ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ՀԶՈՐՈՒԹՅՈՒՆ: ՀԱՇՎԵԼԻ ԵՎ ՈՉ ՀԱՇՎԵԼԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ:

Յանկացած վերջավոր (վերջավոր թվով տարրեր ունեցող) բազմության կարելի է համապատասխանեցնել նրա տարրերի քանակը, ընդ որում երկու բազմություններ կունենան միևնույն թվով տարրեր այն և միայն այն դեպքում, եթե նրաց միջև կարելի է ստեղծել փոխմիարժեք համապատասխանություն: Այս վերջին փաստը թույլ է տալիս դասակարգել նաև անվերջ բազմությունները ըստ նրանց տարրերի “քանակի”: Դրա համար բազմությունների դասում մտցնենք համարժեքության հարաբերություն:

Սահմանում: Կասենք, որ A և B բազմությունները համարժեք են , եթե նրանց միջև գոյություն ունի φ փոխմիարժեք արտապատկերում: Այսինքն,

$$\exists\varphi: A\to B, s.t.\varphi(A)=B \text{ և } a_1\neq a_2 \Rightarrow \varphi(a_1)\neq\varphi(a_2)$$

Ակնհայտ է, որ այս հարաբերությունը իսկապես համարժեքության հարաբերություն է, իրոք, այն

1. ռեֆլեքսիվ ($A\sim A \quad \varphi(x)=x$),

2. սիմետրիկ ($A\sim B \Rightarrow B\sim A \qquad \varphi: A\to B \qquad \varphi^{-1}: B\to A$) և

3.տրանզիտիվ ($(A\sim B \ , \ B\sim C)\Rightarrow \ A\sim C: \varphi: A\to B, \psi: B\to C$ ապա $\psi\circ\varphi: A\to C$) է:

Այս հարաբերությունը բազմությունների դասը կտրոհի իրար հետ չհատվող ենթադասերի: Այն ինչ ընդհանուր է այդ ենթադասերից յուրաքանչյուրին կանվանենք այդ ենթադասի մեջ մտնող բազմությունների հզորություն (տարրերի “քանակ”):

Այսպիսով եկանք հետևյալին:

Սահմանում: Կասենք, որ երկու բազություններ ունեն միևնույն հզորությունը, եթե նրանք համարժեք են:

A բազմության հզորությունը կնշանակենք $\overline{\overline{A}}$:

Վերջավոր բազմության հզորությունը միարժեքորեն որոշվում է նրա տարրերի քանակով, դրա համար բնական է վերջավոր բազմության հզորությունը նույնացնել նրա տարրերի քանակի հետ: Ակնհայտ է, որ ոչ մի վերջավոր բազմուրյուն համարժեք չի իր իսկական ենթաբազմությանը: Բանը բոլորովին այլ է անվերջ բազմությունների համար: Օրինակ, բնական թվերի բազմությունը համարժեք է զույգ թվերի բազմությանը՝ իր իսկական ենթաբազմությանը ($\varphi: \mathbb{N}\to\{2n; n\in\mathbb{N}\} \quad \varphi(n)=2n$): Հետևյալ սահմանումը համեմատում է բազմությունների հզորությունները:

Սահմանում: Տրված են A և B բազմությունները՝ $\overline{\overline{A}}$ և $\overline{\overline{B}}$ հզորություններով: Կասենք, որ $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$, եթե $B \sim A_1 \subset A$ և A-ն համարժեք չէ B-ին:

Բնական թվերի բազմության հզորությունը կարևոր դեր ունի, կարելի է ասել, մաթեմատիկայի բոլոր բնագավառներում, ուստի այն արժի առանձացնել:

Սահմանում: Կասենք, որ բազությունը հաշվելի է, եթե այն համարժեք է բնական թվերի բազմությանը:

Այլ խոսքերով ասած A բազմությունը հաշվելի է, եթե նրա տարրերը կարելի է համարակալել, այսինքն $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, ընդ որում $a_i \neq a_j$, երբ $i \neq j$:

Թեորեմ: Ցանկացած A անվերջ բազմություն ունի հաշվելի ենթաբազմություն:

$\mapsto$

Քանի, որ A -ն անվերջ է, ուրեմն այն դատարկ չի, վերցնենք $a_1 \in A$ և դիտարկենք $A \setminus \{a_1\}$-ը, այն դատարկ չի, վերցնենք $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$ և դիտարկենք $A \setminus \{a_1, a_2\}$-ը, այն նույնպես դատարկ չի, վերցնեն $a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\}$: Այս պրոցեսը կշարունակվի անվերջ, քանի որ A-ն անվերջ բազմություն է: Արդյունքում կստանանք $A_1 = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \subset A$ հաշվելի բազմությունը: $\lrcorner$

Այս թեորեմից անմիջապես հետևում է, որ անվերջ բազմություններից ամենափոքր հզորություն ունեն հաշվելի բազմությունները:

Նշենք հաշվելի բազմությունների մի քանի հատկություններ:

Թեորեմ: Վերջավոր կամ հաշվելի թվով հաշվելի բազմությունների միավորմանը հաշվելի է:

$\mapsto$ Դիտարկենք միայն հաշվելի դեպքը: Դիցուք $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, որտեղ բոլոր A_n-երը հաշվելի են, հետևաբար նրանց տարրերը կարելի է համարկալել, դիցուք $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \ldots a_{n3}, \ldots\}$: Կազմենք հետևյալ աղյուսակը

$A_1: \quad a_{11}, a_{12}, \ldots a_{13}, \ldots$

$A_2: \quad a_{21}, a_{22}, \ldots a_{23}, \ldots$

....

$A_n: \quad a_{n1}, a_{n2}, \ldots a_{n3}, \ldots$

....

Համարակալենք B բազմության տարրերը հետրևյալ ձևով: Առաջին քայլում համարակալենք աղյուսակի բոլոր այն տարրերը, որոնց ինդեքսներ գումարը երկուս է, այդպիսի միայն մեկ տարր կա, այն է a_{11}-ը, երկրորդ քայլում համարակալենք աղյուսակի բոլոր այն իրարից տարբեր տարրերը, որոնց ինդեքսներ գումարը երեք է, ընդ որում չենք համարակալում այն տարրերը, որոնք համարակալված են նախորդ քայլում: k-րդ քայլում համարակալենք աղյուսակի բոլոր այն իրարից տարբեր տարրերը, որոնց ինդեքսներ գումարը $(k+1)$ է, այդպիսի տարրերը ամենաշատը k հատ են $a_{k1}, a_{(k-1)2}, ..., a_{1k}$, ընդ որում չենք համարակալում այն տարրերը, որոնք համարակալված են նախորդ քայլերից որևէ մեկում: Պարզ է, որ այսպիսով մենք կհամարակալենք B բազմության բոլոր տարրերը: ↵

Դիտողություն: Պարզ է, որ հաշվելի կլինի նաև $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ բազմությանը, եթե A_n բազմություններից բոլորը կամ նրանց որոշ մասը լինեն վերջավոր :Պարզ է նաև, որ եթե A_n-երից բոլորն են վերջավոր, ապա որպեսզի B-ն լինի հաշվելի պետք է, որ A_n-երից հաշվելի թվովը լինի ոչ դատարկ:

Թեորեմ: Վերջավոր թվով հաշվելի բազմությունների դեկարտյան արտադրյալը հաշվելի է:

↦

Ապացուցվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով կրառելով նախորդ թեորեմը: ↵

Թեորեմ: Ռացիոնալ թվերի $\mathbb{Q}$ բազմությունը հաշվելի է:

↦

Իրոք $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, այստեղ A_n-ը n հյտարարով կոտորակների բազմությունն է և ակնհայտորեն այն հաշվելի է: Ուրեմն $\mathbb{Q}$-ն որպես հաշվելի թվով հաշվելի բազմությունների միավորում հաշվելի է: ↵

Թեորեմ: $[0,1]$ հաշվելի չէ:

↦

Ենթադրենք $[0;1]$-ը հաշվելի է՝ $[0;1] = \{x_1, x_2, ..., x_n ...\}$: $[0,1]$ բաժանենք երեք հավասար մասերի՝ $[0,1/3], [1/3, 2/3], [2/3, 1]$, նրանցից մեկում x_1 չկա, այն նշանակենք $[a_1, b_1]$-ով:

$[a_1,b_1]$-ը նունպես տրոհենք երեք հավասար մասի: Այդ մասերից որևէ մեկը չի պարունակի x_2-ը, այն նշանակենք $[a_2,b_2]$-ով: Պրոցեսը շարունակելով կստանանք

$$[0,1]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset....\supset[a_n,b_n]\supset...$$

ներդրված հատվածների հաջորդականություն, ընդ որում $x_n\notin[a_n,b_n]$: Ըստ ներդրված միջակայքերի լեմմայի $\exists x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$:

$x_0\in[0,1]$, բայց x_0-ն չի համընկնում $x_1,x_2,...,x_n,...$- ից ոչ մեկի հետ: Ստացանք մի կետ որը համարակալված չի, ինչը նշանակում է, որ $[0,1]$ հաշվելի չէ: ↵

Սահմանում: [0,1]-ի հզորությունը կոչվում է կոնտինիում:

Թեորեմ: Երկու սիմվոլներից կազմված բոլոր հնարավոր հաջորդականությունների բազմությունը ունի կոնտինիում հզորություն:

↦

Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է ենթադրել, որ այդ սիմվոլներն են 0 և 1-ը: Այդ դեպքում, եթե 0 և 1-երից կազմված հաջորդականությունների բազմությունից հեռացնենք ինչ որ տեղից հետո միայն 1-եր պարունակող հաշվելի հզորության (ապացուցել) բազմությունը, ապա կարող ենք փոխմիարժեք համապատասխանություն ստեղծել մնացած հաջորդականությունների բազմության և [0,1] հատվածի միջև՝ ամեն թվի համապատասխանեցնելով նրա 2-ական կոտորակը: Բայց հայտնի է, որ անվերջ բազմությանը հաշվելի բազմություն միավորելուց կամ նրանից հաշվելի բազմություն հեռացնելուց նրա հզորությունը չի փոխվի (ապացուցել): ↵

ՀՈԼԴԵՐԻ ԵՎ ՄԻՆԿՈՎՍԿՈՒ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ապացուցենք հետագայի համար պետքական մի քանի անհավասարություններ: Նախ ապացուցենք հետևյալ լեմման:

Լեմմա: Եթե a, b, p, q թվերը բավարարում են $a \ge 0,\ \ b \ge 0,\ \ \ p > 1,\ q > 1$ և $1/p + 1/q = 1$ պայմաններին, ապա ճիշտ է

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

անհավասարությունը, ընդ որում այստեղ հավասարություն հնարավոր է այն և միայն այն դեպքում, երբ $b = a^{p-1}$:

$\mapsto$

Եթե a-ն կամ b-ն զրո են պնդումը ակնհայտ է, ուրեմն ենթադրենք, որ $a > 0,\ \ \ b > 0$ և $[0;\infty)$-ում դիտարկենք $f(t) = at - a^p/p - t^q/q$ ֆունկցիան: Ստանդարտ եղանակով կարելի է տեսնել, որ $t = a^{1/(q-1)}$ կետում $f(t)$-ն ունի զրո մեծագույն արժեք և լեմման կլինի ապացուցված, եթե հաշվի առնենք $1/(q-1) = p-1$ հավասարությունը:

↵

Թեորեմ 1: Ցանկացած $a_1, a_2, ..., a_n$ և $b_1, b_2, ..., b_n$ կոմպլեքս թվերի համար ճիշտ է

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q} \qquad \textbf{(Հ)}$$

անհավասարությունը, եթե միայն $p > 1,\ q > 1$ և $1/p + 1/q = 1$: Ընդ որում, այստեղ հավասարություն հնարավոր է այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունի $\lambda \ge 0$ թիվ այնպես, որ $|b_i| = \lambda |a_i|^{p-1}$ կամ $a_i = 0\ \ (i = 1, 2, ..., n)$:

Նշենք, որ թեորեմում բերված անհավասարությունը կոչվում է **Հոլդերի անհավասարություն:**

$\mapsto$

Նշանակենք $A = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p}$, $B = \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}$:

Մասնավոր դեպքում, երբ $A = 1$ և $B = 1$ **(Հ)**-ն համարժեք է $\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \le 1$ անհավասարությանը, որը ապացուցելու համար օգտվենք լեմմայից, ըստ որի ցանկացած i-ի համար կարող ենք գրել , որ

$$|a_i b_i| \le \frac{|a_i|^p}{p} + \frac{|b_i|^q}{q} \ : \qquad \text{(ԻՃ)}$$

Գումարելով այս անհավասարությունները, կունենանք

$$\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i| \le \frac{\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p}{p} + \frac{\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q}{q} = \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \;: \qquad \textbf{(ՄԴ)}$$

Ընդհանուր դեպքում, եթե A-ն կամ B-ն զրո են, ապա **(Հ)**-ում կլինի հավասարություն, ուրեմն կարող ենք ենթադրել, որ $A>0$, $B>0$ և նշանակելով $a_i' = \frac{a_i}{A}$ և $b_i' = \frac{b_i}{B}$,

կունենանք $A' = \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i'|^p\right)^{1/p} = \frac{\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p}{A^p} = \frac{A^p}{A^p} = 1$ և նմանաձև $B' = \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i'|^q\right)^{1/q} = 1$,

հետևաբար ըստ մասնավոր դեպքի $\sum_{i=1}^{n}|a_i'b_i'| \le 1$: Այս անհավասաության մեջ տեղադրելով $a_i' = \frac{a_i}{A}$ և $b_i' = \frac{b_i}{B}$ կստանանք $\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i| \le AB$: Ստացանք այն ինչ պետք էր ապացուցել: ↵

Այժմ տեսնենք թե **(Հ)**-ում, երբ է հնարավոր հավասարություն: Մի դեպք արդեն քննարկել ենք, այն է , երբ $A=0$ $(B=0)$ այսինքն բոլոր a_i-երը (b_i-երը) զրո են: Մի կողմ թողնելով այդ ակնհայտ դեպքերը ենթադրենք,որ $A>0$, $B>0$: Երբ $A=1$ ¨ $B=1$ **(ՄԴ)**-ում կլինի հավասարություն այն և միայն այն դպքում, եթե հավասարություն լինի **(ԻՃ)**-ում ցանկացած i-ի համար, այսինքն երբ $|b_i| = |a_i|^{p-1}$ ցանկացած i-ի համար:
Ընդհանուր դեպքի համար կունենանք $|b_i'| = |a_i'|^{p-1}$, որտեղից կստանանք $|b_i| = \lambda|a_i|^{p-1}$,

եթե վերցնենք $\lambda = \frac{B}{A^{p-1}}$: Հակադարձ պնդումը, $|b_i| = \lambda|a_i|^{p-1}$ Ï³Ù $a_i = 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ պայմաններից հետևում է, որ **(Հ)**-ում կլինի հավասարություն, ակնհայտ է:

Ցույց տալ, որ գոյություն ունի $\lambda \ge 0$ թիվ այնպես, որ $|b_i| = \lambda|a_i|^{p-1}$ Ï³Ù $a_i = 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ պայմանը համարժեք է գոյություն ունեն $\lambda \ge 0$ ¨ $\mu \ge 0$, $\lambda+\mu>0$, թվեր այնպես, որ $\mu|b_i|^q = \lambda|a_i|^p$ $(i=1,2,\ldots,n)$ պայմանին:

Անցնենք **Մինկովսկու անհավասարությանը**:

Թեորեմ: Ցանկացած $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ¨ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ կոմպլեքս թվերի համար ճիշտ է

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{1/p} \qquad \textbf{(Մ)}$$

անհավասարությունը, եթե միայն $p \ge 1$: Ընդ որում, եթե $p>1$, այստեղ հավասարություն հնարավոր է այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունի $\lambda \ge 0$ թիվ այնպես, որ $b_i = \lambda a_i$, Ï³Ù $a_i = 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$:

↦

$p=1$ դեպքում անհավասարությունը ակնհայտ է, ընդ որում հավասարություն հնարավոր է այն և միայն այն դեպքում,երբ ցանկացած i-ի համար $|a_i+b_i| = |a_i|+|b_i|$, այսինքն $a_i = \gamma_i b_i$, որտեղ γ_i-երը ոչբացասական թվեր են:

Երբ $p>1$, ճիշտ է հետևյալը՝

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p \le \sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^{p-1}(|a_i|+|b_i|)=\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^{p-1}|a_i|+\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^{p-1}|b_i| \qquad \textbf{(ԿՄ):}$$

Եթե վերջին երկու գումարները գնահատենք կիրառելով Հոլդերի անհավասարությունը, կունենանք՝

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p \le \left(\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^{q(p-1)}\right)^{1/q} \quad \textbf{(ՀՄ):}$$

Այժմ, հաշվի առնենլով, որ $q(p-1)=p$, $1-1/q=1/p$, կստանանք **(Մ)**-ն:

(Մ)-ում տեղի կունենա հվասարոթյուն այն և միայն այն դեպքում, եթե հավասարություն տեղի ունեն **(ԿՄ)** և **(ՀՄ)**-ում: Այսինքն եթե հաշվի չառնենք $a_i=0$ $(i=1,2,\dots,n)$ տրիվյալ դեպքը, ապա գոյություն ունեն $\gamma_i\ge 0, i=1,2,\dots,n$, $\nu\ge 0$, $\mu\ge 0$ թվեր այն-պես, որ տեղի ունենան $a_i=\gamma_i b_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ և $|a_i+b_i|^{p-1}=\nu|a_i|^{p-1}$, $|a_i+b_i|^{p-1}=\mu|b_i|^{p-1}$ հավասարությունները: Ասվածից անմիջապես հետևում է, որ $(1+\gamma_i)|b_i|^{p-1}=\mu|b_i|^{p-1}=\nu|a_i|^{p-1}$: Եթե $\mu=0$, ապա կունենանք $b_i=0$ $(i=1,2,\dots,n)$ և որպես λ կարող ենք վերցնել զրոն, իսկ եթե $\mu\ne 0$ ապա վերցնելով $\lambda=\nu^{\frac{1}{p-1}}\mu^{-\frac{1}{p-1}}$ և հաշվի առնելով, որ a_i- ն և b_i- ն ունեն նույն արգումենտը կունենանք $b_i=\lambda a_i$ $(i=1,2,\dots,n)$: ↵

Բերենք նաև Հոլդերի և Մինկովսկու անհավասարությունները ինտեգրալային տեսքով:

Ներքևում բերվող թեորեմներում $\int_\Omega f$ նշանակված է f ֆունկցիայի ինտեգրալը Ω բազմությամբ: Ընդ որում ինտեգրալը կարելի հասկանալ տարբեր իմաստներով: Օրինակ, այն կարող է լինել $[a;b]$ հատվածով Ռիմանի սովորական ինտեգրալ, երբ $\Omega=[a;b]$ և f-ը Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի է $[a;b]$-ում, կամ կարող է լինել Ռիմանի բազմապատիկ ինտեգրալ, եթե Ω -ն $[a;b]$-ում որևէ տիրույթ է, իսկ f-ը n փոփոխականից կախված ֆունկցիա : Այն կարող է լինել նաև կամայական այլ ինտեգրալ, որը օժտված է մոնոտոնության հատկությամբ , օրինակ, Լեբեգի ինտեգրալ որևէ դրական չափով տարածությունում:

Թեորեմ 11: Ցանկացած $f(x)$ և $g(x)$ Ω-ում ինտեգրելի ֆունկցիաների համար ճիշտ է

$$\int_\Omega |fg| \le \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |g|^q\right)^{1/q} \qquad \textbf{(Հ)}$$

անհավասարությունը, եթե միայն $p>1$, $q>1$ և $1/p+1/q=1$: Ընդ որում այստեղ հավասարություն հնարավոր է այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունեն $\lambda\ge 0$ և $\mu\ge 0$, $\lambda+\mu>0$ թվեր այնպես, որ $\mu|g(x)|^q=\lambda|f(x)|^p$:

Այս թեորեմի ապացուցույցը **Թեորեմ1**-ի ապացույցից տարբերվում է միայն նրանով,որ գումարման գործողությունը պետք է փոխարինել ինտեգրումով, այսինքն **(ԻՃ)** անհավասրությունը կիրառելով $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների համար կունենանք

$$|f(x)g(x)| \le \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}$$

Եվ այս անհավասարությունը ինտեգրելով, կստանանք **Թեորեմ11**- ի ապացույցը, այնպես, ինչպես **(ԻԺ)** անհավասարությունները գումարելով ստացանք **Թեորեմ1**-ի ապացույցը, միայն այստեղ պետք է վերցնել $A = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p}$ ¨ $B = \left(\int_\Omega |g|^q\right)^{1/q}$:

Թեորեմ22: Ցանկացած $f(x)$ և $g(x)$ Ω-ում ինտեգրելի ֆունկցիաների համար

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p\right)^{1/p} \le \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p} \qquad (\text{Հ})$$

անհավասարությունը, եթե միայն $p \ge 1$: Ընդ որում, եթե $p > 1$, այստեղ հավասարություն հնարավոր է այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունեն $\lambda \ge 0$ և $\mu \ge 0$, $\lambda + \mu > 0$ թվեր այնպես, որ $\mu g(x) = \lambda f(x)$:

ՄԵՏՐԻԿԱԿԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Դիցուք X -ը որևէ բազմություն է, իսկ ρ -ն $X \times X$ դեկարտյան արտադրյալը արտապատկերում է $R_+ = [0;\infty)$ -ի մեջ:

Սահմանում: Կասենք, որ ρ -ն մետրիկա է, եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմաններին (մետրիկայի աքսիոմներին)՝

1. $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
3. $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$

Սահմանում: X բազմությունը ρ արտապատկերման (մետրիկայի) հետ կանվանենք մետրիկական տարածություն և կնշանակենք՝ (X,ρ):

Այլ կերպ ասած X բազմությունը դառնում է մետրիկական տարածություն, եթե նրա ցանկացած երկու տարրերի համապատասխանեցված է ոչ բացասական ρ թիվ, որը բավարարում է նշված երեք պայմաններին: Դժվար չի տեսնել, որ ρ մեծությունը համապատասխանում է հեռավորության մասին մեր ունեցած ինտիուտիվ պատկերացումներին, այդ պատճառով բնական է X բազմության տարրերը անվանել կետեր, իսկ $\rho(x,y)$ -ը՝ x և y կետերի հեռավորություն: Այդ տրամաբանությամբ էլ նշված աքսիոմներից երրորդը անվանում են եռանկյան անհավասարություն:

Բերենք մետրիկական տարածությունների օրինակներ:

1. Դիցուք X-ը կամայական բազմություն է, իսկ $\rho(x,y)=0$, երբ $x=y$ և $\rho(x,y)=1$, երբ $x\neq y$: Հեշտությամբ ստուգվում է, որ այսպես սահմանված $\rho(x,y)$–ն բավարարում է մետրիկայի աքսիոմներին: Այսպիսով ցանկացած բազմություն կարելի է դարձնել մետրիկական տարածություն: Այսպիսի տարածությունը կոչվում է դիսկրետ մետրիկական տարածություն:

2. Եթե X-ը իրական թվերի բազմությունն է, ապա $\rho(x,y)=|x-y|$-ը մետրիկա է X-ում: Այդ մետրիկական տարածությունը նշանակում են $\mathbb{R}$-ով:
ցույց տալ, որ $\rho_f(x,y)=|f(x)-f(y)|$ մետրիկա է իրական թվերի բազմություն մեջ այն և միայն այն դեպքում եթե $f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$:

3. Կոմպլեքս թվերի բազմությունը $\rho(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$ մետրիկայով կոմպլեքս հարթությունն է, որի համար ընդունված նշանակումն է $\mathbb{C}$-ն:

4. Դիցուք $\hat{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$-ը և $\hat{y}=(y_1,y_2,...,y_n)$ n-չափանի վեկտորներ են:

Ցանկացած $p\in(0;\infty)$ համար սահմանենք $\rho_p(\hat{x},\hat{y})=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$,

իսկ $p=\infty$ դեպքում ընդունենք $\rho_\infty(\hat{x},\hat{y})=\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|$:

Օգտվելով Մինկովսկու անհավասարությունից հեշտությամբ ապացուցվում է, որ $1\le p\le\infty$ դեպքում $\rho_p(\hat{x},\hat{y})$-ը մետրիկա է: Եթե դիտարկում ենք իրական n-չափանի տարածություն այդ մետրիկայով, ապա այն կնշանակենք $\mathbb{R}_p^n$-ով, իսկ կոմպլեքս դեպքում $\mathbb{C}_p^n$-ով: Երբ $p=2$ այդ տարածությունները համապատասխանաբար սովորական Էվկլիդեսյան իրական և կոմպլեքս n-չափանի տարածություններն են, որոնց ընդունված նշանակումներն են $\mathbb{R}^n$ - ը և $\mathbb{C}^n$-ը :

5. l_p-ով կնշանկենք $\hat{x}=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ իրական կամ կոմպլեքս անդամներով այն հաջորդականությունների բազմությունը, որոնց համար զուգամետ է $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p$ շարքը:

Դիցուք $\hat{x}=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ և $\hat{y}=(y_1,y_2,...,y_n,...)$ l_p-ից են և $\rho_p(\hat{x},\hat{y})=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

:

Այստեղ ևս Մինկովսկու անհավասարությունից օգտվելով հեշտությամբ ապացուցվում է, որ $p\ge1$ դեպքում $\rho_p(\hat{x},\hat{y})$-ը մետրիկա է l_p-ում: (l_p,ρ_p) մետրիկական տարածությունը կնշանակենք պարզապես l_p-ով:

6. l_∞-ով կնշանկենք $\hat{x}=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ իրական կամ կոմպլեքս անդամներով սահմանափակ հաջորդականությունների բազմությունը հետևյալ մետրիկայով
$\rho_\infty(\hat{x},\hat{y})=\sup_{i\ge1}|x_i-y_i|$: Ակնհայտ է, որ ρ_∞-ը մետրիկա է :

7. Դիցուք X-ը բոլոր հնարավոր հաջորդականությունների բազմությունն է:

X -ի երկու $\hat{x}=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ և $\hat{y}=(y_1,y_2,...,y_n,...)$ տարրերին համապատասխանեցնենք $\rho(\hat{x},\hat{y})=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{2^i(1+|x_i-y_i|)}$ թիվը: $\frac{t}{1+t}$ ֆունկցիան աճող է, հետևաբար ճիշտ են

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|} \quad \textbf{(9)}$$

անհավասարությունները, որից հետևում է, որ ρ -ն մետրիկա է: Ստացված մետրիկական տարածությունը նշանակում են s -ով:

8. $C[a;b]$-ով կնշանակենք $[a;b]$ հատվածում անընդհատ ֆունկցիաների տարածությունը, որտեղ մետրիկան տրվում է $\rho(x(t),y(t))=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$ բանաձևով:

9. Յանկացած $p\ge 1$ թվի համար $C_p[a;b]$-ով նշանակենք $[a;b]$ հատվածում անընդհատ ֆունկցիաների տարածությունը, որտեղ $x(t),y(t)\in C[a;b]$ ֆունկցիաների հեռավորությունը տրվում է $\rho_p(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ բանաձրով:

10. Դիցուք Ω-ն բաց բազմություն է $\mathbb{R}^n$-ում, իսկ k-ն ոչբացասական ամբողջ թիվ է, կամ $+\infty$: $C^{(k)}[\Omega]$ -ով նշանակենք Ω -ում մինչև k-րդ կարգը ներառյալ անընդհատ մասնական ածանցյալներ ունեցող ($k=+\infty$ դեպքում անվերջ դիֆերենցելի) ֆունկցիաների դասը:

Թող $K_1\subset K_2\subset...\subset K_n\subset...$ $\mathbb{R}^n$ - ում կոմպակտ բազմությունների հաջորդականություն է այնպես, որ $K_n\subset\Omega$ և $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}K_n=\Omega$: Նշանակենք

$$p_{K_n,m}(f)=\sup_{|\alpha|\le m,x\in K_n}\left|D^{\alpha}f(x)\right| ,$$

որտեղ $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, իսկ $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ α_i -երը ոչ բացասական ամբողջ թվեր են, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$, իսկ $D^{\alpha}f(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}f(x_1,x_2,...,x_n)$:

Եթե $d_{K_n}(f,g)=\sum_{m=0}^{k}\frac{p_{K_n,m}(f-g)}{2^m\left(1+p_{K_n,m}(f-g)\right)}$ ապա օգտվելով **9**-ից դժվար չի տեսնել, որ

$\rho(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_{K_n}(f,g)}{2^n\left(1+d_{K_n}(f,g)\right)}$ կլինի մետրիկա $C^{(k)}[\Omega]$-ում:

Եթե ունենք (X,ρ) մետրիկական տարածություն, ապա նրանում կարելի է մտցնել կետի շրջակայքի, հաջորդականության զուգամիտության, արտապատկերման անընդհատության և այլ տոպոլոգիոկան հասկացություններ:

(X,ρ) մետրիկական տարածությունում, $r>0$ շառավղով և x_0 կենտրոնով բաց գունդ կամ ուղղակի գունդ կանվանենք $B(x_0,r)=\{x: x\in X, \rho(x,x_0)<r\}$ բազմությունը, իսկ $B[x_0,r]=\{x: x\in X, \rho(x,x_0)\le r\}$ բազմությունը՝ x_0 կենտրոնով և r շառավղով փակ գունդ: Միանգամից նշենք, որ մետրիկական տարածությունում գունդի տեսքը կարող է շատ հեռու լինել մեր պատկերացրած սովորական գնդից: Դիցուք (X,ρ)-ն **1**-ին օրինակում դետարկված տարածությունն է, այդ դեպքում $B(x_0,r)=\{x_0\}$, երբ $0<r\le 1$ և $B(x_0,r)=X$, երբ $r>1$ կամ, եթե (X,ρ)-ն **4**-րդ օրինանում դետարկված $\mathbb{R}^n_\infty$-ն է, ապա $B(x_0,r)$-ը կլինի $\mathbb{R}^n$-ի x_0 կենտրոնով կորդինատական առանցքներին զուգահեռ $2r$ երկարության կողերով խորանարդը:

Սահմանում: $x_0\in(X,\rho)$ կետի ε $(\varepsilon>0)$ շրջակայք կանվանենք $B(x_0,\varepsilon)$ գունդը:
Դիցուք $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subset(X,\rho)$ մետրիկական տարածության որևէ հաջորդականություն է:
Սահմանում: Կասենք, որ $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ հաջորդականության սահմանը $x_0\in(X,\rho)$ կետն է կամ $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը զուգամիտում է x_0-ին և կգրենք $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x_0$ կամ $\lim x_k=x_0$ կամ $x_k\to x_0$, եթե $\lim\limits_{k\to\infty}\rho(x_k,x_0)=0$:

Ակնհայտ է, որ այս սահմանումը համարժեք է հետևյալին՝ $x_k\to x_0$ այն և միայն այն դեպքում, եթե ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն որնի $k(\varepsilon)$ թիվ, այնպես որ $\rho(x_k,x_0)<\varepsilon$ հենց, որ $k\ge k(\varepsilon)$: Այլ խոսքով ասած ինչ որ համարից սկսած բոլոր x_k-երը ընկած են x_0-ի ցանկացած ε շրջակայքում:

Սահմանում: Կասենք, որ $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը զուգամետ է (X,ρ) մետրի-կական տարածությունում, եթե այն (X,ρ)-ում ունի սահման:

Պնդում: (X,ρ) մետրիկական տարածությունում զուգամետ հաջորդականության սահմանը միակն է :
Իրոք, եթե ենթադրենք, որ $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը ունի մեկից ավելի սահման: օրինակ , x_0, x_0', , ապա $\rho(x_0,x_0')\le\rho(x_k,x_0)+\rho(x_k,x_0')$

անհավասարությունում անցնելով սահմանի, երբ $k\to\infty$ կստանանք $\rho(x_0,x_0')\le 0$, այսինքն $x_0=x_0'$:

Պարզենք, թե ինչ զուգամիտություն է ծնվում վերը բերված օրինակներում նշված մետրիկաներով:

