Л4 Matlab 02.03.23

Собственные значения и собственные векторы

$A\cdot x = \lambda x$ – собственный вектор матрицы A
λ – собств. знач. м. A.

$A\cdot x = \lambda\cdot x \Leftrightarrow (A-\lambda E)x = 0$

имеет нетрив. реш. когда $rang(A-\lambda\cdot E) < n$

$\det(A-\lambda E)$ – характерист. многочлен м. A ($\det(A-\lambda E)=0$)

$\det(A-\lambda E)=0$ – характеристич. урав-е или вековое.

Мн-во решений хар. ур-ия – собств. подпростр. м. A

Характ. ур-е для обобщенной задачи о собственных зн-ях.

$\det(A-\mu B) = \det(a_{ij} - \mu b_{ij}) = 0$

Многие числ. методы решения задач на собств. зн. основаны на приведение матрицы к одной из перечисленных выше форм с помощью преобразований подобия

Матрица B называется подобной матрице A, если существует обратимая матрица F такая, что $B = F^{-1}AF$.

$\rho(A) \le \|A\|$, где $\rho(A) = \max|\lambda_i|$ – максимальное по модулю собственное зн-е или спектральный радиус матрицы A.

Число обусловленности

$\mu(A) = \|A\|\cdot\|A^{-1}\| = \max_i|\lambda_i|\frac{1}{\min|\lambda_i|} \ge 1$

e_i (M) – вектор собств. зн. м. M

Итерац. методы решения алг. ур-ий лин. ал.

Для реш. сист. со слаб. матрицей (или либо заполненной) разрежен. таблицей, а также для систем ур-ий высокого порядка! $n = 10^2 - 10^7$

Этапы

– Приведение исходной системы вида $Au = f$ к преобразованной (итер.-ой) форме
– анализ на сходимость метода
– решение преобр. системы с точностью ε одним из методов послед. прибл., в основе которых лежит ... построение послед-ти векторов решения по его предыд. прибл.

Метод пр. итерации

$Au = f$

$\Downarrow$

(1) $u = Bu + F$, где $B = E - \tau A$, $F = \tau f$

u_0 – нач. прибл.

уточн. реш.: $u_1 = u_0 + \tau r_0$

в ходе итер.: $u_{k+1} = u_k + \tau r_k$, $r_k = f - Au_k$

Решение (1): $u_{k+1} = Bu_k + F$

Если предел послед. существ. $\Rightarrow$ сходимость итер. процесса к решению.

Др. форма записи МИ

$u_{k+1} = (E - \tau A)u_k + \tau f$

Канонич. ф-а двухслойн. итер. проц.:

$$D_{k+1} \frac{u_{k+1} - u_k}{\tau_{k+1}} + Au_k = f$$

при $D_k = E$, $\tau_k = \tau$

16. Критерий сход. мет. пр. итер.

Пусть СЛАУ имеет единств. реш.
Тогда для сход. необх и дост чтобы собств зн-я матрицы B по абс величине были меньше 1.

Норма матр. $\|C\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2} < 1$

Усл. окон.: $|x_i^{k+1} - x_i^k| \le \varepsilon$

$$\max |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \le \varepsilon$$

Влияние ошибок округл.

$$u_k^m = B u_{k-1}^m + F + \delta_k$$

$\|u_k^m - u_k\| \le \delta \frac{q^{k}-1}{q-1} \le \frac{\delta}{1-q}$, то есть огр.

Ошибка в решении сверху конечна, ограниченна, не зависит от кол-ва итераций. Это т. явл. показ-ой устойчивости рассматр. вычисл. процесса.

Метод Якоби

$$A = L + D + U$$

$$Lu + Du + Uu = F$$

$Lu_k + Du_{k+1} + Uu_k = F$ (Якоби)

$Lu_{k+1} + Du_{k+1} + Uu_k = F$ (Зейдель)

или

$u_{k+1} = -D^{-1}(L+U)u_k + D^{-1}f$ (Якоби)

$u_{k+1} = -(L+D)^{-1}Uu_k + (L+D)^{-1}f$ (Зейдель)

Мет. Зейделя: $B = -D^{-1}(L+U),\ F = D^{-1}f$

или

$B = -(L+D)^{-1}U,\ F = (L+D)^{-1}f$

Th. Дост. усл. сходимости

выполн. условия диаг. преобл.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} |a_{ij}|$$

Th. Критерий сход. итер. метод Зейделя

необх. и дост. все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

не превосх. 1.

Th. М. Зейделя всегда сход. для нормальн. СЛАУ

Норм. СЛАУ – ($A = A^T$ и положит. определ.)

Положит. определен. матрица – матр., для кот. квадратичная форма $(Ax, x) > 0$ или матрица, у которой все собств. зн-я положительны

М. З более быстро сход., чем МПИ

V=diag(A) — вади вектор саст. сас. из елемената главн. дијаг.

D=diag(V) — фор. матрица D са елементима ~~вектора~~ V на гл. д.

LL=tril(A) — из м. A вади ~~доњу~~ Δ матр с главн. дијаг.

L=LL−D — уклањање главн. дијагонале из доње Δ матр.

UU=triu(A) — из матр. A вади се горња Δ матр с гл. дијаг.