**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ**

**Кафедра теории вероятности и математической статистики**

# ИССЛЕДОВАНИЕ МЕЙКСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Индивидуальное задание

Рымкевич Виктории Сергеевны

Студентки 3 курса,

специальность «актуарная математика»

Преподаватель:

доктор физико-математических наук

Н.Н. Труш

Минск, 2014

# Мейксное распределение
# (Meixner distribution)

Плотность Мейксного распределения $MD(a, b, m, d)$ задаётся следующей формулой:

$$f_{MD}(x; a, b, m, d) = \frac{\left(2\cos\left(\frac{b}{2}\right)\right)^{2d}}{2a\pi\Gamma(2d)} \cdot \exp\left(\frac{b(x-m)}{a}\right) \cdot \left|\Gamma\left(d + \frac{i(x-m)}{a}\right)\right|^2$$

Где:

- $a$ – параметр масштаба, $a > 0$;
- $b$ – параметр асимметрии, $-\pi < b < \pi$;
- $m$ – параметр положения, $m \in \mathbb{R}$;
- $d$ – параметр формы, $d > 0$.

Характеристическая функция процесса $X \sim MD(a, b, m, d)$ задается следующей формулой:

$$\phi_{MD}(u) = E\left[e^{iuX}\right] = \left(\frac{\cos\left(\frac{b}{2}\right)}{\cosh\frac{au - ib}{2}}\right)^{2d} \cdot \exp(imu)$$

Для данного распределения существуют моменты любого порядка. Далее приведены наиболее важные величины:

| | |
|---|---|
| математическое ожидание | $m + ad\tan\left(\frac{b}{2}\right)$ |
| дисперсия | $\frac{a^2 d}{2}\left(\cos^{-2}\left(\frac{b}{2}\right)\right)$ |
| эксцесс | $3 + \frac{2 - \cos b}{d}$ |
| асимметрия | $\sqrt{\frac{2}{d}} \cdot \sin \frac{b}{2}$ |

Основные свойства Мейксного распределения:

1. $MD(a, b, m, d)$ является бесконечно делимым распределением. Как следствие, справедлива следующая формула для характеристической функции:

$$\phi_{MD}(u; a, b, m, d) = \left[\phi_{MD}\left(u; a, b, \frac{m}{n}, \frac{d}{n}\right)\right]^n$$

2. Если $X_j \sim MD(a, b, m_j, d_j)$, $j = 1, \dots, n$, а также являются попарно независимыми, то
$$X_1 + \dots + X_n \sim MD\left(a, b, \sum_{j=1}^{n} m_j, \sum_{j=1}^{n} d_j\right).$$
3. $MD(a, b, m, d)$ является саморазложимым распределением и имеет полутяжёлые хвосты.

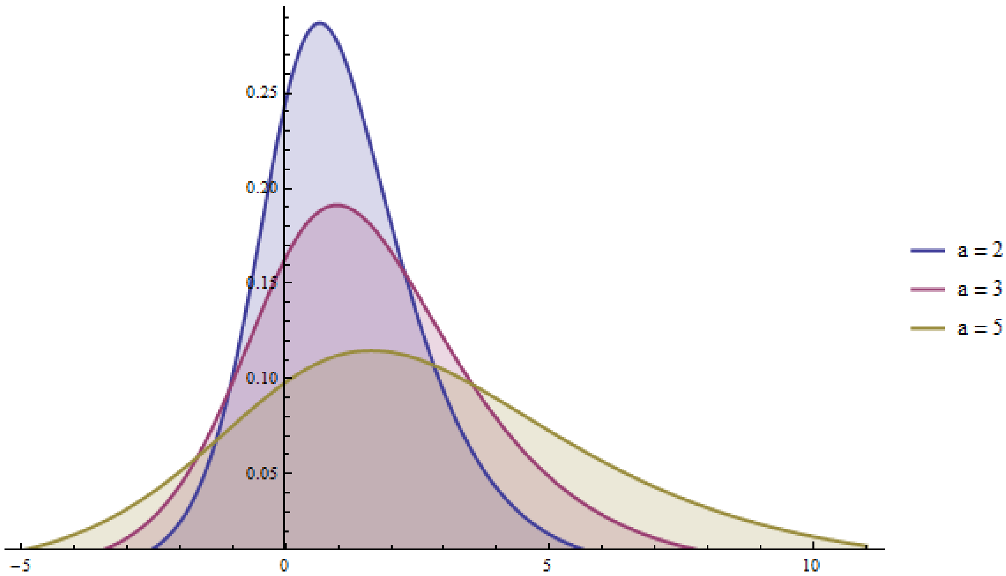
Дальнейшее исследование было проведено при помощи программного пакета Wolfram Matematica 9.0. Реальные данные для исследования были полученны из встроенных баз данных.

