15.11.21 Գաուս Զեյդելի մեթոդ

$$X^{k+1} = -(L+D)^{-1} U x^{k} + (L+D)^{-1} b$$

$$B_{GZ} = -(L+D)^{-1} U$$

զուգամիտության անհրաժեշտ և բավարար պայման

$$\rho(-(L+D)^{-1} U) < 1$$

Թեորեմ 1. $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \le q\,|a_{ii}|$, $0<q<1$, $i=1,2,\dots,n$

Թեորեմ 2: $\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}} |a_{ij}| \le q\,|a_{jj}|$ $j=1,2,\dots,n$

$0<q<1$

Թեորեմ: A սիմետրիկ, դրական որոշյալ մատրից է, ապա A-ի համար Գաուս-Զեյդելի մեթոդը կլինի զուգամետ:

Ապ. $A=A^T>0 \Rightarrow \forall x\neq 0 \quad (Ax,x)>0$

$A = L + D + U$ (1)

A-ն սիմետրիկ է $\Rightarrow L = U^T$

~~(Ax~~ Ցույց տանք, որ մեթոդը զուգամետ է $\Rightarrow$ պետք է ցույց տանք որ $\rho(B_{GZ})<1$

$B_{0z} = -(L+\mathcal{D})^{-1}U$

Դիցուք λ-ն $(L+\mathcal{D})^{-1}U$ մատրիցի սեփական արժեքն է, որը համապատասխանում է e սեփական վեկտորին։

$$\Rightarrow (L+\mathcal{D})^{-1}Ue = \lambda e \quad (2)$$

$$Ue = \lambda (L+\mathcal{D})e \quad (3)$$

$$(Ue, e) = \lambda(Le, e) + \lambda(\mathcal{D}e, e)$$

// Կոմպլեքս դեպքի դառնում ա

$(a, b) = \overline{(b, a)}$ //

$$(Ax, y) = (x, A^T y)$$

$$(Ue, e) = \lambda(U^T e, e) + \lambda(\mathcal{D}e, e)$$

$$(Ue, e) = \lambda(e, Ue) + \lambda(\mathcal{D}e, e)$$

/* $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ $a_{ii} \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$ */

Նշ. $(Ue, e) = \gamma = \alpha + i\beta$

$$(\mathcal{D}e, e) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} e_i^2 = \cancel{\gamma}\, \delta > 0$$

$$De = \begin{pmatrix} a_{11} e_1 \\ a_{22} e_2 \\ \dots \\ a_{nn} e_n \end{pmatrix} \qquad e = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$$

Թեորեմ՝ Դրական որոշյալ մատրիցի դեպքում

վերին ռելաքսացիայի մեթոդը զուգամետ է.

$$A = A^T > 0$$

$$0 < \lambda_{min} \le \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \le \lambda_{max}$$

$$e_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)^T \qquad 0 < \lambda_{min} \le \frac{(Ae_i, e_i)}{(e_i, e_i)} \le \lambda_{max}$$

$$0 < \lambda_{min} \le a_{ii} \le \lambda_{max} \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$(Ue, e) = \gamma = \alpha + i\beta$$

$$(e, Ue) = \overline{\gamma}$$

$$\gamma = \lambda \overline{\gamma} + \lambda \sigma \Rightarrow \lambda = \frac{\gamma}{\overline{\gamma} + \sigma}$$

$$|\lambda| = \frac{|\gamma|}{|\overline{\gamma} + \sigma|} = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha + \sigma)^2 + \beta^2}}$$

$$|\lambda| < 1$$

$$\alpha^2 + \beta^2 < (\alpha + \sigma)^2 + \beta^2$$

$$2\alpha\sigma + \sigma^2 > 0$$

$$\sigma(2\alpha + \sigma) > 0, \quad \sigma > 0 \Rightarrow 2\alpha + \sigma > 0$$

$(Ae, e) = (Le, e) + (De, e) + (Ue, e) =$

$= (U^T e, e) + \sigma + \gamma = (e, Ue) + \sigma + \gamma =$

$= \bar{\gamma} + \sigma + \gamma = 2\alpha + \sigma > 0$

$\Rightarrow$ դրական որոշյալ մատրիցի դեպքում միշտ կարող ենք կիրառել Գաուս-Զեյդելի մեթոդը։

• Դիցուք $Ax = b$, որտեղ $A = A^T > 0$ (1)

Դիտարկենք պարզագույն իտերացիոն պրոցեսը

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{\tau} = -Ax^k + b \quad (2), \quad \tau > 0$$

