$,

$\bar{B} = C_0 \cup C_1 = \{1,5,6,7,10,11\}$.

Операции над множествами

Определение: Пусть I – некоторое множество, элементы которого используются как индексы и, кроме того, пусть для любого $i \in I$ множество A_i известно. Тогда:

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid \forall i \in I \quad x \in A_i\},$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I \quad x \in A_i\}.$$

Операции над множествами

Определение: Пусть $\mathcal{H} = \{H_i\}_{i \in I}$ – некоторый класс подмножеств множества A, $H_i \subset A$.

Класс $\mathcal{H}$ называется *покрытием* множества A, если каждый элемент A принадлежит хотя бы одному из H_i.

Класс $\mathcal{H}$ называется *дизъюнктным*, если элементы этого класса попарно не пересекаются.

Дизъюнктное покрытие $\mathcal{H}$ называется *разбиением* множества A.

Пример: Класс $\mathcal{H} = \{C_0, C_1, C_2, C_3\}$ является разбиением множеств A, B и полученных из них.

Алгебра подмножеств

Определение: *Мощностью* конечного множества M называется число его элементов. Мощность множества M обозначается через $|M|$.

Если $|A| = |B|$, то множества A и B называются *равномощными.*

Определение: Семейство всех подмножеств множества A называется *булеаном* и обозначается через 2^A. Для конечного множества A: $|2^A|=2^{|A|}$.

$P(A) = 2^A$

Определение: Семейство всех подмножеств множества U с операциями пересечения, объединения, разности и дополнения образует *алгебру подмножеств* множества U.

Алгебра подмножеств

Свойства операций на множествах

Пусть U – универсум. Для $\forall A, B, C \in U$:

идемпотентность: $A \cap A = A$;

коммутативность: $A \cap B = B \cap A$;

ассоциативность: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

Алгебра подмножеств

дистрибутивность:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

поглощение: $(A \cup B) \cap A = A;$

свойство нуля: $A \cap \emptyset = \emptyset;$

свойство единицы: $A \cap U = A;$

инволютивность: $\bar{\bar{A}} = A;$

Алгебра подмножеств

закон де Моргана: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;

свойство дополнения: $A \cap \bar{A} = \emptyset$;

выражение для разности: $A \setminus B = A \cap \bar{B}$;

склеивание: $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$;

Алгебра подмножеств

идемпотентность: $\cancel{A \cup A = A;}$ $A \cup A = A$

коммутативность: $A \cup B = B \cup A;$

ассоциативность: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$

дистрибутивность:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

поглощение: $(A \cap B) \cup A = A;$

Алгебра подмножеств

свойство нуля: $A \cup \emptyset = A$;

свойство единицы: $A \cup U = U$;

закон де Моргана: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;

свойство дополнения: $A \cup \bar{A} = U$;

склеивание: $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$;

Спасибо за внимание!