## Исследование параметров распределения.

$m$ является простым параметром положения, в то время как $a$ и $d$ влияют на островершинность распределения, а $b$, являясь параметром формы, напрямую влияет на скошенность распределения. Далее наглядно продемонстрируем зависимость вида функции распределения от значения её параметров.

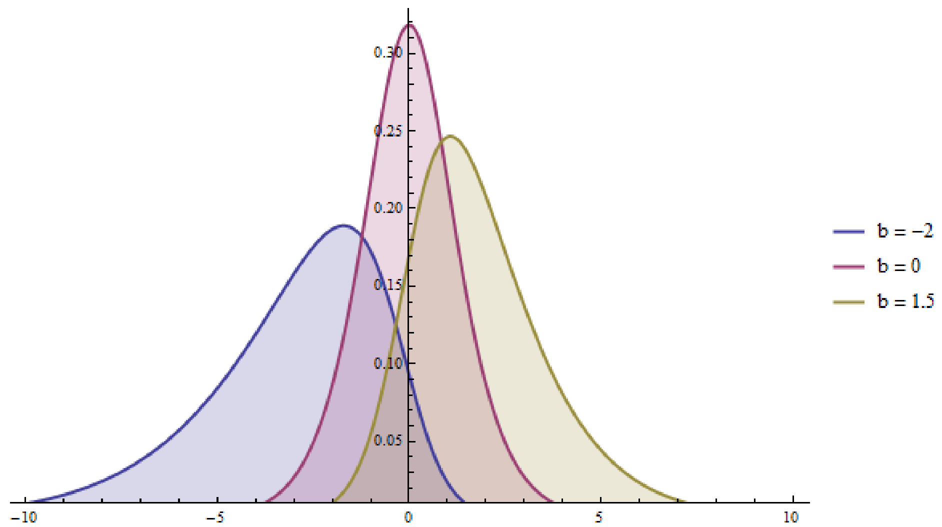
- $\boldsymbol{X \sim MD(a, 1, 0, 1)}$

  С увеличением параметра $a$ распределение из островершинного переходит в плосковершинное.