1. Հեշտությամբ ստուգվում է, որ դիսկրետ մետրիկական տարածությունում զուգա-մետ են միայն ստացիոնար՝ այն է, ինչ որ տեղից սկսած հաստատուն հաջորդականու-թյունները:

2. և **3.** օրինակներում ունենք իրական կամ կոմպլեքս թվային հաջորդականու-թյունների սովորական զուգամիտություն:

4. $\mathbb{R}_p^n$-ում և $\mathbb{C}_p^n$-ում $\{\hat{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$-չափանի վեկտորների հաջորդականության զուգա-միտությունը ρ_p մետրիկայով ցանկացած $p \in [0;\infty]$ համար համարժեք է ըստ կորդի-նատների զուգամիտության:

5-ում և **6**-ում այսինքն l_p-ում $p \in [0;\infty]$ զուգամիտությունից հետևում է ըստ կորդինատների զուգամիտություն, բայց հակադարձը ընդհանրապես ասած ճիշտ չէ: (Բերել համապատասխան օրինակ:)

7. s տարածությունում

$$\rho(\hat{x},\hat{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i(1+|x_i - y_i|)}$$

մետրիկայով զուգամիտությունը համարժեք է ըստ կորդինատների զուգամիտության: Իրոք, եթե $\hat{x}_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}, ...)$ հաջորդականությունը ρ մետրիկայով զուգամի-տում է $\hat{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}, ...)$-ի, ապա ըստ սահմանման $\rho(\hat{x}_k, \hat{x}_0) \to 0,$ երբ $k \to \infty$, բայց $\frac{|x_i^{(k)} - x_i^{(0)}|}{2^i(1+|x_i^{(k)} - x_i^{(0)}|)} \le \rho(\hat{x}_k, \hat{x}_0)$ որտեղից անմիջապես կհետևի, որ $|x_i^{(k)} - x_i^{(0)}| \to 0,$ երբ $k \to \infty$ ցանկացած i-ի համար:

Ապացուցենք հակադարձը, որ եթե $|x_i^{(k)} - x_i^{(0)}| \to 0,$ երբ $k \to \infty$ ցանկացած i-ի համար, ապա $\rho(\hat{x}_k, \hat{x}_0) \to 0,$ երբ $k \to \infty$: Ընտրենք n-ը այնպես, որ $\sum_{i=n+1}^{\infty} 1/2^i < \varepsilon/2$, այդ դեպքում կունենանք՝

$$\rho(\hat{x}_k, \hat{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i^{(k)} - x_i^{(0)}|}{2^i(1+|x_i^{(k)} - x_i^{(0)}|)} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|x_i^{(k)} - x_i^{(0)}|}{2^i(1+|x_i^{(k)} - x_i^{(0)}|)} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i^{(k)} - x_i^{(0)}|}{2^i(1+|x_i^{(k)} - x_i^{(0)}|)} + \frac{\varepsilon}{2}$$

և քանի որ n-ը ֆիքսած է, իսկ $|x_i^{(k)} - x_i^{(0)}| \to 0,$ երբ $k \to \infty$ ցանկացած i-ի համար, ապա պարզ է, որ $\rho(\hat{x}_k, \hat{x}_0) \to 0,$ երբ $k \to \infty$:

8. Ակնհայտ է, որ $C[a;b]$-ում $\rho(x_n(t), x_0(t)) = \max_{a \le t \le b} |x_n(t) - x_0(t)| \to 0$ համարժեք է $[a;b]$ հատվածում $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության հավասարաչափ զուգամիտության $x_0(t)$-ին:

9-րդ օրինակում $[a;b]$ հատվածում $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության հավասարա-չափ զուգամիտությունից $x_0(t)$-ին հետևում է այդ հաջորդականության զուգամի-տություն $x_0(t)$-ին $C_p[a;b]$-ում, բայց հակադարձը ընդհանրապես ասած ճիշտ չէ: (Բերել համապատասխան օրինակ:)

10.Դժվար չի տեսնել, որ $C^{(k)}[\Omega]$-ում $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության զուգամիտու-թյունը $f_0(x)$-ին նշված մետրիկայով համարժեք $\{D^{\alpha} f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության հավասարաչափ զուգամիտությանը $D^{\alpha} f_0(x)$-ին կամայական $K \subset \Omega$ կոմպակտի վրա ցանկացած $|\alpha| \leq k$ մուլտիինդեքսի համար:

Մետրիկական տարածությունում կետի շրջակայքի գոյությունը թույլ է տալիս սահմանել այդ տարածության մեջ ընկած որևէ բազմության ներքին, սահմանային, եզրային, մեկուսացված կետերի գախափարները: Բերենք համապատասխան սահմանումները: Կարճության համար մենք (X, ρ) մետրիկական տարածության փոխարեն կգրենք ուղղակի X, եթե, իհարկե, այն շփոթմունք չի առաջացնի:

Դիցուք X-ը մետրիկական տարածություն է և $E \subset X$:

Սահմանում: $x_0 \in E$ կետը կանվանենք E բազմության ներքին կետ ,եթե գոյություն ունի այդ կետի E-ում ընկած $B(x_0, \varepsilon)$ շրջակայք: Այսինքն $\exists \varepsilon > 0$ այնպես, որ $B(x_0, \varepsilon) \subset E$: E բազմության ներքին կետերի բազմությունը կնշանակենք E°-ով:

Սահմանում: $x_0 \in X$ կետը կանվանենք E բազմության սահմանային կետ, եթե այդ կետի ցանկացած շրջակայքում կան x_0-ից տարբեր E-ի կետեր: Այսինքն $\forall \varepsilon > 0$: $\left(B(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}\right) \cap E \neq \varnothing$, E բազմության սահմանային կետերի բազմությունը կնշանակենք E'-ով:

Պնդում: Ապացուցենք նաև, որ որպեսի x_0 կետը լինի E բազմության սահմանային կետ անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենա $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset E,\ x_k \neq x_0$ հաջորդականություն այնպես, որ $\lim x_k = x_0$:

$\mapsto$

Այս պնդման բավարարության մասը ակնհայտ է, ապացուցենք անհրաժեշտությունը: Ենթադրենք x_0 կետը E բազմության սահմանային կետ է և վերցնենք դրական թվերի զրոյի ձգտող $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ հաջորդականություն: Քանի որ x_0-ն E բազմության սահմանային կետ է, ապա $B(x_0, \delta_k)$ գնդում կգտնվի $x_k \in E,\ x_k \neq x_0$ կետ: Ստացված $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը կլինի պահանջվածը, քանի որ $x_k \in B(x_0, \delta_k)$ կհետևի $\rho(x_k, x_0) < \delta_k$ և ունենալով $\delta_k \to 0$, կստանանք $\lim x_k = x_0$: $\hookleftarrow$

Ցույց տալ, որ այս պնդման մեջ $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ հաջորդականության կետերը կարելի է վերցնել իրարից տարբեր:

Դժվար չի տեսնել, որ x_0 կետը E բազմության սահմանային կետ է այն և միայն այն դեպքում, եթե նրա ցանկացած շրջակայքում կան անվերջ թվով կետեր E-ից:

Սահմանում: $x_0 \in X$ կետը կանվանենք E բազմության եզրային կետ, եթե այդ կետի ցանկացած շրջակայքում կան կետեր և' E-ից, և' E-ի լրացումից` E^c-ից : Այսինքն $\forall \varepsilon > 0$ $B(x_0, \varepsilon) \cap E \neq \varnothing$ և $B(x_0, \varepsilon) \cap E^c \neq \varnothing$:

E բազմության եզրային կետերի բազմությունը կնշանակենք ∂E-ով:

Սահմանում: $x_0 \in E$ կետը կանվանենք E բազմության մեկուսացված կետ, եթե գո- յություն ունի այդ կետի $B(x_0,\varepsilon)$ շրջակայք, որում x_0-ից բացի այլ կետեր չկան E բազմությանից: Այսինքն $\exists \varepsilon > 0$ այնպես, որ $B(x_0,\varepsilon) \cap E = \{x_0\}$:
E բազմության մեկուսացված կետերի բազմությունը կնշանակենք $E^{\odot}$-ով:

Դիտարկենք հետևյալ օրինակը, թող X-ը լինի $\mathbb{C}$-ն, իսկ E-ն զրո կենտրոնով և մեկ շառավղով բաց շրջանը և իրական առանցքի ամբողջ կետերը, այսինքն $E = \{z : |z| < 1\} \cup \mathbb{Z}$: Այս դեպքում դժվար չի տեսնել, որ , $E^{\circ} = \{z : |z| < 1\}$, $E' = \{z : |z| \le 1\}$, $\partial E = \{z : |z| = 1\} \cup \mathbb{Z}$ ¨ $E^{\odot} = \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0; 1\}$:
Ճիշտ են հետևյալ առընչությունները. $E^{\circ} \subset E'$, $\partial E \setminus E^{\odot} \subset E'$, (Ապացուցել ինքնուրյուն):

Սահմանում: E բազմությունը կանվանեք բաց բազմություն, եթե այն բաղկացած է միայն ներքին կետերից: Այսինքն E-ն բաց բազմություն է, եթե $E = E^{\circ}$:

Ապացուցենք, որ $B(x_0,r)$-ը բաց բազմություն է, իրոք ցանկացած $x_1 \in B(x_0,r)$ կետ նրա համար ներքին կետ է, քանի որ նրա $B(x_1,\delta)$ շրջակայքը ընկած է $B(x_0,r)$-ի մեջ, եթե միայն $0 < \delta \le r - \rho(x_0,x_1)$: Իսկապես, եթե $x_2 \in B(x_1,\delta)$, ապա $\rho(x_0,x_2) \le \rho(x_0,x_1) + \rho(x_1,x_2) < \rho(x_0,x_1) + \delta \le r$, այսինքն $x_2 \in B(x_0,r)$:

Սահմանում: E բազմությունը կանվանեք փակ բազմություն, եթե այն պարունակում է իր բոլոր սահմանային կետերը: Այսինքն E-ն փակ բազմություն է, եթե $E' \subset E$:

Թեորեմ: E բազմությունը բաց է այն և միայն այն դեպքում, եթե նրա լրացումը՝ $E^c = X \setminus E$-ն փակ է:
$\mapsto$
Դիցուք E-ն բաց է և $x_0 \in E$, այդ դեպքում գոյություն ունի x_0- ի շրջակայք $B(x_0,\varepsilon) \subset E$, ուրեմն $B(x_0,\varepsilon) \cap E^c = \varnothing$, հետևաբար x_0-ն չի կարող լինել E^c-ի համար սահմանային կետ, ուստի E^c-ի սահմանային կետերը E-ից չեն, այսինքն E^c-ից են՝ $(E^c)' \subset E^c$: E^c-ին փակ է:

Ապցուցենք հակադարձը, դիցուք E^c-ն փակ է, ցույց տանք, որ E-ն բաց է: Քանի որ $(E^c)' \subset E^c$, ուրեմն $\forall x_0 \in E$ կետը չի կարող լինել E^c-ի համար սահմանային կետ, այսի- նքն գոյություն ունի այդ կետի $B(x_0,\varepsilon)$ շրջակայք որում չկան կետեր E^c-ից հետևաբար $B(x_0,\varepsilon) \subset E$: Ստացանք E-ի ցանկացած կետ նրա ներքին կետ է, ուրեմն E-ն բաց է:
$\lrcorner$

Թեորեմ: Կամայական թվով բաց բազմությունների միավորումը բաց է:Վերջավոր թվով բաց բազմությունների հատումը բաց է:
$\mapsto$

Դիցուք $G_i, i\in I$ բաց բազմությունների ընտանիք է: Ցույց տանք, որ $G=\bigcup_{i\in I} G_i$ բաց է: Եթե $x_0\in G$, ապա $\exists\, i_0\in I$, որ $x_0\in G_{i_0}$ և քանի որ G_{i_0}-ն բաց է, ուրեմն կա x_0-ի շրջակայք $B(x_0,\varepsilon)\subset G_{i_0}\subset G$: Այսինքն G-ն բաց է:

Այժմ ենթադրենք $G=\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ և G_i-երը բաց են: Համոզվենք, որ G-ն բաց է: Եթե $x_0\in G$, ապա $x_0\in G_i,\quad i=1,2,\dots,n$ և քանի որ G_i-երը բաց են, ուրեմն կան x_0-ի շրջակայքեր $B(x_0,\varepsilon_i)\subset G_i$, $i=1,2,\dots,n$: Եթե վերցնենք $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n\}$, ապա $B(x_0,\varepsilon)$ ընկած կլինի բոլոր G_i-երի մեջ և հետևաբար G-ի մեջ, ուրեմն G-ն բաց է: ↵

Օգտագործելով Դ'Մորգանի բանաձևերը՝ $\left(\bigcup A_i\right)^c=\bigcap A_i^c$, $\left(\bigcap A_i\right)^c=\bigcup A_i^c$, հեշտությամբ ապացուցվում է, որ կամայական թվով փակ բազմությունների հատումը փակ է:Վերջավոր թվով փակ բազմությունների միավորումը փակ է:

Սահմանում: E բազմությունը իր բոլոր սահմանային կետերի հետ միասին կանվանենք E բազմության փակում և կնշանակենք $\bar{E}$: Այսինքն $\bar{E}=E\bigcup E'$:

Նշենք, որ $x_0\notin\bar{E}$ այն և միայն այն դեպքում, եթե այն ունի $B(x_0,\varepsilon)$ շրջակայք, որում չկան կետեր E բազմությունից: Այդ հատկությամբ օժտված կետերը անվանում են բազմության արտաքին կետեր:

Սահմանում: $x_0\in X$ կետը կանվանենք E բազմության հպման կետ ,եթե այդ կետի ցանկացած շրջակայքում կան E-ի կետեր: Այսինքն $B(x_0,\varepsilon)\bigcap E\neq\varnothing$:

Ապացուցել որ որպեսի x_0 կետը լինի E բազմության հպման կետ անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենա $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subset E$, հաջորդականություն այնպես, որ $\lim x_k=x_0$: Ապացուցել, որ E բազմության հպման կետը այդ բազմության համար կամ մեկուսացած կետ է, կամ էլ սահմանային:

E-ին նրա փակումը՝ $\bar{E}$-ն, համապատասխանեցնող գործողությունը կանվանենք փակման գործողություն: Այն օժտված է հետևյալ հատկություններով.

1. $E=\bar{E}\Leftrightarrow E$ - ն փակ բազմություն է:
2. $E\subset\bar{E}$
3. $E_1\subset E_2\Rightarrow\bar{E}_1\subset\bar{E}_2$
4. $\bar{\bar{E}}=\bar{E}$
5. $\overline{E_1\bigcup E_2}=\bar{E}_1\bigcup\bar{E}_2$

1-ից **3**-ը ակնհայտ են, ապացուցենք **4**-ը: Քանի որ, $E\subset\bar{E}$, ապա ըստ **3**-ի $\bar{E}\subset\bar{\bar{E}}$, ցույց տանք, որ $\bar{\bar{E}}\subset\bar{E}$: Եթե $x_0\in\bar{\bar{E}}$, ապա $x_0\in\bar{E}\bigcup\left(\bar{E}\right)'$: Այժմ, եթե $x_0\in\bar{E}$, ապա ամեն ինչ պարզ է: Եթե $x_0\in\left(\bar{E}\right)'\setminus\bar{E}$, ապա x_0-ի ցանկացած $B(x_0,\varepsilon)$ շրջակայքում կա գոնե մեկ կետ $\bar{E}$-ից: Դիցուք այն x_1-ն է: Ընտրենք x_1 կետի $B(x_1,\delta)$ շրջակայքը այնպես,որ

$B(x_1,\delta) \subset B(x_0,\varepsilon)$: Քանի որ, $x_1 \in \bar{E} = E \cup E'$, ուրեմն կամ $x_1 \in E$, կամ էլ $x_1 \in E' \setminus E$, երկու դեպքում էլ գոյություն կունենա գոնե մեկ կետ $x_2 \in E \cap B(x_1,\delta)$: Այսպիսով ստացանք, որ x_0 կետի ցանկացած շրջակայքում կա x_0-ից տարբեր գոնե մեկ կետ E-ից, այսինքն $x_0 \in E'$, հետևաբար $x_0 \in \bar{E}$: Ապացուցվեց, որ $\bar{\bar{E}} \subset \bar{E}$ և քանի որ, ունեինք նաև $\bar{E} \subset \bar{\bar{E}}$, ուրեմն $\bar{\bar{E}} = \bar{E}$:

Ապացուցենք **5**-րդ պնդումը: Եթե $x_0 \in \overline{E_1 \cup E_2}$, ապա $x_0 \in \bar{E}_1 \cup \bar{E}_2$: Հակառակ դեպքում կստանայինք, որ կա x_0-ի շրջակայք որում չկան կետեր ոչ E_1-ից և ոչ էլ E_2-ից, ուրեմն նաև $E_1 \cup E_2$-ից, ուրեմն $\overline{E_1 \cup E_2} \subset \bar{E}_1 \cup \bar{E}_2$: Հակառակ ներդրումը ապացուցելու համար նկատենք, որ $E_1 \subset E_1 \cup E_2$ և $E_2 \subset E_1 \cup E_2$, հետևաբար ըստ **3**-ի $\bar{E}_1 \subset \overline{E_1 \cup E_2}$ և $\bar{E}_2 \subset \overline{E_1 \cup E_2}$, ուրեմն նաև $\overline{E_1 \cup E_2} \supset \bar{E}_1 \cup \bar{E}_2$:

$E \subset (X,\rho)$ բազմության տրամագիծ ասելով հասկանում են $d(E) = \sup\limits_{x,y \in E} \rho(x,y)$ մեծությունը:

Սահմանում: Բազմությունը կոչվում է սահմանափակ, եթե այն ունի վերջավոր տրամագիծ:

Ապացուցել, որ բազմությունը սահմանափակ է այն և միայն այն դեպքում, եթե այն ընկած է որևէ գնդում:

Ցույց տալ,որ եթե բազմությունը սահմանափակ է , ապա այն ընկած է ցանկացած կենտրոնով որևէ գնդի մեջ:

ԼՐԻՎ ՄԵՏՐԻԿԱԿԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ԼՐԻՎԱՑՈՒՄ

Ներմուծենք անլիզում համարյա ամեն քայլափոխի կիրառվող գաղափարներից մեկը, այն է՝ տարածության լրիվության գաղափարը:

Դիցուք (X,ρ) մետրիկական տարածություն է և $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ այդ տարածության հաջորդականություն :

Սահմանում: Կասենք, որ $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է, եթե ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի $K(\varepsilon)$ թիվ, այնպես որ $\rho(x_k,x_l) < \varepsilon$ հենց, որ $k \ge K(\varepsilon)$, $l \ge K(\varepsilon)$:

Կամ կասենք, որ $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է, եթե ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի $K(\varepsilon)$ թիվ, այնպես որ $\rho(x_{k+p},x_k) < \varepsilon$ հենց, որ $k \ge K(\varepsilon)$, իսկ $p \in \mathbb{N}$:

Այլ խոսքով ասած, ինչ որ համարից սկսած բոլոր x_k-երը իրարից հեռացված են ավելի քիչ քան նախօրոք տված կամայական դրական թիվ:

Պարզվում է, որ ցանկացած զուգամետ հաջորդականություն ֆունդամենտալ է: Իրոք, եթե $\lim x_k = x_0$, ապա տված $\varepsilon > 0$ թվի համար կգտնենք $K(\varepsilon)$ թիվ այնպես, որ $\rho(x_k, x_0) < \varepsilon/2$ բոլոր $k \geq K(\varepsilon)$ համար: Այժմ, եթե վերցնենք $k \geq K(\varepsilon)$, $l \geq K(\varepsilon)$ և օգտվենք եռանկյան անհավասարությունից կունենանք՝

$$\rho(x_k, x_l) \leq \rho(x_k, x_0) + \rho(x_l, x_0) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon:$$

Հակադարձը ընդհանրապես ասած սխալ է: Իրոք, եթե (X, ρ)-ն $(0;1)$ միջակայքն է սովորական $\rho(x, y) = |x - y|$ հեռավորությամբ, ապա ցանկացած $(0;1)$-ում ընկած զրոյի կամ մեկի ձգտող հաջորդականություն կլինի ֆունդամենտալ (X, ρ)-ում, բայց չի լինի զուգամետ այնտեղ : Ավելի հետաքիքիր օրինակ է $(\mathbb{Q}, \rho)$-ն, որտեղ $\mathbb{Q}$-ն ռացիոնալ թվերի բազմությունն է, նախորդ օրինակի ρ մետրիկայով: Ցանկացած իռացիոնալ սահման ունեցող ռացիոնալ թվերի հաջորդականություն ֆունդամենտալ է $(\mathbb{Q}, \rho)$-ում, բայց զուգամետ չի այնտեղ:

Ապացուցել, որ ֆունդամենտալ հաջորդականություն կլինի զուգամետ այն և միայն այն դեպքում, եթե այն ունի զուգամետ ենթահաջորդականություն:

Սահմանում: Կասենք, որ (X, ρ) տարածությունը լրիվ է, եթե այնտեղ ցանկացած ֆունդամենտալ հաջորդականություն զուգամետ է:

Այսինքն լրիվ տարածություններում հաջորդականության զուգամիտությունը և ֆունդամենտալությունը համարժեք են:

Տեսնենք, թե վերը բերված օրինակներից որոնք են լրիվ և որոնք ոչ:

1. Դժվար չի տեսնել, որ դիսկրետ մետրիկական տարածությունը լրիվ է:

2. $\mathbb{R}$-ի լրիվությունը Կոշիի զուգամիտության սկզբունքն է:

3. $\mathbb{C}$-ն լրիվ է:

4. $\mathbb{R}_p^n$-ն և $\mathbb{C}_p^n$-ն լրիվ են: Դա հետևում է $\mathbb{R}$-ի և $\mathbb{C}$-ի լրիվությունից ու այն բանից, որ $\mathbb{R}_p^n$-ում կամ $\mathbb{C}_p^n$-ում ինչպես զուգամիտությունը, այնպես ֆունդամենտալությունը համարժեք է ըստ կորդինատների զուգամիտությանը կամ ֆունդամենտալությանը $\mathbb{R}$-ում կամ $\mathbb{C}$-ում:

5. Ապացուցենք l_p տարածության լրիվությունը: Դիցուք $\hat{x}_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, \ldots)$ $k = 1, 2, \ldots$ ֆունդամենտալ հաջորդականություն է l_p-ում, այսինքն

$$\lim_{k\to\infty, l\to\infty} \rho_p(\hat{x}_k, \hat{x}_l) = \lim_{k\to\infty, l\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(l)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0: \qquad \textbf{(88)}$$

Կիրառելով

$$\left|x_i^{(k)}-x_i^{(l)}\right| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i^{(k)}-x_i^{(l)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

անհավասարությունը կստանանք, որ $\left\{x_i^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ $i=1,2,\ldots$ հաջորդականությունները ֆունդամենտալ են $\mathbb{R}$-ում կամ $\mathbb{C}$-ում և հետևաբար զուգամետ են այնտեղ: Դիցուք $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)}=x_i$ և $\hat{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$: Ցույց տանք, որ $\hat{x}\in l_p$ և $\lim\limits_{k\to\infty}\rho_p\left(\hat{x}_k,\hat{x}\right)=0$: Տված $\varepsilon>0$ թվի համար ընտրենք $K(\varepsilon)$ այնպես, որ բոլոր n-երի և $k\ge K(\varepsilon)$, $l\ge K(\varepsilon)$ համար տեղի ունենա

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(k)}-x_i^{(l)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \rho_p\left(\hat{x}_k,\hat{y}_l\right)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i^{(k)}-x_i^{(l)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$$

անհավասարությունը: Այդ բանը հնարավոր է, քանի որ ճիշտ է **(88):** Այս անհավասարության մեջ անցնենք սահմանի, երբ $l\to\infty$: Բոլոր n-երի համար, եթե $k\ge K(\varepsilon)$ կունենանք

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(k)}-x_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\varepsilon: \qquad \textbf{(Ջջ)}$$

Մինկովսկու անհավասարությունը թույլ է տալիս պնդել, որ

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(k)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(k)}-x_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(k)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\varepsilon, \quad \textbf{(99)}$$

եթե $k\ge K(\varepsilon)$: Ընտրենք այս պայմանին բավարարող որևէ k_0 և նշանակենք

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i^{(k_0)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}=M \ :$$

(99)-ից կունենանք

$$\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^p\le(M+\varepsilon)^p:$$

Քանի, որ n-ը կամայական է, ուրեմն $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left|x_i\right|^p$ շարքը զուգամետ է, այսինքն $\hat{x}\in l_p$, իսկ **(Ջջ)**-ից կունենանք $\lim\limits_{k\to\infty}\rho_p\left(\hat{x}_k,\hat{x}\right)=0$:

6. l_∞-ի լրիվության ապացույցը համարյա ոչնչով չի տարբերվում վերևում բերված ապացույցից:

7. s տարածության լրիվությունը հետևում է նրանից, որ $\rho(\hat{x},\hat{y})=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{\left|x_i-y_i\right|}{2^i(1+\left|x_i-y_i\right|)}$ մետրիկայով զուգամիտությունը համարժեք է ըստ կորդինատների զուգամիտության:

8. $C[a;b]$-ի լրվությունը հետևում է ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների համար Կոշիի զուգամիտության սկզբունքից և այն բանից, որ անընդհատ ֆունկցիաների հավասարաչափ սահմանը անընդհատ ֆունկցիա է:

9. $C_p[a;b]$ -ն լրիվ չի: Իրոք, եթե նշանակենք $c=\dfrac{a+b}{2}$, ապա դժվար չի ստուգել, որ

$$x_n(t)=\begin{cases} 0, \text{ երբ } t\in[a;c-1/n] \\ \text{գծային է, երբ } t\in[c-1/n;\ c+1/n\ ] \\ 1, \qquad \text{ երբ } t\in[c+1/n;b] \end{cases}$$

հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է $C_p[a;b]$-ում, բայց այնտեղ զուգամետ չի:

10.Ապացուցենք, որ $C^{(k)}[\Omega]$-ն լրիվ տարածություն է:

Ինչպես արդեն ասվել է $C^{(k)}[\Omega]$-ում $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության զուգամիտությունը $f_0(x)$-ին համարժեք է $\{D^{\alpha}f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության հավասարաչափ զուգամիտությանը $D^{\alpha}f_0(x)$-ին կամայական $K\subset\Omega$ կոմպակտի վրա ցանկացած $|\alpha|\le k$ մուլտիինդեքսի համար: Կրկնելով նույն դատողությունները $C^{(k)}[\Omega]$-ում ֆունդամենտալ $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության համար կարող ենք պնդել, որ $\{D^{\alpha}f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը կլինի ֆունդամենտալ $C[K]$-ում կամայական $K\subset\Omega$ կոմպակտի և ցանկացած $|\alpha|\le k$ մուլտիինդեքսի համար: Այստեղ $C[K]$-ն K-ի վրա անընդհատ ֆունկցիաների բազմությունն է, հավսարաչափ մետրիկայով: Հետևաբար $C^{(k)}[\Omega]$-ում կա մի $f_0(x)$ ֆունկցիա, այնպես, որ $D^{\alpha}f_n(x)$ հավասարաչափ զուգամիտում է կամայական $K\subset\Omega$ կոմպակտի վրա $D^{\alpha}f_0(x)$-ին: Այսինքն $C^{(k)}[\Omega]$-ն լրիվ է:

Դիցուք (X,ρ) մետրիկական տարածությունը լրիվ չի, ինչպես օրինակ $(\mathbb{Q},\rho)$-ն: Հետաքրքիր է հետևյալ հարցը, կա արդյոք մի ուրիշ ավելի լայն տարածություն, որը ինչ որ իմաստով պարունակի (X,ρ)-ն և լինի լրիվ: Այդ հարցի պատասխանը ռացիոնալ թվերի դեպքում լուծվում է իրական թվերի ներմուծմամբ: Պարզվում է, որ այդ մասնավոր դեպքը բացառություն չի, նման բան հնարավոր է անել նաև ընդհանուր դեպքում:

Այդ պնդումը ամենայն խստությամբ ձևակերպելու համար մեզ պետք են գալու մի քանի սահմանումներ:Նախ մտցնենք մետրիկական տարածությունների իզոմետրիկության գաղափարը:

Սահմանում: Կասենք, որ (X,ρ) և (X_1,ρ_1) տարածությունները իզոմետրիկ են, եթե գոյություն ունի անպիսի φ փոխմիարժեք արտապատկերում (X,ρ)-ն (X_1,ρ_1)-ի վրա, որը պահպանում է հեռավորությունները, այսինքն $\rho_1(\varphi(x_1),\varphi(x_2))=\rho(x_1,x_2)$:

Ցույց տալ, որ այս սահմանման մեջ կարելի է փոխմիարժեք բառը բաց թողնել:
Այս սահմանման մեջ հանդես եկող φ արտապատկերումը կոչվում է իզոմետրիկ արտապատկերում կամ ուղղակի իզոմետրիա:

Սահմանում: Կասենք, որ $E\subset(X,\rho)$ բազմությունը ամենուրեք խիտ է (X,ρ)-ում, եթե (X,ρ)-ի ցանկացած գնդում կա գոնե մեկ կետ E-ից:

Սահմանում: Կասենք, որ $\left(\tilde{X}, \tilde{\rho}\right)$ մետրիկական տարածությունը $\left(X, \rho\right)$ մետրիկական տարածության լրիվացում է, եթե

1. $\left(\tilde{X}, \tilde{\rho}\right)$ լրիվ մետրիկական տարածություն է,

2. $\left(X, \rho\right)$-ն իզոմետրիկ է $\left(\tilde{X}, \tilde{\rho}\right)$-ում ամենուրեք խիտ X_1 ենթաբազմությանը:

Թեորեմ: Ցանկացած մետրիկական տարածություն ունի լրիվացում, ընդ որում այդ լրիվացումը միակն է իզոմետրիայի ճշտությամբ, այսինքն նույն տարածության ցանկացած երկու լրիվացում իզոմետրիկ են:

$\mapsto$

Գոյությունը: Եթե տարածությունը լրիվ է, ապա հենց ինքն էլ կլինի իր լրիվացումը: Դիցուք $\left(X, \rho\right)$-ն ոչ լրիվ մետրիկական տարածություն է: Դիտարկենք այդ տարածության բոլոր ֆունդամենտալ հաջորդականությունների բազմությունը: Այդ բազմության մեջ մտցնենք հետևյալ հարաբերությունը՝ կասենք, որ $\left\{x_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ և $\left\{x_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ ֆունդամենտալ հաջորդականությունները հարաբերվում են, եթե

$$\lim_{k\to\infty}\rho\left(x_k^{(1)},\ x_k^{(2)}\right)=0\ :$$

Հեշտությամբ ստուգվում է, որ այս հարաբերությունը համարժեքության հարաբերություն է, հետևաբար այն ֆունդամենտալ հաջորդականությունների բազմությունը տրոհում է համարժեքության դասերի: Այդ դասերի բազմությունը նշանակենք $\tilde{X}$ -ով, իսկ նրա տարրերը՝ $\tilde{x}$: $\tilde{X}\times\tilde{X}$ -ում մտցնենք $\tilde{\rho}$ ֆունկցիան հետևյալ բանաձևով՝

$$\tilde{\rho}\left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\right)=\lim_{k\to\infty}\rho\left(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}\right)$$

որտեղ $\left\{x_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty}\in\tilde{x}_1$, իսկ $\left\{x_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{\infty}\in\tilde{x}_2$: Ապացուցենք, որ այս սահմանումը կոռեկտ է: Դրա համար պետք է ապացուցել, որ նախ նշված սահմանը գոյություն ունի, վերջավոր է և նույնն է $\tilde{x}_1$ ու $\tilde{x}_2$ դասերից ընտրված $\left\{x_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\left\{x_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ բոլոր հաջորդականությունների համար: Դիցուք $\left\{x_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty}\in\tilde{x}_1$, իսկ $\left\{x_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{\infty}\in\tilde{x}_2$, եռանկյան անհավասարությունից կունենանք՝

$$\left|\rho\left(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}\right)-\rho\left(x_l^{(1)}, x_l^{(2)}\right)\right|\le\rho\left(x_k^{(1)}, x_l^{(1)}\right)+\rho\left(x_k^{(2)}, x_l^{(2)}\right)\ :$$

