

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
Кафедра теории вероятностей и математической статистики**

## **СРОЧНАЯ ПРЕМИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПРОЦЕНТ- НЫХ СТАВОК В АФФИННЫХ МОДЕЛЯХ**

Доклад

Рымкевич Викторией Сергеевны  
студентки 4 курса,  
специальность  
«актуарная математика»

Преподаватель:  
доктор физико-математических  
наук, профессор Г.А. Медведев

Минск, 2016

# **Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models**

Gregory R. Duffee  
Haas School of Business  
University of California—Berkeley  
Visiting Scholar, Federal Reserve Bank of San Francisco

First version November 1998  
This version November 2000  
Previously circulated under the title  
Forecasting Future Interest Rates: Are Affine Models Failures?

## Резюме

Мы обнаружили, что стандартный класс аффинных моделей производит плохой прогноз будущих изменений в доходностях казначейских облигаций. Прогноз лучше получается при предположении, что доходности следуют случайному блужданию. Несостоятельность этих моделей обусловлена одной из их ключевых черт: компенсация, которую инвесторы получают за риск, кратна дисперсии риска. Это значит, что компенсация риска не может изменяться независимо от волатильности процентной ставки. Я также описываю и эмпирически оцениваю класс моделей, которые шире чем стандартный аффинный класс. Эти «существенно(essentially) аффинные» модели сохраняют удобство манипулирования обычными моделями, но позволяют компенсации за риск процентной ставки изменяться независимо от волатильности. Эта дополнительная гибкость оказывается полезной в формировании точных прогнозов будущих доходностей.

Можем ли мы использовать теорию финансов для того, чтобы узнать что-нибудь об эмпирическом поведении доходностей казначейских облигаций, которые мы еще не знаем? В частности, можем ли мы улучшить нашу способность предсказывать будущие уровни доходности? Давно установленный факт о доходностях казначейских облигаций: текущая временная структура содержит информацию о будущих временных структурах. Например, доходность долгосрочных облигаций, как правило, со временем снижается, когда наклон кривой доходности круче, чем обычно. Эти предсказательные отношения основаны исключительно на поведении временных рядов доходностей. Известно из теории финансов, что перекрестное и временное поведение временной структуры должны быть связаны внутренне непротиворечивым образом, чтобы избежать арбитражных возможностей. В принципе, наложение этого ограничения должно позволить нам эксплуатировать больше информации текущей временной структуры, и тем самым улучшить прогнозы. Однако на практике, существование неарбитражных моделей налагает другие ограничения ради удобства манипулирования, таким образом, их ценность в качестве инструментов прогнозирования априори неясна.

Я изучаю способность прогнозирования аффинного класса моделей временной структуры. Под названием «аффинные» я имею в виду модели, где доходность облигаций с нулевым купоном, их физическая (т.е. истинная) динамика и их нейтральная к риску (т.е. с поправкой на риск) вероятностная мера являются аффинными функциями лежащего в основе вектора состояния. Было разработано множество неаффинных моделей, однако большая часть внимания финансовой сферы сосредоточена именно на аффинных моделях, в силу податливости и видимого изобилия данного класса.

Хотя прогнозирование будущих доходностей и так имеет важное значение, модель, совместимая с теорией финансов и производящая точные прогнозы, может внести и более глубокий вклад в науку о финансах. Это должно позволить нам рассмотреть ключевую проблему: объяснить хорошо задокументированное изменение во времени ожидаемых доходностей активов. В контексте временной структуры, объяснить изменение во времени ожидаемых доходностей значит

объяснить отклонение гипотезы ожиданий процентных ставок. Иными словами, мы хотели бы иметь интуитивное объяснение положительной корреляции между наклоном кривой доходности и избыточными доходами долгосрочных облигаций. Если же модель производит плохие прогнозы будущих доходностей (и таким образом плохие прогнозы будущих цен на облигации), то маловероятно, что эта модель сможет пролить свет на экономическую часть, лежащую в основе несостоятельности гипотезы ожиданий.

Первый главный вывод, сделанный в данной статье, - класс аффинных моделей, который к настоящему времени изучен наиболее широко, не достаточно хорош в прогнозировании. Имеется ввиду тот класс, который включает в себя многофакторные обобщения Vasicek (1977) и Cox, Ingersoll, Ross (1985), а также в значительной степени проанализирован в Dai и Singleton (2000) как «полностью (completely) аффинный». Автор приспособливает общую трехфакторную полностью аффинную модель к казначейской временной структуре (со сроками погашения от трех месяцев до десяти лет) за период с 1952 по 1994 годы. Прогнозы доходностей, произведенные с использованием этих расчетных моделей, как правило, хуже прогнозов, произведенных при простом предположении, что доходность следует случайному блужданию. Это вывод справедлив для прогнозов как в пределах, так и вне пределов (1995 - 1998) выборки.

Рассмотрим еще более интересную ситуацию, в которой эти расчетные модели терпят неудачу. Произведенные ими ошибки прогноза доходностей строго отрицательно коррелируют с наклоном кривой доходности. Другими словами, эти модели не воспроизводят ключевое эмпирическое соотношение между ожидаемыми доходностями и наклоном кривой доходности; их недооценка ожидаемых избыточных доходов долгосрочных облигаций становится наибольшей, когда наклон временной структуры крут.

Этот недостаток является следствием двух особенностей казначейской временной структуры, в сочетании с ограничением, встроенным в полностью аффинные модели. Первая особенность в том, что доходности казначейских облигаций во времени колеблются в широких пределах с обеих сторон их (выборочных) средних. Другими словами, мы наблюдаем множество форм временной структуры в данных. Второй особенностью является то, что по всему диапазону срока погашения, безусловное среднее избыточной доходности облигаций мало по сравнению с вариацией условных средних избыточной доходности. В то время как средняя доходность по казначейским облигациям ненамного больше нуля, наклон временной структуры предсказывает относительно большое количество вариаций в избыточных доходах облигаций. Одним из следствий этого второго признака является то, что, как было отмечено Fama и French (1993), знак предсказанных избыточных доходов казначейских облигаций изменяется с течением времени.

Полностью аффинные модели не одновременно воспроизводят эти две особенности поведения временной структуры. Основным ограничением в этих моделях является то, что компенсация риска кратна дисперсии риска. Такая структура гарантирует, что модели удовлетворяют требованию отсутствия арбитража: компенсация риска стремится к нулю, если риск стремится к нулю. Но поскольку

отклонения неотрицательны, эта структура также накладывает существенное ограничение на поведение временных рядов компенсаций, которые инвесторы ожидают получить за встречу с заданным риском. Величина компенсации ограничена нулем, поэтому она не может менять знак с течением времени.

Как будет пояснено в статье, единственный способ, при котором эта система может производить ожидаемые доходности с низкими средними и высокими волатильностями – это лишь при некоторых значениях основных факторов, порождающих временную структуру, имеющую сильную положительную асимметрию. Но эта сильная положительная асимметричность ограничивает способность модели соответствовать широкому спектру форм временной структуры. Таким образом, полностью аффинные модели могут соответствовать любой из этих особенностей доходностей казначейских облигаций, но не обеим одновременно.

Однако не все потеряно. Вторым главным выводом данной статьи является то, что полностью аффинный класс может быть расширен, с целью разорвать связь между компенсацией риска и волатильностью процентной ставки. Это расширение из полностью аффинного класса до «существенно аффинного» класса, описанное здесь, является безболезненным, в том смысле, что аффинные свойства траекторий и поперечных сечений цен облигаций сохраняются в существенно аффинных моделях. Существование расширений полностью аффинного класса не ново (Chacko, 1997, строит общий пример равновесия), но эта статья является первой, в которой описывается и эмпирически исследуется общее, очень податливое расширение полностью аффинной модели временной структуры. Я обнаружил, что существенно аффинные модели могут производить более точные прогнозы доходностей, по сравнению с полностью аффинными моделями, как в пределах, так и вне пределов выборки. Тем не менее, существует компромисс между гибкостью в прогнозировании будущих доходностей и гибкостью в соответствии волатильности процентной ставки.

Статья организована следующим образом. Структура аффинных моделей подробно обсуждается в разделе 1. В разделе 2 интуитивно объясняется почему полностью аффинные модели работают плохо. В разделе 3 описана методика оценки. В разделе 4 представлены эмпирические результаты. В разделе 5 представлены выводы.

# 1. Аффинные модели временной структуры

## 1.1. Аффинное установление цены облигации

Основой аффинных моделей временной структуры является структура Duffie и Kan (1996). Их модель, которая кратко изложена здесь, описывает эволюцию цен на облигации по нейтральной к риску вероятностной мере. Неопределенность порождается  $n$  броуновскими движениями,  $\tilde{W}_t \equiv (\tilde{W}_{t,1}, \dots, \tilde{W}_{t,n})'$ . Имеется  $n$  переменных состояния, обозначенные через  $X_t \equiv (X_{t,1}, \dots, X_{t,n})'$ . Текущая номинальная процентная ставка, обозначенная  $r_t$ , аффинная функция переменных состояния:

$$r_t = \delta_0 + \delta X_t,$$

где  $\delta_0$  – скаляр и  $\delta$  –  $n$ -вектор. Динамика переменных состояния по нейтральной к риску вероятностной мере задается следующим равенством:

$$dX_t = [(K\theta)^Q - K^Q X_t]dt + \Sigma S_t d\tilde{W}_t \quad (1)$$

где  $K^Q$  и  $\Sigma$  –  $n \times n$  матрицы,  $(K\theta)^Q$  –  $n$ -вектор. Верхний индекс  $Q$  используется для того, чтобы отличать параметры по риск-нейтральной мере от соответствующих параметров по физической мере. Матрица  $S_t$  является диагональной с элементами

$$S_{t(ii)} \equiv \sqrt{\alpha_i + \beta_i' X_t} \quad (2)$$

где  $\beta_i$  –  $n$ -вектор и  $\alpha_i$  – скаляр. Удобно объединить вектора  $\beta_i$  в матрицу  $\beta$ , где  $\beta_i'$  – это  $i$ -ая строка матрицы  $\beta$ . Скаляры  $\alpha_i$  объединяются в  $n$ -вектор  $\alpha$ . Последующее обсуждение предполагает, что динамика (1) хорошо определена, что требует того, чтобы  $\alpha_i + \beta_i' X_t$  являлись неотрицательными для всех  $i$  и всех возможных  $X_t$ . Ограничения параметров, которые обеспечивают выполнение этих требований, находятся в Dai и Singleton (2000).

Обозначим цену облигации с нулевым купоном в момент времени  $t$  и со сроком погашения в момент времени  $t + \tau$  как  $P(X_t, \tau)$ . Duffie и Kan показали:

$$P(X_t, \tau) = \exp[A(\tau) - B(\tau)' X_t] \quad (3)$$

где  $A(\tau)$  – скалярная функция и  $B(\tau)$  –  $n$ -значная функция. Таким образом, доходность облигации является аффинной функцией вектора состояния:

$$Y(X_t, \tau) = (1/\tau)[-A(\tau) + B(\tau)' X_t] \quad (4)$$

Функции  $A(\tau)$  и  $B(\tau)$  можно вычислить численно путем решения ряда обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

## 1.2. Цена риска и ожидаемые доходности облигаций

Модель временной структуры дополняется указанием динамики  $X_t$  по физической мере, что эквивалентно указанию динамики цены риска. Обозначим государственный ценовой дефлятор через  $\pi_t$ . Относительная динамика  $\pi_t$ :

$$\frac{d\pi_t}{\pi_t} = -r_t dt - \Lambda_t' dW_t \quad (5)$$

где вектор  $W_t$  задан броуновским движением по физической мере. Элемент  $i$  вектора  $\Lambda_t$  представляет собой цену риска, связанного с броуновским движением  $W_{t,i}$ . Динамика  $X_t$  по физической мере может быть записана в терминах  $\Lambda_t$  и параметрах (1):

$$dX_t = ((K\theta)^Q - K^Q X_t)dt + \Sigma S_t \Lambda_t dt + \Sigma S_t dW_t \quad (6)$$

Текущая динамика цены облигации может быть записана в виде

$$\frac{dP(X_t, \tau)}{P(X_t, \tau)} = (r_t + e_{\tau,t})dt + v_{\tau,t}dW_t$$

где через  $e_{\tau,t}$  обозначена текущая ожидаемая избыточная доходность полагающаяся владельцу облигации; ожидаемая доходность, сверх  $r_t$ , за владение на в момент времени  $t$  облигацией со сроком погашения  $\tau$ . Применяя лемму Ито в сочетании со структурой ОДУ, Duffie и Kan показывают, что

$$e_{\tau,t} = -B(\tau)' \Sigma S_t \Lambda_t \quad (7)$$

$$v_{\tau,t} = -B(\tau)' \Sigma S_t \quad (8)$$

Равенство (7) говорит о том, что изменения во времени ожидаемых избыточных доходов задаются изменениями матрицы волатильности  $S_t$  и вектора цены риска  $\Lambda_t$ . Полностью параметрическая модель динамики доходности облигации требует указания функциональной формы для  $\Lambda_t$ . Эта форма должна быть достаточно гибкой, чтобы учитывать эмпирически наблюдаемое поведение ожидаемых избыточных доходов. Таким образом, для того, чтобы мотивировать выбор функциональной формы для  $\Lambda_t$ , мы кратко рассмотрим особенности поведения доходов облигаций.

Есть немало литературы, о том, что ожидаемые избыточные доходы по казначейским облигациям (сверхдоходы по краткосрочным казначейским векселям), в среднем, расположены около нуля, и изменяются систематически с временной структурой.<sup>1</sup> Когда наклон временной структуры является более крутым, чем обычно, ожидаемые избыточные доходы по облигации высоки, в то время как когда наклон менее крутой, ожидаемые избыточные доходы низкие, часто даже отрицательные. Таким образом, по всему спектру сроков погашения, отношение среднего ожидаемых избыточных доходов облигации к их стандартному отклонению является небольшим.

Более ранние работы также показали, что форма временной структуры связана с волатильностью доходностей.<sup>2</sup> Однако отношение наклона к ожидаемому

---

<sup>1</sup> Объем литературы слишком велик, чтобы полностью здесь цитировать. Ранние исследования включают в себя Fama и Bliss (1987). Две стандартные ссылки: Fama и French (1989, 1993).

<sup>2</sup> Объем такой литературы также слишком велик, чтобы цитировать полностью. В одной важной статье, Chan, Karolyi, Longstaff и Sanders (1992) изучают чувствительность волатильности к уровню краткосрочных процентных ставок. Andersen и Lund (1997) усовершенствовали их работу путем разложения вариации волатильности процентных ставок на компоненту, связанную с уровнем краткосрочных процентных ставок, и компоненту стохастической волатильности.

доходу не просто аналог отношению волатильности к ожидаемому доходу. Подтверждающие это данные находятся в таблице I, в которой приведены результаты регрессии месячных избыточных доходов облигации по наклону временной структуры и волатильности доходности. Ежемесячные доходы по портфелям из казначейских облигаций взяты из Center for Research in Security Prices. Избыточные доходы по этим портфелям получены путем вычитания текущего дохода по трехмесячному казначейскому векселю. Наклон временной структуры измерен как разница между пятилетней и трехмесячной бескупонными доходностями в конце месяца. Бескупонные доходности интерполированы из купонных облигаций с использованием метода McCulloch и Kwon (1991), реализованного Bliss (1997).<sup>3</sup> Волатильность доходности – это стандартное отклонение доходности пятилетней бескупонной облигации, измеряемое как корень квадратный из суммы квадратов дневных изменений в доходности в течение месяца.

Период выборки: с июля 1961 по декабрь 1998. Результаты в таблице I свидетельствуют о том, что волатильность в месяце  $t$  не имеет статистически значимой предсказательной силы для избыточных доходов облигации в месяце  $t + 1$ . В отличие от этого, все оцениваемые параметры наклона являются значимыми на десятипроцентном уровне, и половина из них значима на пятипроцентном уровне. Кроме того, вариация прогнозируемых избыточных доходов велика относительно их среднего. Рассмотрим, например, облигации со сроками погашения между тремя и четырьмя годами. Средняя избыточная доходность составляет 7 базисных пунктов в месяц, в то время как стандартное отклонение прогнозируемых избыточных доходов составляет примерно 25 базисных пунктов. В результатах, не приведенных здесь, я обнаружил, что выводы остаются прежними после включения волатильности доходностей других облигаций как независимых переменных регрессии.