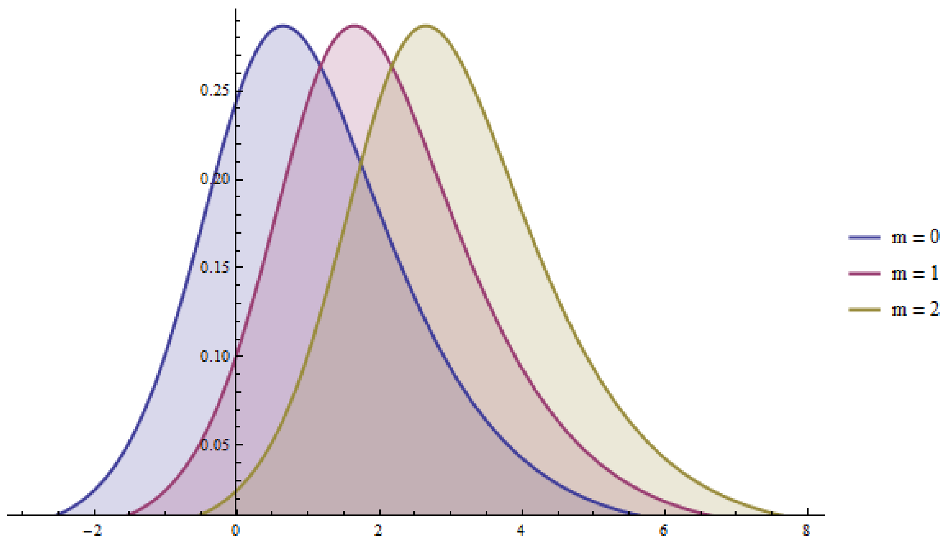



- $\boldsymbol{X \sim MD(2, b, 0, 1)}$

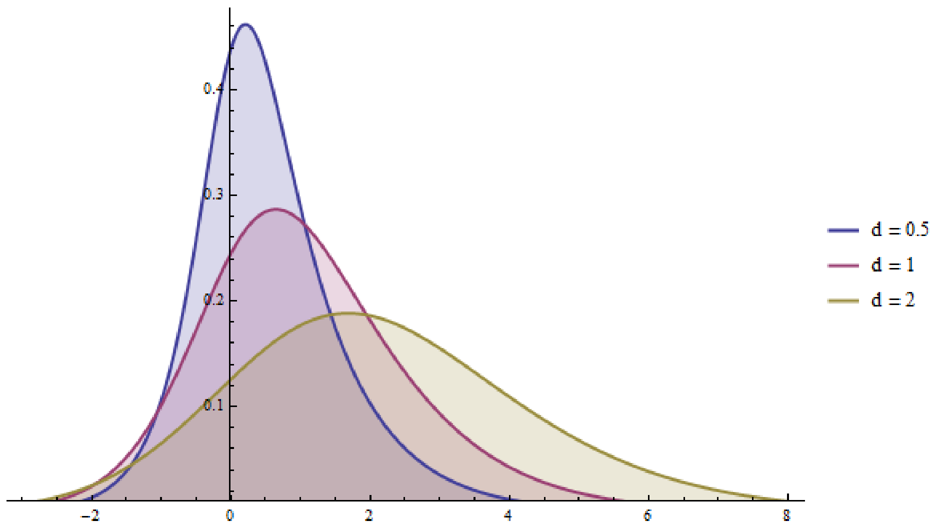
  При $b < 0$ распределение скошено влево, при $b > 0$ – вправо. Величина модуля параметра влияет на степень скошенности.




- $\boldsymbol{X \sim MD(2, 1, m, 1)}$
  Значение параметра $m$ влияет на параллельный сдвиг распределения от стандартного положения ($m = 0$).

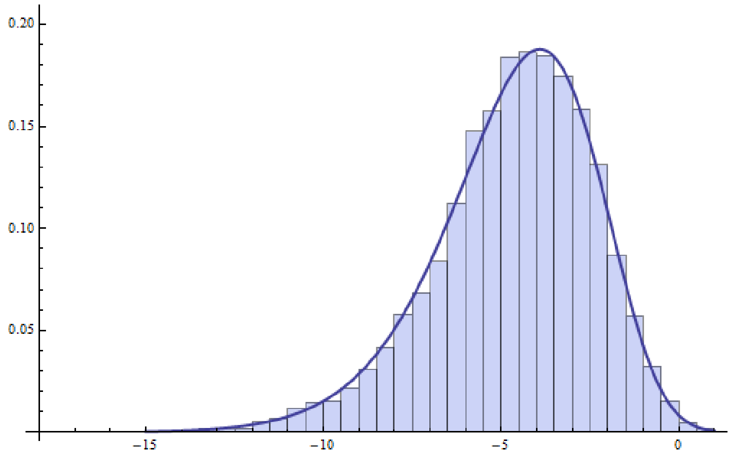



- $\boldsymbol{X \sim MD(2, 1, 0, d)}$
  Влияние аналогично параметру $a$, но с большим смещением вправо.



## Генерация выборки случайных величин.

Сгенерируем набор псевдослучайных величин, распределенных по Мейксному распределению $X \sim MD(1, -2, 0, 3)$. На графике ниже отображены гистограмма полученной выборки и эталонная функция генерируемого распределения.

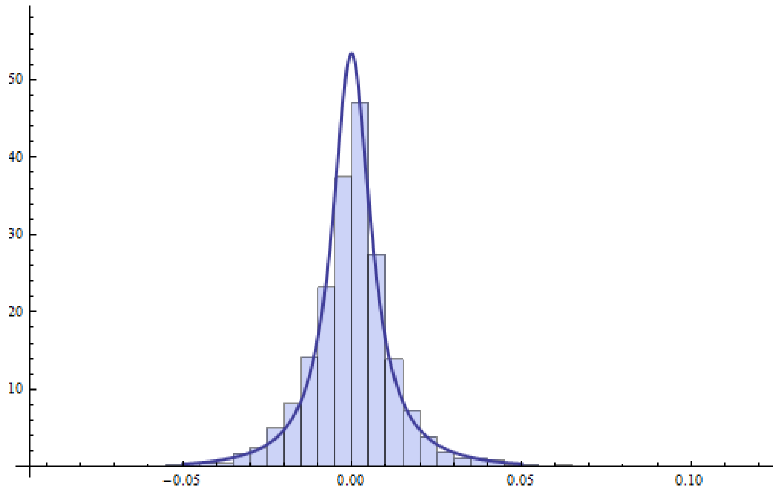



## Оценка реальных данных.

Для исследования были взяты величины доходности индекса S&P 500* в период с 1 января 2000 по 1 января 2010. Оценка параметров производилась методом моментов и методом максимального правдоподобия. Ниже приведены результаты оценок и их графики распределений, нарисованные поверх гистограммы рассматриваемых данных.

- **Метод моментов.**

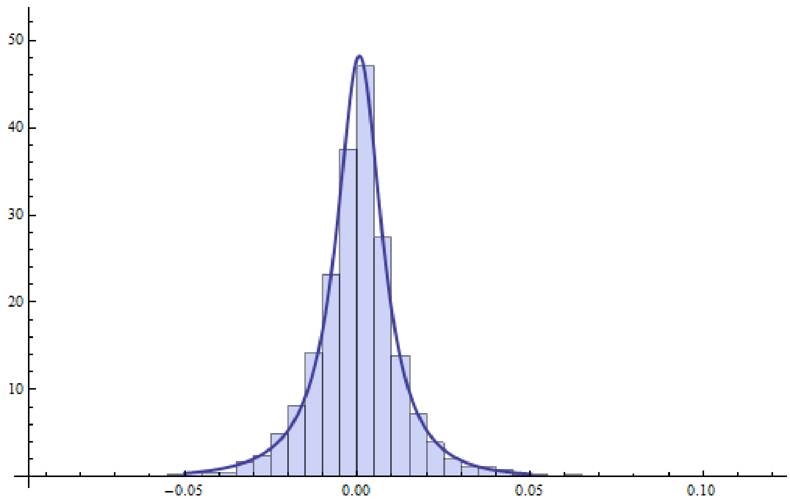
```
MeixnerDistribution[0.0555843,0.0507417,-0.000183754,0.124796]
```




* **Индекс Standard & Poor’s 500** (**S&P 500**) — фондовый индекс, в корзину которого включено 500 избранных акционерных компаний США, имеющих наибольшую капитализацию. Список принадлежит компании Standard & Poor's и ею же составляется.

- **Метод максимального правдоподобия.**

```
MeixnerDistribution[0.0466282,-0.176725,0.000706459,0.172887]
```




Исходя из полученных результатов, можно заключить, что оба метода достаточно точно оценивают параметры распределения, однако имеют существенные различия между собой.