Օգտվելով $\left\{x_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ և $\left\{x_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ հաջորդականությունների $\left(X, \rho\right)$-ում ֆունդամենտալ լինելուց կարող ենք պնդել, որ ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $K\left(\varepsilon\right)$ թիվ այնպես, որ $k\ge K\left(\varepsilon\right), l\ge K\left(\varepsilon\right)$ հետևում է $\left|\rho\left(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}\right)-\rho\left(x_l^{(1)}, x_l^{(2)}\right)\right|<\varepsilon$ Այսինքն ցանկացած $\left\{x_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty}\in\tilde{x}_1$, իսկ $\left\{x_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{\infty}\in\tilde{x}_2$ հաջորդականությունների համար $\rho\left(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}\right)$ թվային հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է, հետևաբար ունի վերջավոր սահման: Այժմ ենթադրենք, որ $\left\{x_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty}\in\tilde{x}_1, \left\{\dot{x}_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty}\in\tilde{x}_1$, իսկ $\left\{x_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{\infty}\in\tilde{x}_2, \left\{\dot{x}_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{\infty}\in\tilde{x}_2$: Ցույց տանք, որ $\lim_{k\to\infty}\rho\left(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}\right)=\lim_{k\to\infty}\rho\left(\dot{x}_k^{(1)}, \dot{x}_k^{(2)}\right)$: Իրոք, նորից օգտվելով եռանկյան անհավասարությունը, կստանանք՝

$$\left|\rho\left(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}\right)-\rho\left(\dot{x}_k^{(1)}, \dot{x}_k^{(2)}\right)\right|\le\rho\left(x_k^{(1)}, \dot{x}_k^{(1)}\right)+\rho\left(x_k^{(2)}, \dot{x}_k^{(2)}\right):$$

Այս անհավասարության աջ մասը ձգտում է զրոյի, քանի որ $\left\{x_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty} \sim \left\{\dot{x}_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty}$, իսկ $\left\{x_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{\infty} \sim \left\{\dot{x}_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{\infty}$: Այսպիսով $\tilde{\rho}$ ֆունկցիան լավ որոշված է: Օգտվելով վերը ասվածից և այն բանից, որ ρ-ն մետրիկա է X-ում, հեշտությամբ ստուգվում է, որ $\tilde{\rho}$-ը մետրիկա է $\tilde{X}$-ում: Այսպիսով $\left(\tilde{X}, \tilde{\rho}\right)$-ը մետրիկական տարածություն է:

Ցույց տանք, որ այն $\left(X, \rho\right)$-ի լրիվացումն է: Դրա համար պետք է ապացուցել, որ

ա. $\left(\tilde{X}, \tilde{\rho}\right)$-ը լրիվ մետրիկական տարածություն է:

բ. $\left(\tilde{X}, \tilde{\rho}\right)$-ում կա ամենուրեք խիտ X_1 ենթաբազմություն, որը իզոմետրիկ է $\left(X, \rho\right)$

Դիցուք $\left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n, \dots\right) \in \tilde{X}$ ֆունդամենտալ հաջորդականություն է $\left(\tilde{X}, \tilde{\rho}\right)$-ում, ցույց տանք, որ այն զուգամետ է $\left(\tilde{X}, \tilde{\rho}\right)$-ում : $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n, \dots$ համարժեքության դասերից յուրաքանչյուրում ընտրենք մեկական ներկայացուցիչ՝ $\left\{x_k^{(1)}\right\}, \left\{x_k^{(2)}\right\}, \dots, \left\{x_k^{(n)}\right\}, \dots$ Վերցնենք առաջին $\left\{x_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը, քանի որ այն ֆունդամենտալ է $\left(X, \rho\right)$-ում, ուրեմն կարող ենք գտնել k_1 թիվ այնպես, որ $\rho\left(x_p^{(1)}, x_{k_1}^{(1)}\right) < 1$, հենց, որ $p \ge k_1$: Նույն ձևով $\left\{x_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ հաջորդականության համար կգտնենք k_2 թիվ այնպես, որ $\rho\left(x_p^{(2)}, x_{k_2}^{(2)}\right) < 1/2$, հենց, որ $p \ge k_2$: Շարունակելով այսպես, յուրաքանչյուր n-ի համար ընտրենք k_n այնպես, որ $\rho\left(x_p^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}\right) < 1/n$, հենց, որ $p \ge k_n$: Դիտարկենք $\left(x_{k_1}^{(1)}, x_{k_2}^{(2)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}, \dots\right)$ հաջորդականությունը: Ցույց տանք, որ այդ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է $\left(X, \rho\right)$-ում:

$$\rho\left(x_{k_m}^{(m)}, x_{k_l}^{(l)}\right) \le \rho\left(x_{k_m}^{(m)}, x_p^{(m)}\right) + \rho\left(x_p^{(m)}, x_p^{(l)}\right) + \rho\left(x_p^{(l)}, x_{k_l}^{(l)}\right):$$

Դիցուք $\varepsilon > 0$, քանի որ $\left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n, \dots\right) \in \tilde{X}$ ֆունդամենտալ հաջորդականություն է $\left(\tilde{X}, \tilde{\rho}\right)$-ում, ուրեմն կարող ենք գտնել $N_1(\varepsilon)$ թիվ այնպես, որ

$$\tilde{\rho}\left(\tilde{x}_m, \tilde{x}_l\right) = \lim_{p\to\infty} \rho\left(x_p^{(m)}, x_p^{(l)}\right) < \varepsilon/2$$

հենց, որ $m, l \ge N_1(\varepsilon)$: Հետևաբար կգտնվի P թիվ այնպես $\rho\left(x_p^{(m)}, x_p^{(l)}\right) < \varepsilon/2$ հենց, որ $p \ge P$ և $m, l \ge N_1(\varepsilon)$: Մյուս կողմից, եթե վերցնենք $p \ge k_m,\ p \ge k_l$, կունենանք՝

$$\rho\left(x_{k_m}^{(m)}, x_{k_l}^{(l)}\right) < \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{l}$$

եթե միայն նաև $p \ge P$: Այժմ ընտրենք $N_2(\varepsilon)$ այնպես, որ $m, l \ge N_2(\varepsilon)$ հետևի, որ $\frac{1}{m} + \frac{1}{l} < \frac{\varepsilon}{2}$: Եթե $m, l \ge \max\left\{N_1(\varepsilon),\ N_2(\varepsilon)\right\}$ կունենանք $\rho\left(x_{k_m}^{(m)}, x_{k_l}^{(l)}\right) < \varepsilon$, այսպիսով $\left(x_{k_1}^{(1)}, x_{k_2}^{(2)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}, \dots\right)$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է $\left(X, \rho\right)$-ում: $\tilde{x}$-ով նշանակենք այն համարժեքության դասը, որը պարունակում է $\left(x_{k_1}^{(1)}, x_{k_2}^{(2)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}, \dots\right)$ հաջորդականությունը և ցույց տանք, որ $\lim_{n\to\infty} \tilde{\rho}\left(\tilde{x}_n, \tilde{x}\right) = 0$:

Գիտենք, որ $\tilde{\rho}\left(\tilde{x}_n, \tilde{x}\right) = \lim_{p\to\infty} \rho\left(x_p^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}\right)$:

$$\rho\left(x_p^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}\right) \le \rho\left(x_p^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}\right) + \rho\left(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}\right) < \frac{1}{n} + \rho\left(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}\right) \text{ ,եթե } p \ge k_n:$$

Բայց $\left(x_{k_1}^{(1)}, x_{k_2}^{(2)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}, \dots\right)$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է, ուրեմն կարող ենք ասել, որ այս անհավասարության աջ մասը կարելի է դարձնել ցանկացած չափով փոքր, եթե վերցնենք n-ը և p-ն բավականաչափ մեծ: Այսպիսով ապացուցվեց $\left(\tilde{X}, \tilde{\rho}\right)$-ի լի-վությունը:

Կառուցենք $\left(\tilde{X}, \tilde{\rho}\right)$-ում ամենուրեք խիտ ենթաբազմություն, որը իզոմետրիկ է $\left(X, \rho\right)$-ին: Դիցուք ցանկացած $x \in X$ համար $\varphi\left(x\right) = \tilde{x}$, որտեղ $\tilde{x}$-ը $\left(x, x, \dots, x, \dots\right)$ ստացիոնար հաջորդականությունը պարունակող համարժեքության դասն է: Ակնհայտ է, որ φ-ն X-ը արտապատկերում է X_1-ի վրա, որտեղ X_1-ը X-ի բոլոր ստացիոնար հաջոր-դականություններով ծնված համարժեքության դասերի բազմությունն է:

Ցույց տանք, որ X_1-ը ամենուրեք խիտ է $\left(\tilde{X}, \tilde{\rho}\right)$-ում և φ-ն էլ իզոմետրա է $\left(X, \rho\right)$ և $\left(X_1, \tilde{\rho}\right)$-ի միջև: Նախ ակնհայտ է, որ $\tilde{\rho}\left(\varphi\left(x_1\right), \varphi\left(x_2\right)\right) = \lim\limits_{p \to \infty} \rho\left(x_1, x_2\right) = \rho\left(x_1, x_2\right)$: Ցույց տանք, որ ցանկացած $B\left(\tilde{x}, \varepsilon\right) \subset \tilde{X}$ գնդում կա կետ X_1-ից: Վերցնենք $\left\{x_k\right\}_{k=1}^{\infty} \in \tilde{x}$ և k_0-ն ընտրենք այնպես, որ $\rho(x_p, x_{k_0}) < \varepsilon/2$, երբ $p \geq k_0$:
Այժմ, եթե վերցնենք $\tilde{x}_{k_0} = (x_{k_0}, x_{k_0}, \dots, x_{k_0}, \dots) \in X_1$, կստանանք, որ

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{x}_{k_0}) = \lim_{p \to \infty} \rho(x_p, x_{k_0}) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \ :$$

Ապացուցենք, որ լրիվացումը միակն է: Ենթադրենք $\left(\tilde{X}, \tilde{\rho}\right)$-ից բացի կա $\left(X, \rho\right)$-ի մի ուրիշ լրիվացում՝ $\left(\widehat{X}, \widehat{\rho}\right)$: Կառուցենք ψ իզոմետրա $\left(\tilde{X}, \tilde{\rho}\right)$-ի և $\left(\widehat{X}, \widehat{\rho}\right)$-ի միջև: $\left(\widehat{X}, \widehat{\rho}\right)$-ում վերցնենք $\left(X, \rho\right)$-ին իզոմետրիկ ամենուրեք խիտ ենթաբազմություն՝ $\widehat{X}_1$: Քանի, որ X_1-ը և $\widehat{X}_1$-ը իզոմետրիկ են $\left(X, \rho\right)$-ին, ապա նրանք իզոմետրիկ են նաև միմյանց: Վերցնենք $\tilde{x} \in \left(\tilde{X}, \tilde{\rho}\right)$, քանի որ X_1-ը ամենուրեք խիտ է $\left(\tilde{X}, \tilde{\rho}\right)$-ում, ուրեմն կա $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \subset X_1$ հաջորդականություն, որի սահմանը $\tilde{x}$-ն է: Բայց X_1-ը և $\widehat{X}_1$-ը իզոմետրիկ են, ուրեմն $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \subset X_1$ հաջորդականությանը այդ իզոմետրիան իրագործող արտապատկերման դեպքում կհամապատասխանի $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_n, \dots) \subset \widehat{X}_1$ հաջորդականություն, ընդ որում $\tilde{\rho}(x_m, x_n) = \widehat{\rho}(\widehat{x}_m, \widehat{x}_n)$: $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_n, \dots) \subset \widehat{X}_1$ հաջոր-դականությունը կլինի ֆունդամենտալ $\left(\widehat{X}, \widehat{\rho}\right)$-ում, որպես զուգամետ հաջորդակա-նության իզոմետրիկ պատկեր: Բայց $\left(\widehat{X}, \widehat{\rho}\right)$-ն լրիվ է, հետևաբար $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_n, \dots)$ ունի սահման՝ $\widehat{x} \in \left(\widehat{X}, \widehat{\rho}\right)$: $\widehat{x}$-ը համարենք $\tilde{x}$-ի պատկեր ψ արտապատկերման դեպքում՝ $\psi\left(\tilde{x}\right) = \widehat{x}$: Հեշտությամբ ստուգվում է, որ ψ-ն իզոմետրիա է:

↵

ԼՐԻՎ ՄԵՏՐԻԿԱԿԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Լրիվ մետրիկական տարածություններում ճիշտ է ներդրված միջակայքերի մասին թեորեմը: Այն նույնիսկ մետրիկական տարածությունների լրիվության բնութագրիչ հատկություն է: Ձևակերպենք այն:

Թեորեմ: Դիցուք $B[x_1,r_1]\supset B[x_2,r_2]\supset\cdots\supset B[x_n,r_n]\supset\cdots$ ներդրված փակ գնդերի կամայական հաջորդականություն է (X,ρ) մետրիկական տարածությունում որոնց շառավիղների հաջորդականությունը՝ $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$-ը, ձգտում է զրոյի: Որպեսզի (X,ρ)-ն լինի լրիվ մետրիկական տարածություն անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ գնդերի հաջորդականությունը ունենա ոչ դատարկ հատում:

$\mapsto$

Անհրաժեշտությունը: Դիցուք (X,ρ)-ն լրիվ մետրիկական տարածություն է, տեսնենք, որ $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B[x_n,r_n]\neq\varnothing$: Դիտարկենք այդ գնդերի կենտրոնների $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը: Ցանկացած $p\in\mathbb{N}$ համար $x_{n+p}\in B[x_{n+p},r_{n+p}]\subset B[x_n,r_n]$, ուստի $\rho(x_{n+p},x_n)\le r_n$ և քանի որ $r_n\to 0$, կարող ենք պնդել, որ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է, հետևաբար զուգամետ է: Դիցուք $\lim x_n=x_0$: x_0-ն պատկանում է բոլոր գնդերին, քանի որ $\{x_p\}_{p=n}^{\infty}\subset B[x_n,r_n]$ և $B[x_n,r_n]$-ը փակ է:

Բավարարությունը: Ենթադրենք (X,ρ)-ում ներդրված փակ գնդերի կամայական հաջորդականություն ունի ոչ դատարկ հատում, ցույց տանք որ (X,ρ)-ն լրիվ է: Դիցուք $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(X,\rho)$ ֆունդամենտալ հաջորդականություն է, տեսնենք, որ այն զուգամետ է: $1/2^n$ թվի համար k_n թիվը ընտրենք այնպես, որ $\rho(x_{k_n+p},x_{k_n})<1/2^n$, $(p\in\mathbb{N})$ և $k_n<k_{n+1}$, $n=1,2,\ldots$: Դիտարկենք $B[x_{k_n},1/2^{n-1}]$ $n=1,2,\ldots$ գնդերի հաջորդականությունը, այն կլինի ներդրված հաջորդականություն: Իրոք, եթե $x\in B[x_{k_{n+1}},1/2^n]$, ապա $x\in B[x_{k_n},1/2^{n-1}]$, քանի որ

$$\rho(x,x_{k_n})\le\rho(x,x_{k_{n+1}})+\rho(x_{k_{n+1}},x_{k_n})\le 1/2^n+1/2^n=1/2^{n-1}:$$

x_0-ն թող պատկանի բոլոր այս գնդերին, ուրեմն $\rho(x_0,x_{k_n})\le 1/2^{n-1}$, հետևաբար $\lim x_{k_n}=x_0$: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ կլինի զուգամետ որպես զուգամետ ենթահաջորդականություն ունեցող ֆունդամենտալ հաջորդականություն:

↵

Դիտողություն 1: Նշենք, որ այս թեորեմի անհրաժեշտությունը ապացուցելիս մենք էապես օգտվեցինք այն փաստից, որ ներդրված փակ գնդերի շառավիղների հաջորդականությունը ձգտում է զրոյի: Ցույց տալ, որ այդ պայմանի խախտման դեպքում թեորեմի անհրաժեշտության մասը ճիշտ չի լինի:

Դիտողություն 2: Ցույց տալ, որ թեորեմում գնդերի հատումը մի կետ է:
Դիտողություն 3: Թեորեմի ապացույցը մնում է ուժի մեջ, եթե թեորեմում փակ գնդերի փոխարեն վերցնենք ներդրված փակ բազմությունների հաջորդականություն, որոնց տրամագծերի հաջորդականությունը ձգտում է զրոյի:

ԲԵՐՐԻ ԹԵՈՐԵՄԻ ԿԱՏԵԳՈՐԻԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Սահմանում: Կասենք, որ $E \subset (X, \rho)$ բազմությունը ամենուրեք նոսր է (X, ρ)-ում, եթե (X, ρ)-ի ցանկացած գնդում կա մի ուրիշ գունդ որում չկան կետեր E-ից:

Բերենք ամենուրեք նոսր բազմությունների օրինակներ: Այդպիսին է ամբողջ թվերի $\mathbb{Z}$ բազմությունը $\mathbb{R}$-ում կամ $\mathbb{C}$-ում: Այդպիսին է նաև ցանկացած վերջավոր բազմություն l_p-ում $(p \geq 1)$: Սակայն դիսկրետ մետրիկական տարածությունում նույնիսկ միայն մեկ կետ պարունակող բազմությունը ամենուրեք նոսր չի:

Սահմանում: Կասենք, որ $E \subset (X, \rho)$ բազմությունը առաջին կատեգորիայի բազմություն է, եթե այն կարելի է ներկայացնել վերջավոր կամ հաշվելի թվով ամենուրեք նոսր բազմությունների միավորման տեսքով, հակառակ դեպքում այն կանվանենք երկրորդ կատեգորիայի բազմություն:

Որպես առաջին կատեգորիաի բազմության օրինակ կարող է ծառայել ռացիոնալ կորդինատներով կետերի բազմությունը $\mathbb{R}^n$-ում, իսկ օրինակ իռացիոնալ կետերի բազմությունը արդեն երկրորդ կատեգորիայի բազմություն է $\mathbb{R}$-ում: (Ստուգել):

Լրիվ մետրիկական տարածությունների կարևոր հատկություններից է, վարը բերվող թեորեմը, որը անվանում են Բերրի թեորեմ կատեգորիաների մասին և որը ունի շատ հեռուն գնացող հետևանքներ:

Թեորեմ: Ցանկացած լրիվ մետրիկական տարածություն երկրորդ կատեգորիայի բազմություն է:
$\mapsto$
Ենթադրենք հակադարձը՝ դիցուք (X, ρ) լրիվ մետրիկական տարածություն է և $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, որտեղ բոլոր E_k-ները ամենուրեք նոսր են: Վերցնենք որևէ $B[x_0, r_0]$ գունդ: Քանի, որ E_1-ը ամենուրեք նոսր է, ապա $B[x_0, r_0]$ գնդում կգտնվի մի ուիշ գունդ՝ $B[x_1, r_1]$, որում չեն լինի կետեր E_1-ից , ընդ որում կարող ենք համարել, որ այդ գնդի

շառավիղը՝ $r_1 < 1/2$: Նմանապես, քանի, որ E_2-ը ամենուրեք նոսր է, ապա $B[x_1, r_1]$ գնդում կգտնվի մի ուրիշ գունդ $B[x_2, r_2]$, որում չեն լինի կետեր E_2-ից և կա-րող ենք համարել, որ այդ գնդի շառավիղը՝ $r_2 < 1/4$: Այսպես շարունակելով k-րդ քայլում կգտնենք $B[x_k, r_k] \subset B[x_{k-1}, r_{k-1}]$, $r_k < 1/2^k$ գունդ, որում չեն լինի կետեր E_k-ից: Այս պրոցեսը շարունակելով անվերջ կստանանք ներդրված գնդերի հաջորդականություն, որոնց շառավիղների հաջորդականությունը ձգտում է զրոյի և քանի, որ (X, ρ)-ն լրիվ է, ուրեմն կա $a \in X$ կետ, որը ընկած է բոլոր գնդերի մեջ: Ակնհայտ է, որ այդ կետը չի պատկանում ոչ մի E_k-ի, բայց $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, ստացվեց հակասություն, որը ապացուցում է թեորեմը:

ՍԵՊԱՐԱԲԵԼ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Մետրիկական տարածությունների կարևոր դաս են հանդիսանում սեպարաբել տարա-ծությունները:

Սահմանում: Կասենք, որ (X, ρ) մետրիկական տարածությունը սեպարաբել է, եթե նրանում կա հաշվելի ամենուրեք խիտ բազմություն:

Տեսնենք, որ մետրիկական տարածություններն են սեպարաբել և որոնք ոչ սեպարաբել:
1. X դիսկրետ մետրիկական տարածությունը սեպարաբելէ այն և միայն այն դեպքում, եթե X-ը հաշվելի է: Դա հետևում է այն բանից, որ դիսկրետ մետրիկական տարածությունում տարբեր կենտրոններով և $1/3$ շառավիղով ցանկացած երկու գունդ չեն հատվում:

2. $\mathbb{R}$-ը սեպարաբել է, քանի որ ռացիոնալ թվերի $\mathbb{Q}$ բազմությունը հաշվելի է և ամենուրեք խիտ է $\mathbb{R}$-ում:

3. $\mathbb{C}$ կոմպլեքս թվերի բազմությունը սեպարաբել է, այնտեղ ամենուրեք խիտ է $p + iq$, $p, q \in \mathbb{Q}$ հաշվելի բազմությունը:

4. $\mathbb{R}_p^n$-ում և $\mathbb{C}_p^n$-ում $(p \ge 1)$ ամենուրեք խիտ են համապատասխանաբար $\hat{r} = (r_1, r_2, ..., r_n)$ $r_i \in \mathbb{Q}$ և $\hat{r} = (p_1 + iq_1, p_2 + iq_2, ..., p_n + iq_n)$, $p_i, q_i \in \mathbb{Q}$ հաշվելի բազմութ-յունները, հետևաբար $\mathbb{R}_p^n$-ն և $\mathbb{C}_p^n$-ն սեպարաբել են:

5. Ապացուցենք, որ l_p-ն $(1 \le p < \infty)$ սեպարաբել է: Դրա համար ցույց տանք, որ այնտեղ ամենուրեք խիտ է $E = \{\hat{r} = (r_1, r_2, ..., r_n, 0, 0, ...); r_i \in \mathbb{Q}\}$ ի վերջո զրոյական վեկտորների բազմությունը: Իրոք, դիցուք $B(\hat{x}, \varepsilon)$-ը $\hat{x} = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ կենտրոնով գունդ է, նախ ընտրենք $n(\varepsilon)$-ը այնպիսի, որ $\left(\sum_{i=n(\varepsilon)+1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} < \varepsilon/2$, ապա $\hat{x}_{n(\varepsilon)} = (x_1, x_2, ..., x_{n(\varepsilon)}, 0, 0, ...)$ վեկտորի համար գտնենք $\hat{r} = (r_1, r_2, ..., r_{n(\varepsilon)}, 0, 0, ...) \in E$ վեկտոր, որ տեղի ունենա

$\rho_p\left(\hat{x}_{n(\varepsilon)},\hat{r}\right)<\varepsilon/2$ ։ Քանի որ

$$\rho_p\left(\hat{x},\hat{r}\right)\le\rho_p\left(\hat{x},\hat{x}_{n(\varepsilon)}\right)+\rho_p\left(\hat{x}_{n(\varepsilon)},\hat{r}\right)=\left(\sum_{i=n(\varepsilon)+1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p}+\rho_p\left(\hat{x}_{n(\varepsilon)},\hat{r}\right)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

ուրեմն $\hat{r}\in B\left(\hat{x},\varepsilon\right)$, այսինքն E-ն ամենուրեք խիտ է l_p-ում, բայց E-ն նաև հաշվելի է:

6. l_∞-ը սեպարաբել չէ: Իրոք, դիտարկենք զրոներից և մեկերից կազմված բոլոր հաջորդականությունների E բազմությունը, այն ընկած է l_∞-ում, այդ բազմության ցանկացած երկու տարրերի հեռավորությունը հավասար է մեկի և ինչպես հայտնի է, նրա հզորությունը կոնտինուում է: Ասածից հետևում է, որ $B\left(\hat{x},1/3\right)$; $\hat{x}\in E$ կոնտինիում թվով գնդերը չեն հատվում, բայց l_∞-ում ամենուրեք խիտ ցանկացած բազմություն այդ գնդերից յուրաքանչյուրում պետք է ունենա գոնե մեկ կետ, հետևաբար նրա հզորությունը չի կարող լինել կոնտինուումից փոքր:

7. Բոլոր հնարավոր հաջորդականությունների բազմությունը՝ s-ը սեպարաբել է: Ապացույցը նման է l_p-ի $\left(1\le p<\infty\right)$ համար վերը բերված ապացույցին:

8. $C\left[a;b\right]$-ն սեպարաբել է, քանի որ այնտեղ աենուրեք խիտ են ռացիոնալ գործակիցներով բազմանդամների հաշվելի բազմությունը: Դա հետվում է Վայերշտրասի հայտնի թեորեմից, այն է, $C\left[a;b\right]$-ի ցանկացած ֆունկցիայի կարելի է $\left[a;b\right]$-ի վրա հավասարաչափ մոտարկել բազմանդամներով: Վայերշտրասի թեորեմը գրել հավելվածում:

9. $C_p\left[a;b\right]$-ն $\left(1\le p<\infty\right)$ սեպարաբել է **8** կետում բերված հիմնավորմամբ:

ԿՈՄՊԱԿՏ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՄԵՏՐԻԿԱԿԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ

Մեծ է կոմպակտ բազմությունների (բազմություններ որոնց ցանկացած հաջորդականությունից կարելի է անջատել զուգամետ ենթահաջորդականություն, որի սահմանը այդ բազմությունից է կամ օժտված է Հայնե-Բորելի հատկությամբ) դերը անալիզի շատ հարցերում, հատկապես անընդհատ ֆունկցիաների հատկությունները ուսումնասիրելիս:

$\mathbb{R}^n$-ում կոմպակտ բազմությունները փակ և սահմանափակ բազմություններն են: Բայց կամայական մետրիկական տարածությունում ամեն մի սահմանափակ և փակ բազմություն չէ, որ օժտված է վերը նշված հատկությամբ: Օրինակ, եթե l_p-ում վերցնենք սահմանափակ և փակ $B[0,1]$ միավոր գունդը, ապա $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը, որտեղ $e_k=(0,0,\ldots,0,1,0,\ldots)$ (մեկը գրված է k-րդ տեղում) ընկած է $B[0,1]$-ում, սակայն այն չի կարող ունենալ զուգամետ ենթահաջորդականություն, քանի որ նրա կամայական երկու իրարից տարբեր անդամների հեռավորությունը $2^{1/p}$ դրական հաստատուն է:

Մետրիկական տարածություններում կոմպակտ բազմությունների ուսումնասիրությունը սկսենք համապատասխան սահմանումներից:

Դիցուք (X,ρ) մետրիկական տարածություն է, իսկ E և $G_\alpha \subset (X,\rho)$ ցանկացած $\alpha \in I$ համար:

Սահմանում: Կասենք, որ $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ընտանիքը E–ի համար ծածկույթ է, եթե $E\subset\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha$: $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ծածկույթը կանվանենք բաց, եթե բոլոր G_α-ները բաց են: Եթե $I'\subset I$ և $E\subset\bigcup_{\alpha\in I'}G_\alpha$, ապա $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I'}$ կանվանենք $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ծածկույթի ենթածածկույթ: Ենթածածկույթը կանվանենք վերջավոր, եթե I'-ը վերջավոր բազմություն է:

Սահմանում: Կասենք, որ $K\subset(X,\rho)$ կոմպակտ է, եթե նրա ցանկացած բաց ծածկույթից կարելի է անջատել վերջավոր ենթածածկույթ:

Սահմանում: Կասենք, որ $K\subset(X,\rho)$ բազմությունը սեկվենցիալ կոմպակտ է, եթե նրա ցանկացած հաջորդականությունից կարելի է անջատել զուգամետ ենթահաջորդականություն, որի սահմանը պատկանում է K-ին:

Կան տարածություններ որտեղ այս սահմանումները համարժեք չեն: Մեր նպատակն է ապացուցել նրանց համարժեքությունը մետրիկական տարածություններում:

Նախ ապացուցենք կոմպակտ բազմությունների մի քանի հատկություններ:

Թեորեմ: Կոմպակտ բազմությունը փակ է և սահմանափակ:

$\mapsto$

Դիցուք K-ն կոմպակտ է, այդ դեպքում $\{B(x;1)\}_{x\in K}$ բաց գնդերի ընտանիքը նրա համար բաց ծածկույթ է, ուրեմն նրանից կարելի է անջատել $\{B(x_i;1)\}_{i=1}^{n}$ վերջավոր ենթածածկույթ, այսինքն K-ն ընկած է վերջավոր թվով միավոր շառավղով գնդերի մեջ, հետևաբար սահմանափակ է:

Ցույց տանք, որ K-ն փակ է, այսինքն $K'\subset K$: Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ $a\notin K$-ից հետևում է $a\notin K'$: Դիցուք $a\notin K$, այդ դեպքում $r_x=\rho(x,a)>0$ $\forall x\in K$ համար: Ուստի $B(a,r_x/3)\cap B(x,r_x/3)=\varnothing$ և $\{B(x,r_x/3)\}_{x\in K}$ բաց ծածկույթ է K–ի համար: Ուստի այն ունի $\{B(x_i,r_{x_i}/3)\}_{i=1}^{n}$ վերջավոր ենթածածկույթ: Այժմ, եթե վերցնենք $r_0=\min\limits_{1\le i\le n} r_{x_i}$, ապա

$B(a,r_0/3)\cap B(x_i,r_{x_i}/3)=\varnothing \quad \forall i=1\div n$, ուստի $B(a,r_0/3)\cap K=\varnothing$, քանի որ

$K\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}B(x_i,r_{x_i}/3)$: Ուստի a–ն չի կարող լինել սահմանային կետ K–ի համար, այսինքն $a\notin K'$: $\lrcorner$

Ինչպես նշվեց վերևում կան մետրիկական տարածություններ որտեղ ոչ բոլոր փակ սահմանափակ բազմություններն են կոմպակտ:

Մտցնենք մի նոր գաղափար:

Սահմանում: Կասենք, որ $K\subset(X,\rho)$ հարաբերական կոմպակտ է (հարաբերական սեկվենցիալ կոմպակտ է), եթե նրա ցանկացած հաջորդականությունից կարելի է անջատել զուգամետ ենթահաջորդականություն:

Բոլցանո- Վայերշտրասի լեմմից հետևում է, որ K բազմությունը $\mathbb{R}^n$-ում կլինի հարաբերական կոմպակտ այն և միայն այն դեպքում, եթե այն սահմանափակ է:

Ակնհայտ է, որ եթե E–ն փակ է և հարաբերական կոմպակտ է, ապա սեկվենցիալ կոմպակտ է:

($E\subset X$ հարաբերական կոմպակտ է, այն և միայն այն դեպքում, եթե E–ի փակումը սեկվենցիալ կոմպակտ է):

Սահմանում: $\mathrm{N} \subset \mathrm{X}$ բազմությունը կանվանենք $\mathrm{M} \subset \mathrm{X}$ բազմության համար ε–ցանց, եթե $\forall x \in M$ $\exists y \in N$ այնպես, որ $\rho(x, y) < \varepsilon$ կամ, որ նույն է, $M \subset \bigcup_{x \in N} B(x, \varepsilon)$:

ε–ցանցը կանվանենք վերջավոր ε–ցանցը, եթե այն բաղկացած է վերջավոր թվով կետերից:

Սահմանում: Կասենք, որ M բազմությունը լիովին սահմանափակ է, եթե ցանկացած ε-ի համար այն ունի վերջավոր ε-ցանց:

Ապացուցել, որ ցանկացած լիովին սահմանափակ բազմություն սահմանափակ է: Բերել մետրիկական տարածության օրինակ որում հակառակը ճիշտ չէ:

Հետևյալ թեորեմը բնութագրում է հարաբերական կոմպակտ բազմությունները, նոր մտցրած լիովին սահմանափակ հասկացության տերմիններով:

Թեորեմ (Հաուզդորֆ): Որպեսզի $K \subset (X, \rho)$ բազմությունը լինի հարաբերական կոմպակտ (X, ρ) մետրիկական տարածությունում անհրաժեշտ է և (X, ρ) լրիվության դեպքում նաև բավարար, որպեսզի K–ն լինի լիովին սահմանափակ:

$\mapsto$

Անհրաժեշտությունը: Դիցուք $K \subset X$ և K-ն հարաբերական կոմպակտ է: ε >0 դիտարկենք $x_1 \in K$, եթե $\forall x \in K$ $\rho(x_1, x) < \varepsilon$, ապա մեկ կետանի $\{x_1\}$ բազմություն K-ի համար վերջավոր ε –ցանց է: Եթե $\exists x_2 \in K$ և $\rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon$, ապա դիտարկենք $\{x_1, x_2\}$ բազմությունը եթե $\forall x \in K$ $\rho(x_1, x) < \varepsilon$ կամ $\rho(x_2, x) < \varepsilon$, ապա $\{x_1, x_2\}$ երկու կետանի բազմությունը կլինի K–ի համար վերջավոր ε –ցանց:

Այս պրոցեսը չի կարող անվերջ շարունակվել, քանի որ հակառակ դեպքում կստանայինք K-ում ընկած $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ հաջորդականություն $\rho(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ $i \neq j$ հատկությամբ օժտված, որից հնարավոր չէր լինի անջատել զուգամետ ենթահաջորդականություն, ի հեճուկս K-ի հարաբերական կոմպակտության:

Ուրեմն վերջավոր, ասենք n քայլերից հետո կստանանք $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ կետերից կազմված K-ի վերջավոր ε –ցանց:

Բավարարությունը: Դիցուք K–ն լիովին սահմանափակ է, իսկ (X, ρ)-ն լրիվ է, ցույց տանք, որ K–ն հարաբերական կոմպակտ է:

Դիտարկենք $T=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset K$ հաջորդականությունը և ցույց տանք, որ նրանից կարելի է ընտրել զուգամետ ենթահաջորդականություն:

Վերցնենք $\varepsilon_n\downarrow 0$ և թող $\left\{x_1^{(n)},x_2^{(n)},...,x_{k_n}^{(n)}\right\}$-ը լինի K-ի համար ε_n-վերջավոր ցանց:

$K\subset\bigcup_{i=1}^{k_1}B\left[x_i^{(1)},\varepsilon_1\right]$, ուրեմն $T\subset\bigcup_{i=1}^{k_1}B\left[x_i^{(1)},\varepsilon_1\right]$ և հետևաբար այս փակ գնդերից գոնե մեկը, ասենք $B[x_{i_1}^{(1)},\varepsilon_1]$-ը, կպարունակի անվերջ թվով անդամներ այդ հաջորդականությունից: Թող T_1-ը լինի T-ի այն անդամները, որոնք ընկած են $B[x_{i_1}^{(1)},\varepsilon_1]$-ում:

Նույն ձևով $K\subset\bigcup_{i=1}^{k_2}B\left[x_i^{(2)},\varepsilon_2\right]$, ուրեմն $T_1\subset\bigcup_{i=1}^{k_2}B\left[x_i^{(2)},\varepsilon_2\right]$ և հետևաբար այս փակ գնդերից գոնե մեկը, ասենք $B[x_{i_2}^{(2)},\varepsilon_2]$-ը, կպարունակի անվերջ թվով անդամներ T_1 հաջոր-դականությունից: Թող T_2-ը լինի T_1-ի այն անդամները, որոնք ընկած են $B[x_{i_2}^{(2)},\varepsilon_2]$-ում:

Շարունակելով այս պրոցեսը կստանանք $T\supset T_1\supset T_2\supset...\supset T_n\supset...$ հաջորդականություն, ընդ, որում $T_n\subset B\left[x_{i_n}^{(n)},\varepsilon_n\right]$:

Ընտրենք $\left\{x_{n_1},x_{n_2},...,x_{n_k},...\right\}$ ենթահաջորդականությունը հետևյալ ձևով՝ թող $x_{n_1}\in T_1$, x_{n_2}-ը ընտրենք այնպես, որ $n_2>n_1$ և $x_{n_2}\in T_2$, եթե x_{n_k}-ն ընտրված է, $x_{n_{k+1}}$ ընտրենք այն-պես, որ $n_{k+1}>n_k$ և $x_{n_{k+1}}\in T_{k+1}$: Դա հնարավոր է անել, քանի որ բոլոր T_k-երը պարունակում են ինչքան ասես մեծ համարներով T հաջորդականության անդամներ :

Ցույց տանք, որ $\left\{x_{n_1},x_{n_2},...,x_{n_k},...\right\}$ ենթահաջորդականությունը զուգամետ է: Քանի որ, (X,ρ)-ն լրիվ է, բավական է ցույց տալ, որ այն ֆունդամենտալ է: Պարզ է, որ ցանկացած $p\in\mathbb{N}$ համար x_{n_k} և $x_{n_{k+p}}$ ընկած են T_k-ի մեջ, հետևաբար $B\left[x_{i_k}^{(k)},\varepsilon_k\right]$-ի մեջ, ուստի

$\rho(x_{n_{k+p}},x_{n_k})\le\rho(x_{n_{k+p}},x_{i_k}^{(k)})+\rho(x_{i_k}^{(k)},x_{n_k})\le 2\varepsilon_k$ ↵

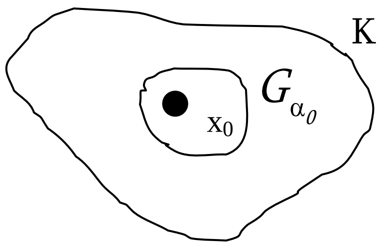
Թեորեմ : Որպեսզի $K\subset(X,\rho)$ բազմությունը լինի կոմպակտ (X,ρ) մետրիկական տարածությունում անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի K–ն լինի սեկվենցիալ կոմ-պակտ:

$\mapsto$

Անհրաժեշտություն: Դիցուք K–ն կոմպակտ է, ցույց տանք, որ այն սեկվենցիալ կոմպակտ է: Դիցուք $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$-ը K–ի որևէ հաջորդականություն է, եթե նրա արժեքների բազմությունը վերջավոր է, ապա նրա անդամներից մեկը կկրկնվի անվերջ անգամ և ընտրելով այդ անդամից կազմված ենթահաջորդականությունը կստանանք K–ում սահման ունեցող ենթահաջորդականություն, ուստի կարող ենք ենթադրել, որ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը ունի անվերջ թվով իրարից տարբեր անդամներ: Այժմ, եթե ենթադրենք, որ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$-ը չունի K–ում սահման ունեցող ենթահաջորդականություն, ապա կարող ենք պնդել, որ ցանկացած $x \in K$ համար կա $B(x, r_x)$ շրջակայք, որում կարող է լինել ամենաշատը մեկ կետ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$-ից: Ակնհայտ է, որ $\{B(x, r_x)\}_{x \in K}$ ընտանիքը K-ի բաց ծածկույթ է, որից չի կարելի անջատել վերջավոր ենթածածկույթ, որը ծածկի $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$-ը, հետևաբար նաև K-ն: Ստացանք, որ K-ն կոմպակ չի, հակասություն այն բանին, որ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$-ը չունի K–ում սահման ունեցող ենթահաջորդականություն:

Բավարարությունը: Դիցուք K–ն սեկվենցիալ կոմպակտ է, ցույց տանք, որ այն կոմպակտ է: Դիցուք ունենք $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ K-ի բաց ծածկույթ է: Նախ ցույց տանք, որ $\exists \varepsilon > 0$ այնպես, որ $\forall x \in K$ $\exists G_{\alpha_x} \supset B(x, \varepsilon)$: Ենթադրենք հակառակը $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_\varepsilon \in K$ այնպես, որ $B(x_\varepsilon, \varepsilon)$-ը լրիվությամբ ընկած չէ ոչ մի G_α-ի մեջ: Որպես ε վերցնելով $1/n$-ը կունենանք $x_n \in K$ կետ և $B(x_n, 1/n)$ գունդ, որը ընկած չի ոչ մի G_α-ի մեջ: Դիտարկենք $\{\mathrm{x_n}\}_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \subset K$ հաջորդականությունը, այն պարունակում է $\{\mathrm{x}_{\mathrm{n}_k}\}_{\mathrm{k=1}}^{\infty}$ զուգամետ ենթահաջորդականություն, որի սահմանը՝ $x_0 \in K$, քանի որ K–ն սեկվենցիալ կոմպակտ էր: Ուրեմն $\exists G_{\alpha_0}$, որը պարունակում է x_0-ն: Բայց G_{α_0}-ն բաց է, ուրեմն կա $B(x_0, \delta) \subset G_{\alpha_0}$ ($\delta > 0$):

Քանի որ $x_{n_k} \to x_0$, ուրեմն $\rho(x_{n_k}, x_0) \to 0$ և հետևաբար $\rho(x_{n_k}, x_0) + \dfrac{1}{n_k} \to 0$, որտեղից կունենանք, որ կա մի K_0 այնպես, որ $k > K_0$ համար $\rho(x_{n_k}, x_0) + \dfrac{1}{n_k} < \delta$: Այսպիսով



$B\left(x_{n_k}, \dfrac{1}{n_k}\right) \subset B(x_0, \delta)$, իրոք եթե $x_1 \in B\left(x_{n_k}, \dfrac{1}{n_k}\right)$ ապա

$\rho(x_1, x_0) \le \rho(x_1, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0) < \dfrac{1}{n_k} + \rho(x_{n_k}, x_0) < \delta$

Ստացանք, որ $B\left(x_{n_k}, \dfrac{1}{n_k}\right) \subset B(x_0, \delta) \subset G_{\alpha_0}$, այսինքն եկանք հակասության , $\exists\varepsilon>0$ այնպես, որ $\forall x\in K\ \ \exists G_{\alpha_x}\supset B(x,\varepsilon)$

Դիցուք $\varepsilon>0$ ընտրված է այնպես, որ $\forall x\in K\ \ \exists G_{\alpha_x}\supset B(x,\varepsilon)$: Քանի, որ K-ն սեկվենցիալ կոմպակտ է, ապա նա լիովին սահմանափակ է, հետևաբար ունի վերջավոր ε –ցանց, որի կետերը առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ընտրել K-ից: Թող այն լինի $\{x_1,x_2,...,x_n\}\subset K$, ուրեմն

$K\subset\bigcup_{k=1}^{n}B(x_k,\varepsilon)\subset\bigcup_{k=1}^{n}G_{\alpha_{x_k}}$, այսինքն $\left\{G_{\alpha_{x_k}}\right\}_{k=1}^{n}$ K-ի վերջավոր ենթածածկույթ է: ↵

Կանտորի Թեորեմ:

Վերևում, որպես ներդրված հատվածների լեմմայի նմանակ մետրիկական տարածություններում, մենք համարեցինք ներդրված գնդերի մասին թեորեմը: Սակայն, որպես հատվածի նմանակ կարելի է համարել մետրիկական տարածության կոմպակտ բազմությունները և այս դեպքում ներդրված հատվածների լեմմայի նմանակը կլինի հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ: Դիցուք X մետրիկական տարածության մեջ ունենք ներդրված ոչ դատարկ կոմպակտ բազմությունների հաջորդականություն՝ $K_1\supset K_2\supset\ldots\supset K_n\supset\ldots$: Այդ դեպքում $\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n\neq\varnothing$:

↦

Վերցնենք $x_1\in K_1, x_2\in K_2,...,x_n\in K_n,...$ (K_n - դատարկ չէ): Ակնհայտ է, որ ստացված $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը K_1-ից է, ավելին $\{x_n,x_{n+1}...\}\subset K_p$ ցանկացած $n\geq p$ համար: Քանի, որ K_1-ը կոմպակտ է, ապա կա $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ենթահաջորդականություն, որը ունի $x_0\in K_1$ սահման: Բայց պարզ է, որ $x_0\in K_n$ ցանկացած n-ի համար: Իրոք, եթե ընտրենք k-ն այնպես, որ $n_k\geq n$, ապա կունենանք $\{x_{n_k},x_{n_{k+1}}...\}\subset K_n$ և քանի, որ K_n կոմպակտ է, ապա $x_0\in K_n$: ↵

Արցելայի թեորեմը

Բերենք կոմպակտության հայտանիշ $C[a,b]$ տարածության համար: Դիցուք տրված է $F\subset C[a,b]$:

Սահմանում: Կասենք, որ F–ը հավասարաչափ սահմանափակ է, եթե $\exists M$ թիվ այնպես, որ $\forall x(t)\in F\quad |x(t)|\leq M\quad \forall t\in[a,b]$:

Սահմանում: Կասենք, որ F–ը հավասարաստիճան անընդհատ է [a,b]–ում, եթե $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0$ այնպես, որ $\forall x(t)\in F$ և $\forall\ t_1,t_2\in[a,b]$ $|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon$ հենց, որ $|t_1-t_2|<\delta$:

Թեորեմ(Արցելա): Որպեսզի $K\subset C[a,b]$ լինի հարաբերական կոմպակտ անհրաժեշտ է և բավարար, որ K-ն լինի հավասարաչափ սահմանափակ և հավասարաստիճան անընդհատ:

$\mapsto$

Անհրաժեշտությունը: Դիցուք K–ն հարաբերական կոմպակտ է, ցույց տանք K կլինի հավասարաչափ սահմանափակ և հավասարաստիճան անընդհատ:

Դիտարկենք $\frac{\varepsilon}{3}>0$ և նրա համար կառուցենք վերջավոր $\frac{\varepsilon}{3}$–ցանց (որը $\exists$ ունի, քանի որ K–ն որպես հարաբերական կոմպակտ լիովին սահմանափակ է): Դիցուք այդ ցանցը $\{x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)\}$–ն է: Ուրեմն $\forall x(t)\in K$ $\exists p$ $\rho(x,x_p)=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-x_p(t)|<\frac{\varepsilon}{3}$:

$x_p(t)$ -անընդհատ է ուրեմն ըստ Վայերշտրասի թեորեմի սահմանափակ է, այսինքն գոյություն ունի M_p թիվ այնպես, որ $|x_p(t)|<M_p$ $p=1,2,...,n$:

Վերցնելով $M=\max\{M_1,...,M_n\}$, կունենանք՝ $|x(t)|\le|x_p(t)|+\frac{\varepsilon}{3}\le M+\frac{\varepsilon}{3}$, այսինքն K-ն հավասարաչափ սահմանափակ է:

Ցույց տանք, որ K-ն հավասարաստիճան անընդհատ է: Քանի, որ $x_p(t)$ -անընդհատ է, ուրեմն ըստ Կանտորի թեորեմի հավասարաչափ անընդհատ է, այսինքն գոյություն ունի $\delta_p>0$ թիվ այնպես, որ $\forall t_1,t_2\in[a;b]$ համար $|t_1-t_2|<\delta_p\ \Rightarrow\ |x_p(t_1)-x_p(t_2)|<\frac{\varepsilon}{3}$:

Ընտրելով $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,...\delta_n\}>0$, կունենանք՝ $\forall t_1,t_2\in[a;b]$ համար $|t_1-t_2|<\delta$ կբխի $|x_p(t_1)-x_p(t_2)|<\frac{\varepsilon}{3}$ բոլոր $p=1,2,...,n$ համար: Այժմ վերցնենք կամայական $x(t)\in K$ ընտրենք $x_p(t)$ -ն այնպես, որ $\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-x_p(t)|<\frac{\varepsilon}{3}$: Ենթադրելով $|t_1-t_2|<\delta$ գնահատենք $|x(t_1)-x(t_2)|$-ը:

$$|x(t_1)-x(t_2)|\le|x(t_1)-x_p(t_2)|+|x_p(t_1)-x_p(t_2)|+|x_p(t_1)-x(t_2)|\le\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon:$$

Այսինքն, K-ն հավասարաստիճան անընդհատ է:

Բավարարությունը: Քանի, որ $C[a,b]$-ն լրիվ մետրիկական տարածություն է, բավական է ցույց տալ, որ K-ն ունի վերջավոր ε-ցանց ցանկացած դրական ε-ի համար:

Վերցնենք $\varepsilon>0$ թիվը և կառուցենք ε-ցանց K-ի համար:

M -ը ընտրենք այնպես, որ $|x(t)| \le M \quad \forall x(t) \in K$ և $\forall t \in [a,b]$ համար (K -ն հավասարաչափ սահմանափակ է:)

$\frac{\varepsilon}{5} > 0$ թվի համար ընտրենք $\delta > 0$ անպես, որ $\forall t_1, t_2 \in [a;b]$ համար $|t_1 - t_2| < \delta$ կբխի $|x(t_1) - x(t_2)| < \frac{\varepsilon}{5}$ ցանկացած $x(t) \in K$ համար, դա հնարավոր է անել, քանի որ (K -ն հավասարաստիճան անընդհատ է:)

$[a;b]$ և $[-M;M]$ հատվածները տրոհենք այնպես, որ

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b \quad \max_{0 \le i \le n-1} |t_{i+1} - t_i| < \delta \quad , \quad -M = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = M \quad \max |x_{i+1} - x_i| < \frac{\varepsilon}{5} :$$

Դիտարկենք հարթության (a, x_i) կետը (b, x_j) $i, j = 0,1,\ldots,m$ կետին միացնող, բոլոր այն բեկյալների Φ բազմությունը, որոնց գագաթները (t_r, x_s) կետերն են և որոնք $[a;b]$ հատվածում որոշված ֆունկցիայի գրաֆիկ են: Ակնհայտ է, որ Φ -ն վերջավոր բազմություն է: Ցույց տանք, որ Φ -ն K -ի համար ε -ցանց է:

Վերցնենք $x(t) \in K$ և կառուցենք $\varphi(t) \in \Phi$ այնպես, որ $|\varphi(t_i) - x(t_i)| < \frac{\varepsilon}{5} \quad i = 0,1,\ldots,n$:

Այդ դեպքում, կունենաք

$$|\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)| \le |\varphi(t_{i+1}) - x(t_{i+1})| + |x(t_{i+1}) - x(t_i)| + |\varphi(t_i) - x(t_i)| \le \frac{3\varepsilon}{5} :$$

Քանի, որ φ-ն գծային ֆունկցիա է $[t_i, t_{i+1}]$ –ի վրա, ուրեմն, երբ $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$|\varphi(t) - \varphi(t_i)| \le |\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)| \le \frac{3\varepsilon}{5} :$$

Ենթադրենք $t \in [t_i, t_{i+1}]$ և գնահատենք $|x(t) - \varphi(t)|$:

$$|x(t) - \varphi(t)| \le |x(t) - x(t_i)| + |x(t_i) - \varphi(t_i)| + |\varphi(t) - \varphi(t_i)| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{3\varepsilon}{5} = \varepsilon :$$

Բայց, քանի որ ցանկացած $t \in [a;b]$ ընկած է որևէ $[t_i, t_{i+1}]$ -ում, ուրեմն կարող ենք ասել,որ $\rho(x, \varphi) < \varepsilon$:↵

Բերել ուրիշ տարածություններում կոմպակտության հայտանիշներ:

ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Դիցուք (X_1,ρ_1) և (X_2,ρ_2) մետրիկական տարածություններ են, իսկ $D\subset(X_1,\rho_1)$ որևէ բազմություն է: D-ի վրա որոշված ֆունկցիան, որի արժեքները (X_2,ρ_2)-ից են կանվանենք D որոշման տիրույթով օպերատոր, կամ D-ից (X_2,ρ_2) գործող օպերատոր: Ընդունված է օպերատորները նշանակել լատինական այբուբենի մեծատառերով, օրինակ՝ A օպերատոր, B օպերատոր և այլն, իսկ օպերատորի արժեքը D-ից որևէ x-ի վրա՝ Ax, Bx: Այն փաստը, որ A օպերատոր գործում է D-ից (X_2,ρ_2) կարճ կգրենք այսպես՝ $A:D\to(X_2,\rho_2)$:

Եթե $E\subset D$, իսկ $F\subset(X_2,\rho_2)$, ապա $A(E)=\{Ax\in X_2;x\in E\}$ E բազմության պատկերն է A արտապատկերման ժամանակ, իսկ $A^{-1}(F)=\{x\in D;Ax\in F\}$ F բազմության նախապատկերը:

Դիցուք A-ն D-ից (X_2,ρ_2) գործող օպերատոր է՝ $A:\ D\to(X_2,\rho_2)$:

Սահմանում: Կասենք, որ A օպերատորը անընդհատ է $x_0\in D$ կետում , եթե $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_\varepsilon>0\ s.t.\ \forall x\in D$ համար $\rho_1(x,x_0)<\delta_\varepsilon$ հետևում է $\rho_2(Ax,Ax_0)<\varepsilon$:

Դժվար չի տեսնել, որ այս սահմանումը համարժեք է հետևյալին՝ A օպերատորը անընդհատ է $x_0\in D$ կետում, եթե $\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D$ և $x_n\to x_0$ (X_1,ρ_1)-ում հետևում է $Ax_n\to Ax_0$ (X_2,ρ_2)-ում:

Սահմանում: Կասենք, որ A օպերատորը անընդհատ է D բազմության վրա, եթե այն անընդհատ է D-ի ցանկացած կետում:

Բերենք մի քանի օրնակներ:

1.Դիցուք $X_1=X_2=C[0;1]$ $(Ax)(t)=tx(t)$ ակնհայտ է, որ այն անընդհատ է $C[0;1]$:

2. $X_1=X_2=C[0;1]$ $D=C^{(1)}[0;1]\subset X_1$ $(Dx)(t)=x'(t)$ հեշտ է տեսնել, որ այս օպերատորը անընդհատ չէ $C^{(1)}[0;1]$-ի ոչ մի կետում:

Դիցուք $D\subset(X,\rho)$: Անընդհատությունը մի նոր ձևով սահմանելու համար մեզ պետք կլինի D-ում բաց բազմության հասկացողությունը:

Սահմանում: Կասենք, որ E-ն D-ում բաց բազմության է, եթե $E = G \bigcap D$, որտեղ G-ն բաց է (X,ρ)-ում:

Խնդիր: Ապացուցել, որ E-ն D-ում բաց բազմության է այն և միայն այն դեպում, եթե ցանկացած $x \in E$ համար գոյություն ունի $B(x,\varepsilon)$ գունդ այնպես, որ $D \bigcap B(x,\varepsilon) \subset E$:

Թեորեմ: Որպեսի $A: D \to (X_2,\rho_2)$ լինի անընդհատ D-ում, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսի (X_2,ρ_2)-ի ցանկացած բաց բազմության նախապատկերը լինի D-ում բաց:

$\mapsto$

Անհրաժեշտությունը: Դիցուք A-ն անընդհատ է D-ում, իսկ V-ն բաց բազմություն է (X_2,ρ_2)-ում, ցույց տանք, որ $A^{-1}(V)$-ն բաց է D-ում: Եթե $x \in A^{-1}(V)$, ապա $x \in D$, իսկ $Ax \in V$ և քանի որ V-ն բաց է, ուրեմն կա $B(Ax,\varepsilon_x) \subset V$, ընդ որում $V = \bigcup\limits_{x \in A^{-1}(V)} B(Ax,\varepsilon_x)$: Մյուս կողմից, քանի որ A-ն անընդհատ է x կետում, ուրեմն գոյություն ունի $B(x,\delta_x) \subset (X_1,\rho_1)$, այնպես, որ $A(D \bigcap B(x,\delta_x)) \subset B(Ax,\varepsilon_x)$, այսինքն $D \bigcap B(x,\delta_x) \subset A^{-1}(B(Ax,\varepsilon_x))$, որտեղից $\bigcup\limits_{x \in A^{-1}(V)} D \bigcap B(x,\delta_x) = D \bigcap \bigcup\limits_{x \in A^{-1}(V)} B(x,\delta_x) \subset \bigcup\limits_{x \in A^{-1}(V)} A^{-1}(B(Ax,\varepsilon_x)) = A^{-1}(V)$: Այն քանը, որ $A^{-1}(V) \subset D \bigcap \bigcup\limits_{x \in A^{-1}(V)} B(x,\delta_x)$ ակնհայտ է, այսինքն $A^{-1}(V) = D \bigcap \bigcup\limits_{x \in A^{-1}(V)} B(x,\delta_x)$: Բայց $G = \bigcup\limits_{x \in A^{-1}(V)} B(x,\delta_x)$ բաց բազմություն է, այսինքն $A^{-1}(V)$-ն բաց է D-ում:

Բավարարությունը: Դիցուք $x_0 \in D$ և ε կամայական դրական թիվ է: Վերցնենք $B(Ax_0,\varepsilon) \subset (X_2,\rho_2)$ գունդը, այն բաց է, հետևաբար $A^{-1}(B(Ax_0,\varepsilon)) = G \bigcap D$, որտեղ G-ն բաց է (X_1,ρ_1)-ում և պարունակում է x_0 կետը: Ուստի գոյություն ունի $\delta > 0$, այնպես, որ $A(B(x_0,\delta) \bigcap D) \subset B(Ax_0,\varepsilon)$: ↵

Մասնավորապես, եթե A օպերատորը որոշված է ամբողջ տարածության վրա, ապա որպեսի այն լինի անընդհատ անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսի ցանկացած բաց բազմության նախապատկերը լինի բաց:

Թեորեմ: Եթե $A: K \to (X_2,\rho_2)$ օպերատորը անընդհատ է K-ի վրա և K-ն կոմպակտ է (X_1,ρ_1)-ում, ապա $A(K)$-ն կոմպակտ է (X_2,ρ_2)-ում:

↦

Բավական է ցույց տալ, որ $A(K)$-ն սեկվենցիալ կոմպակտ է: Դիցուք

$\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset A(K)$, այսինքն $y_n = Ax_n, \quad x_n \in K$, բայց K-ն կոմպակտ է, հետևաբար սեկվեն-

ցիալ կոմպակտ է, ուրեմն կա զուգամետ $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ ենթահաջորդականություն, որի սահ-

մանը՝ $x_0 \in K$: A օպերատորի անընդհատությունից անմիջապես կհետևի, որ

=> $y_{n_k} = Ax_{n_k} \to Ax_0 = y_0 \in A(K)$: ↵

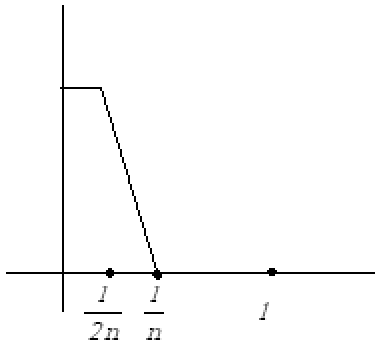
Այն օպերատորը, որի փոփոխման բազմությունը իրական կամ կոմպլեքս թվերի բազ-մությունն է ընդունված է անվանել ֆունկցիոնալ: Եթե այդ ֆունկցիոնալը f - ն է, ապա նրա արժեքը x կետում նշանակում են սովորական ձևով՝ $f(x)$: Վերը ապացուցած թեորեմից անմիջապես կստանանք հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ (Վայերշտրաս): Եթե $f: K \to \mathbb{R}$ ֆունկցիոնալը անընդհատ է K-ի վրա և K-ն կոմպակտ է X-ում, ապա f-ը սահմանափակ է K-ի վրա և ընդունում է իր ճշգրիտ վերին և ստորին եզրերը:

↦

Ըստ նախորդ թեորեմի $f(K)$-ն կոմպակտ է, բայց $\mathbb{R}$-ում կոմպակտները փակ և սահմանափակ բազմություններն են, այսիքն $f(K)$-ն փակ է և ահմանափակ, ինչից անմիջապես հետևում է թեորեմի պնդումը: ↵

Օրինակ. C $[0,1]$-ում դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիոնալը $f(x) = \int_0^1 x^2(t)dt$: Պարզ է, որ այն անընդհատ է C $[0,1]$-ում, քանի որ եթե $x_n(t)$ $[0,1]$-ում հավասարաչափ զուգամի-տում է $x(t)$-ին, ապա $\int_0^1 x_n^2(t)dt \to \int_0^1 x^2(t)dt$: Հաշվենք այդ ֆունկցիոնալի ճշգրիտ ստորին եզրը $D = \left\{x(t) \in C[0,1]; \max\left|x(t)\right| \le 1, x(0) = 1, x(1) = 0\right\}$ փակ, սահմանափակ բազմության վրա: Քանի, որ $\forall x \in D$ համար $f(x) > 0$, իսկ $f(x_n) \to 0$, երբ $n \to \infty$, ուրեմն այդ ֆունկցիոնալի ճշգրիտ ստորին եզրը զրոն է, որը նրա արժեք չի D-ում: Այստեղ $x_n(t)$ մեկ է, երբ $t \in [0, 1/2n]$, գծային է $[1/2n, 1/n]$ հատվածում և զրո է $[1/n, 0]$-ում:



Այսպիսով կառուցեցինք D փակ, սահմանափակ բազմության վրա անընդհատ ֆունկ-ցիոնալի օրինակ, որը այդ բազմության վրա չի ընդունում իր ճշգրիտ ստորին եզրը: Ակնհայտ է, որ դրա պատճառը D-ի կոմպակտ չլինելն է:

ՍԵՂՄՈՂ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ

(Բանախի թեորեմը անշարժ կետի մասին)

Դիցուք $(X,\rho)=X$-ը մետրիկական տարածություն է և $A:X\to X$ նրանում գործող օպերատոր է:

Սահմանում: Կասենք, որ $A:X\to X$ օպերատորը սեղմող օպերատոր է X-ում, եթե գոյություն ունի $\alpha\in[0;1)$ թիվ այնպես, որ ցանկացած $x_1,x_2\in X$ համար տեղի ունի

$$\rho(Ax_1,Ax_2)\le\alpha\rho(x_1,x_2)$$

անհավասարությունը:

Այլ խոսքերով ասած $A:X\to X$ օպերատորը սեղմող է X-ում, եթե

$$\sup_{x_1\ne x_2}\frac{\rho(Ax_1,Ax_2)}{\rho(x_1,x_2)}<1$$

Ապացուցել, որ X-ում ցանկացած սեղմող օպերատոր անընդհատ է այնտեղ:

Եթե $A:X\to X$, $n\in\mathbb{N}$ և $n\ge 2$, ապա $A^n x$-ը կսահմանենք հետևյալ ինդուկտիվ բանաձևով $A^n x=A(A^{n-1}x)$:

Սահմանում: Կասենք, որ $A:X\to X$ օպերատորի համար x_0-ն անշարժ կետ է, եթե

$$Ax_0=x_0:$$

Թեորեմ: Եթե (X,ρ)-ն լրիվ մետրիկական տարածություն է, $A: X \to X$ օպերատորը սեղմող է X-ում, ընդ որում $\sup\limits_{x_1 \neq x_2} \dfrac{\rho(Ax_1, Ax_2)}{\rho(x_1, x_2)} = \alpha < 1$, ապա A-ն ունի միակ անշարժ կետ x_0, որը կարելի է գտնել $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} A^n x$ բանաձևով, այստեղ x-ը որևէ կետ է (X,ρ)-ից:

$\mapsto$

Դիցուք x-ը կամայական կետ է (X,ρ)-ից: Դիտարկենք $x_n = A^n x, \quad n = 1, 2, \ldots$ հաջորդականությունը, ցույց տանք, որ այն զուգամետ է: Քանի որ (X,ρ)-ն լրիվ է, բավական է ցույց տալ, որ այդ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է: Գնահատենք $\rho(x_{n+p}, x_n)$-ը:

$$\begin{aligned}
&\rho(x_{n+p}, x_n) = \rho(A^{n+p}x, A^n x) \le \alpha\rho(A^{n+p-1}x, A^{n-1}x) \le \alpha^2\rho(A^{n+p-2}x, A^{n-2}x) \le \\
&\alpha^n \rho(A^p x, x) \le \alpha^n(\rho(A^p x, A^{p-1}x) + \rho(A^{p-1}x, A^{p-2}x) + \cdots + \rho(Ax, x)) \le \\
&\alpha^n(\alpha^{p-1} + \alpha^{p-2} + \cdots + 1)\rho(Ax, x) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(Ax, x)
\end{aligned}$$