Вооружившись этой информацией об эмпирическом поведении доходов облигации, мы теперь обсудим три альтернативные параметризации  $\Lambda_t$ .

### 1.3. Полностью аффинные модели

Fisher и Gilles (1996) и Dai и Singleton (2000) принимают следующую параметризацию  $\Lambda_t$ . Пусть  $\lambda_1$  является  $n$ -вектором. Тогда вектор цены риска  $\Lambda_t$  задается как

$$dX_t = ((K\theta)^Q - K^Q X_t)dt + \Sigma S_t \Lambda_t dt + \Sigma S_t dW_t \quad (9)$$

Этот класс содержит в себе многофакторную версию модели Vasicek (1977) и Cox и др. (1985; далее CIR). Главной причиной популярности этой формы является то, что вектор  $\Lambda_t S_t$  аффинный по  $X_t$ . Это подразумевает аффинную динамику  $X_t$  как по риск-нейтральной, так и по физической мерам. Аффинная динамика  $X_t$  по физической мере позволяет расчет различных свойств условных плотностей дискретно выбранных доходностей в замкнутой форме. Эти свойства подробно обсуждаются в Duffie, Pan, и Singleton (1999) и Singleton (1999). Менее

---

<sup>3</sup> Я благодарю Rob Bliss за предоставленные мне данные о доходности.



важным является тот факт, что величина  $\Lambda_t' \Lambda_t$ , которая представляет собой текущую дисперсию государственного ценового дефлятора, также аффинная по  $X_t$ . Это последнее свойство и лежит в основе термина «полностью аффинные», что пояснено в следующем разделе.

Эта структура накладывает два взаимосвязанных ограничения на  $\Lambda_t$ . Во-первых, вариация вектора цены риска полностью определяется вариацией  $S_t$ . Поэтому вариации ожидаемых избыточных доходов облигаций задаются исключительно волатильностью доходностей, вывод, который кажется несовместимым с данными из таблицы I. Во-вторых, знак элемента  $i$  вектора  $\Lambda_t$  такой же, как и у элемента  $i$  вектора  $\lambda_1$ , так как диагональные элементы матрицы  $S_t$  предполагаются неотрицательными. Важность этого ограничения будет пояснена в разделе 2.

#### 1.4. Существенно аффинные модели

Существенно аффинный класс включает в себя полностью аффинный класс. Сначала определим элементы диагональной матрицы  $S_t^-$  как

$$S_{t(ii)}^- = \begin{cases} (\alpha_i + \beta_i' X_t)^{-1/2}, & \text{если } \inf(\alpha_i + \beta_i' X_t) > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Таким образом, если величина диагонального элемента  $i$  матрицы  $S_t$  выше нуля, то его обратная величина является диагональным элементом  $i$  матрицы  $S_t^-$ . Для любого диагонального элемента матрицы  $S_t$  с величиной ниже нуля (независимо от того, доступна ли она с учетом динамики  $X_t$ ) соответствующий элемент матрицы  $S_t^-$  устанавливается равным нулю. Поэтому элементы матрицы  $S_t^-$  не возрастают резко, когда соответствующие элементы матрицы  $S_t$  обращаются в ноль.

Форма вектора  $\Lambda_t$ , используемая в существенно аффинной модели записывается в следующем виде:

$$\Lambda_t = S_t \lambda_1 + S_t^- \lambda_2 X_t \quad (10)$$

где  $\lambda_2$  – матрица размерности  $n \times n$ . Эта форма разделяет с (9) два важных свойства. Во-первых, когда  $S_{t(ii)}$  обращается в ноль,  $\Lambda_t$  не устремляется в бесконечность. Во-вторых, вектор  $S_t \Lambda_t$  аффинный по  $X_t$ . Следовательно, физическая динамика  $X_t$  является аффинной, что совместимо с эмпирической оценкой.

Есть три важных различия между (9) и (10). Во-первых, при  $\lambda_2 \neq 0$ , величина  $\Lambda_t' \Lambda_t$  не аффинная по  $X_t$ . Следовательно, эта модель не является полностью аффинной, и дисперсия государственного ценового дефлятора не влияет на цены облигаций. Это и есть основание для термина «существенно аффинный». Во-вторых, нарушается тесная связь между вектором цены риска и матрицей волатильности. Существенно аффинная постановка обеспечивает независимую вариацию цен риска, которая является своего рода гибкостью, необходимой для соответствия эмпирическому поведению ожидаемых избыточных доходов облигаций. В-третьих, удаляется ограничение на знак отдельных элементов  $\Lambda_t$ .

Для дальнейшего использования нам необходимо явно определить физическую динамику  $X_t$ . Подставим (10) в (6) и определим  $I^-$  как диагональную матрицу размерности  $n \times n$  с элементами  $I_{ii}^- = 1$ , если  $S_{t(ii)}^- \neq 0$ ,  $I_{ii}^- = 0$ , если  $S_{t(ii)}^- = 0$ . Тогда физическая динамика в существенно аффинных моделях может быть записано в следующем виде

$$dX_t = ((K\theta)^Q - K^Q X_t)dt + \Sigma[S_t^2 \lambda_1 + I^- \lambda_2 X_t]dt + \Sigma S_t dW_t \quad (11)$$

Приводя слагаемые и обозначая  $i$ -ый элемент вектора  $\lambda_1$  через  $\lambda_{1i}$ , (11) может быть переписано в следующем виде

$$dX_t = [K\theta - KX_t]dt + \Sigma S_t dW_t \quad (12a)$$

где

$$K = K^Q - \Sigma \begin{pmatrix} \lambda_{11}\beta'_1 \\ \vdots \\ \lambda_{1n}\beta'_n \end{pmatrix} + \Sigma I^- \lambda_2 \quad (12b)$$

и

$$K\theta = (K\theta)^Q + \Sigma \begin{pmatrix} \alpha_1 \lambda_{11} \\ \vdots \\ \alpha_n \lambda_{1n} \end{pmatrix}. \quad (12c)$$

### 1.5. Пример существенно аффинной модели

Следующая двухфакторная модель иллюстрирует ряд особенностей существенно аффинной модели. Текущая процентная ставка  $r_t$  задана гауссовским процессом, и есть некоторый другой фактор  $f_t$ , заданный процессом квадратного корня. Удобно начать с моделирования их динамики по физической мере. В соответствии с этой мерой, процессы независимы, как показано в (13):

$$d \begin{pmatrix} f_t \\ r_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_f & 0 \\ 0 & k_r \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} \bar{f} \\ \bar{r} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_t \\ r_t \end{pmatrix} \right) dt + \begin{pmatrix} \sigma_f & 0 \\ 0 & \sigma_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{f_t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} W_{t,1} \\ W_{t,2} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Модель имеет закрытое описание динамики рыночной цены риска. Если мы принимаем полностью аффинную версию в (9), результатом будет классическая модель Vasicek (1977) для  $r_t$ . В такой постановке, переменная  $f_t$  не имеет никакого значения для цен облигаций, и мы получаем стандартную однофакторную гауссовскую модель.

Однако если мы используем существенно аффинную спецификацию для рыночной цены риска, фактор  $f_t$  может повлиять на цены облигации, даже если он не может повлиять на  $r_t$ . Причина заключается в том, что компенсация, которую инвесторы требуют за встречу с риском  $W_{t,2}$  может изменяться с изменением  $f_t$ . Существенно аффинная модель определяет цену риска  $\Lambda_t$  как

$$\Lambda_t = \begin{pmatrix} \lambda_{11}\sqrt{f_t} \\ \lambda_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{2(11)} & \lambda_{2(12)} \\ \lambda_{2(21)} & \lambda_{2(22)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_t \\ r_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}\sqrt{f_t} \\ \lambda_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_{2(21)} & \lambda_{2(22)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_t \\ r_t \end{pmatrix}$$

Динамика государственного ценового дефлятора, следовательно, задается как

$$\frac{d\pi_t}{\pi_t} = -r_t dt - \left( \begin{array}{c} \lambda_{11}\sqrt{f_t} \\ \lambda_{12} + \lambda_{2(21)}f_t + \lambda_{2(22)}r_t \end{array} \right)' d \begin{pmatrix} W_{t,1} \\ W_{t,2} \end{pmatrix}.$$

Динамики  $r_t$  и  $f_t$  по нейтральной к риску мере (из (12a) и (12b)):

$$\begin{aligned} d \begin{pmatrix} f_t \\ r_t \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} k_f + \sigma_f \lambda_{11} & 0 \\ \sigma_r \lambda_{2(21)} & k_r + \sigma_r \lambda_{2(22)} \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} \bar{f}^Q \\ \bar{r}^Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_t \\ r_t \end{pmatrix} \right) dt \\ & + \begin{pmatrix} \sigma_f & 0 \\ 0 & \sigma_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{f_t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} \tilde{W}_{t,1} \\ \tilde{W}_{t,2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

где под  $\bar{f}^Q$  и  $\bar{r}^Q$  понимаются среднее  $f_t$  и  $r_t$  соответственно по риск-нейтральной мере.

Есть три важных различия между этим описанием динамик цен облигации и стандартной моделью Vasicek. Во-первых, текущий уровень процентной ставки  $r_t$  влияет на цену риска процентной ставки при помощи параметра  $\lambda_{2(22)}$ . В модели Vasicek цена риска процентной ставки является постоянной. Во-вторых, есть источник неопределенности цен облигации, который не зависит от физической динамики  $r_t$ . Фактор  $f_t$  влияет на цены облигаций при помощи параметра  $\lambda_{2(21)}$ . Chacko (1997) в своей работе строит аффинную модель временной структуры, специально разработанную для того, чтобы показать эту вторую особенность, и мой пример был вдохновлен его (в значительной степени более сложной) моделью. Мы увидим в разделе 4, что такого рода особенность имеет решающее значение для понимания фактической динамики доходностей казначейских облигаций. В-третьих, цена риска, связанная с инновациями в  $W_{t,2}$ , может менять знак в зависимости от уровня фактора  $f_t$ .

Поскольку эта модель принимает в качестве примитива динамику государственного ценового дефлятора, она не в состоянии предоставить нам основанное на полезности объяснение перемен знака в готовности инвесторов к встрече с риском. Тем не менее, как мы знаем из результатов стохастической дифференциальной полезности, при произвольной динамике государственного ценового дефлятора, существует некоторый градиент полезности и оптимальный процесс потребления, которые согласуются с динамикой дефляторов. Более детальное обсуждение см. Duffie (1996).

Существенно аффинная структура  $\Lambda_t$ , хотя и является более гибкой по сравнению с полностью аффинной структурой, тем не менее, накладывает ограничения на возможную динамику цен облигаций. Заметим, что один элемент из  $K$  (первая матрица правой части равенства (13)) является таким же, как и соответствующий элемент  $K^Q$  (первая матрица правой части равенства (14)). Элемент (1, 2) должен быть равен нулю как по физической, так и по риск-нейтральной мерам. В противном случае, дрейф  $f_t$  при  $f_t = 0$  мог бы быть отрицательным (потому что это зависело бы от  $r_t$ ), что не может быть позволено, т.к.  $\sqrt{f_t}$  входит в  $S_t$ .

Чтобы освободить этот элемент, и таким образом позволить более гибкую спецификацию цены риска, мы можем смоделировать  $f_t$  как гауссовский процесс. Пример такой модели рассмотрен Fisher (1998). С другой стороны, если и  $f_t$ , и  $r_t$  были смоделированы как диффузионные процессы квадратного корня, существенно аффинная структура  $\Lambda$  была бы идентична полностью аффинной структуре. Это иллюстрирует более общий случай, отмеченный Duffie и Kan (1996) и Dai и Singleton (2000), и результаты эмпирической работы данной статьи. С аффинным установлением цены облигации, существует компромисс между построением модели, которая может учитывать сложную динамику волатильности, и модели, которая может учитывать сложную динамику ожидаемых доходов.

### 1.6. Полу-аффинные модели

Duarte (2000) в своей работе выбирает альтернативное обобщение полностью аффинных моделей. Пусть  $\lambda_0$  представляет собой  $n$ -вектор. Вектор цены риска описывается равенством

$$\Lambda_t = \lambda_0 + S_t \lambda_1.$$

В такой форме, элементы  $\Lambda_t$  могут менять знак с течением времени, однако они не могут изменяться независимо от  $S_t$ . Как отмечалось в разделе 1.4, эта последняя особенность оказывается несовместимой с эмпирическими данными. Таким образом, на первый взгляд кажется, что полу-аффинная постановка допускает некоторую, но не всю, гибкость существенно аффинной постановки. Тем не менее, существуют параметризации  $S_t$ , для которых полу-аффинная модель обеспечивает большую гибкость, чем это делает существенно аффинная модель. Одним из примеров является многофакторная модель CIR, которая находится в центре внимания эмпирической работы Duarte. Следует отметить, что существенно аффинные и полу-аффинные структуры вложены в структуру со следующим вектором цены риска:

$$\Lambda_t = \lambda_0 + S_t \lambda_1 + S_t^- \lambda_2 X_t.$$

Как и в случае полу-аффинной формы  $\Lambda_t$ , эта более общая форма предполагает неаффинную динамику  $X_t$  по физической мере. Duarte (2000) отмечает, что с неаффинной физической динамикой, как правило, необходимы аппроксимация или методы моделирования для воспроизведения свойств дискретно выбранных доходностей.

### 1.7. Каноническая форма существенно аффинных моделей

Существует множество нормировок, которые могут быть приняты в отношении аффинных моделей. Здесь я последовал примеру Dai и Singleton's (2000) канонической полностью аффинной модели. Они приводят матрицу  $\Sigma$  к единичной матрице. Они также формируют  $X_t$  так, что если  $m$  коэффициентов влияют на текущую дисперсию  $X_t$  (потому что они входят в один из диагональных элементов  $S_t$ ) и  $n - m$  коэффициентов – нет, то влияющие  $m$  коэффициентов выносятся на позиции от 1 до  $m$ , а не влияющие располагают на позициях от  $m + 1$  до  $n$ .

Полученная модель называется  $A_m(n)$  моделью. Они также полагают первые  $m$  элементов  $\alpha$  равными 0, а оставшиеся  $n - m$  элементов – равными 1. Таким образом, их версия (2)

$$S_{t(ii)} = \begin{cases} \sqrt{X_{t,i}} & i = 1, \dots, m; \\ \sqrt{1 + \beta'_i X_t} & i = m + 1, \dots, n \end{cases} \quad (15)$$

где для  $i = m + 1, \dots, n$ ,

$$\beta'_i = (\beta_{i1} \dots \beta_{im} \ 0 \dots 0).$$

Используя их структуру, мы можем записать диагональные элементы  $S_t^-$  и  $I^-$  как

$$S_{t(ii)}^- = \begin{cases} 0 & i = 1, \dots, m; \\ (1 + \beta'_i X_t)^{-1/2} & i = m + 1, \dots, n \end{cases} \quad (16)$$

$$I_{ii}^- = \begin{cases} 0 & i = 1, \dots, m; \\ 1 & i = m + 1, \dots, n \end{cases}$$

Следует отметить, что в формуле (11) матрица  $\lambda_2$  есть только в слагаемом  $I^- \lambda_2 X_t$ . Поэтому мы можем нормализовать первые  $m$  строк  $\lambda_2$ , положив их элементы равными нулю. Теперь рассмотрим формулу (7), задающую текущий избыточный доход держателю облигации с оставшимся сроком до погашения  $\tau$ . Из (10), (15) и (16), в канонической форме это может быть записано в виде

$$e_{\tau,t} = -B(\tau)' \left[ \begin{pmatrix} 0_m \\ \lambda_{1(m+1)} \\ \vdots \\ \lambda_{1n} \end{pmatrix} + \left( \begin{pmatrix} M_{m \times m}^a & 0_{m \times (n-m)} \\ M_{(n-m) \times m}^b & 0_{(n-m) \times (n-m)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{m \times n} \\ L_{(n-m) \times n} \end{pmatrix} \right) X_t \right]. \quad (17)$$

В формуле (17),  $0_m$  -  $m$ -вектор нулей. Матрица  $0_{p \times q}$  определена аналогично. Подматрица  $M^a$  – диагональная матрица с  $i$ -ым диагональным элементом равным  $i$ -ому элементу вектора  $\lambda_1$ . Строка  $i$  матрицы  $M^b$  задается первыми  $m$  элементами вектора  $\lambda_{1(m+i)} \beta'_{m+i}$ . Подматрица  $L$  состоит из строк  $m + 1, \dots, n$  матрицы  $\lambda_2$ .

Дополнительная гибкость существенно аффинной модели в соответствии изменений во времени ожидаемых избыточных доходов по облигациям учитывается в матрице  $L$ . В полностью аффинной постановке,  $L$  является нулевой матрицей. Поэтому все элементы  $X_t$ , которые не влияют на текущую волатильность  $X_t$  (т.е. элементы  $m + 1, \dots, n$ ), так же неспособны повлиять на текущие ожидаемые избыточные доходы облигаций. Когда матрица  $L$  ненулевая, все такие элементы вектора  $X_t$  могут повлиять на ожидаемые избыточные доходы. Кроме того,  $L$  предоставляет возможность для всех других элементов  $X_t$  влиять на ожидаемые доходы другим путем, отличным от использования  $M^a$  и  $M^b$ .

Если все элементы  $X_t$  влияют на текущую волатильность (т.е., коррелированная многофакторная модель CIR или, как ее называют Dai и Singleton (2000), модель  $A_n(n)$ ), то матрицы  $L$  нет (у нее 0 строк). Поэтому существенно аффинная модель обобщает полностью аффинную модель только тогда, когда есть хотя бы один элемент в  $X_t$ , который не влияет на текущую волатильность  $X_t$ .

## 2. Интуитивное понимание несостоятельности полностью аф-финных моделей

Успешная модель временной структуры должна быть согласована с множеством форм временных структур, наблюдаемых в данных. Например, модель должна быть способна производить низкие пологие временные структуры, низкие крутые временные структуры и такие же высокие временные структуры. Кроме того, модель должна воспроизводить эмпирически наблюдаемые закономерности в ожидаемых доходах по облигациям; или, что эквивалентно, производить прогнозы будущих доходностей, которые включают предсказательную информацию из наклона временной структуры. В этом разделе объясняется, что аппроксимация полностью аффинными моделями исторического поведения казначейских доходностей не достигнет одновременно обеих этих целей.

Для наших целей, ключевыми особенностями избыточных доходов по облигациям является то, что они, в среднем, небольшие и демонстрируют достаточно предсказуемую вариацию. Напомним, из раздела 1, что  $e_{\tau,t}$  обозначает текущий ожидаемый доход по облигации со сроком погашения  $\tau$ . Несмотря на то, что мы не наблюдаем текущие доходы, данные в таблице I показывают, что отношение  $E(e_{\tau,t})/\sqrt{Var(e_{\tau,t})}$  невелико – значительно ниже единицы – для всех  $\tau$ . (Это отношение является обратным к коэффициенту вариации  $e_{\tau,t}$ .)

Ниже мы увидим, что полностью аффинные модели могут быть параметризованы для производства низких значений  $E(e_{\tau,t})/\sqrt{Var(e_{\tau,t})}$  для всех  $\tau$ . Тем не менее, полностью аффинные модели могут аппроксимировать это поведение только отказавшись от способности аппроксимировать широкий спектр форм временных структур. С другой стороны, они могут быть параметризованы для аппроксимации наблюдаемых форм временных структур, но не поведения ожидаемых избыточных доходов. Интуитивные догадки, лежащие в основе этого результата, лучше всего видны в два этапа. Сначала мы рассмотрим поведение однофакторных полностью аффинных моделей. Затем мы увидим, что важные свойства однофакторных моделей переносятся и на многофакторные.

### 2.1. Однофакторные модели

Интуитивное понимание полностью аффинной однофакторной модели очень просто. Ожидаемые текущие избыточные доходы облигации,  $e_{\tau,t}$ , пропорциональны дисперсии фактора, следовательно, они ограничены нулем. Для того чтобы случайная величина, которая ограничена нулем, имела стандартное отклонение значительно больше, чем его среднее, она должна иметь сильно скошенное распределение. Эта высокая асимметричность является очень жестким ограничением на допустимые значения  $e_{\tau,t}$ , и, таким образом, жестким ограничением на допустимые значения фактора.

Чтобы отчетливо это увидеть, мы покажем это математически. Наша цель состоит в том, чтобы воспроизвести тот факт, что отношение  $E(e_{\tau,t})/\sqrt{Var(e_{\tau,t})}$

мало. Мы ограничимся рассмотрением негауссовской модели, так как для полностью аффинной гауссовской модели  $Var(e_{\tau,t}) = 0$ . Такая модель записывается в виде:

$$\begin{aligned} r_t &= \delta_0 + x_t, \\ dx_t &= k(\theta - x_t)dt + \sigma\sqrt{x_t}dW_t, \\ \Lambda_t &= \lambda_1\sqrt{x_t}. \end{aligned}$$

Из формулы (7), текущий ожидаемый избыточный доход по облигации со сроком погашения  $\tau$ :

$$e_{\tau,t} = -B(\tau)\sigma\lambda_1 x_t.$$

Таким образом, отношение, обратное коэффициенту вариации  $e_{\tau,t}$ ,

$$\frac{E(e_{\tau,t})}{\sqrt{Var(e_{\tau,t})}} = \frac{E(x_t)}{\sqrt{Var(x_t)}} = \frac{\theta}{\sqrt{Var(x_t)}}. \quad (18)$$

Равенство (18) неявно накладывает ограничение  $B(\tau)\sigma\lambda_1 < 0$ , которое является условием того, что среднее избыточных доходов облигации будет положительным. Положим  $E(e_{\tau,t})/\sqrt{Var(e_{\tau,t})} = 0,3$ , что является типичным значением отношения для предсказываемых избыточных доходов в таблице I. Положим безусловное среднее и стандартное отклонение текущей процентной ставки равным 5,5 и 2,9 процентов соответственно. Эти значения соответствуют моментам трехмесячной доходности векселя за период с 1952 по 1998 годы. В этой модели  $Var(r_t) = Var(x_t)$ . Положим, что стандартное отклонение в (18) производит  $\theta = 0,87$  процента. Отсюда следует, что  $\delta_0 = 4,63$  процента, чтобы соответствовать среднему текущей процентной ставки.

Требование о том, что среднее  $x_t$  мало по сравнению с его стандартным отклонением, дает модели мало гибкости в производстве краткосрочных процентных ставок со значениями ниже среднего. Текущая процентная ставка  $r_t$  не может быть меньше, чем  $\delta_0 = 4.63$  процента. Но за период с 1952 по 1998 годы, трехмесячная доходность колебалась от 0,6 до 16 процентов. Иными словами, параметры модели и наблюдаемая вариация краткосрочных процентных ставок в течение этого периода подразумевают диапазон  $x_t$  от  $-4,0$  до  $11,4$ ; предполагаемые  $x_t$  являются отрицательными в более чем 40 процентах ежемесячных наблюдений. Неотрицательность в подразумеваемых значениях  $x_t$  требует  $\theta > 4,9$  процентов. При таком  $\theta$ , модель будет обладать гибкостью для соответствия широкому спектру краткосрочных процентных ставок, наблюдаемых в данных, однако соотношение  $E(e_{\tau,t})/\sqrt{Var(e_{\tau,t})}$  будет превышать 1,6.

Мы также можем подумать об ограничении этой модели на поведение процентных ставок с точки зрения асимметричности в ожидаемых избыточных доходах. С целью произвести небольшое значение отношения  $E(e_{\tau,t})/\sqrt{Var(e_{\tau,t})}$ , модель будет генерировать ожидаемые избыточные доходы, которые всегда положительны, обычно очень близки к нулю и иногда значительно выше нуля. Но, как было отмечено в разделе 1, наблюдаемые ожидаемые избыточные доходы не



настолько положительно искажены; они варьируются от положительных до отрицательных.

## 2.2. Многофакторные модели

Многофакторные модели лучше проявляют себя при аппроксимации поведения ожидаемых избыточных доходов облигаций. Например, очень просто сгенерировать близкое к нулю значение  $E(e_{\tau,t})/\sqrt{Var(e_{\tau,t})}$  для определенного срока погашения, сохраняя при этом достаточную гибкость в соответствии формам временных структур. В многофакторной модели CIR единственным требованием является то, что цены риска (элементы вектора  $\Lambda_t$ ) имеют разные знаки. Если один из элементов  $\Lambda_t$  является положительным, а другой – отрицательным, то при каком-то сроке погашения факторные нагрузки будут утяжелять эти цены риска так, что будет  $E(e_{\tau,t}) = 0$  и  $Var(e_{\tau,t}) > 0$ .

Тем не менее, полностью аффинные модели не будут производить близкие к нулю значения  $E(e_{\tau,t})/\sqrt{Var(e_{\tau,t})}$  для всех сроков погашения, при этом позволяя широкий спектр форм временных структур. Слегка упрощенно, интуитивно понятно, что на доходности долгосрочных облигаций влияет только один фактор – фактор с наибольшей устойчивостью по нейтральной к риску мере. Таким образом, мы можем использовать ранние интуитивные догадки, выведенные для однофакторных моделей, чтобы сделать вывод, что многофакторные модели не могут воспроизводить наблюдаемое поведение долгосрочных доходностей.

Причина, почему только один фактор будет влиять на доходности долгосрочных облигаций, носит практический, а не теоретический характер. Существует множество различных видов скачков, которые влияют на временную структуру (например, уровня, наклона, кривизны), и многофакторные модели учитывают это разнообразие при помощи факторов, которые исчезают при различных ставках по риск-нейтральной мере. В принципе, мы могли бы построить модель с множеством факторов, влияющих на доходности долгосрочных облигаций. Единственным требованием является заставить факторы придерживаться одной и той же низкой скорости возврата к среднему. Но делая это, мы ослабляем главное преимущество многофакторных моделей – способность соответствовать различным видам скачков временной структуры. Таким образом, такая модель будет производить плохую аппроксимацию временной структуры относительно данных модели, в которой каждый фактор имеет собственную скорость возврата к среднему.

Неспособность полностью аффинных моделей соответствовать эмпирическому поведению облигаций можно увидеть в оценках параметров трехфакторных полностью аффинных моделей в Dai и Singleton (2000). Они используют доходности процентного свопа в долларах США для оценивания таких же обычных трехфакторных полностью аффинных моделей, какие оцениваются в данной работе. Я использую параметры предпочтенной ими модели и доходности свопа для производства подразумеваемых временных рядов вектора состояния и ожидаемых избыточных доходов по облигациям. Результаты такого действия, кото-

рые не указаны ни в одной из таблиц, указывают на то, что модель отражает сочетание низкого среднего и высокой волатильности ожидаемых избыточных доходов. Тем не менее, в течение одной четверти наблюдений в их данных, предполагаемое значение вектора состояния нарушает ограничение на неотрицательность. Такие нарушения, как правило, происходят, когда длинный конец временной структуры значительно ниже его среднего значения. Таким образом, результаты, полученные Dai и Singleton, подтверждают вывод о том, что полностью аффинные модели не соответствуют одновременно поведению ожидаемых доходов по облигациям и множеству форм временной структуры в данных.

### 3. Оценивание существенно аффинных моделей

#### 3.1. Трехфакторные аффинные модели

Все аффинные модели, оцениваемые в данной статье, имеют три основных фактора ( $n = 3$ ). Litterman и Scheinkman (1991) обнаружили, что три фактора описывают подавляющее большинство движений цен казначейских облигаций. Это удачно, так как обычные трехфакторные аффинные модели уже в вычислительном плане тяжело оцениваются из-за количества параметров. Добавление еще одного фактора сделало бы это исследование нецелесообразным. Оцениваются семь моделей: четыре полностью аффинных модели и три существенно аффинных модели. Полностью аффинная модель оценивается для каждого возможного количества факторов, которые не влияют на текущую волатильность  $X_t$  (от трех до нуля). Используется каноническая форма, описанная в разделе 1.7. В их обозначениях, оценивались модели от  $A_0(3)$  до  $A_3(3)$ . Другие оцениваемые модели являются существенно аффинными обобщениями  $A_0(3)$ ,  $A_1(3)$  и  $A_2(3)$ . (Напомним, что для  $A_3(3)$  не существует существенно аффинного обобщения.)

Оцениваемые модели имеют следующие выражения для текущей процентной ставки, физической динамики  $X_t$  и вектора цены риска:

$$r_t = \delta_0 + \delta_1 X_{t,1} + \delta_2 X_{t,2} + \delta_3 X_{t,3}, \quad (19a)$$

$$d \begin{pmatrix} X_{t,1} \\ X_{t,2} \\ X_{t,3} \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} (K\theta)_1 \\ (K\theta)_2 \\ (K\theta)_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t,1} \\ X_{t,2} \\ X_{t,3} \end{pmatrix} \right] dt + S_t dW_t, \quad (19b)$$

$$S_{t(ii)} = \sqrt{\alpha_i + (\beta_{i1} \ \beta_{i2} \ \beta_{i3}) X_t}, \quad (19c)$$

$$\Lambda_t = S_t \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \lambda_{13} \end{pmatrix} + S_t^- \begin{pmatrix} \lambda_{2(11)} & \lambda_{2(12)} & \lambda_{2(13)} \\ \lambda_{2(21)} & \lambda_{2(22)} & \lambda_{2(23)} \\ \lambda_{2(31)} & \lambda_{2(32)} & \lambda_{2(33)} \end{pmatrix} X_t. \quad (19d)$$

В зависимости от модели в (19a) - (19d) накладываются различные ограничения на параметры.

#### 3.2. Данные

Я использую доходности бескупонных казначейских облигаций в конце месяца (интерполированные из купонных облигаций), рассчитанные с использованием метода из работы McCulloch и Kwon (1991). Их выборка, которая заканчивается в феврале 1991 года, расширена в работе Bliss (1997). Весь набор данных охватывает период с января 1952 года по декабрь 1998 года.<sup>4</sup> Я ограничился на

---

<sup>4</sup> Bliss и McCulloch-Kwon используют немного различные методы фильтрации, поэтому доходности, сообщаемые ими на перекрывающихся периодах, в точности не совпадают. Отсюда возникает вопрос о том, где склеить эти ряды вместе. Я использую доходности из McCulloch и Kwon в течение всего их периода выборки, а данные Bliss – после февраля 1991 года.

сроках погашения меньших либо равных десяти годам из-за большого числа отсутствующих наблюдений за облигациями с более длительными сроками погашения.

Для того, чтобы выполнить тесты как в, так и вне пределов выборки, я оцениваю модели временной структуры используя данные с 1952 по 1994 годы. Последние четыре года данных резервируются для построения ошибок прогноза за пределами выборки.

### 3.3. Методика оценки

Я оцениваю эти модели с использованием метода квази-максимального правдоподобия (МКМП), который особенно легко реализовать для полностью и существенно аффинных моделей. Хотя МКМП не использует всю информацию в плотности вероятности доходностей, он в полной мере использует информацию о первом и втором условных моментах временной структуры. Таким образом, МКМП будет учитывать в аффинных моделях взаимосвязь между соответствием условных средних и условных дисперсий.

Еще одно преимущество МКМП (которое он разделяет с методом максимального правдоподобия и связанными с ним методами) является то, что существует положительная вероятность того, что оцениваемая модель действительно может генерировать наблюдаемый временной ряд временных структур. Это является важной задачей оценивания аффинных моделей временных структур. Как отмечено в разделе 2, существует компромисс между соответствием коэффициентов вариации ожидаемых избыточных доходов облигаций и соответствием множеству форм временных структур, наблюдаемых в данных. Модель, оцененная МКМП, будет гарантировать, что вектор состояния в момент времени  $t$ , вытекающий из доходностей в момент времени  $t$ , будет находиться в допустимом пространстве векторов состояния (чтобы избежать вероятности нулевого вектора). В противоположность этому, рассмотрим такие методы, как эффективный метод моментов (ЭММ), который сравнивает выборочные моменты данных с моментами распределения модели. Эти методы не требуют, чтобы оцениваемая модель временной структуры была достаточно гибкой для воспроизведения форм временной структуры в данных. Параметры модели в Dai и Singleton (2000), которые были оценены с помощью ЭММ, иллюстрируют этот факт.

Я реализовываю МКМП, следуя примеру Fisher и Gilles (1996), в котором содержится более подробное описание. Я предполагаю, что в конце каждого месяца  $t$ ,  $t = 1, \dots, T$ , доходности по  $n$  облигациям измеряются без ошибки. (Напомним, что  $n$  – размерность вектора состояния.) Эти облигации имеют фиксированные сроки до погашения  $\tau_1, \dots, \tau_n$ . Доходности других  $k$  облигаций предполагаются полученными с некоррелированными погрешностями измерений с нулевыми средними. Ковариационная матрица этих ошибок измерения постоянна и обозначена  $V$ .

Для того, чтобы вычислить значение логарифмического правдоподобия для вектора параметров модели, объединим «идеальные» (т.е. измеренные без ошибки без ошибки) наблюдаемые доходности в вектор  $Y_t$ , а «неидеальные»

наблюдаемые доходности - в вектор  $\tilde{Y}_t$ . Обозначим вектор параметров  $\Theta$ . При заданном  $\Theta$ ,  $Y_t$  может быть получен с использованием (4), а вектор состояния  $\hat{X}_t$  как в (20):

$$\hat{X}_t = H_1^{-1}(Y_t - H_0) \quad (20)$$

В (20)  $H_0$  представляет собой  $n$ -вектор с элементами  $i$  задаваемыми отношением  $A(\tau_i)/\tau_i$ , а  $H_1$  -  $n \times n$  матрицу со строками  $i$  задаваемыми отношением  $B(\tau_i)/\tau_i$ . Вектор параметров модели должен согласовываться с  $Y_t$ . Это обеспечивается требованием, чтобы  $\hat{X}_t$  был из допустимого пространства  $X_t$ , что эквивалентно требованию, чтобы диагональные элементы  $S_t$  в (19a)с) были действительными.

При известном значении  $\hat{X}_t$ , могут быть вычислены доходности для других  $k$  облигаций. Соберем их все в вектор  $\hat{\tilde{Y}}_t$ . Тогда вектор ошибки измерения в месяце  $t$  находится как  $\epsilon_t = \hat{\tilde{Y}}_t - \tilde{Y}_t$ . Для вычисления значения квази-правдоподобия, предположим, что условное распределение переменных состояния через один период является многомерным нормальным и равно

$$f_X(X_{t+1}|X_t)$$

Математическое ожидание и ковариационная матрица  $X_{t+1}$  может быть вычислена с использованием результатов из приложения, и таким образом  $f_X(X_{t+1}|X_t)$  известно. Затем распределение  $Y_{t+1}$  при условии  $Y_t$  равно

$$f_Y(Y_{t+1}|Y_t) = \frac{1}{|\det(H_1)|} f_X(\hat{X}_{t+1}|\hat{X}_t)$$

Также предположим, что ошибки измерений имеют совместное нормальное распределение  $f_\epsilon(\epsilon_t)$ . Тогда логарифмическое правдоподобие наблюдения в момент  $t$ :

$$\hat{X}_t = H_1^{-1}(Y_t - H_0) \quad (21)$$

Стационарность накладывается на модели требованием, чтобы собственные значения  $K$  были положительными, что приводит к равенству распределения  $f_Y(Y_1|Y_0)$  безусловному распределению величины  $Y_t$ . Оценка вектора параметров  $\Theta^*$  выбирается как решение

$$\max_{\Theta} L(\Theta) = \sum_{t=1}^T l_t(\Theta).$$

При оценивании, я предполагаю, что облигациями без ошибок измерения являются облигации со сроками погашения в шесть месяцев, два года и десять лет. Такой выбор был мотивирован желанием охватывать как можно большую часть временной структуры без предположения о том, что трехмесячная доходность, которая проявляет уникальное поведение, наблюдается без ошибки. Облигации со сроками погашения в три месяца, год и пять лет и ошибками измерений заполняют пробелы в этой временной структуре. Ковариационная матрица ошибок измерений оценивается с использованием его разложения Холецкого:

$$E(\epsilon_t \epsilon_t') = V = CC' \quad (22)$$

Всего необходимо оценить шесть элементов в нижнем треугольнике матрицы  $C$ . В более ранней версии этой статьи предполагается диагональная структура  $V$ . Хотя результаты более общей структуры строго отвергают предположение о том, что эти погрешности измерения некоррелированные, оценки параметров остальной части модели в основном не зависят от формы, выбранной для  $V$ .

Однако важно включить эти дополнительные доходности облигаций в процедуру оценивания. В более ранних версиях этой статьи не включаются доходности облигаций, измеренных с ошибкой. Ранние результаты показали, что общие трехфакторные модели, изучаемые здесь, - особенно существенно аффинные модели - могут привести к достаточно неправдоподобным формам временной структуры. Эти формы иногда пересекаются с наблюдаемыми временными структурами в случае трех сроков погашения: сроков погашения, связанных с облигациями, измеренными без ошибок. При включении облигаций, измеренных с ошибкой, значения правдоподобия, связанные с этими неправдоподобными временными структурами, сильно штрафуются.

### 3.4. Методика максимизации

Функции МКМП для этих моделей имеют большое количество локальных максимумов. Наиболее важной причиной для этого является отсутствие структуры, находящейся в матрице обратной связи  $K$ . Аналогичные значения МКМП могут быть получены путем различных взаимодействий между элементами вектора состояния. Другая причина заключается в том, что это допустимое пространство параметров не является выпуклым для всех моделей с непостоянной волатильностью. Допустимый вектор параметров удовлетворяет требованию, что диагональные элементы  $S_t$  действительны для всех  $t$ . Поскольку я использую каноническую форму из раздела 1.7, это требование выполняется, когда  $\hat{X}_{t,i} \geq 0$  для  $i \leq m$ . (Напомним, что  $m$  - это количество переменных состояния, которые влияют на текущую волатильность  $X_t$ .) В силу вышесказанного, это требование налагает  $m \times T$  ограничений на вектор параметров. Ограничения являются нелинейными функциями от параметров и данных. Эти проблемы привели к следующей методике максимизации.

Шаг 1. Случайным образом генерируем вектор параметров из многомерного нормального распределения с диагональной ковариационной матрицей. Средние и дисперсии были произвольно установлены на «правдоподобные» значения.

Шаг 2. Используем формулу (20) для вычисления  $\hat{X}_t$  для всех  $t$ .

Шаг 3. Если вектор параметров является недопустимым, возвращаемся к шагу 1; в противном случае продолжаем.

Шаг 4. Используем симплекс-метод для определения вектора параметров, который максимизирует значение МКМП.

Шаг 5. Используем полученный на шаге 4 вектор параметров как начальную точку, используем NPSOL для того, чтобы сделать какие-либо окончательные улучшения значения МКМП.

Эта процедура повторяется пока шаги 4 и 5 не будут пройдены 1000 раз. Для большинства оцениваемых моделей, после первых нескольких сотен итераций вносились очень малые улучшения в значение МКМП.

### 3.5. Спецификационные тесты

В этих спецификационных тестах используется тот факт, что оценка МКМП может рассматриваться как оценка ОММ. Моменты являются первыми производными функции квази-логарифмического правдоподобия относительно вектора параметров, что приводит к точной идентификации модели. Накладывая сверхидентифицирующие условия на моменты, мы можем проверить адекватность модели.

#### 3.5.1. Проверка вложенных моделей

Напомним, что при  $m < n$  полностью аффинная модель  $A_m(n)$  является вложенной в соответствующую существенно аффинную модель. Существенно аффинная версия имеет дополнительные  $n(n - m)$  свободных параметров, соответствующие нижним  $n - m$  строкам матрицы  $\lambda_2$ . Мы можем проверить нулевую гипотезу о том, что эти свободные параметры все равны нулю, используя версию ОММ теста отношения правдоподобия. Его детальное описание находится в учебнике Greene (1997). Определим вектор-столбец  $h_t(\Theta)$  как производную выражения (21) по вектору параметров  $\Theta$ , и определим вектор-столбец  $h(\Theta)$  как среднее этих  $T$  векторов. Определим (инверсию) матрицы весов  $W_t$  как среднее векторного произведения однопериодных производных:

$$W_t^{-1} = \left(\frac{1}{T}\right) \sum_{t=1}^T h_t(\Theta) h_t(\Theta)'. \quad (23)$$

Обозначим вектор параметров для существенно аффинных моделей, оцененный по МКМП, через  $\Theta_0^*$ . Введем ограничительный вектор параметров  $\Theta_1$  как вектор параметров, который накладывает полностью аффинное ограничение на матрицу  $\lambda_2$ . Выбирается он как решение

$$q = \min_{\Theta_1} T h(\Theta_1)' W_t(\Theta_0^*) h(\Theta_1). \quad (24)$$

Результаты в статье Hansen (1982) свидетельствуют о том, что при нулевой гипотезе,  $q$  имеет распределение  $\chi^2((n - m)n)$ . Подобные тесты могут быть использованы для оценивания других ограничений на параметры оцениваемых моделей. Такие другие тесты обсуждаются более подробно в разделе 4.

#### 3.5.2. Проверка ковариации между ошибками прогноза и наклоном временной структуры

Этот тест предназначен для того, чтобы узнать, могут ли прогнозы доходности, полученные при помощи оцененной модели, включать информацию из наклона временной структуры. При заданном векторе параметров  $\Theta$ , соответствующем конкретной модели, вектор состояния  $\hat{X}_{t-\Delta}$  выражается из доходностей, наблюдаемых в момент  $t - \Delta$ . Затем может быть построено условное среднее  $E(X_t | \hat{X}_{t-\Delta})$ . С учетом этого ожидаемого вектора состояния, могут быть по-

строены доходности облигации через период  $\Delta$  и связанные с этим ошибки прогноза. Нам нужны некоторые обозначения для ошибок прогнозирования. Обозначим через  $e_{t,\Delta,\tau_i}$  ошибку прогноза, получаемую в момент времени  $t$  для облигации со сроком погашения  $\tau_i$ , где прогноз сделан в момент времени  $t - \Delta$ . Ошибки прогноза для  $v$  облигаций с различными сроками погашения объединены в вектор  $e_{t,\Delta}$ .

$$e_{t,\Delta} \equiv (e_{t,\Delta,\tau_1} \quad e_{t,\Delta,\tau_2} \quad \dots \quad e_{t,\Delta,\tau_v})'$$

Если оцененная модель временной структуры не производит систематические ошибки прогноза, то прогнозы доходностей в момент  $t$ , сделанные в момент  $t - \Delta$ , должны иметь ошибки некоррелированные ни с какими переменными, известными в момент времени  $t - \Delta$ . Это и положено в основу этого спецификационного теста. Обозначим наклон кривой доходности в момент  $t - \Delta$  через  $s_{t-\Delta}$ . Если модель корректно задана, то

$$E[(e_{t,\Delta} - \bar{e}_{t,\Delta})(s_{t-\Delta} - \bar{s}_{t-\Delta})] = 0. \quad (25)$$

Равенство (25) содержит  $v$  условных моментов, которые могут быть использованы как сверхидентифицирующие ограничения в оценке ОММ аффинной модели. Другие условные моменты являются стандартными моментами МКМП, определяемые как производные выражения (21) по каждому элементу вектора параметров. Матрица весов вычисляется по оценкам параметров МКМП, которые совместимы с нулевой гипотезой о том, что модель корректно задана. Затем вычисляется аналог  $q$  в (24). Опять же из результатов Hansen (1982), это значение при нулевой гипотезе имеет распределение  $\chi^2(v)$ .

Использование перекрывающихся наблюдений в этих условных моментах производит выборку моментов, которые имеют ненулевую автокорреляцию. И отсюда будет следовать, что матрица весов не будет принимать простую форму в (23). Я экспериментировал с вариантом весовой матрицы Hansen и Hodrick (1980), но на практике, как правило, эта матрица не является положительно определенной. Поэтому я принял подход Newey и West (1987).

Для реализации этого теста я установил  $\Delta = 1/2$ , т.е. рассматриваются прогнозы значений через шесть месяцев. Этот диапазон был выбран произвольно. Поверхностное исследование других прогнозных диапазонов показали, что результаты спецификационных тестов были нечувствительны к данному выбору. Я использовал лаг длиной восемь при расчете весовой матрицы Newey-West; экспериментирование с похожими длинами лага не оказало существенного влияния на результаты. Я устанавливаю  $v = 3$  и формирую прогнозы для сроков погашения в шесть месяцев, два года и десять лет. (Это те же сроки погашения, которые по предположению не имеют ошибок измерения.) Наклон временной структуры измеряется как разница между доходностью пятидесятилетней облигации и трехмесячной. Первые шесть наблюдений отбрасываются в связи с длиной диапазона прогнозирования.



## 4. Результаты

### 4.1. Обзор

В таблице II приведены значения МКМП для каждой оцененной модели. Показаны результаты для десяти моделей. Первые семь спецификаций моделей помечены как «неограниченные» (unrestricted). Это означает, что единственные ограничения, налагаемые на параметры – это те, что подразумеваются для канонической формы. Эти ограничения являются либо нормировочными, либо требованиями отсутствия арбитража. Для того, чтобы ограничить опасность чрезмерной аппроксимации и облегчить интерпретацию оценок параметров, также оцениваются более узкие спецификации. Эти «предпочтительные» (preferred) спецификации будут обсуждаться после того, как будут рассмотрены спецификации без ограничений.

Среди неограниченных моделей, полностью аффинная модель  $A_0(3)$  имеет самое низкое значение МКМП, что означает, что она обеспечивает худшую аппроксимацию первого и второго условных моментов доходностей. Это не удивительно, учитывая, что эта модель не может генерировать вариацию во времени ожидаемых доходов и условных дисперсий доходностей. Полностью аффинная модель  $A_3(3)$  имеет наибольшее значение МКМП, а следом за ним идут существенно аффинная и полностью аффинная модели  $A_2(3)$ . Это модели с наибольшей гибкостью в аппроксимации вариаций условных волатильностей.

Результаты первого спецификационного теста показывают, что неограниченная полностью аффинная модель  $A_0(3)$  преимущественно отвергается его более общим существенно аффинным аналогом. Соответствующая тестовая статистика для полностью аффинной модели  $A_1(3)$  меньше, но все же в подавляющем большинстве случаев отвергает модель. Полностью аффинная модель  $A_2(3)$  имеет значение МКМП почти неотличимое от его существенно аффинного аналога, и его дополнительные ограничения не отвергаются.

Причиной снижения статистики  $\chi^2$  с ростом  $m$  является уменьшение дополнительной гибкости, предлагаемой существенно аффинными моделями с ростом  $m$ . Напомним из а)(19с), что разница между полностью и существенно аффинными моделями заключается в элементах матрицы  $\lambda_2$ . При  $m = 0$  все элементы  $\lambda_2$  свободны. При  $m = 1$  верхняя строка  $\lambda_2$  становится равной нулю. При  $m = 2$  свободной остается только нижняя строка  $\lambda_2$ . Таким образом, увеличение  $m$  обеспечивает большую гибкость в аппроксимации условных дисперсий доходностей, однако также обеспечивает меньшую гибкость (в существенно аффинных моделях) в аппроксимации ожидаемых избыточных доходов по облигациям.

Приведены соответствующие результаты для второго спецификационного теста. Только существенно аффинная модель  $A_0(3)$  проходит этот тест. Для всех остальных моделей наклон временной структуры слишком сильно коррелирует с ошибками прогноза (для удовлетворения нулевой гипотезы о том, что корреляция равна нулю).

Чтобы ограничить размер статьи, я привел более подробную информацию только для трех из моделей. Это существенно аффинные модели  $A_0(3)$ ,  $A_1(3)$  и

полностью аффинная модель  $A_2(3)$ . Первая представляет особый интерес из-за ее способности прогнозирования, вторая демонстрирует компромисс между возможностью прогнозирования и аппроксимации условных дисперсий, в то время как третья является полностью аффинной моделью, которая производит наилучший прогноз, как измерено  $\chi^2$  статистикой во втором спецификационном тесте.

Для каждой из этих моделей, я оцениваю спецификации, которые являются более узкими по сравнению с неограниченными. Сначала я вычислил  $t$ -статистику для оценок параметров без ограничений. Затем я полагаю равными нулю все параметры, для которых абсолютные  $t$ -статистики не превышают единицы и повторно оцениваю модели.<sup>5</sup> Эта процедура исключила пять параметров из полностью аффинной модели  $A_2(3)$  и по семь параметров из существенно аффинных моделей  $A_0(3)$  и  $A_1(3)$ . Для каждой предпочтительной модели совместная проверка ограничений параметров строится с использованием аналога (24). Тестовые статистики и соответствующие  $p$ -значения приведены в столбце «First Test Stat».<sup>6</sup>

Оценки параметров для этих предпочтительных моделей приведены в таблицах III - V. Для экономии места, оценки параметров для других моделей не приводятся в статье, и могут быть предоставлены по запросу. Параметры из (19a) – (19c) приводятся наряду с параметрами разложения Холецкого в (22).

В таблице III приводятся оценки параметров для существенно аффинной модели  $A_0(3)$ . Каноническая форма накладывает нижнюю треугольную структуру на матрицу  $K$  и полагает  $\alpha = 1, \beta = 0, K\theta = 0$ . В таблице IV приведены оценки параметров существенно аффинной модели  $A_1(3)$ . Стоит упомянуть об одной из особенностей этой таблицы. Параметр  $(K\theta)_2$  отличен от нуля, однако не приводится никакой стандартной ошибки. Это является результатом двух нормировок наложенных на модели:  $\theta_2 = \theta_3 = 0$ . Нормировки налагаются установкой  $(K\theta)_2$  и  $(K\theta)_3$  до необходимых значений для заданного  $K$ . Другими ограничениями, накладываемыми канонической формой, являются  $\alpha_1 = k_{12} = k_{13} = 0$ ,  $\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_{11} = 1$  и  $\beta_{ij} = 0, i \geq 1, j > 1$ . И наконец в таблице V приведены оценки параметров для полностью аффинной модели  $A_2(3)$ . В канонической форме модели  $A_2(3)$   $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_{33} = 0$ ,  $\alpha_3 = \beta_{11} = \beta_{22} = 1$ ,  $\beta_{ij} = 0$  для  $i < 3, i \neq j$ , и  $\lambda_2 = 0$ . Предпочтительная спецификация устанавливает  $\beta_{31} = 0$  и  $\beta_{32} = 1$ , так что вто-

---

<sup>5</sup> Для полностью аффинной модели  $A_2(3)$  параметр  $\beta_{32}$  был положен равным единице вместо нуля.

<sup>6</sup> Тестовая статистика для существенно аффинной модели  $A_1(3)$  предполагает отказ от предпочтительной модели в пользу неограниченной модели. Тем не менее, большое значение тестовой статистики, по-видимому, является следствием погрешности аппроксимации при численном вычислении производной от логарифмической функции правдоподобия по  $k_{32}$ . Численный метод *dfidr* (мощный метод для вычисления производных и оценок погрешностей в них) производит большие погрешности независимо от начальной длины шага. Поскольку оценка параметра в неограниченной модели была близкой к нулю, и установка его равным нулю имела незначительное влияние на функцию правдоподобия МКМП, я установил его равным нулю и в предпочтительной модели.

рая переменная состояния задает условные волатильности второй и третьей переменных состояния. Элемент  $(K\theta)_3$  отличен от нуля и без стандартной ошибки, потому что в канонической модели  $\theta_3 = 0$ .

## 4.2. Анализ ошибок прогнозирования

Оцененные модели в сочетании с доходностями облигации в месяце  $t$  могут быть использованы для построения прогноза доходностей облигаций в месяце  $t + i$ . Здесь мы исследуем точность этих прогнозов как в, так и вне пределов выборки. Период в пределах выборки – с января 1952 по декабрь 1994. Период вне пределов выборки – с января 1995 по декабрь 1998. Мы сосредотачиваемся на облигациях со сроками погашения в шесть месяцев, два года и десять лет, и прогнозируем диапазоны в три, шесть и двенадцать месяцев. Точность прогноза измеряется как корень из среднеквадратичной ошибки прогноза (RMSE). Значения RMSE в пределах выборки приведены в таблице VI, а вне пределов – в таблице VIII. В таблицах VII (в пределах) и IX (вне пределов), ошибки прогнозирования получены из наклона кривой доходности для того, чтобы определить учитывает ли метод прогноза возможность прогнозирования наклона.

Нам нужны контрольные показатели для использования в оценке точности прогнозов. Самый простой ориентир – случайное блуждание. Доходность в месяце  $t$  по облигации со сроком погашения  $\tau$  используется в качестве прогноза доходности в месяце  $t + i$ . Значения RMSE, связанные с этим методом прогноза, приведены в столбцах «RW» (random walk – случайное блуждание) таблиц VI и VIII. Обратите внимание, что таблицы содержат различные шаблоны в значениях RMSE среди облигаций. В более раннем периоде, доходности были более неустойчивыми, и неустойчивость снижается с увеличением срока погашения. В более позднем периоде, волатильность доходности при длительных сроках погашения была выше по сравнению с короткими сроками. Таким образом, период вне выборки должен обеспечить хорошую проверку робастности оцененных аффинных моделей.

Более сложный контрольный показатель использует регрессии МНК, которые предсказывают будущие изменения доходностей, используя текущий наклон временной структуры. Регрессия задается следующим образом:

$$Y_{\tau,t+i} - Y_{\tau,t} = b_0 + b_1(Y_{5yr,t} - Y_{3mo,t}) + e_{\tau,t+i}. \quad (26)$$

Параметры (26) оцениваются с использованием данных в пределах выборки. Равенство затем используется для построения прогнозов и ошибок прогноза для периодов в и вне пределов выборки. Полученные значения RMSE находятся в столбцах, помеченных как «OLS» (ordinary least squares - обычный метод наименьших квадратов), в таблицах VI и VIII. Хотя в пределах выборки значения RMSE для регрессии гарантировано не превышают значения RMSE для случайного блуждания, вне выборки это не соответствует действительности. Действительно, для восьми из девяти комбинаций сроков погашения и диапазона прогнозирования, значение RMSE для МНК вне выборки превосходит значение для случайного блуждания.

Оценки параметров из (26) внутри выборки приведены в таблице VII в столбце с названием «RW». Это может показаться опечаткой (почему они не названы «МНК?»), но напомним, что в таблице VII приведены оценки параметров регрессии ошибок прогноза наклона кривой доходности в месяце  $t$ . При прогнозировании с предположением о случайном блуждании, уравнение регрессии, исследуемое в таблице VII, идентично уравнению регрессии, используемой для производства МНК прогнозов. Результаты свидетельствуют о том, что краткосрочные доходности растут, и долгосрочные падают, когда наклон круче, чем обычно, хотя статистического подтверждения нет. Эти результаты соответствуют стандартным нарушениям гипотезы ожиданий процентных ставок.

Это нарушение также проявляется в поведении доходностей облигаций в период вне пределов выборки. В столбце «RW» таблицы IX представлены результаты оценки (26) в период с января 1995 по декабрь 1998. Отрицательных оценок, как правило, больше, чем у их аналогов в таблице VII, хотя значение  $t$ -статистики меньше, в силу меньшего числа наблюдений.

В заключительных шести столбцах таблиц VI – IX изучается способность прогнозирования различных аффинных моделей. Результаты свидетельствуют о том, что полностью аффинная модель  $A_2(3)$  несостоятельна при прогнозировании будущих процентных ставок. Данные в таблице VI свидетельствуют о том, что в пределах выборки как неограниченные, так и предпочтительные характеристики производят прогнозы хуже, чем те, что производятся при предположении, что доходности следуют случайному блужданию. Этот не впечатляющий результат отражается и в результатах других полностью аффинных моделей, рассмотренных в данной статье. Для каждой оцениваемой модели, предположение о том, что доходности следуют случайному блужданию, приводит к отличным прогнозам внутри выборки для каждого из сроков погашения и прогнозных диапазонов. (Эти дополнительные результаты не сообщаются в таблицах.)

Значения регрессий, представленные в таблице VII, показывают, что ошибки прогноза полностью аффинной модели  $A_2(3)$  сильно отрицательно коррелируют с наклоном временной структуры. Оценки параметров являются более отрицательными, чем соответствующие оценки параметров в случае случайного блуждания. Эта модель полностью не учитывает информацию прогнозирования в наклоне временной структуры. Когда временная структура более круто наклонена, чем обычно, прогноз МНК говорит о том, что долгосрочные доходности будут падать, а модель прогнозирует, что доходности будут расти. Иными словами, модель согласуется с гипотезой ожиданий, а наблюдаемые доходности облигаций – нет.

Эта низкая эффективность прогнозирования переносится и на период вне выборки. Данные в таблице VIII свидетельствуют о том, что неограниченная спецификация производит прогнозы, которые уступают прогнозам с предположением случайного блуждания доходностей в пяти из девяти комбинаций сроков погашения с диапазоном прогнозирования. Предпочтительная спецификация даже еще хуже: производит худшие прогнозы по семи из девяти комбинациям.

Оценки в таблице IX подтверждают, что прогнозы этой модели имеют неправильный знак взаимосвязи между наклоном временной структуры и будущих изменений доходностей.

Существенно аффинные модели производят значительно лучшие прогнозы. Самой успешной моделью в прогнозировании как внутри, так и вне выборки является существенно аффинная, полностью гауссовская модель. Результаты в таблице VI свидетельствуют о том, что в пределах выборки как неограниченная, так и предпочтительная модели  $A_0(3)$  неверно прогнозируют МНК регрессии (и, следовательно, также неверно прогнозируют при предположении о случайном блуждании) для каждой из комбинаций сроков погашения и диапазона прогнозирования. В таблице VIII приведено то же самое для данных вне выборки. Кроме того, эти прогнозы охватывают предсказательную способность наклона временной структуры. В таблицах VII и IX единственным доказательством предсказуемости ошибок прогнозирования являются ошибки прогноза вне выборки для десятилетних облигаций и двенадцатимесечным диапазоном.

Существенно аффинная модель  $A_1(3)$  не является столь успешной в прогнозировании как гауссовская модель. Из таблицы VI мы видим, что прогнозы внутри выборки неограниченной и предпочтительной спецификаций, как правило, превосходят прогнозы со случайным блужданием, но прогнозы МНК регрессии верны только для половины комбинаций срок погашения/диапазон. Кроме того, из таблицы VIII, ошибки прогноза отрицательно коррелируют с наклоном кривой доходности. Статистическая сила этой отрицательной корреляции возрастает с удлинением срока погашения облигации и диапазона прогнозирования.

Исследование таблицы VIII показывает, что эта существенно аффинная модель работает немного лучше вне выборки. Прогнозы от предпочтительной спецификации превосходят прогнозы в случаях случайного блуждания и МНК на всех сроках погашения и диапазонах прогноза. Тем не менее, таблица IX указывает на то, что ошибки прогноза модели вне выборки отрицательно коррелируют с наклоном кривой доходности. Таким образом, модель не охватывает некоторую часть предсказательной способности наклона временной структуры.

Общим шаблоном в этих прогнозах является то, что предсказательная способность ухудшается с улучшением способности аппроксимировать вариацию во времени условных дисперсий. Модель  $A_0(3)$ , хотя ее предсказательная способность является лучшей, имеет самое низкое значение МКМП среди трех моделей, рассматриваемых здесь, потому что в ней волатильности доходности предполагаются постоянными во времени. Несмотря на плохую эффективность прогнозирования, модель  $A_2(3)$  имеет гораздо большее значение МКМП, чем какая-либо из существенно аффинных моделей, рассматриваемых здесь, в силу ее способности аппроксимировать вариации волатильностей. В следующем разделе мы рассмотрим более явно компромисс между способностью прогнозирования и изменяющимися во времени волатильностями.

### 4.3. Предсказуемость избыточных доходов и волатильностей

Несколько диаграмм помогают пролить свет на поведение этих конкурирующих моделей. Рисунок 1 представляет собой графическое отображение поведения предпочтительной существенно аффинной модели  $A_0(3)$ . Панель А отображает текущие влияния, которые оказывают отдельные скачки стандартного отклонения каждого фактора на временную структуру доходностей. Три скачка могут быть интерпретированы как скачок уровня (обозначен длинными штрихами), скачок наклона (обозначен сплошной линией) и кривизны (обозначен короткими штрихами). Панель В отображает (несуществующее) текущее влияние этих скачков на дисперсии доходностей.

Панель С отображает влияние, которые оказывают эти скачки на текущие ожидаемые избыточные доходы по облигациям (сверх  $r_t$ ). Есть два различных типа скачков ожидаемой доходности. Короткими штрихами обозначен скачок соответствующий скачку кривизны на панели А. Этот скачок оказывает сильное влияние на текущие ожидаемые доходности, однако ненадолго. (Последний факт не виден на панели). Таким образом, этот скачок является причиной высокочастотных колебаний ожидаемых избыточных доходов.

Другой тип скачка в ожидаемых избыточных доходах соответствует скачку наклона из панели А. Он оказывает более продолжительное влияние (это также не видно на панели), и, таким образом, является причиной более стойких колебаний ожидаемых доходов. Совокупное воздействие этих скачков на ожидаемые избыточные доходы двухлетних облигаций изображено на панели Е. Панель F является таким же графиком для десятилетней облигации. Эти последние панели показывают, что ожидаемые избыточные доходы резко и широко колеблется около нуля. Например, ожидаемый текущий избыточный доход, изображенный на панели Е, имеет среднее значение 1,25 процента и стандартное отклонение 3,09 процента.

Поскольку эта модель оказалась настолько успешной в прогнозировании будущих доходностей, стоит провести более тщательное исследование. Интуитивный способ интерпретирования скачков доходностей облигаций - это разложить скачки на скачки ожидаемых будущих краткосрочных процентных ставок и скачки ожидаемых избыточных доходов. Это разложение является простым, поэтому я не буду обсуждать его здесь подробно. Вместо этого я просто подведу итоги.

Положительный скачок уровня соответствует немедленному, почти постоянному, увеличению краткосрочных процентных ставок. Половина времени влияния скачка на краткосрочные процентные ставки составляет более чем одиннадцать лет. Поскольку скачек существенно не изменяет необходимые инвесторам избыточные доходы по облигациям, доходности краткосрочных и долгосрочных облигаций реагируют на этот скачок таким же образом.

Положительный скачок наклона соответствует немедленному увеличению краткосрочных процентных ставок, который длится примерно столько же, сколько и бизнес-цикл. Половина времени влияния скачка составляет четыре

года. Так как ожидается, что краткосрочные процентные ставки снизятся со временем, скачок уменьшает наклон временной структуры. Скачок также снижает ожидаемую избыточную доходность по облигациям, влияя на вектор цены риска. Мы можем увидеть это в параметрах матрицы  $\lambda_2$  в таблице III. Увеличение первого фактора (фактора наклона) влияет на цену риска третьего фактора (фактора уровня) через элемент (3, 1) матрицы  $\lambda_2$ . Это снижение ожидаемых доходов дополнительно уменьшает наклон временной структуры, поскольку доходы по долгосрочным облигациям более чувствительны, чем доходы по краткосрочным облигациям, к скачкам уровня и, таким образом, к цене риска скачков уровня.

Кривизна очень похожа на фактор « $f_t$ » из двухфакторного примера, приведенного в разделе 2. Скачок кривизны в основном не влияет на текущие или будущие краткосрочные процентные ставки. Вместо этого, этот скачок изменяет необходимые инвесторам избыточные доходы по облигациям, влияя на цену риска, связанного с факторами уровня и наклона. Период влияния такого скачка составляет менее трех месяцев. Мы можем назвать его скачком «стремления к качеству». Инвесторы испытывают недолгие периоды нежелания владеть рискованными инструментами казначейства, тем самым увеличивая ожидаемую избыточную доходность по облигациям.

Рисунок 2 содержит информацию о предпочтительной существенно аффинной модели  $A_1(3)$ . Панель А отображает скачок уровня, скачок наклона и скачок кривизны. Сплошная линия соответствует скачку уровня, который влияет на условную дисперсию доходности, как показано на панели В. Пунктирная линия с длинными штрихами соответствует скачку кривизны, и на панели С мы видим его сильное влияние на ожидаемые избыточные доходы. Тем не менее, панель С также указывает на то, что два других скачка оказывают незначительное влияние на ожидаемые избыточные доходы. Результирующий эффект состоит в том, что на панелях Е и F колебания ожидаемых избыточных доходов менее волатильны, чем колебания на соответствующих панелях на рисунке 1. Например, текущий ожидаемый избыточный доход на панели Е имеет среднее в 1,90 процентов и стандартное отклонение в 1,85 процентов.

Почему скачок наклона влияет на ожидаемые избыточные доходы на рисунке 1, но не влияет на рисунке 2? Ответ заключается в том, что способ влияния, доступный в модели, лежащей в основе рисунка 1, недоступен в модели, лежащей в основе рисунка 2. Панель С на рисунке 1 отражает взаимосвязь между скачками наклона и скачками цены риска скачков уровня. Эти перекрестные отношения более ограничены в существенно аффинной модели  $A_1(3)$ . В канонической форме, первый фактор управляет условными волатильностями, так что его цена риска не может быть затронута другими факторами. На рисунке 2 показано, что этим первым фактором является фактор уровня; скачки наклона не влияют на его цену риска. Поэтому эта модель дает худшие прогнозы будущих доходностей облигаций, по сравнению с существенно аффинной моделью  $A_0(3)$ .

Рисунок 3 показывает те же панели для предпочтительной полностью аффинной модели  $A_2(3)$ . Модель генерирует больше шаблонов вариации во времени волатильностей, по сравнению с другими двумя моделями. Стоимость этих более

точных показателей волатильности – неспособность аппроксимировать ожидаемые избыточные доходы. Ожидаемые избыточные доходы на панелях Е и F всегда положительны, не велики и не волатильны. Например, ожидаемый текущий доход на панели Е имеет среднее 0,79 процента и стандартное отклонение 0,41 процента. Кроме того, эти ожидаемые избыточные доходы приблизительно следуют за текущей процентной ставкой, отображенной на панели D. Поскольку более высокие краткосрочные ставки, как правило, соответствуют низким наклонам, рисунок указывает на то, что ожидаемые избыточные доходы двигаются обратно, относительно наклона кривой доходности; но это противоречит фактам.

Рассмотренные в этом разделе результаты указывают на то, что полностью аффинная модель  $A_2(3)$  не в состоянии воспроизвести поведение ожидаемых избыточных доходов по казначейским облигациям. Тот же вывод справедлив и для других полностью аффинных моделей, оцениваемых в этой статье, но не обсужденных здесь более детально. Эти модели не в состоянии охватить большие колебания ожидаемых избыточных доходов по облигациям. Существенно аффинные модели проявляют себя лучше в воспроизведении ожидаемых избыточных доходов, хотя весь масштаб улучшения обратно связан со способностью моделей аппроксимировать вариацию во времени условных дисперсий доходностей.



## 5. Заключительные замечания

Недавние исследования временной структуры были сосредоточены на том, что я называю полностью аффинными моделями. В этой статье говорится о том, что полностью аффинные модели плохо прогнозируют будущие доходности в течении почти пятидесятилетнего периода, рассматриваемого здесь. Они постоянно недооценивают будущие доходы по облигациям, когда временная структура более круто наклонена, чем обычно; иначе говоря, это модели не воспроизводят хорошо известное отклонение гипотезы ожиданий.

Существенно аффинные модели обобщают полностью аффинные модели. Они обеспечивают больше гибкости в аппроксимации вариаций цены риска процентной ставки во времени, сохраняя при этом аффинные свойства траекторий и поперечных сечений цен облигаций. Одна из существенно аффинных моделей, исследованных здесь, – чистая гауссовская модель – генерирует обоснованные прогнозы будущих доходностей, в том смысле, что предсказательная способность временной структуры учтена в рамках прогнозов модели.

Точность прогноза этой гауссовской модели позволяет нам правильно интерпретировать обычные факторы кривой доходности как уровень, наклон и кривизну с точки зрения их предсказаний для будущих краткосрочных процентных ставок и избыточных доходов по долгосрочным облигациям. Скачки уровня соответствуют почти постоянным изменениям процентных ставок и лишь минимальным изменениям в ожидаемых избыточных доходах. Скачки склона соответствуют колебаниям длины бизнес-цикла процентных ставок и ожидаемых избыточных доходов по облигациям, а то время как скачки кривизны соответствуют недолговечным вариациям «стремления к качеству» в ожидаемых избыточных доходах. Другими словами, скачки кривизны не влияют на текущие или ожидаемые будущие краткосрочные процентные ставки; они являются чистыми скачками премий за риск.

Существенно аффинные модели не являются чудодейственным средством. Эти модели не могут охватывать изменения во времени в условных дисперсиях, без отказа от части своей гибкости в аппроксимации изменений во времени цены риска процентных ставок. Еще предстоит выяснить, может ли существенно аффинная модель быть построена так, чтобы воспроизводить изменения во времени наблюдаемые и в условных дисперсиях доходностей, и в ожидаемых доходах по облигациям.

## Приложение. Первый и второй моменты аффинных переменных состояния

В данном приложении описаны закрытые формы представления первого и второго условных моментов вектора состояния, который соответствует аффинному процессу из (12а) и (2). Эти результаты являются приложением (и конкретизацией) результатов Fisher и Gilles (1996).

Предположим, что матрица  $K$  может быть диагонализирована, или представлена в виде:

$$K = NDN^{-1}, \quad D - \text{диагональная матрица.} \quad (\text{A1})$$

Диагональные элементы матрицы  $D$  обозначены как  $d_1, \dots, d_n$ . Описание вычисления моментов, когда  $K$  не может быть диагонализирована, находится в Fisher и Gilles (1996).

Подход, используемый здесь, это вычислить первый и второй условные моменты линейного преобразования  $X_t$ . Преобразование выбирается таким образом, чтобы матрица обратной связи  $K$  была диагональной относительно преобразования. Затем линейное преобразование восстанавливается, чтобы вычислить условные моменты  $X_t$ . Определим:

$$X_t^* \equiv N^{-1}X_t. \quad (\text{A2})$$

Тогда динамика  $X_t^*$  из (12а), (2), (A1) и (A2), задается как

$$dX_t^* = D(\theta^* - X_t^*) + \Sigma^* S_t^* dW_t, \quad (\text{A3})$$

где

$$\begin{aligned} S_{t(i,i)}^* &= \sqrt{\alpha_i + \beta_i^{*'} X_t^*}, \\ \theta^* &= N^{-1}\theta, \\ \Sigma^* &= N^{-1}\Sigma, \\ \beta^* &= \beta N. \end{aligned}$$

Вычислим теперь первый и второй моменты  $X_t^*$ . Полезны некоторые обозначения. Если  $Z$  -  $n$ -вектор, то диагональная  $n \times n$ -матрица, у которой элементы  $(i, i)$  равны  $Z_i$ , обозначается  $\text{diag}(Z)$ . Если  $Z$  - диагональная матрица, то диагональная матрица, у которой элементы  $(i, i)$  равны  $e^{Z_{ii}}$ , обозначается  $e^Z$ . Наконец,  $n$ -вектор  $\beta_{*i}$  - это столбец  $i$  матрицы  $\beta$ .

### 1. Условное среднее

Математическое ожидание  $X_T^*$  при условии  $X_t^*$  задается как:

$$E[X_T^* | X_t^*] = \theta^* + e^{-D(T-t)}(X_t^* - \theta^*). \quad (\text{A4})$$

Поскольку  $e^{-D(T-t)}$  диагональная, то это выражение может быть упрощено:

$$E[X_T^* | X_t^*] = \theta_i^* + e^{-d_i(T-t)}(X_{t,i}^* - \theta_i^*). \quad (\text{A4}')$$

Другое полезное представление (A4) получается разделением членов суммы на зависящие от  $X_t^*$  и независящие:

$$E[X_T^* | X_t^*] = (I - e^{-D(T-t)})\theta^* + e^{-D(T-t)}X_t^*. \quad (\text{A4}'')$$

С учетом этого условного математического ожидания  $X_T^*$ , мы восстановим преобразование, чтобы выразить условное математическое ожидание  $X_T$ :

$$E[X_T|X_t] = NE[X_T^*|X_t] = N(I - e^{-D(T-t)})\theta^* + Ne^{-D(T-t)}N^{-1}X_t.$$

Следует отметить, что условное среднее  $X_T$  может быть выражено непосредственно в терминах параметров (12а); никаких преобразований для  $X_t^*$  не требуется, потому что выражение выше эквивалентно следующему:

$$E[X_T|X_t] = (I - e^{-K(T-t)})\theta + e^{-K(T-t)}X_t$$

где  $e^{-K(T-t)}$  – фундаментальная матрица, связанная с  $-K(T-t)$ . Ценность подхода, используемого здесь, в том, (A4') используется в определении условной ковариационной матрицы  $X_t$ .

## 2. Условная дисперсия

Матрица  $\Sigma^* S_t^* S_t'^* \Sigma^{*'}$  является текущей ковариационной матрицей преобразованного вектора состояния. Мы можем записать это как:

$$\Sigma^* S_t^* S_t'^* \Sigma^{*'} = \Sigma^* \text{diag}(\alpha^*) \Sigma^{*'} + \sum_{i=1}^n \Sigma^* \text{diag}(\beta_{*i}^*) \Sigma^{*'} X_{t,i}^* \equiv G_0 + \sum_{i=1}^n G_i X_{t,i}^* \quad (\text{A5})$$

где  $G_0 \equiv \Sigma^* \text{diag}(\alpha^*) \Sigma^{*'}$  и  $n \times n$ -матрицы  $G_i$  определены как  $[\Sigma^* \text{diag}(\beta_{*i}^*) \Sigma^{*'}]$ . Определим  $n \times n$ -матрицу  $F(t, s)$  как

$$F(t, s) \equiv G_0 + \sum_{i=1}^n G_i [E(X_s^* | X_t^*)]_i.$$

Эта матрица является текущей ковариационной матрицей  $X_s^*$ , но оценивается по условному математическому ожиданию  $X_s^*$  (при условии информации в момент времени  $t$ ), а не по истинным значениям  $X_s^*$ . С использованием представления (A4') эта матрица может быть выражена как

$$F(t, s) = G_0 + \sum_{i=1}^n G_i [\theta_i^* + e^{-d_i(s-t)}(X_{t,i}^* - \theta_i^*)]. \quad (\text{A6})$$

Fisher и Gilles показывают, что условная дисперсия  $X_T^*$  может быть записана как

$$\text{Var}[X_T^* | X_t^*] = \int_t^T e^{-D(T-s)} F(t, s) e^{-D(T-s)} ds. \quad (\text{A7})$$

Подставляя (A6) в (A7), получаем (A8):

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_T^* | X_t^*] = & \int_t^T e^{-D(T-s)} G_0 e^{-D(T-s)} ds \\ & + \sum_{i=1}^n \left[ \theta_i^* \int_t^T e^{-D(T-s)} G_i e^{-D(T-s)} ds \right] \\ & + \sum_{i=1}^n \left[ (X_{t,i}^* - \theta_i^*) \int_t^T e^{-D(T-s)} G_i e^{-D(T-s)} e^{-d_i(s-t)} ds \right]. \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

Если  $f(j, k)$  отображает  $(j, k)$  в скалярную величину  $f$ , то обозначение  $\{f(j, k)\}$  обозначает матрицу с элементами  $(j, k)$ , заданными  $f(j, k)$ . Условная дисперсия может быть переписана как:

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_T^*|X_t^*] = & \int_t^T \{[G_0]_{j,k} e^{(s-T)(d_j+d_k)}\} ds \\ & + \sum_{i=1}^n \left[ \theta_i^* \int_t^T \{[G_i]_{j,k} e^{(s-T)(d_j+d_k)}\} ds \right] \\ & + \sum_{i=1}^n \left[ (X_{t,i}^* - \theta_i^*) \int_t^T \{[G_i]_{j,k} e^{(s-T)(d_j+d_k)-d_i(s-t)}\} ds \right]. \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

Вычисляя интегралы в (A9), получаем (A10):

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_T^*|X_t^*] = & \{(d_j + d_k)^{-1} [G_0]_{j,k} (1 - e^{-(T-t)(d_j+d_k)})\} \\ & + \sum_{i=1}^n [\theta_i^* \{(d_j + d_k)^{-1} [G_i]_{j,k} (1 - e^{-(T-t)(d_j+d_k)})\}] \\ & + \sum_{i=1}^n [(X_{t,i}^* - \theta_i^*) \{(d_j + d_k - d_i)^{-1} [G_i]_{j,k} (e^{-d_i(T-t)} - e^{-(d_j+d_k)(T-t)})\}]. \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

Заметим, что с помощью приведения подобных членов, ковариационная матрица (A10) может быть переписана как в (A11):

$$\text{Var}[X_T^*|X_t^*] = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i X_{t,i}^*. \quad (\text{A11})$$

$n \times n$ -матрицы  $b_i, i = 0, \dots, n$ , зависят от разницы  $T - t$ . Мы сейчас вычислим условную дисперсию  $X_T$ , используя (A11). С учетом того, что

$$\text{Var}[X_T|\Omega] = N \text{Var}[X_T^*|\Omega] N'$$

мы имеем

$$\text{Var}[X_T|X_t] = N b_0 N' + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n N b_j N' N_{j,i}^{-1} \right) X_{t,i}.$$

# Таблица I

## Регрессии избыточных доходов по казначейским облигациям июль 1961 – декабрь 1998

Ежемесячные избыточные доходы по портфелям из казначейских купонных облигаций получены регрессией по наклону временной структуры в прошлом месяце и оценке волатильности процентных ставок в течении предыдущего месяца. Наклон временной структуры измеряется как разница между пятилетней и трехмесячной бескупонной доходностью (интерполированной из купонных облигаций). Месячная волатильность измеряется как квадратный корень из суммы квадратов ежедневных изменений в доходности пятилетней бескупонной облигации. Асимптотические  $t$ -статистики, с поправкой на обобщенную гетероскедастичность, указаны в скобках. Всего здесь 449 ежемесячных наблюдений.

Maturity (years)	Mean excess return (%)	Coef on _____ slope                      volatility		Std. dev. of fitted excess rets
$0 < m \leq 1$	0.011	0.027 (1.76)	0.116 (0.96)	0.036
$1 < m \leq 2$	0.045	0.085 (1.85)	0.413 (1.27)	0.119
$2 < m \leq 3$	0.064	0.132 (1.88)	0.582 (1.20)	0.179
$3 < m \leq 4$	0.074	0.187 (2.38)	0.706 (1.35)	0.241
$4 < m \leq 5$	0.063	0.214 (2.37)	0.692 (1.16)	0.265
$5 < m \leq 10$	0.094	0.296 (2.69)	0.804 (1.08)	0.354

## Таблица II

### Статистическое сравнение оцениваемых моделей

Трехфакторные аффинные модели оцениваются методом квази-максимального правдоподобия (МКМП). Данные состоят из доходностей в конце месяца по бескупонным облигациям со сроками погашения от трех месяцев до десяти лет, с января 1952 по декабрь 1994. Модели различаются по числу факторов  $m$ , которые влияют на текущую дисперсию доходностей, и по гибкости параметризации цены риска. Существенно аффинные модели позволяют цене риска изменяться независимо от текущей дисперсии доходностей, в то время как полностью аффинные модели – нет. «Неограниченные» модели не накладывают никаких ограничений на параметры, кроме тех, что требуются для отсутствия арбитража. «Предпочтительные» модели отбрасывают параметры, которые мало способствуют их значениям МКМП.

Приведены два спецификационных теста. Первый тест о нулевой гипотезе, что ограничения параметров модели выполняются. Для неограниченных моделей, тест сравнивает полностью аффинные модели с их более общими существенно аффинными аналогами. Для «предпочтительных» моделей, тест сравнивает предпочтительную модель с ее неограниченным аналогом. Второй проверяет нулевую гипотезу о том, что ошибки прогноза доходности через шесть месяцев по облигациям трех различных сроков погашения не коррелированы с наклоном временной структуры в момент составления прогноза. При нулевой гипотезе, тестовые статистики распределены как  $\chi^2$ (количество ограничений параметров) и  $\chi^2(3)$  соответственно.

Model Type	$m$	Number of Free Params	QML value	First Test Stat (p-value)	Second Test Stat (p-value)
<b>Unrestricted</b>					
Completely	0	19	15171.94	62.689 (0.000)	12.297 (0.006)
Completely	1	23	15380.31	26.133 (0.000)	18.521 (0.000)
Completely	2	24	15395.74	0.860 (0.835)	9.938 (0.019)
Completely	3	25	15396.34		33.482 (0.000)
Essentially	0	28	15196.45		2.385 (0.596)
Essentially	1	29	15392.47		16.639 (0.001)
Essentially	2	27	15396.04		11.381 (0.010)
<b>Preferred</b>					
Completely	2	19	15393.55	1.238 (0.941)	10.406 (0.015)
Essentially	0	21	15190.68	3.443 (0.841)	1.449 (0.694)
Essentially	1	22	15387.91	17.882 (0.013)	14.361 (0.002)

### Таблица III

#### Оценки параметров для предпочтительной существенно аффинной модели $A_0(3)$

Эта модель определяется уравнением (19). В этой версии модели,  $\alpha$  представляет собой вектор из единиц, и вектора  $\beta$  и  $K\theta$  тождественно равны нулю. Матрица  $C$  является разложением Холецкого  $V = CC'$  ковариационной матрицы перекрестных ошибок аппроксимации доходностей по облигациям со сроками погашения в три месяца, один год и пять лет. Параметры оцениваются по МКМП. Асимптотические стандартные ошибки находятся в скобках.

Constant term			
	$\delta_0$	0.044 (0.025)	
Parameter	Index number ( $i$ )		
	1	2	3
$\delta_i$	0.01895 (0.00223)	0.00790 (0.00218)	0.00992 (0.00051)
$k_{1i}$	0.564 (0.047)	0	0
$k_{2i}$	0	3.257 (0.672)	0
$k_{3i}$	-0.545 (0.202)	0	0.062 (0.051)
$\lambda_{1i}$	-0.625 (0.146)	-0.235 (0.099)	-0.207 (0.057)
$\lambda_{2(1i)}$	0	1.742 (0.254)	0
$\lambda_{2(2i)}$	0	-1.711 (0.717)	0
$\lambda_{2(3i)}$	0.648 (0.206)	0.297 (0.186)	-0.061 (0.051)
$C_{1i}$	0.00227 (0.00013)	0	0
$C_{2i}$	-0.00050 (0.00007)	0.00084 (0.00004)	0
$C_{3i}$	0	-0.00017 (0.00006)	0.00093 (0.00004)

# Таблица IV

## Оценки параметров для предпочтительной существенно аффинной модели $A_1(3)$

Эта модель определяется уравнением (19). В этой версии модели,  $\alpha_1 = \beta_{12} = \beta_{13} = 0, \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_{11} = 1$ , и первая строка матрицы  $\lambda_2$  нулевая. Матрица  $C$  является разложением Холецкого  $V = CC'$  ковариационной матрицы перекрестных ошибок аппроксимации доходностей по облигациям со сроками погашения в три месяца, один год и пять лет. Параметры оцениваются по МКМП. Асимптотические стандартные ошибки находятся в скобках.

Parameter	Constant term		
	$\delta_0$	0.014	
		(0.005)	
	Index number ( $i$ )		
	1	2	3
$\delta_i$	0.00088 (0.00021)	0.00118 (0.00053)	0.00256 (0.00124)
$(K\theta)_i$	0.155 (0.048)	-1.910	0
$k_{1i}$	0.031 (0.020)	0	0
$k_{2i}$	-0.383 (0.235)	0.594 (0.053)	5.340 (3.833)
$k_{3i}$	0	0	2.832 (0.490)
$\beta_{2i}$	10.269 (9.96)	0	0
$\beta_{3i}$	0.291 (0.261)	0	0
$\lambda_{1i}$	-0.042 (0.020)	-3.844 (2.415)	0
$\lambda_{2(2i)}$	39.334 (53.816)	0	5.259 (3.647)
$\lambda_{2(3i)}$	0	0	-1.311 (0.565)
$C_{1i}$	0.00227 (0.00013)	0	0
$C_{2i}$	-0.00049 (0.00007)	0.00084 (0.00004)	0
$C_{3i}$	0	-0.00016 (0.00006)	0.00094 (0.00004)



# Таблица V

## Оценки параметров для предпочтительной полностью аффинной модели $A_2(3)$

Эта модель определяется уравнением (19). В этой версии модели,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = \beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{32} = 1$ , остальные элементы матрицы  $\beta$  нулевые, и матрица  $\lambda_2$  нулевая. Матрица  $C$  является разложением Холецкого  $V = CC'$  ковариационной матрицы перекрестных ошибок аппроксимации доходностей по облигациям со сроками погашения в три месяца, один год и пять лет. Параметры оцениваются по МКМП. Асимптотические стандартные ошибки находятся в скобках.

Parameter	Constant term		
	$\delta_0$	0.018 (0.004)	
	Index number ( $i$ )		
	1	2	3
$\delta_i$	0.00066 (0.00021)	0.00136 (0.00050)	0.00598 (0.00077)
$(K\theta)_i$	0	0.222 (0.103)	-2.299
$k_{1i}$	0.172 (0.064)	-0.295 (0.056)	0
$k_{2i}$	-0.197 (0.066)	0.406 (0.059)	0
$k_{3i}$	0.564 (0.279)	-1.669 (0.234)	1.721 (0.176)
$\lambda_{1i}$	-0.042 (0.018)	0	-0.208 (0.058)
$C_{1i}$	0.00227 (0.00013)	0	0
$C_{2i}$	-0.00049 (0.00007)	0.00084 (0.00004)	0
$C_{3i}$	0	-0.00017 (0.00006)	0.00094 (0.00004)

## Таблица VI

### Сравнение результатов прогнозирования внутри выборки

В этой таблице приведены среднеквадратические ошибки (RMSE) для прогнозов в момент времени  $t$  доходностей облигаций в момент  $t + i$ . Сравниваются восемь различных методов прогнозирования. Данные в столбце «RW» (random walk – случайное блуждание) были получены с использованием доходностей в месяце  $t$  в качестве прогноза будущих доходностей. Данные в столбце «OLS» (ordinary least squares – метод наименьших квадратов) были получены с использованием МНК регрессии для формирования прогнозов, где зависимой переменной является изменение доходности за период от  $t$  до  $t + i$  и параметром регрессии – наклон кривой доходности в месяце  $t$ . Данные последних шести колонок получены с использованием либо полностью аффинных (С.А. – completely affine), либо существенно аффинных (Е.А. – essentially affine) трехфакторных моделей для формирования прогнозов. Предпочтительные (preferred) модели – это ограниченные версии неограниченных (unrestricted) моделей. Модели различаются по числу факторов  $j$ , которым позволено влиять на условные волатильности ( $A_j(3)$ ).

Регрессионные и аффинные модели оцениваются с использованием данных за период с января 1952 по декабрь 1994, и прогнозы производятся на этом же периоде (прогнозы внутри выборки). Наклон кривой доходности – это разница между пятилетней бескупонной доходностью и трехлетней бескупонной доходностью. Доходность облигаций измеряется в десятичной форме (т.е. 0,04 соответствует 4 процентам в год).

Bond Maturity	Forecast Horizon	RW	OLS	Unrestricted			Preferred		
				C. A. $A_2(3)$	E. A. $A_0(3)$	E. A. $A_1(3)$	C. A. $A_2(3)$	E. A. $A_0(3)$	E. A. $A_1(3)$
6 mo	3	1.023	1.020	1.045	1.009	1.019	1.048	1.009	1.019
2 yr	3	0.871	0.869	0.880	0.837	0.847	0.883	0.837	0.853
10 yr	3	0.549	0.532	0.554	0.526	0.543	0.554	0.528	0.547
6 mo	6	1.376	1.370	1.418	1.342	1.367	1.427	1.345	1.368
2 yr	6	1.154	1.149	1.173	1.091	1.121	1.181	1.089	1.133
10 yr	6	0.760	0.722	0.774	0.711	0.756	0.772	0.713	0.764
6 mo	12	1.803	1.797	1.843	1.731	1.798	1.868	1.742	1.798
2 yr	12	1.541	1.529	1.566	1.450	1.527	1.583	1.445	1.544
10 yr	12	1.109	1.018	1.137	1.011	1.121	1.131	1.009	1.133

## Таблица VII

### Взаимосвязь между ошибками прогноза внутри выборки и наклоном кривой доходности

Используются различные модели для построения прогноза в месяце  $t$  доходности облигации в месяце  $t + i$ , и строятся соответствующие ошибки прогнозирования. В этой таблице приведены оценки параметров, полученные регрессией ошибок прогнозирования по наклону кривой доходности в месяце  $t$ . Сравниваются шесть методов прогноза. Данные в столбце «RW» (random walk – случайное блуждание) были получены с использованием доходностей в месяце  $t$  в качестве прогноза будущих доходностей. Таким образом, регрессия ошибок прогнозирования – это просто регрессия изменений в доходностях облигаций за период от  $t$  до  $t + i$  по наклону кривой доходности в месяце  $t$ . Данные последних шести колонок получены с использованием либо полностью аффинных (C.A. – completely affine), либо существенно аффинных (E.A. – essentially affine) трехфакторных моделей для формирования прогнозов. Предпочтительные (preferred) модели – это ограниченные версии неограниченных (unrestricted) моделей. Модели различаются по числу факторов  $j$ , которым позволено влиять на условные волатильности ( $A_j(3)$ ).

Регрессионные и аффинные модели оцениваются с использованием данных за период с января 1952 по декабрь 1994, и прогнозы производятся на этом же периоде (прогнозы внутри выборки). Наклон кривой доходности – это разница между пятилетней бескупонной доходностью и трехлетней бескупонной доходностью. Асимптотические  $t$ -статистики, в скобках, с поправкой на обобщенную гетероскедастичность и остатки скользящего среднего.

Bond Maturity	Forecast Horizon	RW	Unrestricted			Preferred		
			C. A. $A_2(3)$	E. A. $A_0(3)$	$A_1(3)$	C. A. $A_2(3)$	E. A. $A_0(3)$	$A_1(3)$
6 mo	3	0.072	-0.182	-0.041	-0.135	-0.182	0.019	-0.124
		(0.73)	(-1.84)	(-0.42)	(-1.39)	(-1.83)	(0.19)	(-1.27)
2 yr	3	-0.043	-0.182	-0.043	-0.134	-0.183	0.013	-0.129
		(-0.52)	(-2.22)	(-0.54)	(-1.69)	(-2.22)	(0.16)	(-1.63)
10 yr	3	-0.125	-0.159	-0.027	-0.141	-0.158	-0.018	-0.140
		(-2.72)	(-3.50)	(-0.61)	(-3.19)	(-3.49)	(-0.39)	(-3.15)
6 mo	6	0.118	-0.324	-0.085	-0.252	-0.326	0.015	-0.233
		(0.91)	(-2.55)	(-0.69)	(-2.03)	(-2.53)	(0.12)	(-1.88)
2 yr	6	-0.082	-0.326	-0.091	-0.261	-0.330	-0.003	-0.249
		(-0.76)	(-3.17)	(-0.91)	(-2.60)	(-3.17)	(-0.03)	(-2.51)
10 yr	6	-0.220	-0.280	-0.049	-0.255	-0.280	-0.031	-0.252
		(-3.45)	(-4.48)	(-0.78)	(-4.14)	(-4.46)	(-0.50)	(-4.09)
6 mo	12	0.129	-0.567	-0.208	-0.484	-0.575	-0.058	-0.453
		(0.70)	(-3.30)	(-1.21)	(-2.74)	(-3.30)	(-0.33)	(-2.60)
2 yr	12	-0.158	-0.551	-0.191	-0.486	-0.560	-0.069	-0.462
		(-1.06)	(-3.86)	(-1.32)	(-3.26)	(-3.86)	(-0.48)	(-3.15)
10 yr	12	-0.410	-0.506	-0.135	-0.480	-0.507	-0.101	-0.472
		(-3.62)	(-4.53)	(-1.22)	(-4.24)	(-4.52)	(-0.92)	(-4.19)

## Таблица VIII

### Сравнение результатов прогнозирования вне выборки

В этой таблице приведены среднеквадратические ошибки (RMSE) для прогнозов в момент времени  $t$  доходностей облигаций в момент  $t + i$ . Сравниваются восемь различных методов прогнозирования. Данные в столбце «RW» (random walk – случайное блуждание) были получены с использованием доходностей в месяце  $t$  в качестве прогноза будущих доходностей. Данные в столбце «OLS» (ordinary least squares – метод наименьших квадратов) были получены с использованием МНК регрессии для формирования прогнозов, где зависимой переменной является изменение доходности за период от  $t$  до  $t + i$  и параметром регрессии – наклон кривой доходности в месяце  $t$ . Данные последних шести колонок получены с использованием либо полностью аффинных (C.A. – completely affine), либо существенно аффинных (E.A. – essentially affine) трехфакторных моделей для формирования прогнозов. Предпочтительные (preferred) модели – это ограниченные версии неограниченных (unrestricted) моделей. Модели различаются по числу факторов  $j$ , которым позволено влиять на условные волатильности ( $A_j(3)$ ).

Регрессионные и аффинные модели оцениваются с использованием данных за период с января 1952 по декабрь 1994, в то время как прогнозы производятся на период с января 1995 по декабрь 1998 (прогнозы вне выборки). Для каждой облигации найдено 48 –  $i$  прогнозов и соответствующие им ошибки. Наклон кривой доходности – это разница между пятилетней бескупонной доходностью и трехлетней бескупонной доходностью. Доходность облигаций измеряется в десятичной форме (т.е. 0,04 соответствует 4 процентам в год).

Bond Maturity	Forecast Horizon	RW	OLS	Unrestricted			Preferred		
				C. A. $A_2(3)$	E. A. $A_0(3)$	E. A. $A_1(3)$	C. A. $A_2(3)$	E. A. $A_0(3)$	E. A. $A_1(3)$
6 mo	3	0.298	0.298	0.325	0.281	0.288	0.350	0.281	0.284
2 yr	3	0.499	0.511	0.501	0.454	0.458	0.523	0.457	0.450
10 yr	3	0.484	0.498	0.476	0.460	0.457	0.485	0.469	0.453
6 mo	6	0.400	0.413	0.483	0.373	0.399	0.548	0.365	0.385
2 yr	6	0.652	0.675	0.656	0.565	0.576	0.711	0.566	0.560
10 yr	6	0.669	0.693	0.647	0.623	0.616	0.669	0.636	0.606
6 mo	12	0.484	0.523	0.621	0.434	0.488	0.778	0.421	0.455
2 yr	12	0.762	0.787	0.759	0.608	0.635	0.879	0.600	0.606
10 yr	12	0.815	0.829	0.764	0.724	0.719	0.811	0.738	0.698

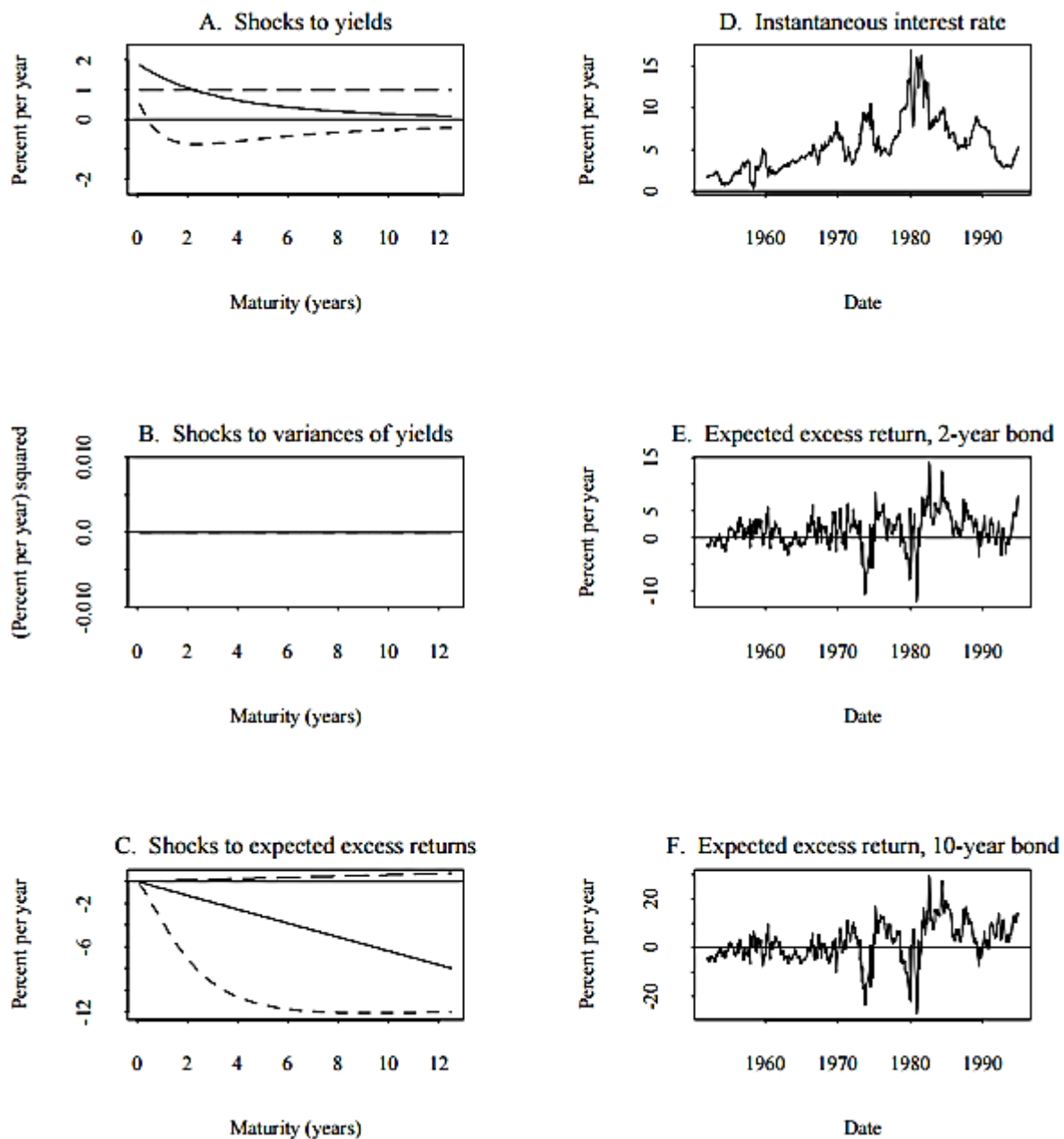
## Таблица IX

### Взаимосвязь между ошибками прогноза вне выборки и наклоном кривой доходности

Используются различные модели для построения прогноза в месяце  $t$  доходности облигации в месяце  $t + i$ , и строятся соответствующие ошибки прогнозирования. В этой таблице приведены оценки параметров, полученные регрессией ошибок прогнозирования по наклону кривой доходности в месяце  $t$ . Сравниваются шесть методов прогноза. Данные в столбце «RW» (random walk – случайное блуждание) были получены с использованием доходностей в месяце  $t$  в качестве прогноза будущих доходностей. Таким образом, регрессия ошибок прогнозирования – это просто регрессия изменений в доходностях облигаций за период от  $t$  до  $t + i$  по наклону кривой доходности в месяце  $t$ . Данные последних шести колонок получены с использованием либо полностью аффинных (C.A. – completely affine), либо существенно аффинных (E.A. – essentially affine) трехфакторных моделей для формирования прогнозов. Предпочтительные (preferred) модели – это ограниченные версии неограниченных (unrestricted) моделей; параметры модели, которые мало влияют на значение МКМП модели, положены равными нулю. Модели различаются по числу факторов  $j$ , которым позволено влиять на условные волатильности ( $A_j(3)$ ).

Регрессионные и аффинные модели оцениваются с использованием данных за период с января 1952 по декабрь 1994, в то время как прогнозы производятся на период с января 1995 по декабрь 1998 (прогнозы вне выборки). Для каждой облигации найдено 48 –  $i$  прогнозов и соответствующие им ошибки. Наклон кривой доходности – это разница между пятилетней бескупонной доходностью и трехлетней бескупонной доходностью. Доходность облигаций измеряется в десятичной форме (т.е. 0,04 соответствует 4 процентам в год).

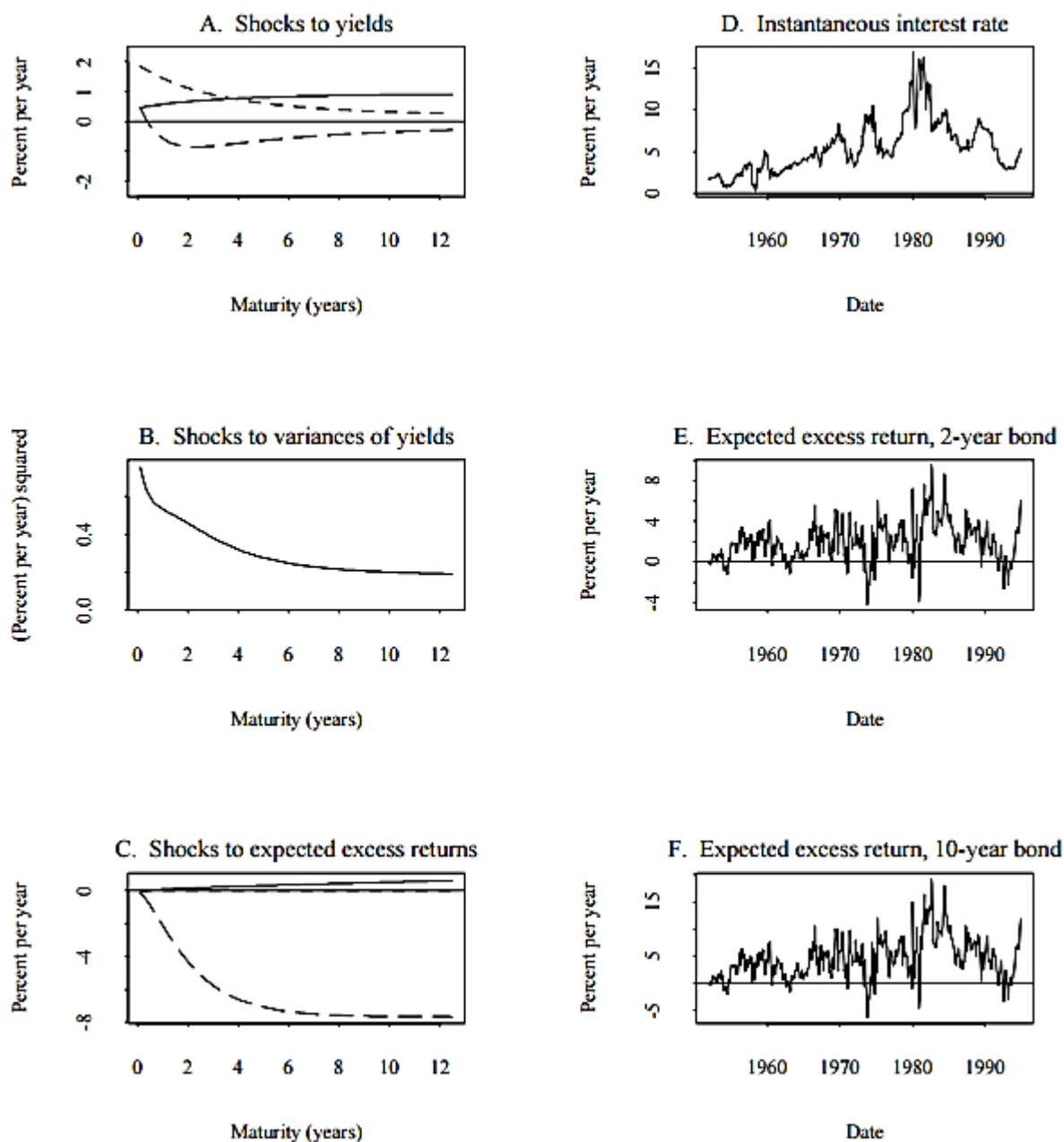
Bond Maturity	Forecast Horizon	RW	Unrestricted			Preferred		
			C. A. $A_2(3)$	E. A. $A_0(3)$	$A_1(3)$	C. A. $A_2(3)$	E.A. $A_0(3)$	$A_1(3)$
6 mo	3	0.121	-0.206	0.039	-0.074	-0.220	0.113	-0.064
		(1.04)	(-1.71)	(0.35)	(-0.66)	(-1.82)	(1.01)	(-0.57)
2 yr	3	-0.151	-0.268	-0.002	-0.108	-0.284	0.056	-0.104
		(-0.76)	(-1.37)	(-0.01)	(-0.59)	(-1.45)	(0.30)	(-0.57)
10 yr	3	-0.265	-0.280	-0.107	-0.220	-0.286	-0.112	-0.219
		(-1.42)	(-1.51)	(-0.59)	(-1.23)	(-1.55)	(-0.61)	(-1.22)
6 mo	6	0.034	-0.497	-0.094	-0.272	-0.525	0.014	-0.258
		(0.20)	(-2.48)	(-0.56)	(-1.65)	(-2.59)	(0.09)	(-1.56)
2 yr	6	-0.380	-0.560	-0.153	-0.324	-0.588	-0.071	-0.318
		(-1.11)	(-1.68)	(-0.52)	(-1.10)	(-1.75)	(-0.24)	(-1.08)
10 yr	6	-0.552	-0.571	-0.305	-0.485	-0.583	-0.307	-0.483
		(-1.60)	(-1.68)	(-0.92)	(-1.49)	(-1.71)	(-0.91)	(-1.49)
6 mo	12	-0.086	-0.825	-0.245	-0.482	-0.882	-0.116	-0.468
		(-0.35)	(-3.22)	(-1.09)	(-2.28)	(-3.39)	(-0.52)	(-2.19)
2 yr	12	-0.844	-1.037	-0.500	-0.734	-1.088	-0.405	-0.727
		(-2.27)	(-3.00)	(-1.55)	(-2.39)	(-3.13)	(-1.24)	(-2.35)
10 yr	12	-1.085	-1.083	-0.737	-0.977	-1.105	-0.730	-0.975
		(-3.75)	(-3.89)	(-2.58)	(-3.68)	(-3.95)	(-2.52)	(-3.66)



**Рисунок 1. Описание оцениваемой существенно аффинной модели  $A_0(3)$**

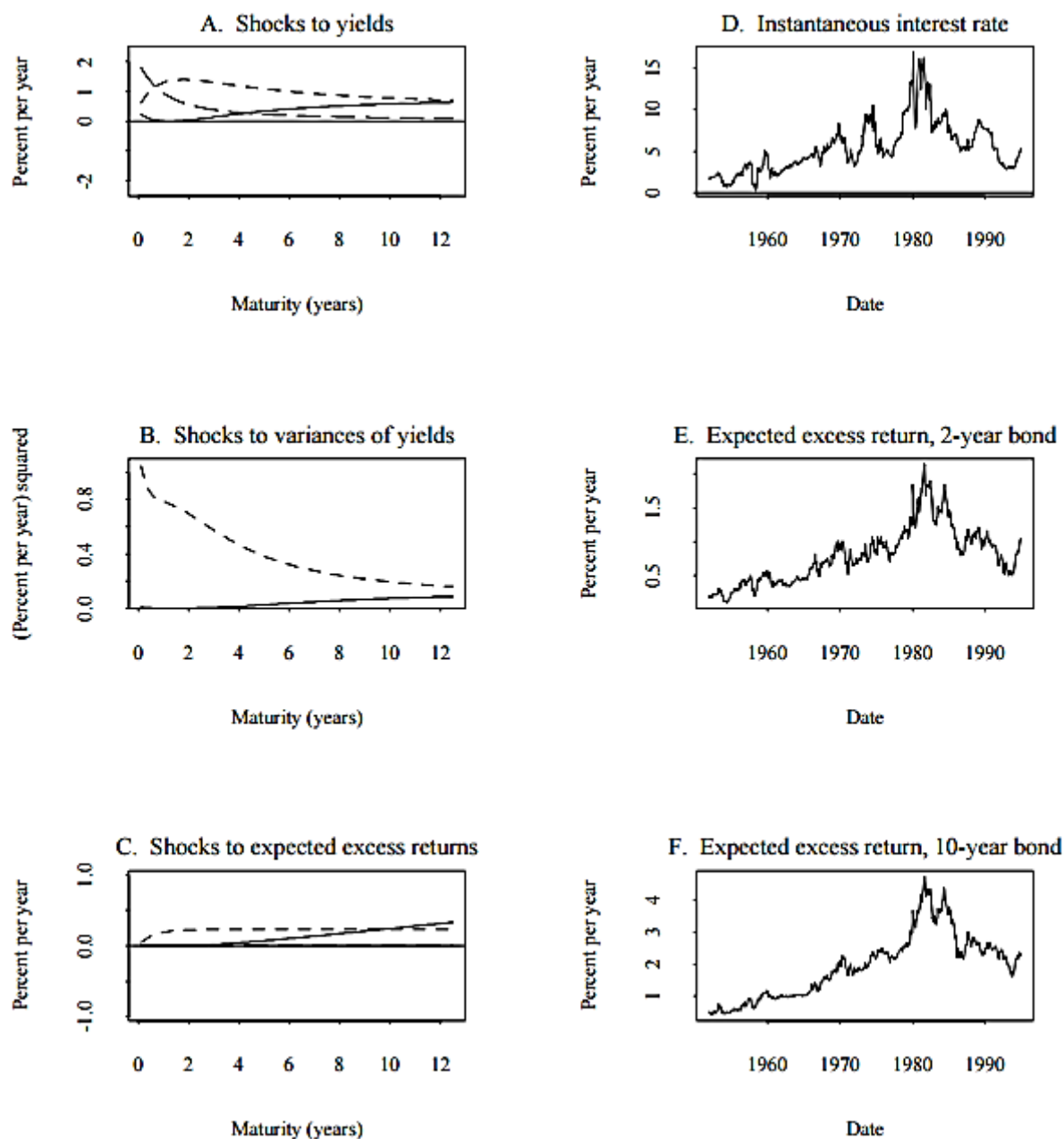
Панели А – С отображают мгновенные отклики доходностей, дисперсий и ожидаемых избыточных доходов (сверх  $r_t$ ) на единичные скачки стандартного отклонения в каждом из трех факторов. Панели D – F отображают аппроксимированные ожидаемые текущие доходы за период выборки с января 1952 по декабрь 1994. На панели D изображена динамика процентной ставки. На панелях Е и F изображены динамики ожидаемых избыточных доходов по двухлетней и десятилетней облигациям.





**Рисунок 2. Описание оцениваемой существенно аффинной модели  $A_1(3)$**

Панели А – С отображают мгновенные отклики доходностей, дисперсий и ожидаемых избыточных доходов (сверх  $r_t$ ) на единичные скачки стандартного отклонения в каждом из трех факторов. Панели D – F отображают аппроксимированные ожидаемые текущие доходы за период выборки с января 1952 по декабрь 1994. На панели D изображена динамика процентной ставки. На панелях Е и F изображены динамики ожидаемых избыточных доходов по двухлетней и десятилетней облигациям.



**Рисунок 3. Описание оцениваемой полностью аффинной модели  $A_2(3)$**

Панели А – С отображают мгновенные отклики доходностей, дисперсий и ожидаемых избыточных доходов (сверх  $r_t$ ) на единичные скачки стандартного отклонения в каждом из трех факторов. Панели D – F отображают аппроксимированные ожидаемые текущие доходы за период выборки с января 1952 по декабрь 1994. На панели D изображена динамика процентной ставки. На панелях Е и F изображены динамики ожидаемых избыточных доходов по двухлетней и десятилетней облигациям.