Դիտողություն

$$x^{k+1} = (I + \tau A)x^k + \tau b \quad (3)$$

$$x = (I - \tau A) + \tau b \quad (4)$$ ((1)-ից համարժեք է)

Նշ $z^k = x - x^k$ (k-րդ մոտարկման սխալանքը)

$$(4) - (3) = z^{k+1} = (I - \tau A)z^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\|z^{k+1}\|_2 \leq \|(I - \tau A)\|_2 \|z^k\|_2 \quad (6)$$

$$\|z^k\|_2 \le \|(I-\tau A)\|_2 \, \|z^{k-1}\|_2 \le \|(I-\tau A)\|_2^2 \, \|z^{k-2}\|$$

$$\le \dots \le \|(I-\tau A)\|_2^k \, \|z^0\| \quad (7)$$

Նշ. A-ի սեփական արժեքները են

$0 < \lambda_{min} = \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n = \lambda_{max}$

$I - \tau A \qquad \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots, \qquad \mu_i = 1 - \tau\lambda_i$

$\lambda_{min} \le \lambda_i \le \lambda_{max}$ բազմ. $-\tau$

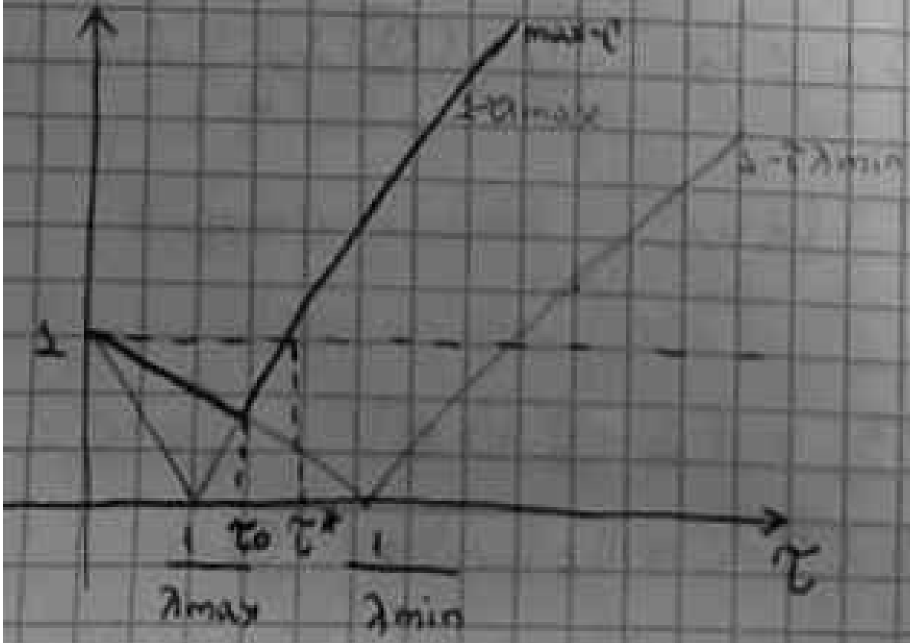
$-\tau\lambda_{max} \le -\tau\lambda_i \le -\tau\lambda_{min} \Rightarrow$

$1 - \tau\lambda_{max} \le 1 - \tau\lambda_i \le 1 - \tau\lambda_{min}$

$$\boxed{1 - \tau\lambda_{max} \le \mu_i \le 1 - \tau\lambda_{min}} \quad (8)$$

$\rho((I - \tau A)) = \max\{|1 - \tau\lambda_{max}|, |1 - \tau\lambda_{min}|\}$

Գծենք գրաֆիկները.



$|1 - \tau\lambda_{max}| = 1$

$\tau\lambda_{max} - 1 = 1$

$\tau_* = \dfrac{2}{\lambda_{max}}$

Թեորեմ I: Եթե $\tau < \tau_* = \dfrac{2}{\lambda_{max}}$ (սպեկտրալ շառավիղը < 1), ապա Ռիչարդսոնի մեթոդը կլինի զուգամետ:

Եթե $\tau \in (0, \tau_*)$, ապա $\rho(I - \tau A) < 1$:

$$\rho(I - \tau_0 A) = \min_{\tau > 0} \rho(I - \tau A)$$

գտնենք τ_0-ն: Դա գտնվում է հետևյալ պայմանից:

$\tau \lambda_{max} - 1 = 1 - \tau \lambda_{min} \quad \Rightarrow$

$\tau(\lambda_{min} + \lambda_{max}) = 2 \quad \Rightarrow \tau_0 = \dfrac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}$