Այս գնահատականից անմիջապես կստանանք, որ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է, հետևաբար ունի սահման, այդ սահմանը նշանակենք x_0-ով: Մյուս կողմից պարզ է, որ $x_n = Ax_{n-1}$ և քանի, որ A-ն անընդհատ է, ուրեմն անցնելով սահմանի վերջին հավասարությունում կստանանք $Ax_0 = x_0$: Այսինքն x_0-ն անշարժ կետ է: Այժմ ցույց տանք, որ այն միակն է: Եթե x_0-ն և x_1-ը A-ի համար անշարժ կետեր են, ապա $\rho(x_0, x_1) = \rho(Ax_0, Ax_1) \le \alpha\rho(x_0, x_1)$, այսինքն $(1-\alpha)\rho(x_0, x_1) \le 0$, բայց $\alpha < 1$, ուրեմն $\rho(x_0, x_1) = 0$ կամ, որ նույնն է $x_0 = x_1$: ↲

Դիտողություններ:

Ա. Նախ նշենք, որ ինչպես տարածության լրիվությունը, այնպես էլ օպրատորի սեղմող լինելը չնայած այն բանին, որ անհրաժեշտ չեն թեորեմի պնդման ստույգության համար, այնուամենայնիվ էական պայմաններ են այն իմաստով, որ նրանցից յուրաքանչյուրի բացակայության դեպքում թեորեմի ճշմարտացիությունը կխախտվի: Բերենք համապատասխան օրինակներ:

Եթե $X = (0;1]$ սովորական մետրիկայով, իսկ $Ax = x/2$, ապա պարզ է, որ $\rho(Ax_1, Ax_2) = |x_1/2 - x_2/2| = 1/2|x_1 - x_2| = 1/2\,\rho(x_1, x_2)$, այսպիսով A-ն սեղմող է $(0;1]$-ում, բայց այնտեղ անշարժ կետ չունի, պատճառը՝ $(0;1]$-ը լրիվ մետրիկական տարածություն չի:

Դիտարկենք $X=[0;\infty)$ նորից սովորական մետրիկայով, այն լրիվ մետրիկական տարածություն է: $Ax=x+e^{-x}$-ը $[0;\infty)$-ը տանում է $[0;\infty)$-ի մեջ, բայց սեղմող չի, չնայած, որ $\rho(Ax_1,Ax_2)<\rho(x_1,x_2)$ և չունի անշարժ կետ: Այստեղ $\sup\limits_{x_1\neq x_2}\dfrac{\rho(Ax_1,Ax_2)}{\rho(x_1,x_2)}=1$:

Բ. $Ax=x$ հավասարման լուծման թեորեմի ապացուցման մեջ բերված եղնակը կոչվում է լուծման իտերացրոն մեթոդ:

Գ .Եթե $x_n=A^n\hat{x}$-ը դիտենք, որպես $Ax=x$ հավասարման x_0 ճշգրիտ լուծման մոտավոր արժեք n-րդ իտերացիայից հետո, ապա կատարած սխալի համար կունենանք

$$\rho(x_0,x_n)\le\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(A\hat{x},\hat{x})$$

գնահատականը:

Բերենք սեղմող արտապատկերումների սկզբունքի մի քանի կիրառություններ:

1.Դիցուք պահանջվում է լուծել $f(x)=0$ հավասարումը:

Այստեղ f-ը $\mathbb{R}$-ը $\mathbb{R}$-ի տանող ֆունկցիա է: Այդ հավասարումը կարելի է փոխարինել իրեն համարժեք $x+f(x)=x$ հավասարումով: Այժմ, եթե մտցնանք $\mathbb{R}$-ում գործող $Ax=x+f(x)$ օպերատորը, ապա նախնական հավասարումը կդառնա $Ax=x$, այսինքն պետք է գտնել A օպերատորի անշարժ կետը: Տեսնենք, երբ A-ն կլինի սեղմող $\mathbb{R}$-ում:

$$\rho(Ax_1,Ax_2)=\left|f(x_1)+x_1-f(x_2)-x_2\right|=\left|f'(\xi)+1\right|\left|x_1-x_2\right|=\left|f'(\xi)+1\right|\rho(x_1,x_2):$$

Ուստի, եթե ցանկացած կետում f-ը ունի ածանցյալ և $\alpha=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|f'(x)+1\right|<1$, ապա A-ն սեղմող է, հետևաբար այն ունի անշարժ կետ, որը կարելի գտնել, որպես հետևյալ իտերացիոն պրոցեսի սահման՝ $x_{n+1}=Ax_n=x_n+f(x_n),\quad n=0,1,\ldots$, իսկ x_0-ն կամայական կետ է $\mathbb{R}$-ից: Սխալանքի համար ճիշտ է հետևյալ գնահատականը

$$\left|x_n-\hat{x}\right|\le\alpha^n(1-\alpha)^{-1}\left|f(x_0)\right|:$$

2.Ինտեգրալ հավասարումների լուծում:

Դիցուք $F(t,u,v)$-ը երեք փոփոխականի անընդ-հատ ֆունկցիա է որոշված $G=[a;b]\times[a;b]\times\mathbb{R}$ բազմության վրա: Դիտարկենք

$$(Au)(t)=\int_a^b F(t,s,u(s))ds$$

օպերատորը, գործող $C[a;b]$-ից $C[a;b]$: Այն անվանում են ինտեգրալ օպերատոր, իսկ

$$u(t)=\lambda(Au)(t)+f(t)=\lambda\int_a^b F(t,s,u(s))ds+f(t) \qquad \text{(kk)}$$

հավասարումը՝ (f -ը տված է, փնտրվում է u -ն) ինտեգրալ հավասարում: Եթե նշանակենք $Bu=\lambda(Au)(t)+f(t)$, ապա այս ինտեգրալ հավասարումը կգրվի $u=Bu$ տեսքով, այսինքն մենք փնտրում ենք B օպերատորի համար անշարժ կետ, եթե այն լինի սեղմող $C[a;b]$-ում, ապա կարող ենք կիրառել սեղմող արտապատկերումների սկզբունքը, ուստի պարզենք, թե ինչ պայմանների դեպքում է B -ն սեղմող $C[a;b]$-ում:

$$\rho(Bu_1,Bu_2)=\max_{a\le t\le b}\left|\lambda\int_a^b F(t,s,u_1(s))ds+f(t)-\lambda\int_a^b F(t,s,u_2(s))ds-f(t)\right|$$

$$\le\max_{a\le t\le b}|\lambda|\int_a^b\left|F(t,s,u_1(s))-F(t,s,u_2(s))\right|ds=\max_{a\le t\le b}|\lambda|\int_a^b\left|F_v^{'}(t,s,\xi)(u_1(s)-u_2(s))\right|ds\le\lambda L(b-a)\rho(u_1,u_2)$$

Այս ամենը կոռեկտ կլինի, եթե ենթադրենք, որ $F(t,u,v)$ ֆունկցիան ունի $F_v^{'}(t,u,v)$ մասնական ածանցիալ, որը G -ում սահմանափակ է L -ով՝ $\left|F_v^{'}(t,u,v)\right|\le L$:

Այժմ, եթե $\lambda L(b-a)<1$, ապա B -ն սեղմող $C[a;b]$-ում: Այսպիսով կարող ենք պնդել, որ ճիշտ է հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ: Դիցուք $F(t,u,v)$-ն անընդհատ ֆունկցիա է որոշված $G=[a;b]\times[a;b]\times\mathbb{R}$ բազմության վրա, ունի $F_v^{'}(t,u,v)$ մասնական ածանցիալ, որը G -ում բավարարում է $\left|F_v^{'}(t,u,v)\right|\le L$ պայմանին, այս պայմանների դեպքում, եթե $\alpha=\lambda L(b-a)<1$, ապա (kk) հավասարումը ունի միակ լուծում ցանկացած $f\in C[a;b]$ համար, ընդ որում այդ լուծումը u -ն կարելի է գտնել հետևյալ իտերացիոն մեթոդով

$$u_{n+1}(t)=\int_a^b F(t,s,u_n(s))ds+f(t),\ a\le t\le b,\quad n=0,1,...;\quad u_0(t)\equiv 0,$$

որը հավսարաչափ զուգամիտում է $u(t)$-ին $[a;b]$ հատվածում:
Սխալանքի համար ճիշտ է հետևյալ գնահատականը

$$\max_{a\le t\le b}|u_n(t)-u(t)|\le\alpha^n(1-\alpha)^{-1}\max_{a\le t\le b}|u_1(t)|:$$

3.Դիֆերենցիալ հավասարումներ:

Դիցուք $f(t,x)$ անընդհատ է $\left[t_0-\Delta;t_0+\Delta\right]\times\left[x_0-h;x_0-h\right]$ուղղանկյան վրա: Դիտարկենք հետևյալ Կոշիի խնդիրը՝

$$\begin{cases}x'=f(t,x)\\x(t_0)=x_0\end{cases} \qquad \text{(KX)}$$

Դժվար չի տեսնել, որ այս խնդիրը համարժեք է հետևյալ ինտեգրալ հավասարմանը՝

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^t f(s,x(s))ds: \qquad \text{(In)}$$

Դիտարկենք

$$\left(Ax\right)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \qquad \text{(IN!)}$$

օպերատորը $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ հատվածում անընդհատ այն ֆունկցիաների տարածություն-ում, որոնց գրաֆիկները ընկած են $\left[t_0 - \delta; t_0 + \delta\right] \times \left[x_0 - h; x_0 + h\right]$ ուղղանկյան մեջ: Ֆունկ-ցիաների այդ տարածությունը նշանակենք $D(\delta, h)$-ով, այսինքն

$$x(t) \in D(\delta, h) \Leftrightarrow \left\{x(t) \in C[t_0 - \delta, t_0 + \delta]; \left|x(t) - x_0\right| \le h, \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]\right\}$$

Ակնհայտ է, որ $D(\delta, h)$-ը $\rho(x_1, x_2) = \max\limits_{t_0 - \delta \le t \le t_0 + \delta} \left|x_1(t) - x_2(t)\right|$ մետրիկայով լրիվ մետրիկական տարածություն է :

Այժմ δ-ն ընտրենք այնպես, որ A-ն լինի սեղմող օպերատոր $D(\delta, h)$-ում: Նախ ապահովենք այն բանը, որ $x(t) \in D(\delta, h) \Rightarrow \left(Ax\right)(t) \in D(\delta, h)$: Ակնհայտ է, որ $\left(Ax\right)(t)$-ն անընդհատ է: Պահանջենք, որ տեղի ունենա նաև $\left|\left(Ax\right)(t) - x_0\right| \le h$ անհավասարությունը:

$$\left|\left(Ax\right)(t) - x_0\right| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds\right| \le M\left|t - t_0\right| \le M\delta :$$

Ուրեմն, եթե վերցնենք $\delta \le h/M$, ապա այս պահանջը կբավարարվի: Այստեղ

$$M = \max_{\substack{t \in \left[t_0 - \Delta; t_0 + \Delta\right] \\ x \in \left[x_0 - h; x_0 - h\right]}} \left|f(t, x)\right| < \infty ,$$

քանի որ $f(t, x)$-ը անընդհատ է, $\left[t_0 - \Delta; t_0 + \Delta\right] \times \left[x_0 - h; x_0 - h\right]$ ուղղանկյունում:

Այժմ, ենթադրենք, որ f ֆունկցիան ըստ x փոփոխականի բավարարում է Լիպշիցի պայմանին , այսինքն $\left[t_0 - \Delta; t_0 + \Delta\right] \times \left[x_0 - h; x_0 + h\right]$ ողղանկյան ցանկցած (t, x_1) և (t, x_2) կետերի համար $\left|f(t, x_1) - f(t, x_2)\right| \le L\left|x_1 - x_2\right|$ և գնահատենք $\rho(Ax_1, Ax_2)$-ը:

$$\left|\left(Ax_1\right)(t) - \left(Ax_2\right)(t)\right| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s, x_2(s))ds\right| \le$$

$$\left|\int_{t_0}^{t}\left|f(s, x_1(s) - f(s, x_2(s)\right|ds\right| \le L\left|t - t_0\right|\rho(x_1, x_2) \le L\delta\rho(x_1, x_2) :$$

Որտեղից $\rho(Ax_1, Ax_2) \le L\delta\rho(x_1, x_2)$ ուստի, եթե δ-ն ընտրենք այնպես, որ $L\delta < 1$, ապա A-ն կլինի սեղմող $D(\delta, h)$-ում, հետևաբար կունենա միակ անշարժ կետ, որը կլինի (In)-ի և ուրեմն նաև Կոշիի խնդրի լուծում: Այսպիսով մենք կարող ենք պնդել, որ ճիշտ է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ: Դիցուք $f(t, x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $\left[t_0 - \Delta; t_0 + \Delta\right] \times \left[x_0 - h; x_0 - h\right]$ ուղղան-կյան վրա և այնտեղ ըստ x փոփոխականի բավարարում է Լիպշիցի պայմանին՝ այդ ուղղանկյան ցանկցած (t, x_1) և (t, x_2) կետերի համար $\left|f(t, x_1) - f(t, x_2)\right| \le L\left|x_1 - x_2\right|$: Այդ դեպքում, եթե $M = \max\limits_{\substack{t \in \left[t_0 - \Delta; t_0 + \Delta\right] \\ x \in \left[x_0 - h; x_0 - h\right]}} \left|f(t, x)\right|$ և $0 < \delta < \min\left\{\Delta; h/M; 1/L\right\}$, ապա հետևյալ Կոշիի խնդիրը՝

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Ունի միակ լուծում, որը որոշված է $\left[t_0 - \delta; t_0 + \delta\right]$ հատվածում, ընդ որում այն կարելի է գտնել

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds\,, \quad n = 0,1,\ldots \; x_0(t) \equiv x_0\,, \quad t \in \left[t_0 - \delta; t_0 + \delta\right]$$

իտերացիոն պրոցեսով:

ԼԵԲԵԳԻ ՉԱՓ

Օղակ: σ-օղակ:

Դիցուք X -ը որևէ բազմություն է, նրա ենթաբազմությունների բազմությունը նշանա- ենք 2^X -ով: Ենթադրենք $R\subset 2^X$:

Սահմանում: Կասենք R-ը օղակ է, եթե այն դատարկ չի և փակ է բազմությունների տարբերության և միավորման նկատմամբ, այն է՝ $A\in R$ և $B\in R$=> $A\setminus B\in R$ և $A\bigcup B\in R$: R օղակը կանվանենք հանրահաշիվ, եթե $X\in R$:

Քանի որ $A\bigcap B=A\setminus(A\setminus B)$, ապա պարզ է, որ օղակը փակ է նաև հատման գործողու- թյան նկատմամբ:

Սահմանում: Կասենք R-ը σ-օղակ է, եթե այն դատարկ չի և փակ է բազմությունների տարբերության և հաշվելի միավորումների նկատմամբ, այն է՝

i. $A\in R$ և $B\in R$ => $A\setminus B\in R$,

ii. $A_i\in R \quad i=1,2,...$ => $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in R$:

R σ-օղակը կանվանենք σ-հանրահաշիվ, եթե $X\in R$:

Պարզ է, որ ցանկացած R σ-օղակ նաև օղակ է, իրոք՝ նախ, եթե $A\in R$ և $B\in R$,ապա ըստ i.-ի $A\setminus B\in R$ և ըստ ii.-ի $A\bigcup B\in R$, որովհետև $A\bigcup B=A\bigcup B\bigcup\varnothing\bigcup\varnothing\bigcup...$, իսկ $\varnothing\in R$, քանի որ $\varnothing=A\setminus A$:

Ցույց տանք, որ R σ-օղակը փակ է նաև հաշվել հատումների նկատմամբ, իրոք, եթե $A_i\in R \quad i=1,2,...$, ապա $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\setminus\bigcup_{i=2}^{\infty}\left(A_1\setminus A_i\right)$:

Պարզվում է, որ գոյություն ունի մինիմալ օղակ (σ-օղակ) որը պարունակում է բազմու- թյունների նախօրոք տված կամայական ընտանիք: Մինիմալությունը այստեղ հաս- կացվում է հետևյալ իմաստով, որ այն ընկած է կամայական օղակի (σ-օղակի) մեջ, որը պարունակում է այդ ընտանիքը: Այս փաստը ձևակերպենք որպես թեորեմ:

Թեորեմ: Եթե G -ն 2^X -ի կամայական ենթաբազմություն է, ապա գոյություն ունի մինիմալ օղակ (σ-օղակ) ընկած 2^X -ում, որը պարունակում է G -ն:

$\mapsto$

Ապացուցում: Ապացուցենք օղակի համար, σ-օղակի համար ապացույցը նույնն է: Դիտարկենք G-ն պարունակող բոլոր օղակները,այդպիսինք կան, օրինակ 2^X-ը: Այն օղակ է և պարունակում է G-ն: $R(G)$-ով նշանակենք G-ն պարունակող բոլոր օղակների հատումը, և ցույց տանք, որ այն օղակ է: Իրոք, եթե $A \in R(G)$ և $B \in R(G)$, ապա A-ն ու B-ն պատկանում է այդ հատմանը մասնակցող ցանկացած օղակին, ուստի նրանց կպատկանեն նաև $A \setminus B$-ն և $A \cup B$, ուրեմն նրանց հատումը՝ $R(G)$-ն, կպարունակի $A \setminus B$-ն և $A \cup B$: ↵

ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ԱԴԻՏԻՎ ԵՎ σ-ԱԴԻՏԻՎ ՖՈՒՆԿՑԻԱ, ՆՐԱՆՑ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Դիցուք $\mathcal{X}$-ը բազմությունների որևէ ոչ դատարկ ընտանիք է:

Սահմանում: $\varphi : \mathcal{X} \to (-\infty; +\infty]$ կանվանենք բազմության ֆունկցիա, եթե գոնե մեկ A-ի համար $\varphi(A)$-ն վերջավոր է, այսինքն $\exists A \in \mathcal{X}$ s.t. $\varphi(A) \neq +\infty$:

Դիտողություն: Այս սահմանման մեջ կարելի էր $(-\infty; +\infty]$-ը փոխարինել $[-\infty; +\infty)$-ով, ուղղակի հետագայում անորոշությունները խուսափելու համար բավական է φ-ից պահանջել, որ այն ընդունի $-\infty$ և $+\infty$ անվերջ արժեքներից միայն մեկը:

Սահմանում: $\varphi : \mathcal{X} \to (-\infty; +\infty]$ կանվանենք բազմության ադիտիվ ֆունկցիա, եթե $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{X}$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ և $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{X}$ հետևում է $\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2)$:

Եթե $\mathcal{X}$-ը օղակ է, ապա ակնհայտ է, որ $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{X}$ հետևում է $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{X}$,ուստի $\varphi : \mathcal{X} \to (-\infty; +\infty]$ օղակի վրա որոշված ֆունկցիան կլինի ադիիվ, եթե $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{X}$ և $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ հետևում է $\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2)$:

Սահմանում: $\varphi : \mathcal{X} \to (-\infty; +\infty]$ կանվանենք բազմության σ-ադիտիվ ֆունկցիա, եթե

$\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{X}$, $A_i \cap A_j = \varnothing \ (i \neq j)$ և $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{X}$ հետևում է $\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i)$:

Այստեղ ևս, եթե $\mathcal{X}$-ը σ-օղակ է, ապա $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{X}$ միշտ հետևում է, որ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{X}$ ուստի որպեսի $\varphi : \mathcal{X} \to (-\infty; +\infty]$ σ-օղակի վրա որոշված ֆունկցիան լինի σ-ադիտիվ բավական է, որ $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{X}$, $A_i \cap A_j = \varnothing\,(i \neq j)$ հետևի $\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i)$: Նշենք նաև, որ սահմանումում հանդես եկող շարքը կարող է լինել նաև տարամետ:

Օրինակներ .

1. Դիրակի չափ

Դիտարկենք որևէ $G \neq \varnothing$ բազմությունը և թող նրա ենթաբազմությունների բազմությու-նը՝ $2^G = \mathcal{X}$: Վերցնենք որևէ $x_0 \in G$ և $\mathcal{X}$ -ի վրա դիտարկենք հետևյալ բազմության ֆունկցիան:

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 0, \text{ եթե } x_0 \notin A \\ 1, \text{ եթե } x_0 \in A \end{cases} :$$

δ_{x_0} -ն անվանում են Դիրակի չափ:

Խնդիր: Համոզվենք, որ δ_{x_0} -ն $\mathcal{X}$ -ի վրա σ-ադիտիվ է:

2. Քանակի ֆունկցիա:

Դիցուք տված է $G \neq \varnothing$ բազմությունը և $\mathcal{X}$ -ը նրա վերջավոր ենթաբազմությունների ընտանիքն է: Եթե $A \in \mathcal{X}$, ապա $q(A)$ -ն թող լինի A -ի տարրերի քանակը:

Խնդիր: Համոզվենք, որ $\mathcal{X}$ -ը օղակ է և $q(A)$ -ն $\mathcal{X}$ -ի վրա ադիտիվ է:

3. Դիտարկենք որևէ $G \neq \varnothing$ բազմությունը և թող նրա ենթաբազմությունների բազմու-թյունը՝ $2^G = \mathcal{X}$: Եթե $A \in \mathcal{X}$, ապա $\hat{q}(A)$ -ն թող լինի A -ի տարրերի քանակը, երբ A -ն վերջավոր բազմություն է և լինի $+\infty$, երբ A -ն պարունակում է անվերջ թվով տարրեր:

Խնդիր: Համոզվենք, որ $\hat{q}(A)$ -ն $\mathcal{X}$ -ի վրա σ-ադիտիվ է:

Բազմության ադիտիվ ֆունկցիայի մի քանի հատկություններ:

Դիցուք $\mathcal{X}$ -ը բազմությունների որևէ ոչ դատարկ ընտանիք է և $\varphi: \mathcal{X} \to (-\infty; +\infty]$ բազմության ադիտիվ ֆունկցիա է , այդ դեպքում

1°. Եթե $\varnothing \in \mathcal{X}$,ապա $\varphi(\varnothing) = 0$:

$\mapsto$

Վերցնենք $A \in \mathcal{X}$ այնպես,որ $\varphi(A) \neq \infty$, այդ դեպքում $A \cap \varnothing = \varnothing$ և $A \cup \varnothing = A \in \mathcal{X}$

$\varphi(A) = \varphi(A \cup \varnothing) = \varphi(A) + \varphi(\varnothing) \Rightarrow \varphi(\varnothing) = 0$: ↵

2°. Եթե $A_1, A_2, A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2, A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{X}$, ապա $\varphi(A_1) + \varphi(A_2) = \varphi(A_1 \cup A_2) + \varphi(A_1 \cap A_2)$

$\mapsto$

$A_1=\left(A_1\setminus A_2\right)\bigcup\left(A_1\cap A_2\right)\in\mathcal{X}$ => $\varphi\left(A_1\right)=\varphi\left(A_1\setminus A\right)+\varphi\left(A_1\cap A_2\right)$: Նմանապես կունենանք՝ $\varphi\left(A_2\right)=\varphi\left(A_2\setminus A_1\right)+\varphi\left(A_1\cap A_2\right)$, իսկ $A_1\cup A_2=\left(A_1\setminus A_2\right)\bigcup\left(A_1\cap A_2\right)\bigcup\left(A_2\setminus A_1\right)$ հավասարությունից $\varphi\left(A_1\cup A_2\right)=\varphi\left(A_1\setminus A_2\right)+\varphi\left(A_1\cap A_2\right)+\varphi\left(A_2\setminus A_1\right)$: Գումարելով առաջին երկու հավասարությունները և հաշվի առնելով վերջինը կունենաք

$$\varphi\left(A_1\right)+\varphi\left(A_2\right)=\varphi\left(A_1\cup A_2\right)+\varphi\left(A_1\cap A_2\right):\hookleftarrow$$

3°. Եթե φ-ն ոչ բացասական է, ապա $A_1\subset A_2$ և $A_1,\ A_2,\ A_1\setminus A_2\in\mathcal{X}$ հետևում է

$$\varphi\left(A_1\right)\le\varphi\left(A_2\right)$$

$\mapsto$ $A_2=A_1\bigcup\left(A_1\setminus A_2\right)$, ուրեմն $\varphi\left(A_2\right)=\varphi\left(A_1\right)+\varphi\left(A_1\setminus A_2\right)\ge\varphi\left(A_1\right)\hookleftarrow$

Եթե $A_1\subset A_2$ հետևում է $\varphi\left(A_1\right)\le\varphi\left(A_2\right)$, ապա ասում են, որ բազմության φ ֆունկցիան **մոնոտոն** է: Այս տերմիններով **3°** հատկությունը կհնչի այսպես՝ բազմության ոչ բացասական ադիտիվ ֆունկցիան մոնոտոն է:

4°. Եթե $A,\ B,\ B\setminus A\in\mathcal{X}$ և $A\subset B$ ապա $\varphi\left(B\setminus A\right)=\varphi\left(B\right)-\varphi\left(A\right)$

$\mapsto$ $B=A\bigcup(B\setminus A)$, որտեղից $\varphi\left(B\right)=\varphi\left(B\setminus A\right)+\varphi\left(A\right)$: $\hookleftarrow$

5[0] Թեորեմ: Դիցուք R-ը օղակ է և φ-ն σ-ադիտիվ է, R-ի վրա : Եթե $A_1\subset A_2\subset\ldots\subset A_n\subset\ldots\in R$ և $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in R$, ապա $\varphi(A)=\lim_{n\to0}\varphi(A_n)$:

$\mapsto$ Նշանակենք $B_1=A_1,\ B_2=A_2\setminus A_1,\ B_3=A_3\setminus A_2,\ldots,B_i=A_i\setminus A_{i-1},\ldots$: Ակնհայտ է, որ $B_i\cap B_i=\varnothing$, $B_i\in R$ և $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$, ուստի φ-ի σ-ադիտիվությունից հետևում է , որ

$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi\left(B_i\right)$, այսինքն $\varphi\left(A\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi\left(B_i\right)$, Մյուս կողմից $\sum_{i=1}^{\infty}\varphi\left(B_i\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\varphi\left(B_i\right)$:

Բայց , քանի որ $A_n=\bigcup_{i=1}^{n}B_i$,ուրեմն $\varphi(A_n)=\sum_{i=1}^{n}\varphi\left(B_i\right)$, այսինքն $\varphi(A)=\lim_{n\to0}\varphi(A_n):\hookleftarrow$

Դիտողություն1: Եթե այս թեորեմում R-ը σ-օղակ է, ապա կարող էինք բաց թողնել $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in R$ պայմանը: Եթե $A_1\subset A_2\subset\ldots\subset A_n\subset\ldots\in R$ և $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in R$ հետևում է, որ

$\varphi(A)=\lim_{n\to 0}\varphi(A_n)$, ապա ասում են, որ բազմության φ ֆունկցիան անընդհատ է: Այս թեորեմը պնդում է, որ բազմության σ-ադիտիվ ֆունկցիան անընդհատ է:

Դիտողություն 2: Եթե **1°- 4°**-ում $\mathcal{X}$-ը օղակ է, ապա այս բոլոր պնդումներում որոշ պայմաններ ավելորդ են, օրինակ **2°**-ը տեղի կունենա, եթե միայն պահանջենք, որ $A_1, A_2 \in \mathcal{X}$:

ԼԵԲԵԳԻ ՉԱՓԸ ՏԱՐՐԱԿԱՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՕՂԱԿԻ ՎՐԱ

Դիցուք $\hat{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ և $\hat{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ $\mathbb{R}^n$-ից են, ընդ որում $a_i \le b_i$ բոլոր i-երի համար: Կարճության համար

$$I(\hat{a};\hat{b})=\left\{\hat{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\ ;\ a_i \le x_i \le b_i, i=1,2,...n\right\}$$

n-չափանի ուղղանկյուն զուգահեռանիստը կանվանենք ուղղանկյուն: Նույն նշանակումը կօգտագործենք նաև այն ուղղանկյունների համար, որոնք չեն պարունակում իրենց որոշակի նիստերը, այսինքն $a_i \le x_i \le b_i$ անհավասարություններց մի քանիսում կամ բոլորում կարող են լինել խիստ անհավասարություններ: Պարզ է, որ դատարկ բազմությունը, ինչպես նաև ցանկացած մի կետանի բազմություն, ուղղանկյուն է: Տարրական բազմություն ասելով կհասկանանք, վերջավոր թվով ուղղանկյունների միավորումը: Տարրական բազմությունների ընտանիքը կնշանակենք $\mathcal{E}$-ով:

$$\mathcal{E}=\left\{A : A=\bigcup_{k=1}^{m} I_k\ ;\quad I_k - \text{ուղղանկյուն}\right\}:$$

Թեորեմ: $\mathcal{E}$-ն օղակ է:

$\mapsto$

Դիցուք $A_1=\bigcup_{k=1}^{m'} I'_k$ և $A_2=\bigcup_{p=1}^{m''} I''_p$ $\mathcal{E}$-ից են , նախ ակնհայտ է, $A_1 \bigcup A_2$ նույնպես $\mathcal{E}$-ից է, ուստի բավական է ապացուցել, որ $A_1 \setminus A_2$ նույնպես կլինի $\mathcal{E}$-ից: Քանի որ

$$A_1 \setminus A_2=\bigcup_{k=1}^{m'}\bigcap_{p=1}^{m''} I'_k \setminus I''_p,$$

ուրեմն բավական է ապացուցել, որ երկու ուղղանկյունների տարբերությունը $\mathcal{E}$ -ից է և $\mathcal{E}$ -ից երկու բազմությունների հատումը $\mathcal{E}$ -ից է: Նկատենք, որ $A_1 \cap A_2 = \bigcup_{k=1}^{m'} \bigcup_{p=1}^{m''} I'_k \cap I''_p$, բայց ակնհայտ է, որ երկու ուղղանկյունների հատումը ուղղանկյուն է և հետևաբար $A_1 \cap A_2$ -ը $\mathcal{E}$ -ից է: Ինչ վերաբերվում է երկու ուղղանկյունների տարբերությանը, ենթադրենք, որ այն ճիշտ է $\mathbb{R}^{n-1}$ -ի համար և ապացուցենք $\mathbb{R}^n$ -ի համար (n=1 դեպքը ակնհայտ է)

$I' = I(\hat{a};\hat{b})$, իսկ $I'' = I(\hat{c};\hat{d})$, այդ դեպքում

$$I' \setminus I'' = ([a_1,b_1] \setminus [c_1,d_1]) \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_n,b_n] \cup$$
$$\left([a_1,b_1] \cap [c_1,d_1]\right) \times (([a_2,b_2] \times \cdots \times [a_n,b_n]) \setminus ([c_2,d_2] \times \cdots \times [c_n,d_n])):$$

Բայց $[a_1,b_1] \setminus [c_1,d_1]$ ամենաշատը երկու հատվածների միավորում է և հետևաբար $([a_1,b_1] \setminus [c_1,d_1]) \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_n,b_n]$ ամենաշատը երկու ուղղանկյունների միավորում է, ինչ վերաբերվում է

$$\left([a_1,b_1] \cap [c_1,d_1]\right) \times (([a_2,b_2] \times \cdots \times [a_n,b_n]) \setminus ([c_2,d_2] \times \cdots \times [c_n,d_n]))$$ -ին

նա նույնպես կլինի ուղղանկյունների միավորում, քանի որ այդպիսին է $([a_2,b_2] \times \cdots \times [a_n,b_n]) \setminus ([c_2,d_2] \times \cdots \times [c_n,d_n])$ -ը որպես $\mathbb{R}^{n-1}$ -ի ուղղանկյունների տարբերություն և $[a_1,b_1] \times \bigcup_{k=1}^{s} A_k = \bigcup_{k=1}^{s} [a_1,b_1] \times A_k$ ↵:

Ցույց տալ, որ $\mathcal{E}$ -ն σ-օղակ չի:

Սահմանենք բազմության ֆունկցիա $\mathcal{E}$ -տարրական բազմությունների օղակի վրա: Նախ ամեն մի $I = I(\hat{a};\hat{b}) = [a_1;b_1] \times [a_2;b_2] \times \cdots \times [a_n;b_n]$ ուղղանկյանը համապատասխանեցնենք

$$m(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

թիվը, որը այդ n -չափանի ուղղանկյան ծավալն է: Այնուհետև, եթե $A \in \mathcal{E}$, ապա այն կարելի է ներկայացնել իրար հետ հատում չունեցող ուղղանկյունների միավորման տեսքով (ապացուցել): Եթե $A = \bigcup_{k=1}^{m} I_k$ և I_k -երը իրար հետ հատում չունեցող ուղղանկյուններ են, ապա սահմանենք

$$m(A) = \sum_{k=1}^{m} m(I_k):$$

Ցույց տանք, որ այդ սահմանումը կոռեկտ է, այսինքն $m(A)$-ի արժեքը կախված չի A-ի ներկայացումից: Նախ ակնհայտ է, որ եթե որևէ ուղղանկյուն I տրոհված է վերջավոր՝ m հատ, իրար հետ չհատվող I_k ուղղանկյունների, ապա $m(I)=\sum_{k=1}^{m} m(I_k)$:

Այժմ ենթադրենք, որ $A=\bigcup_{k=1}^{m} I_k=\bigcup_{p=1}^{r} I'_p$ և $I_k \cap I_m=\varnothing, I'_p \cap I'_q=\varnothing$ $k\neq m,\ p\neq q$: Այստեղից հետևում է, որ $I_k=I_k \cap A=I_k \cap \bigcup_{p=1}^{r} I'_p=\bigcup_{p=1}^{r} I_k \cap I'_p$, բայց $I_k \cap I'_p$-ը $\left(p=1,2,\ldots,r\right)$ իրար հետ չհատվող ուղղանկյուններ են, ուրեմն $m(I_k)=\sum_{p=1}^{r} m(I_k \cap I'_p)$, ուստի

$$\sum_{k=1}^{m} m(I_k)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{r} m(I_k \cap I'_p):$$

Մյուս կողմից $I'_p=I'_p \cap A=I'_p \cap \bigcup_{k=1}^{m} I_k=\bigcup_{k=1}^{m} I_k \cap I'_p$, ուստի $m(I'_p)=\sum_{k=1}^{m} m(I_k \cap I'_p)$ և ուրեմն

$$\sum_{p=1}^{r} m(I'_p)=\sum_{p=1}^{r}\sum_{k=1}^{m} m(I_k \cap I'_p),$$

Այսինքն՝ $\sum_{k=1}^{m} m(I_k)=\sum_{p=1}^{r} m(I'_p)$:

Թեորեմ: m-ը $\mathcal{E}$-ի վրա ոչ բացասական, ադիտիվ ֆունկցիա է:

$\mapsto$ Այն, որ m-ը ոչ բացասական է, ակնհայտ է: Եթե $A_1=\bigcup_{k=1}^{m'} I'_k$ ու $A_2=\bigcup_{p=1}^{m''} I''_p$ $\mathcal{E}$-ից A_1 և A_2 բազմությունների որևէ ներկայացումներ են չհատվող ուղղանկյունների տեսքով, ապա $A_1 \cap A_2=\varnothing$ պայմանից հետևում է, որ $I'_k \cap I''_p=\varnothing$ ցանկացած $k=1,2,\ldots,m'$, $p=1,2,\ldots,m''$, ուստի $A_1 \cup A_2=\bigcup_{k=1}^{m'+m''} I_k$-ն, որտեղ $I_k=I'_k$, երբ $k=1,2,\ldots,m'$ և $I_k=I''_{k-m'}$, երբ $k=m'+1,m'+2,\ldots,m'+m''$, կլինի $A_1 \cup A_2$ բազմության ներկայացում չհատվող ուղղանկյունների տեսքով: Այստեղից անմիջապես հետևում է, որ

$$m(A_1 \cup A_2)=m(A_1)+m(A_2)\ : \ \hookleftarrow$$

Սահմանում: $\mathcal{E}$-ի վրա որոշված μ ֆունկցիան կանվանենք ռեգուլյար, եթե ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի և ցանկացած $A \in \mathcal{E}$ համար գոյություն ունեն G բաց և F փակ բազմություն-ներ $\mathcal{E}$-ից, այնպես, որ $F \subset A \subset G$ և

$$\mu(G) - \varepsilon \le \mu(A) \le \mu(F) + \varepsilon \ :$$

Թեորեմ: m-ը $\mathcal{E}$-ի վրա ռեգուլյար ֆունկցիա է:

$\mapsto$ Բավական է ապացուցել, որ ցանկացած A ուղղանկյան համար կան նրա մեջ ընկած F փակ և նրան պարունակող G բաց ուղղանկյուններ այնպես, որ

$$\mu(G) - \varepsilon \le \mu(A) \le \mu(F) + \varepsilon,$$

որը ակնհայտ է: $\lrcorner$

ՍԻՄԵՏՐԻԿ ՏԱՐԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ՆՐԱ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Դիցուք A-ն և B-ն որևէ X բազմության ենթաբազմություններ են:

$$A \triangle B = \left(A \setminus B\right) \cup \left(B \setminus A\right) = \left(A \cup B\right) \setminus \left(A \cap B\right)$$

բազմությունը կանվանենք A և B բազմությունների սիմետրիկ տարբերություն: Թվարկենք սիմետրիկ տարբերության հետագայի համար օգտակար մի քանի հատկություններ

1°. $A \triangle A = \varnothing$

2°. $A \triangle \varnothing = A$

3°. $A \triangle B = B \triangle A$ (այս պատճառով տարբերությունը կոչվում է սիմետրիկ)

4°. Կամայական $C \subset X$ համար $A \triangle B \subset \left(A \triangle C\right) \cup \left(C \triangle B\right)$

$$\boldsymbol{5}^\circ \quad \left.\begin{array}{ll} \text{ա.} & \left(A_1 \cup A_2\right) \triangle \left(B_1 \cup B_2\right) \\ \text{բ.} & \left(A_1 \cap A_2\right) \triangle \left(B_1 \cap B_2\right) \\ \text{գ.} & \left(A_1 \setminus A_2\right) \triangle \left(B_1 \setminus B_2\right) \end{array}\right\} \subset \left(A_1 \triangle B_1\right) \cup \left(A_2 \triangle B_2\right)$$

6°. $A^C \triangle B^C = A \triangle B$ ($A^C = X \setminus A$-ն A-ի լրացումն է)

$\mapsto$ **1°**-ից **3°**-ը ակնհայտ են:. Ապացուցենք **4°**-ը**:** Ակնհայտ է, որ $A \setminus B \subset (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$ և $B \setminus A \subset (B \setminus C) \cup (C \setminus A)$, ուստի ճիշտ է **4°**-ը:

Ապացուցենք նաև $\boldsymbol{5}^\circ$-ի ա)-ն: Հեշտ է տեսնել, որ

$(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2)$, $(B_1 \cup B_2) \setminus (A_1 \cup A_2) \subset (B_1 \setminus A_1) \cup (B_2 \setminus A_2)$

Միավորելով այս առընչությունները կստանանք $\boldsymbol{5}^\circ$-ի ա)-ն:

Մնացած պնդումների ապացույցները կատարել ինքնուրյուն: ↵

ԱՐՏԱՔԻՆ ՉԱՓ ԵՎ ՆՐԱ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Դիցուք μ-ն $\mathcal{E}$ տարրական բազմությունների օղակի վրա որոշված ադիտիվ, ռեգուլյար, վերջավոր և ոչ բացասական բազմության ֆունկցիա է: Մեր նպատակն է, այս ֆունկցիան շարունակել $\mathcal{E}$-ն պարունակող σ-օղակի վրա, այնպես, որ շարունակած ֆունկցիան այդ σ-օղակի վրա լինի σ-ադիտիվ: Դրա համար սկզբում այս ֆունկցիան մենք կշարունակենք $\mathbb{R}^n$-ի բոլոր ենթաբազմությունների վրա, բայց այդ շարունակությունը ընդհանրապես ասած չի լինի σ-ադիտիվ: Ուստի մենք կդիտարկենք այդ ֆունկցիան $\mathbb{R}^n$-ի ավելի նեղ ենթաբազմությունների ընտանիքի (չափելի բազմությունների) վրա, որը կլինի այն ինչը ուզում ենք:

Սահմանում: Դիցուք $A \subset \mathbb{R}^n$ և $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ $E_n \in \mathcal{E}$, E_n-ը բաց է $n = 1, 2, \ldots$:

A-ի արտաքին չափ ասելով կհասկանանք $\mu^*(A) = \inf \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$, որտեղ ճշգրիտ ստորին եզրը վերցվում է ըստ նշված տիպի բոլոր ծածկույթների:

Արտաքին չափը օժտված է հետևյալ հատկություններով :

1° $\mu^*(A) \geq 0$

2° $A \subset B \;\; \Rightarrow \;\; \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

3° $\forall A \in \mathcal{E} \quad \mu^*(A) = \mu(A)$

4° Եթե $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, ապա $\mu^*(A) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$

5° $\left|\mu^*(A) - \mu^*(B)\right| \leq \mu^*(A \triangle B)$

↦

1° ակնհայտ է:

2°. Եթե $A \subset B$, ապա

B -ի ցանկացած ծածկույթ ծածկույթ է նաև A -ի համար, այսինքն A -ի ծածկույթների բազմությունը պարունակում է B -ի ծածկույթների բազմությանը: Ուրեմն

$$\mu^*(A) \le \mu^*(B):$$

3°. Դիցուք $A \in \mathcal{E}$ ցույց տանք, որ $\mu^*(A) \le \mu(A)$ և $\mu^*(A) \ge \mu(A)$:

Քանի որ μ-ն $\mathcal{E}$-ի վրա ռեգուլյար ուրեմն $\forall \varepsilon > 0$ ∃G բաց բազմություն այնպես, որը $G \in \mathcal{E}$ $A \subset G$ և $\mu(G) < \mu(A) + \varepsilon$:

Բայց այսպիսի G բազմությունը ծածկույթ է A -ի համար, հետևաբար

$$\mu*(A) \le \mu(G) < \mu(A) + \varepsilon:$$

Քանի, որ ε -ը կամայական է, ուրեմն $\mu^*(A) \le \mu(A)$:

Ապացուցենք $\mu^*(A) \ge \mu(A)$ անհավասարությունը: Արտաքին չափի սահմանումից անմիջապես հետևում է, որ ցանկացած դրական ε -ի համար կա A -ի այնպիսի E_n ծածկույթ ($E_n \in \mathcal{E}$, E_n -ը բաց է), այնպես, որ

$$\mu*(A) + \varepsilon > \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k):$$

Նորից, օգտվելով μ -ի ռեգուլյարությունից $\mathcal{E}$ տարրական բազմությունների օղակի վրա, ε -ի համար կգտնենք $F \in \mathcal{E}$ փակ բազմություն այնպես, որ $\mu(F) > \mu(A) - \varepsilon$: Բայց F -ը փակ է և սահմանափակ, այսինքն կոմպակտ է, որի համար E_k , $k = 1, 2, \ldots$ բաց ծածկույթ է, ուրեմն նրանից կարելի է անջատել F -ի վերջավոր ենթածածկույթ $E_{k_1}, E_{k_2}, \ldots, E_{k_p}$, այսինքն

$F \subset \bigcup_{i=1}^{p} E_{k_i}$: Ուրեմն $\mu(A) - \varepsilon < \mu(F) \le \sum_{i=1}^{p} \mu(E_{k_i}) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \mu^*(A) + \varepsilon$: Եվ նորից քանի, որ ε -ը կամայական է $\mu^*(A) \ge \mu(A)$:

4°. Եթե գոնե մեկ A_k -ի համար $\mu^*(A_k) = \infty$, ապա անհավասարությունը ակնհայտ է, ուստի դիտարկենք այն դեպքը երբ $\mu^*(A_k)$ վերջավոր է բոլոր A_k -ների համար:

Ֆիքսած k -ի և կամայական ε -ի համար ընտրենք A_k -ի $\left\{E_k^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ծածկույթը այնպիս, որ $\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(E_k^{(n)}\right) \le \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$: Այդպիսի ծածկույթի գոյությունը հետևում է արտաքին չափի սահմանումից: Այժմ դիտարկենք $\left\{E_k^{(n)}\right\}_{k=1\ n=1}^{\infty\ \infty}$ բազմությունների ընտանիքը ,այն կլինի

ծածկույթ A -ի համար, հետևաբար

$$\mu^*(A)\le\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(E_k^{(n)}\right)\le\sum_{k=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(A_k)+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\ldots+\frac{\varepsilon}{2^k}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(A_k)+\varepsilon:$$

Այստեղից , երբ $\varepsilon\to 0$, կունենանք

$$\mu^*(A_k)\le\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(A_k):$$

5°. $A\subset B\bigcup(A\vartriangle B)=A\bigcup B$**,** որտեղից ըստ **4°**-ի կունենանք $\mu^*(A)\le\mu^*(B)+\mu^*(A\vartriangle B)$ կամ $\mu^*(A)-\mu^*(B)\le\mu^*(A\vartriangle B)$: Այս անհավասարությունում տեղերով փոխելով A-ն և B-ն կունենանք $\mu^*(B)-\mu^*(A)\le\mu^*(B\vartriangle A)=\mu^*(A\vartriangle B)$: Վերջին երկու անհավասարությունները միասին համարժեք են $\left|\mu^*(A)-\mu^*(B)\right|\le\mu^*(A\vartriangle B)$:

Եթե բազմության φ ֆունկցիա օժտված է

$$\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)\le\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(A_k)$$

հատկությամբ, ապա ասում են, որ այն կիսաադիտիվ (սուբադիտիվ)է:
Այսինքն **4°.** հատկությունը ասում է, որ արտաքին չափը կիսաադիտիվ ֆունկցիա է:

ՉԱՓԵԼԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ $\mathbb{R}^n$ -ՈՒՄ

Հեշտ է տեսնել, որ չնայած այն բանին, որ սկզբնական μ բազմության ֆունկցիան ենթադրել ենք վերջավոր $\mathcal{E}$ տարրական բազմությունների օղակի վրա, այնուամենայնիվ $\mathbb{R}^n$-ում կլինեն բազմություններ, որոնց արտաքին չափը, ընդհանրապես ասած, կլինի անվերջ: Այդ անհարմարությունից խուսափելու համար, մենք $\mathbb{R}^n$-ի փոխարեն, որպես ելակետային բազմություն վերցնենք $\mathbb{R}^n$-ի միանոր խորանարդը՝ $I^n=[0;1)\times[0;1)\times\cdots\times[0;1)$ -ը, և տարրական բազմությունների օղակը կառուցելիս սահմանափակվենք միայն I^n-ում ընկած ուղղանկյուններով: Ստացված օղակը, որը այս դեպքում կլինի հանրահաշիվ, քանի որ I^n-ը տարրական բազմություն է, նշանակենք $\mathcal{E}(I^n)$-ով: Այժմ եթե վերցնենք $\mathcal{E}(I^n)$ հանրահաշվի վրա որոշված μ ադիտիվ, ռեգուլյար, վերջավոր և ոչ բացասական բազմության ֆունկցիա, ապա նրանով ծնված արտաքին չափի համար ճիշտ կլինի $\mu^*(A)\le\mu(I^n)$ գնահատականը, այստեղ A-ն I^n-ի կամայական ենթաբազմություն է: Մասնավորաբար, եթե որպես μ վերցնենք $\mathcal{E}(I^n)$-ի վրա մեր կառուցած Լեբեգի չափը՝ m-ը, և նրանով ծնված արտաքին չափը նշանակենք m^* -ով, ապա $m^*(A)\le 1$, քանի որ $m(I^n)=1$:

Այժմ տանք I^n-ում չափելի բազմության սահմանումը:

Սահմանում: Կասենք , որ $A\subset I^n$ չափելի է , եթե ցանկացած դրական ε-ի համար կա $E_\varepsilon^A\in\mathcal{E}(I^n)$ տարրական բազմություն այնպես, որ $\mu*(A\vartriangle E_\varepsilon^A)<\varepsilon$:

$\mathcal{E}(I^n)$-ի վրա տրված μ ադիտիվ, ռեգուլյար, վերջավոր և ոչ բացասական բազմության ֆունկցիայով ծնված չափելի բազմությունների դասը նշանակենք $\mathfrak{M}(\mu,I^n)$-ով:

Մեր նպատակն է ցույց տալ, որ $\mathfrak{M}(\mu,I^n)$-ը σ-հանրահաշիվ է, իսկ $\mu*$-ի սահմանափակումը $\mathfrak{M}(\mu,I^n)$-ի վրա σ-ադիտիվ է: Այդ նպատակին մենք կհասնենք աստիճանաբար:

Նախ ապացուցենք հետևյալը:

Թեորեմ: $\mathfrak{M}(\mu,I^n)$-ը $\mathcal{E}(I^n)$-ը պարունակող հանրահաշին է, իսկ $\mu*$-ը ադիտիվ է $\mathfrak{M}(\mu,I^n)$-ի վրա:

$\mapsto$

Ցույց տանք, որ $\mathcal{E}(I^n)\subset\mathfrak{M}(\mu,I^n)$: Իրոք, եթե $E\in\mathcal{E}(I^n)$,ապա տված ε-ի համար որպես E_ε^E վերցնելով հենց E-ն կունենանք

$$\mu*(E\vartriangle E_\varepsilon^E)=\mu*(E\vartriangle E)=\mu(\varnothing)=0<\varepsilon$$

Այժմ ենթադրենք, որ A-ն ու B-ն $\mathfrak{M}(\mu,I^n)$-ից են և ցույց տանք, որ $A\cup B$ և $A\setminus B$ նույնպես կլինեն $\mathfrak{M}(\mu,I^n)$-ից: Տված դրական ε-ի համար E_ε^A, E_ε^B բազմությունները ընտրենք $\mathcal{E}(I^n)$-ից այնպես, որ բավարարվեն $\mu*(A\vartriangle E_\varepsilon^A)<\varepsilon/2$, $\mu*(B\vartriangle E_\varepsilon^B)<\varepsilon/2$ անհավասարությունները: Օգտագործելով սիմետրիկ տարբերության **5⁰**-րդ հատկությունը և արտաքին չափի մոնոտոնության ու կիսաադիտիվության հատկությունները կունենանք

$$\mu*\left((A\cup B)\vartriangle(E_\varepsilon^A\cup E_\varepsilon^B)\right)\le\mu*\left((A\vartriangle E_\varepsilon^A)\cup(B\vartriangle E_\varepsilon^B)\right)\le\mu*(A\vartriangle E_\varepsilon^A)+\mu*(B\vartriangle E_\varepsilon^B)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

Բայց $E_\varepsilon^A\cup E_\varepsilon^B$ և $E_\varepsilon^A\setminus E_\varepsilon^B$ բազմությունները $\mathcal{E}(I^n)$-ից են, քանի որ $\mathcal{E}(I^n)$-ը հանրահաշիվ էր:

Ապացուցենք, որ $\mu*$-ը ադիտիվ է $\mathfrak{M}(\mu,I^n)$-ի վրա:

Դիցուք $A,B\in\mathfrak{M}(\mu,I^n)$, $A\cap B=\varnothing$, ցույց տանք, որ $\mu*(A\cup B)=\mu*(A)+\mu*(B)$:

Այն, որ $\mu*(A\cup B)\le\mu*(A)+\mu*(B)$ հետևում է արտաքին չափի կիսաադիտիվությանից:

Ցույց տանք, որ ճիշտ է նաև $\mu*(A\cup B)\ge\mu*(A)+\mu*(B)$անհավասարությունը: Վերցնենք կամայական դրական ε թիվ և նորից E_ε^A, E_ε^B բազմությունները ընտրենք$\mathcal{E}(I^n)$-ից

այնպես, որ բավարարվեն $\mu*\left(A\triangle E_\varepsilon^A\right)<\varepsilon$, $\mu*\left(B\triangle E_\varepsilon^B\right)<\varepsilon$ անհավասարությունները:
Ըստ արտաքին չափի **5**^{0}-րդ հատկության կունենանք

$$\left|\mu*(A)-\mu*\left(E_\varepsilon^A\right)\right|\le\mu*\left(A\triangle E_\varepsilon^A\right)<\varepsilon \quad \text{և} \quad \left|\mu*(B)-\mu*\left(E_\varepsilon^B\right)\right|\le\mu*\left(B\triangle E_\varepsilon^B\right)<\varepsilon :$$

Դժվար չի տեսնել, որ $A\cap B=\varnothing$ պայմանից հետևում է, որ $E_\varepsilon^A\cap E_\varepsilon^B\subset\left(A\triangle E_\varepsilon^A\right)\cup\left(B\triangle E_\varepsilon^B\right)$, որտեղից կարող ենք գրել, որ

$$\mu*\left(E_\varepsilon^A\cap E_\varepsilon^B\right)\le\mu*\left(\left(A\triangle E_\varepsilon^A\right)\cup\left(B\triangle E_\varepsilon^B\right)\right)\le\mu*\left(A\triangle E_\varepsilon^A\right)+\mu*\left(B\triangle E_\varepsilon^B\right)<2\varepsilon :$$

Այժմ եթե հաշվի առնենք, որ E_ε^A, E_ε^B բազմությունները , ինչպես նաև նրանց հատումը և միավորումը $\mathcal{E}(I^n)$-ից են, իսկ $\mathcal{E}(I^n)$-ի վրա $\mu*$-ը համընկնում է μ-ի հետ և μ-ն $\mathcal{E}(I^n)$-ի վրա ադիտիվ է, կունենանք

$$\mu^*\left(E_\varepsilon^A\cup E_\varepsilon^B\right)+\mu^*\left(E_\varepsilon^A\cap E_\varepsilon^B\right)=\mu^*\left(E_\varepsilon^A\right)+\mu^*\left(E_\varepsilon^B\right):$$

Այստեղ օգտագործվեց բազմության ադիտիվ ֆունկցիայի 2^0-րդ հատկությունը: Վերջին հավասարությունից կստանանք

$$\mu^*\left(E_\varepsilon^A\cup E_\varepsilon^B\right)=\mu^*\left(E_\varepsilon^A\right)+\mu^*\left(E_\varepsilon^B\right)-\mu^*\left(E_\varepsilon^A\cap E_\varepsilon^B\right)>\mu^*\left(E_\varepsilon^A\right)+\mu^*\left(E_\varepsilon^B\right)-2\varepsilon : \qquad (**)$$

Բայց ըստ արտաքին չափի **5**^{0}-րդ հատկության կունենանք

$$\left|\mu*(A\cup B)-\mu*\left(E_\varepsilon^A\cup E_\varepsilon^B\right)\right|\le\mu*\left((A\cup B)\triangle\left(E_\varepsilon^A\cup E_\varepsilon^B\right)\right)\le$$

$$\mu*\left(\left(A\triangle E_\varepsilon^A B\right)\cup\left(B\triangle E_\varepsilon^B\right)\right)\le\mu*\left(A\triangle E_\varepsilon^A B\right)+\mu*\left(B\triangle E_\varepsilon^B\right)<2\varepsilon :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (*)-ը և (**)-ը, կստանաք

$$\mu*(A\cup B)>\mu*\left(E_\varepsilon^A\cup E_\varepsilon^B\right)-2\varepsilon>\mu*\left(E_\varepsilon^A\right)+\mu*\left(E_\varepsilon^B\right)-4\varepsilon>\mu*(A)+\mu*(B)-6\varepsilon :$$

ε-ի կամայականության շնորհիվ կունենանք $\mu*(A\cup B)\ge\mu*(A)+\mu*(B)$: ↲

Հետևանք:Ապացուցված թեորեմից անմիջապես հետևում է, որ եթե A և B բազմությունները չափելի են, ապա չափելի են նաև $A^C=I^n\setminus A,\ A\cup B,\ A\cap B,\ A\setminus B$ բազմությունները:
Արդեն ամեն ինչ պատրաստ է մեր նպատակի իրագործման համար, ուստի ձևակերպենք հիմնական պնդումը:

Թեորեմ: $\mathfrak{M}\left(\mu,I^n\right)$-ը $\mathcal{E}(I^n)$-ը պարունակող σ-հանրահաշին է, իսկ $\mu*$-ը σ- ադիտիվ է $\mathfrak{M}\left(\mu,I^n\right)$-ի վրա:

↦ Դիցուք $A_1,\ldots,A_k,\ldots\in\mathfrak{M}\left(\mu,I^n\right)$ ցույց տանք, որ $A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathfrak{M}\left(\mu,I^n\right)$:

Վերցնենք $A_1'=A_1$ և $A_k'=A_k\setminus\bigcup\limits_{p=1}^{k-1}A_p,\ k=2,3,\ldots$: Կարող ենք ասել, որ $A_k'\cap A_p'=\varnothing$, երբ $k\ne p$, և $A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k'\supset\bigcup\limits_{k=1}^{N}A_k'$, ուստի $\sum\limits_{k=1}^{N}\mu^*\left(A_k'\right)=\mu^*\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\mathrm{N}}A_k'\right)\le\mu^*(A)$:Այստեղից հետևում է, որ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu^*\left(A_k'\right)$ շարքը զուգամետ է: Ուստի տված դրական ε-ի համար կարող ենք ընտրել N-ը այնպես, որ $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}\mu^*\left(A_k'\right)<\varepsilon/2$: Ըստ նախորդ թեորեմի $\mathfrak{M}\left(\mu,I^n\right)$-ը հանրահաշիվ է , ուրեմն կարող ենք պնդել, որ $\bigcup_{k=1}^{N} A'_k = B \in \mathfrak{M}\left(\mu, I^n\right)$, ուստի գոյություն ունի $E_\varepsilon^B \in \mathcal{E}(I^n)$, այնպես, որ $\mu*\left(B \vartriangle E_\varepsilon^B\right) < \varepsilon/2$:

Դիտարկենք $A \vartriangle E_\varepsilon^B$ սիմետրիկ տարբերությունը: Հեշտ է ստուգել, որ

$$A \vartriangle E_\varepsilon^B = \left(\left(\bigcup_{k=1}^{N} A'_k\right) \cup \left(\bigcup_{k>N}^{\infty} A'_k\right)\right) \vartriangle E_\varepsilon^B \subset \left(B \vartriangle E_\varepsilon^B\right) \cup \left(\bigcup_{k>N}^{\infty} A'_k\right),$$

Որտեղից, կունենանք

$$\mu*\left(A \vartriangle E_\varepsilon^B\right) \le \mu*\left(\left(B \vartriangle E_\varepsilon^B\right) \cup \left(\bigcup_{k>N}^{\infty} A'_k\right)\right) \le \mu*\left(B \vartriangle E_\varepsilon^B\right) + \mu*\left(\bigcup_{k>N}^{\infty} A'_k\right) < \varepsilon/2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} \mu*\left(A'_k\right) < \varepsilon :$$

Այսինքն ստացանք, որ $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{M}\left(\mu, I^n\right)$:

Այժմ, ենթադրենք, որ $A_1, \dots, A_k, \dots \in \mathfrak{M}\left(\mu, I^n\right)$, $A_k \cap A_p = \varnothing$ և $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$: Ցույց տանք, որ

$$\mu*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu*(A_k):$$

Ակնհայտ է, որ $\bigcup_{k=1}^{\mathrm{N}} A_k \subset A$ ցանկացած N -ի համար և քանի որ $\mu*$-ը ըստ նախորդ թեորեմի ադիտիվ է $\mathfrak{M}\left(\mu, I^n\right)$-ի վրա, ունենք $\sum_{k=1}^{N} \mu*(A_k) \le \mu*(A)$: Այսինքն $\sum_{k=1}^{\infty} \mu*(A_k)$ շարքը զուգամետ է և $\sum_{k=1}^{\infty} \mu*(A_k) \le \mu*(A)$: Բայց $\mu*$-ը կիսաադիտիվ է, ուստի ճիշտ է նաև $\sum_{k=1}^{\infty} \mu*(A_k) \ge \mu*(A)$ անհավասարությունը, այսինքն $\mu*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu*(A_k)$: ↲

Հետևանք: Ցանկացած I^n -ում բաց և հետևաբար նաև փակ բազմություն չափելի է:

↦ Ցանկացած G բաց բազմություն կարելի է ներկայացնել հաշվելի թվով ուղղանկյունների միավորման տեսքով, իրոք, առաջին քայլում I^n -ը տրոհենք $1/2$ կողով ուղղանկյունների և վերցնենք ստացված ցանցի այն ուղղանկյունները, որոնք լրիվությամբ ընկած են G -ի մեջ, երկրորդ քայլում ցանցի քայլը երկու անգամ փոքրացնենք և նորից ընտրենք նրանք, որոնք ընկած են G -ի մեջ և այսպես շարունակ: Կատարելով անվերջ թվով քայլեր կստանանք պահանջվող ներկայացումը: ↲

Վերը շարադրվածից երևում է, որ արտաքին չափի սահմանափակումը չափելի բազմությունների $\mathfrak{M}\left(\mu, I^n\right)$ σ -հանրահաշվի վրա բազմության σ - ադիտիվ ֆունկցիա է: Այն կանվանենք տարրական բազմությունների օղակի վրա որոշված ադիտիվ, ռեգուլյար, վերջավոր և ոչ բացասական բազմության μ ֆունկցիայով ծնված չափ կամ μ -ով ծնված չափ և նոր նշանակումներից խուսափելու համար նորից կնշանակենք μ -ով, իսկ $\left(I^n, \mathfrak{M}\left(\mu, I^n\right), \mu\right)$ եռյակը կանվանենք **չափով տարածություն**: Նշենք, որ մենք **չափելի տարածություն** ասելով կհասկանանք $(X, \mathfrak{M})$ զույգը, որտեղ X -ը կամայական բազմություն է, իսկ $\mathfrak{M}$ -ը նրա ենթաբազմությունների որևէ σ -հանրահաշիվ, **չափով**

տարածություն ասելով՝ $(X,\mathfrak{M},\mu)$ եռյակը, որտեղ $(X,\mathfrak{M})$-ն չափելի տարածություն է, իսկ μ-ն $\mathfrak{M}$-ի վրա որոշված չափ: Այսինքն չափով տարածությունը չափելի տարածությունից տարբերվում է նրանով, որ այնտեղ բացի σ-հանրահաշիվից կա նաև այդ հանրահաշվի վրա տրված բազմության σ- ադիտիվ ֆունկցիա:

Հեշտ է տեսնել, որ այս μ չափը օժտված է հետևյալ հատկություններով:

1° $\mu(A)\ge 0$ ցանկացած $A\in\mathfrak{M}(\mu,I^n)$ համար:

2° $A\subset B$ => $\mu(A)\le\mu(B)$ ցանկացած $A,B\in\mathfrak{M}(\mu,I^n)$ համար:

3° $\forall A_k\in\mathfrak{M}(\mu,I^n)$ $k=1,2,\ldots A_k\cap A_p=\varnothing$ համար $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)$

4° $A_1\subset A_2\subset\ldots\subset A_k\subset\ldots\in\mathfrak{M}(\mu,I^n)$, ապա $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\lim_{k\to 0}\mu(A_k)$:(չափի անընդհատություն)

4°° $A_1\supset A_2\supset\ldots\supset A_k\supset\ldots\in\mathfrak{M}(\mu,I^n)$, ապա $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\lim_{k\to 0}\mu(A_k)$:

5° μ-ն ռեգուլյար է $\mathfrak{M}(\mu,I^n)$-ի վրա:

6° Եթե $\mu^*(A)=0$, ապա $A\in\mathfrak{M}(\mu,I^n)$ և $\mu(A)=0$

7° Եթե $A\in\mathfrak{M}(\mu,I^n)$, $\mu(A)=0$ և $B\subset A$, ապա $B\in\mathfrak{M}(\mu,I^n)$ և $\mu(B)=0$ (μ չափի լրիվություն)

$\mapsto$

Ապացուցման կարիք ունեն միայն **5°**–ը, **6°** –ը և **7°**–ը: Մնացածները արդեն ապացուցված են, օրինակ **4°**-ը և **4°°**հետևում է նրանից, որ օղակի վրա σ- ադիտիվ ֆունկցիան անընդհատ է:

5°. Դիցուք $A\in\mathfrak{M}(\mu,I^n)$ և $\varepsilon>0$: Ընտրենք $E_k\in\mathcal{E}(I^n)$ $k=1,2,\ldots$ բաց բազմությունները այնպես, որ $A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ և $\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)\le\mu^*(A)+\varepsilon=\mu(A)+\varepsilon$: Այսպիսի ընտրությունը հնարավոր է, ըստ արտաքին չափի սահմանման: Այժմ եթե վերցնենք $G=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$, ապա այն կլինի բաց բազմություն $A\subset G$ և կբավարարի $\mu(G)\le\mu(A)+\varepsilon$ պայմանին:

Որպեսզի ցույց տանք այնպիսի F փակ բազմության գոյություն, որ $F\subset A$ և $\mu(F)\le\mu(A)-\varepsilon$, դիտարկենք $A^c=I^n\setminus A$ բազմությունությունը, նրա համար գտնենք վերը նշած պայմանին բավարարող բաց բազմություն: Այդ բազմության լրացումը կլինի պահանջվող փակ բազմությունը:

6° Դիցուք $\mu^*(A)=0$: Եթե ցանկացած դրական ε-ի համար վերցնենք $E_\varepsilon^A=\varnothing\in\mathcal{E}(I^n)$, կունենանք $\mu^*(A\vartriangle E_\varepsilon^A)=\mu^*(A)=0<\varepsilon$, այսինքն $A\in\mathfrak{M}(\mu,I^n)$: Բայց այդ դեպքում $\mu^*(A)=\mu(A)=0$:

7° –ը **6°** –ի և արտաքին չափի մոնոտոնության անմիջական հետևանք է:

Եթե, մասնավոր դեպքում, որպես μ վերցնենք տարրական բազմությունների օղակի վրա կառուցված Լեբեգբեգի m չափը, ապա այս ճանապարհով ստացված չափելի բազմությունների դասը կանվանենք Լեբեգբեգի իմաստով չափելի բազմությունների դաս, կնշանակենք $\mathfrak{M}(I^n)$, իսկ չափը՝ Լեբեգբեգի չափ և նորից կնշանակենք m-ով:

Այժմ ենթադրենք ունենք $\mathbb{R}^n$-ի տարրական բազմությունների օղակի վրա որոշված ադիտիվ, ռեգուլյար, վերջավոր և ոչ բացասական բազմության μ ֆունկցիա: Դիտարկենք $I_{k_1,k_2,\dots,k_n}=[k_1,k_1+1)\times[k_2,k_2+1)\times\cdots\times[k_n,k_n+1),\ k_i\in\mathbb{Z}$ կիսաբաց ուղղանկյունները: Հեշտ է նկատել, որ $(k_1,k_2,\dots,k_n)$ թվերի տարբեր հավաքածուներին համապատասխանող ուղղանկյունները չեն հատվում և $\mathbb{R}^n=\bigcup\limits_{k_1,k_2,\dots,k_n} I_{k_1,k_2,\dots,k_n}$:

Սահմանում: Կասենք, որ $A\in\mathbb{R}^n$ բազմությունը չափելի է՝ $A\in\mathfrak{M}(\mu,\mathbb{R}^n)$, եթե ցանկացած $(k_1,k_2,\dots,k_n)$ հավքածուի համար չափելի են $A\bigcap I_{k_1,k_2,\dots,k_n}$ բազմությունները, ընդ որում կհամարենք, որ

$$\mu(A)=\sum_{k_1,k_2,\dots,k_n}\mu\left(A\bigcap I_{k_1,k_2,\dots,k_n}\right):$$

Առանց դժվարության ստուգվում է, որ $\mathfrak{M}(\mu,\mathbb{R}^n)$-ը $\mathcal{E}$- տարրական բազմությունների օղակը պարունակող σ-հանրահաշին է, իսկ այսպես սահմանված μ-ն σ- ադիտիվ է $\mathfrak{M}(\mu,\mathbb{R}^n)$-ի վրա: Այն օժտված է նաև վերը նշված **1°**-**7°** հատկություններով:

Լեբեգի իմաստով չափելի բազմությունների դասը կնշանակենք $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$-ով:

Բերենք մի հետաքրքիր օրինակ ևս: Դիցուք σ-ն չնվազող ֆունկցիա է $\mathbb{R}=(-\infty;+\infty)$–ում: $\mathbb{R}$-ի ուղղանկյունների վրա, այն է $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b) տեսքի հատվածների վրա, սահմանենք μ_σ բազմության ֆունկցիան հետևյալ կերպ՝

$$\begin{aligned}
&\mu_\sigma([a,b])=\sigma(b+0)-\sigma(a-0),\\
&\mu_\sigma([a,b))=\sigma(b-0)-\sigma(a-0),\\
&\mu_\sigma((a,b])=\sigma(b+0)-\sigma(a+0),\\
&\mu_\sigma((a,b))=\sigma(b-0)-\sigma(a+0):
\end{aligned}$$

Այն տարածենք $\mathbb{R}$-ի ուղղանկյուններով ծնված $\mathcal{E}$- տարրական բազմությունների օղակի վրա, ինչպես դա արվեց վերը: Այստեղ էլ ստուգվում է, որ ստացված μ_σ բազմության ֆունկցիան $\mathcal{E}$- տարրական բազմությունների օղակի վրա ադիտիվ, ռեգուլյար, վերջավոր և ոչ բացասական է: Նկարագրված մեթոդով μ_σ-ից ստացված չափը անվանում են σ չնվազող ֆունկցիայով ծնված Լեբեգ-Ստիլտեսի չափ:

Մասնավորաբար

$$\sigma(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geq 0\end{cases}$$

ֆունկցիայով ծնված Լեբեգ-Ստիլտեսի չափը կոչվում է Դիրակի չափ:

Խնդիրներ զրո չափի բազմությունների մաս

1. Ապացուցել, որ ցանկացած վերջավոր կամ հաշվելի բազմություն Լեբեգի իմաստով չափելի է և նրա չափը զրո է:

2. Ապացուցել, որ վերջավոր կամ հաշվելի թվով զրո չափի բազմությունների միավորումը զրո չափի բազմություն է:

ՉԱՓԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Դիցուք $(X,\mathfrak{M})$ չափելի տարածություն է, այսինքն $\mathfrak{M}\subset 2^X$ σ-հանրահաշիվ է: $\mathfrak{M}$-ի տարրերը կանվանենք չափելի բազմություններ: Դիտարկենք $f: D_f\to\mathbb{R}$ ֆունկցիան, որտեղ $D_f\subset X$:

Սահմանում: f-ը կանվանենք $\mathfrak{M}$–չափելի, եթե $D_f\in\mathfrak{M}$ և ցանկացած $c\in\mathbb{R}$ համար $E_c=\{x;f(x)>c\}\in\mathfrak{M}$:Այսինքն ցանկացած իրական c թվի համար (c,∞) միջակայքի նախապատկերը չափելի է՝ $E_c=f^{-1}(c,\infty)\in\mathfrak{M}$:

Մասնավորապես, եթե $X=\mathbb{R}^n$, իսկ $\mathfrak{M}$–ը Լեբեգի իմաստով չափելի բազմությունների դասն է, ապա $\mathfrak{M}$–չափելի ֆունկցիան կանվանենք Լեբեգի իմաստով չափելի ֆունկցիա կամ ուղղակի չափելի ֆունկցիա:

Թեորեմ: Եթե f–ը $\mathfrak{M}$–չափելի ֆունկցիա է, ապա չափելի են նաև հետևյալ բազմությունները $\{x,f(x)\geq c\}$, $\{x,f(x)=c\}$, $\{x,f(x)\leq c\}$,$\{x,f(x)<c\}$:

$\mapsto$ Այդ ամենը հետևում է

$$\{x,f(x)\geq c\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x,f(x)>c-1/n\},$$

$$\{x,f(x)=c\}=\{x,f(x)\geq c\}\setminus\{x,f(x)>c\},$$

$$\{x,f(x)\leq c\}=X\setminus\{x,f(x)>c\}$$

$$\{x, f(x) < c\} = \{x, f(x) \le c\} \setminus \{x, f(x) = c\}$$

ակնհայտ հավասարություններից և այն բանից, որ $\mathfrak{M}$-ը σ-հանրահաշիվ է: ↵

Դիտողություն: Հեշտ է տեսնել, որ $\mathfrak{M}$–չափելի ֆունկցիայի սահմանման մեջ կարելի էր $\{x; f(x) > c\}$ բազմության փոխարեն վերցնել $\{x, f(x) \ge c\}$, $\{x, f(x) \le c\}$, $\{x, f(x) < c\}$ բազմություններից որևիցե մեկը:

Թեորեմ: Եթե f և g ֆունկցիաները $\mathfrak{M}$–չափելի են, ապա $\{x, f(x) > g(x)\}$ բազմությունը չափելի է:

↦ f-ի և g-ի $\mathfrak{M}$–չափելիությունից հետևում է $\{x, f(x) > r\}$ ու $\{x, g(x) < r\}$, բազմությունները չափելի են ցանկացած ռացիոնալ r-ի համար: Ռացիոնալ թվերը համարակալենք (կարող ենք, քանի որ հաշվելի են)՝ $r_1, r_2, ..., r_n, ...$:

Քանի որ ռացիոնալ թվերի բազմությունը ամենուրեք խիտ է $\mathbb{R}$ -ում, ապա դժվար չի տեսնել, որ $\{x, f(x) > g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\{x, f(x) > r_k\} \cap \{x, g(x) < r_k\} \right)$ ու նորից $\mathfrak{M}$-ի σ-հանրահաշիվ լինելուց կունենանք $\{x, f(x) > g(x)\}$ բազմության չափելիությունը: ↵

Թեորեմ: Եթե f և g ֆունկցիաները $\mathfrak{M}$–չափելի են են, ապա $\mathfrak{M}$–չափելի են նաև հետևյալ ֆունկցիաները

$$kf(x),\quad f(x)+a\,,\quad |f(x)|,\quad f(x) \pm g(x),\quad f^2(x),\ f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}\ (g \ne 0):$$

↦ Եթե f–ը որոշված է D_f–ի վրա, ապա kf –ը ևս, որոշված է D_f –ի վրա, որը չափելի է, քանի որ f–ը $\mathfrak{M}$–չափելի է: Պարզ է,որ

$$\{x : kf(x) > c\} = \left[\begin{array}{l} \left\{ x : f(x) > \dfrac{c}{k} \right\} \ k > 0 \\ \left\{ x : f(x) < \dfrac{c}{k} \right\} \ k < 0 \end{array} \right.,$$

իսկ եթե k=0, ապա kf-ը նույնաբար զրո է, և այդ դեպքում $\{x, kf(x) > c\} = \begin{cases} \varnothing & c \ge 0 \\ D_f & c < 0 \end{cases}$:

Այստեղից պարզ է, որ $\{x, kf(x) > c\}$ բազմությունը բոլոր դեպքերում չափելի է, այսինքն kf –ը $\mathfrak{M}$–չափելի է:

$\{x, f(x)+a>c\}=\{x, f(x)>c-a\}$, $\{x,|f(x)|>c\}=\{x, f(x)>c\} \cup \{x, f(x)<-c\}$,

$$\{x; f^2(x)>c\}=\begin{cases} D_f \ , & \text{եթե} \ \ c<0 \\ \{x;|f(x)|>\sqrt{c}\}, & \text{եթե} \ \ c \geq 0 \end{cases}$$

հավասարությունից անմիջապես հետևում է $f(x)+a$, $|f(x)|$ և $f^2(x)$ ֆունկցաների $\mathfrak{M}$ –չափելիությունը:

f(x) ± g(x) որոշված է $D_f \cap D_g$–ի վրա, որը չափելի է, քանի որ չափելի են D_f և D_g բազմությունները: Մյուս կողմից $\{x, f(x) \pm g(x)>c\}=\{x; f(x)>\mp g(x)+c\}$ ուստի չափելի է:

f(x)·g(x) որոշված է $D_f \cap D_g$ չափելի բազմության վրա և

$$f(x) \cdot g(x)=\frac{1}{4}\left((f+g)^2-(f-g)^2\right),$$

այսինքն $\mathfrak{M}$ –չափելի է:

$$\frac{f}{g}=f\frac{1}{g}$$

Ցույց տանք $\dfrac{1}{g(x)}$ –ը չափելի է

Դիտարկենք

$$\left\{x; \frac{1}{g(x)}>c\right\}=\begin{cases} \left\{x; \ 0<g(x)<\frac{1}{c}\right\} \ , & \text{եթե} \ \ c>0 \\ \{x, g(x)>0\} \cup \left\{x, g(x)<\frac{1}{c}\right\}, & \text{եթե} \ \ c<0 \\ \{x, g(x)>0\} \ , & \text{եթե} \ \ c=0 \end{cases}$$:

Բայց նշված բոլոր բազմությունները չափելի են: ↵

Թեորեմ: Եթե $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - ը $\mathfrak{M}$ –չափելի ֆունկցիաների հաջորդականություն է, ապա չափելի են նաև $\mathrm{g}(\mathrm{x})=\sup\limits_{\mathrm{n}}\{f_{\mathrm{n}}(\mathrm{x})\}$, $\mathrm{g}_1(\mathrm{x})=\inf\limits_{\mathrm{n}}\{f_{\mathrm{n}}(\mathrm{x})\}$, $\mathrm{h}(\mathrm{x})=\overline{\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}} f_{\mathrm{n}}(\mathrm{x})$ և $\mathrm{h}_1(\mathrm{x})=\underline{\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}} f_{\mathrm{n}}(\mathrm{x})$ ֆունկցիաները:

↦ Ստուգենք $\{x, g(x)>c\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x, f_n(x)>c\}$ հավասարությունը:

Եթե $x_0 \in \{x, g(x)>c\}$, ապա ցույց տանք, որ գոնէ մեկ n-ի համար $f_n(x_0)>c$: Իրոք, եթե բոլոր n-ի համար համար $f_n(x_0) \leq c$, ապա ակնհայտ է, որ $g(x_0) \leq c$, այնինչ ունենք, որ $g(x_0)>c$, այսինքն $\{x, g(x)>c\}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x, f_n(x)>c\}$: Ճիշտ է նաև հակառակ ներդրումը, իրոք եթե որևէ n-ի համար համար $f_n(x_0)>c$, ապա $g(x_0)\geq f_n(x_0)>c$: Քանի որ $\{x, f_n(x)>c\}$ բազմությունները չափելի են, չափելի է նաև $\{x, g(x)>c\}$-ն բոլոր իրական c-երի համար, որն էլ հենց նշանակում է, որ $g(x)$-ը $\mathfrak{M}$–չափելի է:

$\inf\limits_{n}\{f_n(x)\}=-\sup\limits_{n}\{-f_n(x)\}$, ուստի $g_1(x)$-ի $\mathfrak{M}$–չափելիությունը հետևում է վերը ապացուցածից և $-f_n(x)$ ֆունկցիաների $\mathfrak{M}$–չափելիությունից:

Ինչպես հայտնի է՝

$h(x)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}h_n(x)=\inf\{h_n(x)\}$, որտեղ $h_n(x)=\sup\{f_n(x), f_{n+1}(x),\ldots\}$:

Ուստի նորից ըստ վերը ապացուցածի $h(x)$-ը $\mathfrak{M}$–չափելի է:

$h_1(x)$-ի չափելիությունը հետևում է $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n(x)=-\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-f_n(x))$ հավասարությունից: ↵

Հետևանք: Եթե $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $\mathfrak{M}$–չափելի ֆունկցիաների հաջորդականությունը ցանկացած $x\in X$ համար ունի սահման, ապա նրա սահմանային ֆունկցիան՝ f(x)–ը կլինի $\mathfrak{M}$–չափելի:

↦

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n(x)=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x) \Rightarrow f(x)$-ը չափելի է: ↵

Այժմ դիտարկենք մասնավոր դեպք, երբ $X=\mathbb{R}^n$, իսկ $\mathfrak{M}$–ը Լեբեգի իմաստով չափելի բազմությունների դասն է: Պարզ է, որ չափելի ֆունկցիաների վերը ապացուցած հատկությունները ճիշտ են նաև այս դեպքում, սակայն այս դեպքում կարելի է ապացուցել ևս մի քանի հատկություններ: Բերենք դրանցից մի քանիսը:

Թեորեմ: Զրո չափի բազմության վրա տրված ցանկացած ֆունկցիա Լեբեգի իմաստով չափելի է:

↦ Դիցուք f-ի որոշման տիրույթը՝ D_f ունի զրո չափ ՝ $m(D_f)=0$: Այդ դեպքում ցանկացած c-ի համար $\{x; f(x)>c\}\subset D_f$ և հետևաբար չափելի է, քանի որ ինչպես ապացուցել ենք Լեբեգի չափը լրիվ է: ↵

Թեորեմ: Չափելի բազմության վրա որոշված անընդհատ ֆունկցիան չափելի է:

$\mapsto$ Դիցուք f–ը անընդհատ է D_f -ի վրա և D_f -ը Լեբեգի իմաստով չափելի է, այդ դեպքում $\{x; f(x) > c\} = D_f \bigcap G$, որտեղ G-ն բաց բազմություն է $\mathbb{R}^n$-ում, բայց բաց բազմությունները Լեբեգի իմաստով չափելի են, ուստի $\{x; f(x) > c\}$ չափելի է, որպես երկու չափելի բազմությունների հատում: $\lrcorner$

Սահմանում: Եթե որևէ հատկություն տեղի ունի ամենուրեք, բացի զրո չափի բազմությունից (տեղի ունի զրո չափի բազմությունից դուրս), ապա կասենք, որ այն տեղի ունի համարյա ամենուրեք (h.ա.):

Իհարկե, այստեղ կարևոր է, թե ինչ չափ է տրված համապատասխան σ-հանրահաշի վրա, այսինքն խոսել որևէ հատկության h.ա. տեղի ունենալու մասին կարելի է միայն չափով տարածություններում: Օրինակ, եթե $\left(X, 2^X, \delta_{x_0}\right)$ Դիրակի չափով տարածությունն է, ապա $f(x) = g(x)$ h.ա. նշանակում է միայն, որ $f(x_0) = g(x_0)$:

Թեորեմ: Եթե $f(x) = g(x)$ h. ա. և $g(x)$-ը չափելի է, ապա չափելի է նաև $f(x)$-ը:

$\mapsto$ Իրոք՝

$$\{x; f(x) > c\} = \left(\{x; g(x) > c\} \bigcap \{x; f(x) = g(x)\}\right) \bigcup \left(\{x; f(x) > c\} \bigcap \{x; f(x) \neq g(x)\}\right),$$

Բայց $\{x; f(x) = g(x)\}$ չափելի է, քանի որ այն $\{x; f(x) \neq g(x)\}$ զրո չափի բազմության լրացումն է, իսկ $\left(\{x; f(x) > c\} \bigcap \{x; f(x) \neq g(x)\}\right)$ չափելի է, քանի որ այն ընկած է $\{x; f(x) \neq g(x)\}$ զրո չափի բազմության մեջ, իսկ Լեբեգի չափը լրիվ էր: $\lrcorner$

Սահմանում: Կասենք, որ f ֆունկցիան համարժեք է g-ին և կգրենք $f \sim$ g , եթե $\{x; f(x) \neq g(x)\}$ բազմությունը ունի զրո չափ:

Հեշտությամբ ստուգվում է, որ այսպես սահմանված համարժեքությունը օժտված է համարժեքության հարաբերության բոլոր հատկություններով: Ապացուցենք, օրինակ, որ եթե $f \sim$ g և g ~h ,ապա $f \sim$ h: Դիցուք $E_1 = \{x; f(x) \neq g(x)\}$, $E_2 = \{x; g(x) \neq h(x)\}$: Պարզ է, որ $\{x, f(x) \neq h(x)\} \subset E_1 \bigcup E_2$, բայց E_1-ը և E_2-ը ունեն զրո չափ, ուստի զրո չափի է նաև $\{x, f(x) \neq h(x)\}$ բազմությունը:

Թեորեմ: Չափելի ֆունկցաների հաջորդականության h.ա. սահմանը չափելի է:

$\mapsto$ Դիցուք $f_n(x) \to f(x)$ զրո չափի բազմությունից դուրս: Եթե բոլոր այդ ֆունկցիաների արժեքները դարձնենք զրո այդ զրո չափի բազմության վրա, ապա կստանանք, որ նոր ստացված հաջորդականությունը կզուգամիտի ամենուրեք, հետևաբար նրանց սահմանը կլինի չափելի ֆունկցիա, բայց այդ սահմանը համարժեք է $f(x)$-ին, այսինքն $f(x)$-ը չափելի է: ↵

ԱՍՏԻՃԱՆԱՁԵՎ ԿԱՄ ՊԱՐԶ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

Դիցուք $(X,\mathfrak{M})$-ը չափելի տարածություն է և $E\subset X$:

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E\\ 0, & x\notin E\end{cases}$$

ֆունկցիան կանվանենք E բազմության բնութագրիչ (խարակտերիստիկ) ֆունկցիա:

Թեորեմ: $\chi_E(x)$–ը չափելի է այն և միայն այն դեպքում, եթե չափելի է E–ն:

$\mapsto$ $$\{x,\chi_E(x)>c\}=\begin{cases}X, & \text{եթե} \quad c<0\\ E, & \text{եթե} \quad 0\le c<1\\ \varnothing, & \text{եթե} \quad c\ge 1\end{cases}:$$

Այսինքն կամայական c-ի համար $\{x,\chi_E(x)>c\}$ բազմության չափելիությունը համարժեք է E-ի չափելիությանը: ↵

Սահմանում: Այն ֆունկցիան, որի արժեքների բազմությունը վերջավոր է կանվանենք պարզ ֆունկցիա:

Դիցուք $s(x)$-պարզ ֆունկցիան է և $\{c_1,c_2,...,c_n\}$–ը նրա արժեքների բազմությունն է: Նշանակենք

$\{x,s(x)=c_1\}=E_1$
$\{x,s(x)=c_2\}=E_2$
....
$\{x,s(x)=c_n\}=E_n$:

Քանի որ $c_i\ne c_j$, երբ $i\ne j$, ուրեմն $E_i\bigcap E_j=\varnothing$ և $s(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\chi_{E_i}(x)$:

Դիտողություն: Հեշտությամբ ստուգվում է, որ եթե $s_1(x)$ և $s_2(x)$ պարզ ֆունկցիաներ են ապա պարզ են նաև հետևյալ ֆունկցիաները՝ $cs_1(x)$, $s_1(x)\pm s_2(x)$, $s_1(x)s_2(x)$ և $s_1(x)/s_2(x)$: Դժվար չի տեսնել նաև, որ պարզ ֆունկցիան չափելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ չափելի են բոլոր E_i-երը:

Դիցուք $f(x)$-ը իրականարժեք ֆունկցիա է, նշանակենք

$$f_+(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2}=\max\{0,f(x)\}=\begin{cases}f(x) & f(x)\ge 0\\ 0 & f(x)\le 0\end{cases},$$

$$f_-(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2}=-\min\{0,(fx)\}=\begin{cases}-f(x), & f(x)\le 0\\ 0, \text{ եթե} & f(x)\ge 0:\end{cases}$$

Ակնհայտ է, որ $f_+(x)$-ը և $f_-(x)$-ը ոչբացասական ֆունկցիաներ են և $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$:

Պարզվում է, որ կամայական ֆունկցիա պարզ ֆունկցիաների հաջորդականության սահման է, ավելի ճշգրիտ, ճիշտ է հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ: Դիցուք f(x)–ը X –ի վրա տրված կամայական ֆունկցիան է, որի արժեքները $[-\infty;+\infty]$ –ից են: Այդ դեպքում գոյություն ունի պարզ ֆունկցիաների $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջոր-դականություն այնպես, որ $s_n(x)\to f(x)$ ցանկացած x-ի համար X –ից: Ընդ որում, եթե f(x)–ը չափելի է, ապա $S_n(x)$-երը կարելի է ընտրել չափելի ֆունկցիաներ, իսկ եթե f(x)≥0, ապա $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը կարելի է ընտրել չնվազող, այս-ինքն՝ $s_n(x)\le s_{n+1}(x),\, n=1,2,...$:

$\mapsto$ Նախ դիտարկենք $f(x)\ge 0$ դեպքը: Վերցնենք կամայական $n\in\mathbb{N}$ և նշանակենք

$$F_n=\{x, f(x)\ge n\}:$$

$[0;n]$ հատվածը բաժանենք $n\cdot 2^n$ մասի և նշանակենք

$E_i^{(n)}=\left\{x,\ \dfrac{i-1}{2^n}\le f(x)<\dfrac{i}{2^n}\right\}, i=1,2,...,n2^n$:

Վերցնենք $s_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n\cdot 2^n}\dfrac{i-1}{2^n}\chi_{E_i^{(n)}}+n\chi_{F_n}(x)$ և ցույց տանք $s_n(x)\to f(x)$ ցանկացած x-ի համար : Եթե $f(x)=+\infty$ ապա $x\in F_n$ ցանկացած n-ի համար, բայց երբ $x\in F_n$ $s_n(x)=n$ և հետևաբար $\lim s_n(x)=+\infty=f(x)$:Այժմ ենթադրենք, որ $f(x)<+\infty$:Այս դեպքում կգտնվի այնպիսի $n_0\in\mathbb{N}$, որ $f(x)<n_0$ և հետևաբար $x\notin F_n$, երբ $n\ge n_0$: Այդպիսի n-երի համար $x\in E_i^{(n)}$, որևէ i-ի համար $\{1,2,...,n2^n\}$ բազմությունից, այսինքն $\dfrac{i-1}{2^n}\le f(x)<\dfrac{i}{2^n}$, մյուս կողմից, երբ $x\in E_i^{(n)}$ $s_n(x)=\dfrac{i-1}{2^n}$, ուստի $|s_n(x)-f(x)|\le\dfrac{1}{2^n}$ և հետևաբար $\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)=f(x)$ բոլոր x-եր համար X –ից:

Ակնհայտ է, որ եթե $f(x)$-ը չափելի է, ապա բոլոր $s_n(x)$-երը ևս չափելի են:

Ցույց տանք $s_n(x)$-ը չնվազող է, այսինքն ∀x $s_n(x)\le s_{n+1}(x)$:

Հիշեցնենք, որ $s_{n+1}(x)=\sum\limits_{i=1}^{(n+1)2^{n+1}}\dfrac{i-1}{2^{n+1}}\chi_{E_i^{(n+1)}}+(n+1)\chi_{F_{n+1}}(x)$:

Եթե $x\in F_{n+1}$, ապա $x\in F_n$, ուրեմն այդ x-ի համար $s_n(x)=n<n+1=s_{n+1}(x)$:

Եթե $x\in F_n$, բայց $x\notin F_{n+1}$, ապա $x\in E_i^{(n+1)}$, երբ $i\ge 1+n2^{n+1}$, ուստի

$s_{n+1}(x)=\dfrac{i-1}{2^{n+1}}\ge n=s_n(x)$:

Եթե $x\notin F_n$, ապա $x\in E_i^{(n)}$, որևէ որևէ i-ի համար $i\in\{1,2,...,n2^n\}$, այսինքն $\dfrac{i-1}{2^n}\le f(x)<\dfrac{i}{2^n}$, կամ որ նույնն է $\dfrac{2i-2}{2^{n+1}}\le f(x)<\dfrac{2i}{2^{n+1}}$, ուրեմն $x\in E_{2i-1}^{(n+1)}\cup E_{2i}^{(n+1)}$, ուստի $s_{n+1}(x)=\dfrac{2i-2}{2^{n+1}}$ կամ $s_{n+1}(x)=\dfrac{2i-1}{2^{n+1}}$: Երկու դեպքում էլ $s_{n+1}(x)\ge s_n(x)=\dfrac{i-1}{2^n}$:

Ազատվենք f(x)≥0 պայմանից: Ինչպես վերը տեսանք ցանկացած իրական ֆունկցիա ներկայացվում է $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$ տեսքով, որտեղ $f_+(x)$-ը և $f_-(x)$-ը ոչբացասական են : Կառուցենք $\{s_n^+(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{s_n^-(x)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունները այնպես, որ $s_n^+(x)\to f_+(x)$ և $s_n^-(x)\to f_-(x)$, անկհայտ է, որ

$$s_n^+(x)-s_n^-(x)\to f_+(x)-f_-(x)=f(x):$$

Բայց ինչպես վերը նշվեց $s_n^+(x)-s_n^-(x)$ պարզ ֆունկցիա է, որպես պարզ ֆունկցիա-ների տարբերություն: ↵

Խնդիր: Ապացուցել, որ եթե $f(x)$–ը սահմանափակ է, ապա կա $\{s_n(x)\}$ պարզ ֆունկցիաների հաջորդականություն, որը $f(x)$-ի զուգամիտում է հավասարաչափ:

ԼԵԲԵԳԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ

Դիցուք $(X,\mathfrak{M},\mu)$-ն չափով տարածություն է, մեր նպատակն է այդ տարածության վրա որոշված չափելի ֆունկցիաներին (ոչ բոլորին)համապատասխանեցնել որոշակի թվեր, որոնք մենք կանվանենք այդ ֆունկցիաների Լեբեգի ինտեգրալներ: Այդ բանը մենք կանենք աստիճանաբար:

Դիցուք $s(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\chi_{G_i}(x)$ չափելի պարզ ֆունկցաիա է , այսինքն G_i-երը չափելի բազմություններ են $(G_i\in\mathfrak{M}, G_i\cap G_j=\varnothing, i\neq j)$: Այստեղ մենք չենք ենթադրում, որ c_i-երը իրարից տարբեր են: Այս ֆունկցաիային և E չափելի բազմությանը համա-պատասխանեցնենք հետևյալ մեծությունը

$$I_E(s)=\sum_{i=1}^{n}c_i\mu(G_i\cap E):$$

Հեշտ է ստուգել, որ այս մեծության արժեքը կախված չի $s(x)$-ի ներկայացումից: Իրոք, դիցուք $s(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\chi_{G_i}(x)$ $(G_i\in\mathfrak{M}, G_i\cap G_j=\varnothing, i\neq j)$ $s(x)$-ի մի որևէ ներկայացում է, իսկ $c_1,c_2,...,c_k$-երը $s(x)$-ի իրարից տարբեր արժեքներն են: Այդ դեպքում պարզ է, որ $s(x)=\sum_{p=1}^{k}c_p\chi_{E_p}(x)$, որտեղ $E_p=\{x, s(x)=c_p\}$:

Այժմ

$$\sum_{i=1}^{n}c_i\mu(G_i\cap E)=\sum_{p=1}^{k}\sum_{s(x)=c_p}c_i\mu(G_i\cap E)=\sum_{p=1}^{k}c_p\sum_{s(x)=c_p}\mu(G_i\cap E)=\sum_{p=1}^{k}c_p\mu(E_p\cap E):$$

Խնդիր: Ցույց տալ, որ եթե $s(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i'\chi_{G_i}(x)$ և $\tilde{I}_E(s)=\sum_{i=1}^{n}c_i'\mu(G_i\cap E)$, ապա նորից $\tilde{I}_E(s)=I_E(s)=\sum_{p=1}^{k}c_p\mu(E_p\cap E)$, որտեղ $E_p=\{x, s(x)=c_p\}$, իսկ $c_1,c_2,...,c_k$-ն $s(x)$-ի իրարից տարբեր արժեքներն են , անկախ այն բանից $G_i\in\mathfrak{M}$ բազմությունները հատ-վում են, թե ոչ: Ցուցում՝ ապացուցել, որ $I_E(s+c\chi_G)=I_E(s)+cI_E(\chi_G)$ և կիրառել ին-դուկցիա ըստ n-ի:

Դժվար չի ստուգել, որ $I_E(cs)=cI_E(s)$ և $I_E(s_1+s_2)=I_E(s_1)+I_E(s_2)$:

Ամեն մի f ոչբացասական չափելի ֆունկցիայի համապատասխանեցնենք հետևյալ թիվը՝ $\int_E fd\mu=\sup_{0\le s(x)\le f(x)}I_E(s)$, այստեղ $s(x)$-երը չափելի պարզ ֆունկցիաներ են: Նշենք, որ $\int_E fd\mu$-ն կարող է լինել ինչպես վերջավոր այնպես էլ անվերջ:

Այժմ ենթադրենք, որ f-ը կամայական չափելի ֆունկցիա է, այն ներկայացնենք երկու ոչբացասական չափելի ֆունկցիաների տարբերության տեսքով՝ $f=f_+-f_-$ և f-ին համպատասխանեցնենք

$$\int_E f d\mu = \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu$$

մեծությունը, եթե $\int_E f_+ d\mu$ ու $\int_E f_- d\mu$ ինտգրալներից գոնէ մեկը վերջավոր է:

$\int_E f d\mu$ -ը, որը կարող է լինել ինչպես վերջավոր այնպես էլ անվերջ, կանվանենք f ֆունկցիայի Լեբեգի ինտեգրալ E բազմությունով ըստ μ չափի կամ եթե չկա շփոթու-թյուն առաջացնելու վտանգ ուղղակի Լեբեգի ինտեգրալ: Այսինքն մեր սահմանումից դուրս են մնում այն չափելի ֆունկցիաները, որոնց համար $\int_E f_+ d\mu = +\infty$ և $\int_E f_- d\mu = +\infty$:

Սահմանում: Կասենք, որ f -ը ինտեգրելի (հանրագումարելի) է E բազմության վրա ըստ μ չափի ու կգրենք $f \in L(\mu, E)$, եթե վերջավոր են $\int_E f_+ d\mu$ և $\int_E f_- d\mu$ ինտեգրալ-ները:

Այսպիսով ինտեգրալ ունենալ, դեռ չի նշանակում լինել ինտեգրելի, ինտեգրելիության համար պետք է, որ այդ ինտեգրալը լինի վերջավոր:

Բերենք Լեբեգի ինտեգրալի մի քանի պարզագույն հատկություններ:

Ա. Ցանկացած f պարզ ֆունկցիայի համար

$$\int_E f d\mu = I_E(s) :$$

Բ. Եթե f -ը նույնաբար հաստատուն է՝ $f(x) \equiv c$,ապա $\int_E c d\mu = c\mu(E)$:

Գ.Եթե f -ը ինտեգրելի է, ապա ցանկացած իրական c -ի համար ինտեգրելի է նաև cf -ը և $\int_E cf d\mu = c\int_E f d\mu$:

Դ.Եթե f -ը և g -ն $L(\mu, E)$-ից են և $f(x) \le g(x)$ բոլոր x -երի համար, ապա

$$\int_E f d\mu \le \int_E g d\mu :$$

Ե. Եթե $\mu(E) = 0$, իսկ f -ը չափելի է, ապա $\int_E f d\mu = 0$:

Զ.Եթե f -ը ոչբացասական չափելի ֆունկցիա է, իսկ $E_1 \subset E$ չափելի բազմություններ են, ապա $\int_{E_1} f d\mu \le \int_E f d\mu$

Է. Եթե $f \in L(\mu, E)$ և $E_1 \subset E$ չափելի բազմություն է, ապա $f \in L(\mu, E_1)$:

$\mapsto$ Այս հատկություններց Ա-ն, Բ-ն, Ե-ն , Զ-ն և Է. –ն հեշտությամբ ստուգվում են, ինչը թողնում ենք ընթերցողին: Ստուգենք Գ-ն և Դ-ն:

Գ-ն: Դիցուք f -ը ինտեգրելի է, այն ներկայացնենք $f = f_+ - f_-$ տեսքով, այժմ եթե $c > 0$, ապա պարզ է, որ $(cf)_+ = cf_+$ և $(cf)_- = cf_-$, ուստի եթե $c > 0$, ապա բավական է ապա-ցուցել, որ եթե f -ը ոչ բացասական է, ապա $\int_E cf d\mu = c\int_E f d\mu$: Բայց այս դեպքում

$$\int_E cf d\mu = \sup_{0 \le s(x) \le cf(x)} I_E(s) = \sup_{0 \le s(x)/c \le f(x)} I_E(s) = \sup_{0 \le s_1(x) \le f(x)} I_E(cs_1) = c \sup_{0 \le s_1(x) \le f(x)} I_E(s_1) = c\int_E f d\mu :$$

Այժմ ենթադրենք, որ $c < 0$, ուրեմն $c = -|c|$, հետևաբար բավական է ապացուցել, որ $\int_E (-f) d\mu = -\int_E f d\mu$: Բայց ակնհայտ է, որ $(-f)_+ = f_-$ և $(-f)_- = f_+$, ուստի

$$\int_E (-f) d\mu = \int_E (-f)_+ d\mu - \int_E (-f)_- d\mu = \int_E f_- d\mu - \int_E f_+ d\mu = -\int_E f d\mu :$$

$c=0$ դեպքը ակնհայտ է:

Դ-ն: Նախ, եթե $0\le f(x)\le g(x)$, ապա ցանկացած $s(x)$ պարզ ֆունկցիա, որը բավարարում է $0\le s(x)\le f(x)$ անհավարությանը կբավարարի նաև $0\le s(x)\le g(x)$ անհավարությանը, հետևաբար

$$\int_E f d\mu = \sup_{0\le s(x)\le f(x)} I_E(s) \le \sup_{0\le s(x)\le g(x)} I_E(s) = \int_E g d\mu :$$

Ընդհանուր դեպքում $f(x)\le g(x)$ հետևում է, որ $f_+(x)\le g_+(x)$ և $f_-(x)\ge g_-(x)$, ուստի ըստ վերը ասվածի $\int_E f_+ d\mu \le \int_E g_+ d\mu$ և $\int_E f_- d\mu \ge \int_E g_- d\mu$, որտեղից կունենանք

$$\int_E f d\mu = \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu \le \int_E g_+ d\mu - \int_E g_- d\mu = \int_E g d\mu : \lrcorner$$

Ինտեգրալը, որպես բազմության σ-ադիտիվ ֆունկցիա:

Թեորեմ: Դիցուք $(X,\mathfrak{M},\mu)$-ն չափով տարածություն է, իսկ f-ը X-ի վրա որոշված ոչբացասական ֆունկցիա է: Ցանկացած $E\in\mathfrak{M}$ բազմության համապատասխանեց-նենք

$$\varphi_f(E)=\int_E f d\mu$$

մեծությունը: $\varphi_f(E)$-ն $\mathfrak{M}$ σ-հանրահաշվի վրա բազմության σ-ադիտիվ ֆունկցիա է:

$\mapsto$ Մենք պետք է ապացուցենք, որ եթե $E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,\ E_k\in\mathfrak{M},\ E_k\cap E_p=\varnothing,\ k\ne p$, ապա

$$\varphi_f(E)=\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_f(E_k): \qquad \text{ԱԴ}$$

Նախ, եթե f-ը որևէ A չափելի բազմության բնութագրիչ ֆունկցիա է, ապա

$$\varphi_{\chi_A}(E)=\int_E \chi_A d\mu = \mu(A\cap E)=\mu\left(A\cap\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A\cap E_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A\cap E_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{\chi_A}(E_k):$$

Այժմ, դիցուք f-ը պարզ ֆունկցիա է, այսինքն $f(x)=s(x)=\sum_{p=1}^{n}c_p\chi_{A_p}(x)$ և $A_p\cap A_{p'}=\varnothing$, այս դեպքում ևս

$$\varphi_s(E)=\int_E s d\mu = \sum_{p=1}^{n}c_p\mu(A_p\cap E)=\sum_{p=1}^{n}c_p\mu\left(A_p\cap\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)=$$

$$\sum_{p=1}^{n}c_p\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_p\cap E_k\right)=\sum_{p=1}^{n}c_p\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_p\cap E_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{n}c_p\mu(A_p\cap E_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_s(E_k):$$

Ընդհանուր դեպքում դիցուք s-ը $0\le s\le f$ պայմանին բավարարող պարզ ֆունկցիա է, այդ դեպքում

$$\int_E s d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} s d\mu \le \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_f(E_k):$$

Ուստի

$$\varphi_f(E)\le\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_f(E_k), \qquad \text{AA}$$

քանի որ $\varphi_f(E)=\sup_{0\le s(x)\le f(x)} I_E(s)=\sup_{0\le s(x)\le f(x)}\int_E s d\mu$:

Այժմ նկատենք, որ եթե որևէ k -ի համար $\varphi_f(E_k)=+\infty$, ապա ԱԴ-ն ակնհայտ է, քանի որ այս դեպքում $\varphi_f(E)\ge\varphi_f(E_k)$ և ուեմն $\varphi_f(E)=+\infty$, ուստի ենթադրենք, որ $\varphi_f(E_k)<+\infty$ բոլոր k -երի համար:
Տված $\varepsilon>0$ թվի համար գտնենք $0\le s\le f$ պայմանին բավարարող s պարզ ֆունկցիա այնպես, որ

$$\int_{E_1} sd\mu\ge\int_{E_1} fd\mu-\varepsilon=\varphi_f(E_1)-\varepsilon \quad \text{և} \quad \int_{E_2} sd\mu\ge\int_{E_2} fd\mu-\varepsilon=\varphi_f(E_2)-\varepsilon :$$

Դա հնարավոր է անել, քանի որ $E_1\cap E_2=\varnothing$:
Այժմ պարզ է, որ

$$\varphi_f(E_1\cup E_2)=\int_{E_1\cup E_2} fd\mu\ge\int_{E_1\cup E_2} sd\mu=\int_{E_1} sd\mu+\int_{E_2} sd\mu\ge\varphi_f(E_1)+\varphi_f(E_2)-2\varepsilon :$$

ε -ի կամայականության շնորհիվ կունենանք $\varphi_f(E_1\cup E_2)\ge\varphi_f(E_1)+\varphi_f(E_2)$:
Ինդուկցիայով կունենանք $\varphi_f(E_1\cup...\cup E_k)\ge\varphi_f(E_1)+\cdots+\varphi_f(E_k)$: Մյուս կողմից
$E_1\cup...\cup E_k\subset E$, ուստի
$\varphi_f(E)\ge\varphi_f(E_1\cup...\cup E_k)\ge\varphi_f(E_1)+\cdots+\varphi_f(E_k)$
ցանկացած k -ի համար, որտեղից կունենանք

$$\varphi_f(E)\ge\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_f(E_k) \qquad \text{BB}$$

AA-ից և BB-ից կստանանք $\varphi_f(E)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_f(E_k)$: ↵
Բերենք այս թեորեմի մի քանի հետևանքներ:
Հետևանք 1. Եթե $(X,\mathfrak{M},\mu)$-ն չափով տարածություն է, իսկ $f\in L(\mu,X)$, ապա $\varphi_f(E)=\int_E fd\mu$ -ը $\mathfrak{M}$ σ -հանրահաշվի վրա բազմության σ -ադիտիվ ֆունկցիա է:
↦ Դիցուք $f=f_+-f_-$, այդ դեպքում $\varphi_f(E)=\varphi_{f_+}(E)-\varphi_{f_+}(E)$ և քանի որ $\varphi_{f_+}(E)$ ու $\varphi_{f_-}(E)$ ըստ թեորեմի σ -ադիտիվ ֆունկցիաներ են $\mathfrak{M}$ -ի վրա, ապա այդպիսին կլինի նաև $\varphi_f(E)$: ↵

Հետևանք 2. Եթե A ու B -ն չափելի բազմություններ են $A\supset B$, $\mu(A\setminus B)=0$, իսկ f -ը չափելի ֆունկցիա է, ապա $\int_A fd\mu=\int_B fd\mu$:
↦ Ունենք $A=B\cup(A\setminus B)$, ուրեմն ըստ հետևանք 1-ի $\int_A fd\mu=\int_B fd\mu+\int_{A\setminus B} fd\mu$, բայց $\int_{A\setminus B} fd\mu=0$ ըստ ինտեգրալի Ե հատկության: ↵
Այստեղից հետևում է, որ $\int_A fd\mu$ ինտեգրալի արժեքը չի փոխվի եթե A բազմությունը փոխարինենք նրանից զրո չափի բազմությամբ տարբերվող կամայական բազմու-թյամբ:
Մասնավորաբար եթե $f\sim g$ E չափելի բազմության վրա, ապա այդ ֆունկցիա-ներից մեկի ինտեգրելիությունից հետևում է մյուսի ինտեգրելիությունը և

$$\int_E fd\mu=\int_E gd\mu$$

հավասարությունը: Այլ խոսքերով ասած, ինտեգրելուց զրո չափի բազմությունը կա-րելի է անտեսել:

Հետևանք 3. Եթե $f\in L(\mu,E)$, ապա $|f|\in L(\mu,E)$ և $\left|\int_E f d\mu\right|\le\int_E|f|d\mu$:

$\mapsto$ Դիցուք $A=\{x,\ f(x)\ge 0\}\bigcap E$, $B=\{x,\ f(x)<0\}\bigcap E$, այդ դեպքում $E=A\bigcup B$, $A\bigcap B=\varnothing$, ուրեմն

$$\int_E|f|d\mu=\int_A|f|d\mu+\int_B|f|d\mu=\int_A f_+d\mu+\int_B f_-d\mu=\int_E f_+d\mu+\int_E f_-d\mu<+\infty:$$

Մյուս կողմից՝

$$\left|\int_E f d\mu\right|=\left|\int_E f_+d\mu-\int_E f_-d\mu\right|\le\int_E f_+d\mu+\int_E f_-d\mu=\int_E|f|d\mu:\lrcorner$$

ԼԵՎԻԻ ԹԵՈՐԵՄԸ

Թեորեմ: Դիցուք $0\le f_1(x)\le f_2(x)\le\cdots\le f_n(x)\le\cdots$ չափելի ֆունկցիաների չնվազող հաջորդականություն է և $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, այդ դեպքում

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu=\int_E f d\mu=\int_E\left(\lim_{n\to\infty}f_n\right)d\mu:$$

$\mapsto$ Քանի որ, $f_i\le f_j$, երբ $i\le j$, ուրեմն $\int_E f_i d\mu\le\int_E f_j d\mu$, այսինքն $\alpha_i=\int_E f_i d\mu$ թվա-յին հաջորդականություն ը չնվազող է, հետևաբար գոյություն ունի վերջավոր կամ ան-վերջ $\lim\limits_{i\to\infty}\alpha_i=\sup\limits_{i\ge1}\alpha_i=\alpha$ սահմանը:

$f\left(x\right)$-ը չափելի է, որպես չափելի ֆունկցիաների սահման և $f_i(x)\le f(x)$ $i=1,2,\dots$, ուրեմն $\alpha_i=\int_E f_i d\mu\le\int_E f d\mu$: Այստեղից անմիջապես հետևում է, որ

$$\alpha\le\int_E f d\mu:$$

Այժմ, եթե $\alpha=+\infty$, ապա թեորեմն ապացուցված է, ուստի ենթադրենք, որ $\alpha<+\infty$ և ապացուցենք, որ

$$\alpha\ge\int_E f d\mu:$$

Ըստ սահմանման $\int_E f d\mu=\sup\limits_{0\le s\le f}I_E\left(s\right)$: Վերցնենք $0\le s(x)\le f(x)$ անհավասարությանը բավարարող կամայական $s(x)$ պարզ ֆունկցիա և ցանկացած $0<c<1$ թվի համար նշանակենք $E_n=\{x; f_n(x)\ge cs(x)\}$: $f_1(x)\le f_2(x)\le\cdots\le f_n(x)\le\cdots$ պայմանից հետևում է ,

որ $E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots$, իսկ $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ հավասարությունից՝ $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$:

Մյուս կողմից , ունենք $\int\limits_E f_n d\mu\ge\int\limits_{E_n} f_n(x)d\mu\ge c\int\limits_{E_n} s(x)d\mu$: Այս անհավասարությունում

անցնելով սահմանի, երբ $n\to\infty$ և $c\to 1$, կունենանք $\alpha\ge\int\limits_E s(x)d\mu$: Այստեղ մենք

օգտագործեցինք այն փաստը, որ $\varphi(A)=\int\limits_A s(x)d\mu$ ինտեգրալը լինելով բազմության σ -

ադիտիվ ֆունկցիա անընդհատ է, այսինքն $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(E_n)=\varphi(E)$: Ստացանք, որ ցանկացած

$0\le s(x)\le f(x)$ պարզ ֆունկցիայի համար $\alpha\ge\int\limits_E s(x)d\mu=I_E(s)$,որտեղից

կունենանք $\alpha\ge\int\limits_E f d\mu$: ↲

Թեորեմ: Եթե f_1 և f_2 ինտեգրելի են E –ի վրա,ապա f_1+f_2 -ը ևս ինտեգրելի է E –ի վրա , և

$$\int\limits_E (f_1+f_2)d\mu=\int\limits_E f_1 d\mu+\int\limits_E f_2 d\mu \quad : \qquad\qquad (G)$$

↦ Սկզբում ենթադրենք, որ $f_1\ge 0$ և $f_2\ge 0$ E -ի վրա, այդ դեպքում ինչպես ապացու-ցել ենք կգտնվեն $\{s'_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ և $\{s''_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ պարզ ֆունկցիաների չնվազող հաջորդա-կանություններ այնպես, որ $s'_n(x)\to f_1(x)$, իսկ $s''_n(x)\to f_2(x)$:
Հետևաբար $s'_n(x)+s''_n(x)\to f_1(x)+f_2(x)$, նորից չնվազելով: Այժմ հաշվի առնելով այն, որ պարզ ֆունկցիաների համար $\int\limits_E (s'_n+s''_n)d\mu=\int\limits_E s'_n d\mu+\int\limits_E s''_n d\mu$ և կիրառելով Լևիի

թեորեմը կունենանք

$$\int\limits_E (f_1+f_2)d\mu=\lim_{n\to\infty}\int\limits_E (s'_n+s''_n)d\mu=\lim_{n\to\infty}\int\limits_E s'_n d\mu+\lim_{n\to\infty}\int\limits_E s''_n d\mu=\int\limits_E f_1 d\mu+\int\limits_E f_2 d\mu:$$

Քննարկենք $f_1\ge 0$ և $f_2\le 0$ դեպքը: Նշանակենք $A=\{x; f_1(x)+f_2(x)\ge 0\}$, իսկ $B=\{x; f_1(x)+f_2(x)<0\}$: Պարզ է, որ $E=A\cup B$ և $A\cap B=\varnothing$: $f=f_1+f_2$ հավասարու-թյունից կունենանք $f_1=f+(-f_2)$, բայց A բազմության վրա f -ը և $(-f_2)$ -ը ոչ բացա-սական են հետևաբար $\int\limits_A f_1 d\mu=\int\limits_A f d\mu+\int\limits_A (-f_2)d\mu$, այսինքն

$$\int\limits_A f d\mu=\int\limits_A f_1 d\mu+\int\limits_A f_2 d\mu: \qquad\qquad (a)$$

Նմանապես B բազմության վրա կունենանք $(-f_2)=f_1+(-f)$ և նորից B բազմության վրա f_1 -ը և $(-f)$ -ը ոչ բացասական են, ուստի $-\int\limits_B f_2 d\mu=-\int\limits_B f d\mu+\int\limits_B f_1 d\mu$: Այսինքն

$$\int\limits_B f d\mu=\int\limits_B f_1 d\mu+\int\limits_B f_2 d\mu \quad : \qquad\qquad (b)$$

Գումարելով (a) և (b) հավասարությունները այս դեպքում ևս կստանանք (G)-ն:
Պարզ է, որ եթե $f_1 \le 0$ և $f_2 \le 0$ E-ի վրա դեպքը հեշտությամբ կբերվի $f_1 \ge 0$ և $f_2 \ge 0$ դեպքին:
Ընդհանուր դեպքում E բազմությունը կտրոհենք չորս իրար հետ չհատվող բազմությունների այնպես, որ նրանցից յուրաքանչյուրի վրա f_1-ը և f_2-ը նշանները պահպանեն և կկիրառենք վերը ստացված հավասարությունները յուրաքանչյուր դեպքի համար, այնուհետև ստացված հավասարությունները գումարելով կստանանք պահանջվող հավասարությունը: ↵
Հետևանք: Լևիի թեորեմում ֆունկցիաների ոչ բացասական լինելու պահանջը կարելի է անտեսել:
↦ Իրոք, եթե $f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_n(x) \le \cdots$ ինտեգրելի ֆունկցիաների չնվազող հաջորդականություն է, ապա կարող ենք դիտարկել $f_n(x) - f_1(x)$ հաջորդականությունը, որը ակնհայտորեն կբավարարի Լևիի թեորեմի բոլոր պայմաններին, ուստի
$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu - \int_E f_1 d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E (f_n - f_1) d\mu = \int_E (f - f_1) d\mu = \int_E f d\mu - \int_E f_1 d\mu,$$
որտեղից կունենանք $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$: ↵
Ձևակերպենք Լևիի թեորեմը ֆունկցիոնալ շարքերի համար:
Թեորեմ: Դիցուք $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ոչ բացասական չափելի ֆունկցիաների հաջորդականություն է որոշված E չափելի բազմության վրա,այդ դեմքում
$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n \, d\mu \ :$$
Այլ խոսքերով ասած ոչ բացասական չափելի ֆունկցիոնալ շարքը կարելի է անդամ առ անդամ ինտեգրել: Այս պնդման ապացույցը ակնհայտ է:
Ֆատուի թեորեմ: Եթե $f_n(x)$–ը ոչ բացասական չափելի ֆունկցիաների հաջորդականություն է որոշված E չափելի բազմության վրա և $f(x) = \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$, ապա
$$\int_E f d\mu \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \ :$$
↦ Ինչպես հայտնի է $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\ge n} \{a_k\}$:Ուրեմն, եթե նշանակենք
$$g_n(x) = \inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), \dots\},$$
ապա $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$: Բայց $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը բավարարում է Լևիի թեորեմի պայմաններին, հետևաբար $\int_E f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty}\int_E g_n d\mu$:
Բայց ակնհայտ է, որ $g_n(x) \le f_n(x)$, ուստի $\int_E g_n d\mu \le \int_E f_n d\mu$, որտեղից կունենաք
$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n d\mu = \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E g_n d\mu \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu \ : ↵$$

Լեբեգի թեորեմը (ինտեգրալի նշանի տակ սահմանի անցնելու մասին):

Դիցուք $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ չափելի ֆունկցիների հաջորդականություն է, որը E չափելի բազմության վրա զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային: Եթե $|f_n(x)| \le \varphi(x)$ և $\varphi(x)$-ը ինտեգրելի է E - ի վրա, ապա f –ը նույնպես ինտեգրելի է այնտեղ և

$$\int_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu:$$

$\mapsto$ Քանի որ $f(x)$-ը չափելի ֆունկցիների հաջորդականություն սահման է, ապա այն չափելի է: $|f_n(x)| \le \varphi(x)$ անհավասարությունից և φ-ի ինտեգրելիությունից հետևում է բոլոր f_n-երի ինտեգրելիությունը:Մյուս կողմից ունենք, որ $-\varphi(x) \le f_n(x) \le \varphi(x)$, որտեղից կունենանք $\varphi(x) - f_n(x) \ge 0$, իսկ $\varphi(x) + f_n(x) \ge 0$:Կիրառելով Ֆատուի թեորեմը $\{\varphi(x) - f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ և $\{\varphi(x) + f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ոչ բացասական հաջորդականություն-ների համար, կստանանք

$$\int_E (\varphi + f)\,d\mu \le \varliminf_{n\to\infty}\int_E (\varphi + f_n)\,d\mu \qquad (+)$$

$$\int_E (\varphi - f)\,d\mu \le \varliminf_{n\to\infty}\int_E (\varphi - f_n)\,d\mu \qquad (-)$$

(+)-ից անմիջապես կստանանք

$$\int_E f\,d\mu \le \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu \quad , \qquad (++)$$

իսկ (-)-ից կունենանք $-\int_E f\,d\mu \le \varliminf_{n\to\infty}(-\int_E f_n\,d\mu)$, բայց հայտնի է, որ

$\varliminf_{n\to\infty}(-\int_E f_n\,d\mu) = -\varlimsup_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu$, այսինքն (-)-ից կստանանք,որ

$$\int_E f\,d\mu \ge \varlimsup_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu: \qquad (--)$$

(++) և (--) միասին համարժեք են հետևյալին

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu \le \int_E f\,d\mu \le \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu \le \varlimsup_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu:$$

Այսինքն՝ $\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu = \varlimsup_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu:$ ↵

$$\int_E f\,d\mu = \varliminf\int_E f_n\,d\mu \le \varlimsup\int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu \;\Rightarrow$$

$$\int_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu$$

↵:

Հետևանք : Դիցուք E–ն չափելի բազմություն է և μ(E)–ն վերջավոր է: Եթե $f_n(x)$-ը չափելի ֆունկցիայի հավասարաչափ սահմանափակ հաջորդականություն է (գոյություն ունի $M \geq 0$ հաստատուն, այնպես, որ $\left|f_n(x)\right| \leq M$) և $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$,

ապա $\int\limits_{\mathrm{E}} f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{E} f_n d\mu$:

↦ Քանի որ $\int\limits_{\mathrm{E}} \mathrm{M} d\mu = \mathrm{M}\mu(\mathrm{E}) < +\infty$, ուրեմն նախորդ թեորեմում որպես $\varphi(x)$ կարող ենք վերցնել նույնաբար M ֆունկցիան:

Դիտողություն: Այս բոլոր թեորեմներում ամեուրեք զուգամիտությունը կարելի է փոխարինել համարյա ամենուրեք զուգամիտությամբ:

ՌԻՄԱՆԻ ԵՎ ԼԵԲԵԳԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ԿԱՊԸ:

Դիցուք ունենք [a, b] –ում որոշված f ֆունկցիան, եթե այն ինտեգրելի է Ռիմանի (Լեբեգի) իմաստով, ապա կգրենք $f \in R(a,b)$ ($f \in L(a,b)$)և նրա Ռիմանի (Լեբեգի) ինտեգրալը կնշանակենք $(R)\int\limits_a^b f(x)dx$ $\left((L)\int\limits_a^b f(x)dx\right)$:

Պարզենք Ռիմանի և Լեբեգի ինտեգրալների կապը:

Թեորեմ 1: Եթե f –ը [a,b]–ում ինտեգրելի է Ռիմանի իմաստով, ապա այն ինտեգրելի է նաև Լեբեգի իմաստով և

$$(R)\int\limits_a^b f(x)dx = (L)\int\limits_a^b f(x)dx:$$

↦ Եթե f –ը [a,b]–ում ինտեգրելի է Ռիմանի իմաստով, ապա այն սահմանափակ է: տարկենք $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ տրոհումների հաջորդականություն, այնպես, որ P_{k+1}-ը լինի P_k-ի մանրացում, այսինքն P_{k+1}-ի տրոհման կետերը լինեն տրոհման կետեր նաև P_k-ի համար: Ենթադրենք նաև, որ P_k տրոհման տրամագիծը՝ $d(P_k) \to 0$, երբ $k \to \infty$: Եթե P_k ն հետևյալն է

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < .. < x_{n_k} = b, \text{ ապա } d(P_k) = \max_{0 \leq i \leq n_k - 1}\left(x_{i+1} - x_i\right):$$

Ցանկացած P_k տրոհման համար սահմանենք $L_k\left(x\right)$ և $U_k\left(x\right)$պարզ ֆունկցիա-ները հետևյալ ձևով $U_k(a)=L_k(a)=f(a)$, $L_k(x)=m_i=\inf\limits_{x\in\left[x_i,x_{i+1}\right]} f(x)$, $U_k(x)=M_i=\sup\limits_{x\in\left[x_i,x_{i+1}\right]} f(x)$,

երբ $x\in\left[x_i,x_{i+1}\right], i=0,1,2,\ldots$ ։ Ակնհայտ է, որ $\left\{L_k(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ և $\left\{U_k(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ պարզ ֆունկցիաների հաջորդականությունները բավարարում են հետևյալ անհավասարություններին

$$\ldots\le \underbrace{L_k\left(x\right)\le L_{k+1}\left(x\right)}_{\text{չնվազող հաջորդականություն}}\ldots\le f\left(x\right)\le\ldots\le \underbrace{U_{k+1}\left(x\right)\le U_k\left(x\right)}_{\text{չաճող հաջորդականություն}}\ldots$$

Այսինքն այդ հաջորդականությունները ունեն սահմաններ $\lim\limits_{k\to\infty}L_k\left(x\right)=L\left(x\right)$ ու $\lim\limits_{k\to\infty}U_k\left(x\right)=U\left(x\right)$, որոնք բավարարում են $L\left(x\right)\le f\left(x\right)\le U\left(x\right)$ պայմանին

և նրանց համար կիրառելի է Լևիի թեորեմը, այն է

$\lim\limits_{k\to\infty}\left(L\right)\int\limits_a^b L_n\left(x\right)dx=\left(L\right)\int\limits_a^b L\left(x\right)dx$ և $\lim\limits_{k\to\infty}\left(L\right)\int\limits_a^b U_n\left(x\right)dx=\left(L\right)\int\limits_a^b U\left(x\right)dx$ ։

Բայց ակնհայտ է, որ$\left(L\right)\int\limits_a^b L_k\left(x\right)dx=\sum\limits_{i=1}^{n_k-1} m_i\vartriangle x_i$, $\left(L\right)\int\limits_a^b U_k\left(x\right)dx=\sum\limits_{i=0}^{n_k-1} M_i\vartriangle x_i$, այստեղ

$\sum\limits_{i=1}^{n_k-1} m_i\vartriangle x_i$ -ը և $\sum\limits_{i=0}^{n_k-1} M_i\vartriangle x_i$ -ը համապատասխանաբար Դարբուի ստորին և վերին գու-մարներն են: Քանի, որ f –ը [a,b]–ում ինտեգրելի է Ռիմանի իմաստով և $d(P_k)\to 0$, երբ

$k\to\infty$, ուրեմն $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n_k-1} M_i\vartriangle x_i=\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n_k-1} m_i\vartriangle x_i=\left(R\right)\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$ ։

Այսինքն

$$\left(L\right)\int\limits_a^b L\left(x\right)dx=\left(R\right)\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=\left(L\right)\int\limits_a^b U\left(x\right)dx\ , \qquad \text{(R)}$$

որտեղից կստանանք, որ $\left(L\right)\int\limits_a^b\left(U\left(x\right)-L\left(x\right)\right)dx=0$, այսինքն

$U\left(x\right)-L\left(x\right)=0$ համարյա ամենուրեք, քանի որ $U\left(x\right)-L\left(x\right)\ge 0$ ։ Այսինքն

$U\left(x\right)=L\left(x\right)=f\left(x\right)$ համարյա ամենուրեք, որտեղից կհետևի, որ $f\left(x\right)$-ը չափելի է ու Լեբեգի իմաստով ինտեգրելի և

$$\left(L\right)\int\limits_a^b L\left(x\right)dx=\left(L\right)\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=\left(L\right)\int\limits_a^b U\left(x\right)dx \qquad \text{(L)}$$

(R) – ից և (L) -ից կունենանք

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (L)\int_a^b f(x)\,dx :$$

Թեորեմ 2: Որպեսզի [a,b]–ում սահմանափակ f չափելի ֆունկցիան լինի ինտեգրելի Ռիմանի իմաստով անհրաժեշե է և բավարար, որ այն լինի համարյա ամենուրեք անընդհատ:

↦ Հեշտությամբ ապացուցվում է, որ եթե x-ը տրոհման կետ չի ոչ մի P_k-ի համար, ապա որպեսի այն լինի անընդհատության կետ f ֆունկցիայի համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսի այդ կետում L և U ֆունկցիաները ընդունեն նույն արժեքը, այն է $U(x) = L(x)$: Վերևում մենք տեսանք, որ եթե f-ը ինտեգրելի է Ռիմանի իմաստով, ապա $U(x) = L(x)$ համարյա ամենուրեք, բայց բոլոր տրոհումների կետերի միավո-րումը հաշվելի է, ուստի ունի զրո չափ: Այսինքն եթե [a,b]–ից հեռացնենք այդ կետերը և այն կետերը որտեղ $U(x) \neq L(x)$, ապա մնացած բազմության չափը կլինի $b-a$, այսինքն f-ը h.ա. անընդհատ է:

Հակադարձը, եթե f-ը h.ա. անընդհատ է, ապա $U(x) = L(x)$ h.ա., ուրեմն

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k-1} m_i \vartriangle x_i = (L)\int_a^b L(x)\,dx = (L)\int_a^b U(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k-1} M_i \vartriangle x_i ,$$

Այսիքն Դարբուի ստորին և վերին գումարները ունեն նույն սահմանը, ինչը նշանակում է, որ f-ը Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի է: