МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра теории вероятности и математической статистики

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕЙКСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Индивидуальное задание

Рымкевич Виктории Сергеевны

Студентки 4 курса,

специальность «актуарная математика»

Преподаватель:

доктор физико-математических наук

Н.Н. Труш

Минск, 2016

Распределение Мейкснера
(Meixner distribution)

Плотность распределения Мейкснера $MD(a,b,m,d)$ задаётся следующей формулой:

$$f_{MD}(x;a,b,m,d) = \frac{\left(2\cos\left(b/2\right)\right)^{2d}}{2a\pi\Gamma(2d)} \cdot \exp\left(\frac{b(x-m)}{a}\right) \cdot \left|\Gamma\left(d + \frac{i(x-m)}{a}\right)\right|^2$$

Где:

- a – параметр масштаба, $a > 0$;
- b – параметр асимметрии, $-\pi < b < \pi$;
- m – параметр положения, $m \in \mathbb{R}$;
- d – параметр формы, $d > 0$.

Характеристическая функция $X \sim MD(a,b,m,d)$ задается следующей формулой:

$$\phi_{MD}(u) = E\left[e^{iuX}\right] = \left(\frac{\cos\left(b/2\right)}{\cosh\frac{au-ib}{2}}\right)^{2d} \cdot \exp(imu)$$

и кумулятивная функция:

$$g_{MD}(u) := \log\phi_{MD}(u) = 2d\left[\log\left(\cos\left(\frac{b}{2}\right)\right) - \log\left(\cosh\frac{au-ib}{2}\right)\right] + im$$

Для данного распределения существуют моменты любого порядка. Далее приведены наиболее важные величины:

математическое ожидание	$m + ad\tan\left(b/2\right)$
дисперсия	$\frac{a^2 d}{1+\cos b}$
эксцесс	$3 + \frac{2-\cos b}{d}$
асимметрия	$\sqrt{\frac{2}{d}} \cdot \sin\left(b/2\right)$

Основные свойства распределения Мейкснера:

1. $MD(a,b,m,d)$ является бесконечно делимым распределением с триплетом Леви $(\alpha, 0, \nu(dx))$, где

$$\alpha = ad\tan\left({}^{b}/_{2}\right) - 2d\int_{1}^{+\infty} \frac{\sinh(bx/a)}{\sinh(\pi x/a)}dx + m,$$

$$\nu(dx) = d\,\frac{\exp(bx/a)}{x\sinh(\pi x/a)}dx$$

Как следствие, справедлива следующая формула для характеристической функции:

$$\phi_{MD}(u;a,b,m,d) = \left[\phi_{MD}\left(u;a,b,{}^{m}/_{n},{}^{d}/_{n}\right)\right]^{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

2. Если $X_j \sim MD(a,b,m_j,d_j)$, $j = 1, \dots, n$, а также являются попарно независимыми, то

$$X_1 + \dots + X_n \sim MD\left(a,b,\sum_{j=1}^{n} m_j, \sum_{j=1}^{n} d_j\right).$$

3. $MD(a,b,m,d)$ является саморазложимым распределением и имеет полутяжёлые хвосты. Это означет, что

$$f_{MD}(x;a,b,m,d) \sim C_-|x|^{\rho_-}\exp(-\sigma_-|x|) \text{ при } x \to -\infty$$
$$f_{MD}(x;a,b,m,d) \sim C_+|x|^{\rho_+}\exp(-\sigma_+|x|) \text{ при } x \to +\infty$$

где

$$C_-, C_+ \geq 0, \qquad \rho_- = \rho_+ = 2d-1, \qquad \sigma_- = \frac{\pi - b}{a}, \sigma_+ = \frac{\pi + b}{a}$$

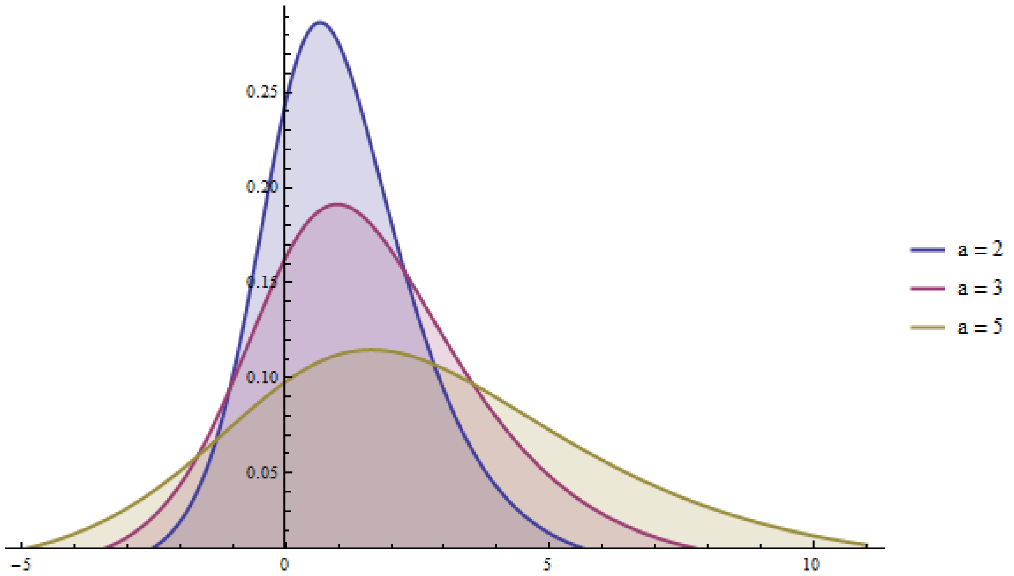
Дальнейшее исследование было проведено при помощи программного пакета Wolfram Matematica 9.0. Реальные данные для исследования были полученны из встроенных баз данных.

Исследование параметров распределения.

m является простым параметром положения, в то время как a и d влияют на островершинность распределения, а b, являясь параметром формы, напрямую влияет на скошенность распределения. Далее наглядно продемонстрируем зависимость вида функции распределения от значения её параметров.

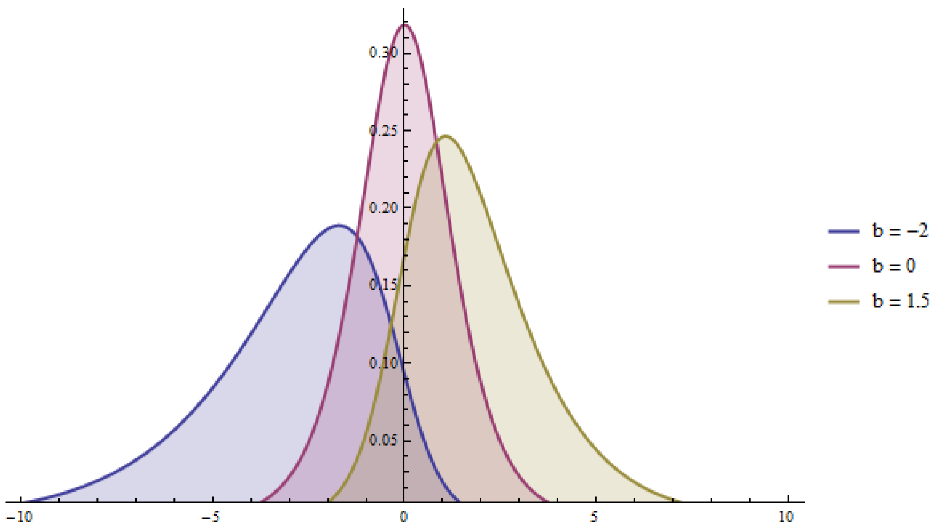
- $\boldsymbol{X \sim MD(a, 1, 0, 1)}$

С увеличением параметра a распределение из островершинного переходит в плосковершинное.



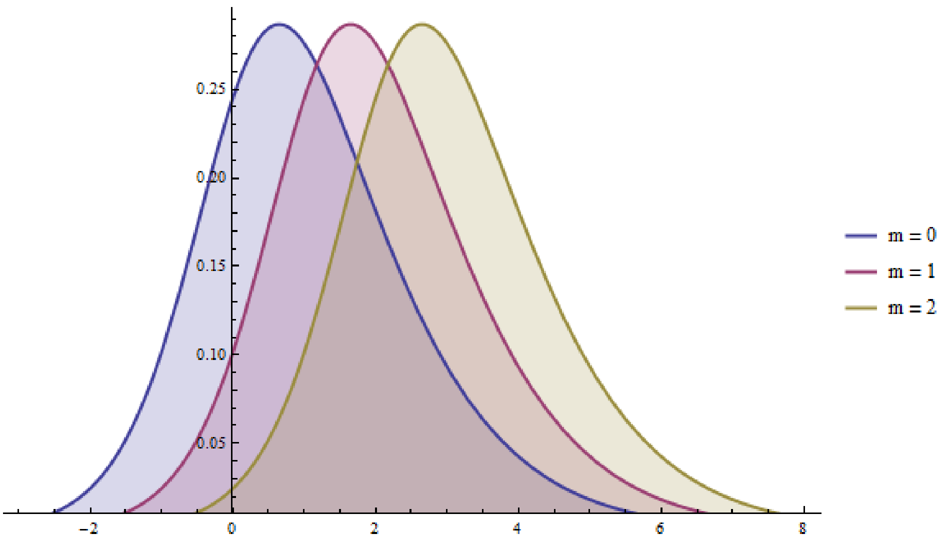
- $\boldsymbol{X \sim MD(2, b, 0, 1)}$

При $b < 0$ распределение скошено влево, при $b > 0$ – вправо. Величина модуля параметра влияет на степень скошенности.



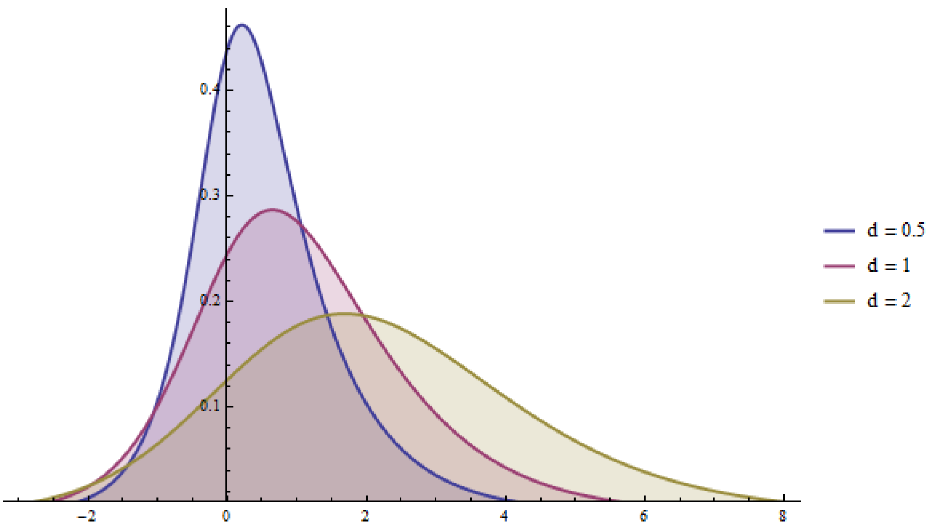
- $\boldsymbol{X \sim MD(2, 1, m, 1)}$

  Значение параметра m влияет на параллельный сдвиг распределения от стандартного положения ($m = 0$).



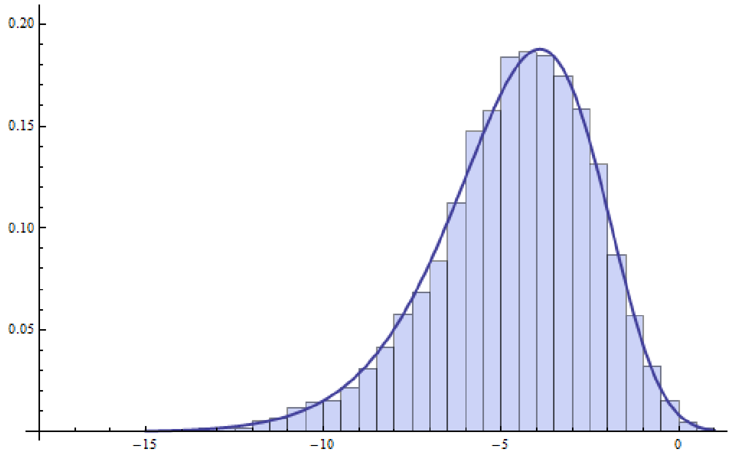
- $X \sim MD(2, 1, 0, d)$

Влияние аналогично параметру a, но с большим смещением вправо.



Генерация выборки случайных величин.

Сгенерируем набор псевдослучайных величин, распределенных по распределению Мейкснера $X \sim MD(1, -2, 0, 3)$. На графике ниже отображены гистограмма полученной выборки и эталонная функция генерируемого распределения.



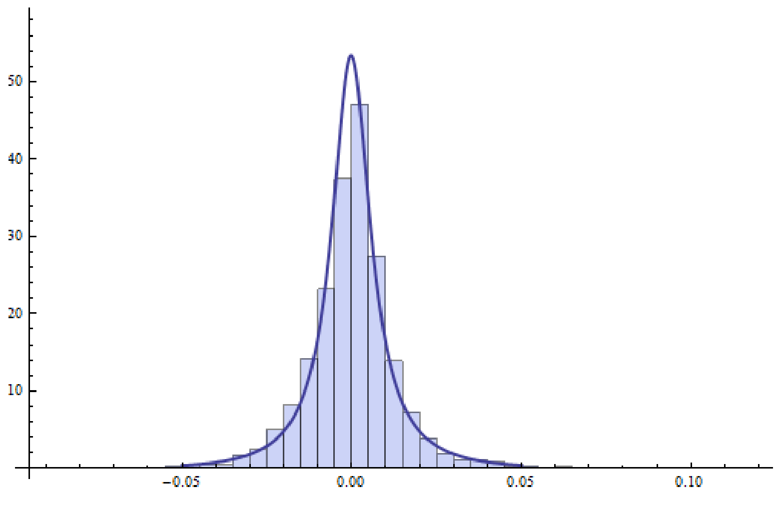
	Практическое	Теоретическое
математическое ожидание	−4.6419	−4.6722
дисперсия	5.0927	5.1382
эксцесс	3.9261	3.8053
асимметрия	−0.69608	−0.68705

Оценка реальных данных.

Для исследования были взяты величины доходности индекса S&P 500* в период с 1 января 2000 по 1 января 2010. Оценка параметров производилась методом моментов и методом максимального правдоподобия. Ниже приведены результаты оценок и их графики распределений, нарисованные поверх гистограммы рассматриваемых данных.

- Метод моментов.

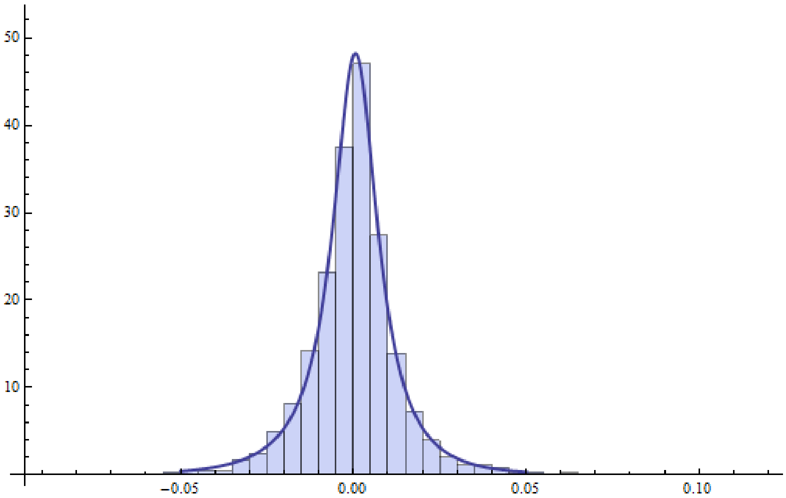
```
MeixnerDistribution[0.0555843,0.0507417,-0.000183754,0.124796]
```



* **Индекс Standard & Poor's 500** (**S&P 500**) — фондовый индекс, в корзину которого включено 500 избранных акционерных компаний США, имеющих наибольшую капитализацию. Список принадлежит компании Standard & Poor's и ею же составляется.

- Метод максимального правдоподобия.

```
MeixnerDistribution[0.0466282,-0.176725,0.000706459,0.172887]
```



Исходя из полученных результов, можно заключить, что оба метода достаточно точно оценивают параметры распределения, однако имеют существенные различия между собой.

Процесс Мейкснера

Свойства

- Не имеет броуновской компоненты, нулевое значение среднего элемента триплета Леви ясно просматривается.
- Его мера Леви задается как

$$\nu(dx) = d\,\frac{\exp(bx/a)}{x\sinh(\pi x/a)}\,dx$$

- Имеет моменты любого порядка.
- Имеет бесконечную вариацию, можно показать, что

$$\int_{-1}^{+1} |x|\nu(dx) = \infty$$

- Является саморазложимым и имеет полутяжелые хвосты.

Алгоритм генерации

Малые скачки субординатора аппроксимируются при помощи дрейфа

$$\varsigma = da\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\pi}},$$

а размер скачка как

$$y_j = \frac{\varepsilon}{u_j^2},$$

где $\{u_j\}$ – последовательность независимых равномерно распределенных величин.

Изменение времени определяется как

$$\tau = \varsigma + \sum_j y_j \mathbb{I}_{\{g(y_j) > \omega_j\}},$$

где $\{\omega_j\}$ – еще одна последовательность независимых равномерно распределенных величин, а функция $g(u)$ задается как

$$g(u) = \exp\left\{-\frac{A^2 u}{2}\right\} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \exp\left\{-\frac{n^2\pi^2}{2C^2 u}\right\}.$$

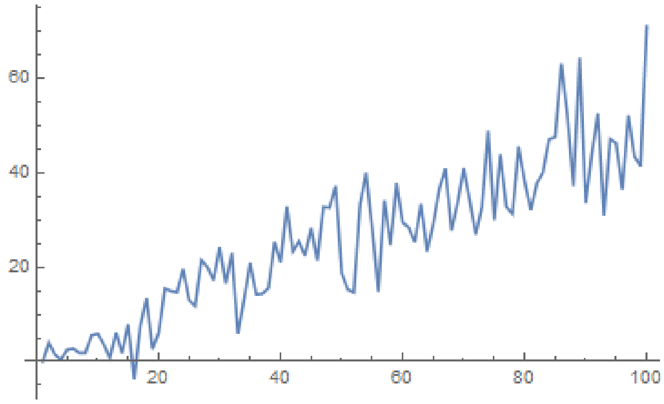
В итоге, реализации процесса Мейкснера генерируются по следующей формуле:

$$X = \frac{b}{a}\tau + \sqrt{\tau}Z,$$

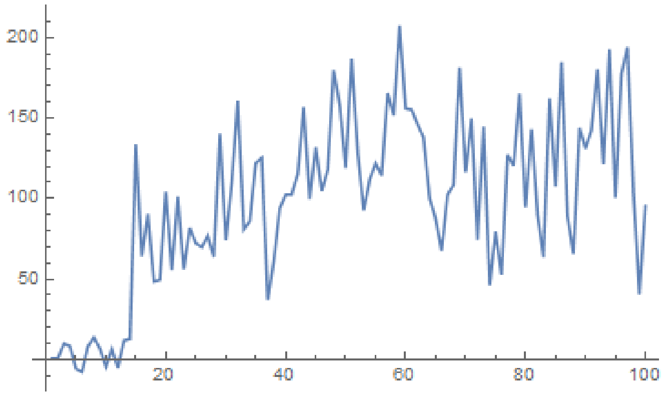
где Z – независимая стандартно нормально распределенная случайная величина.

Примеры реализации

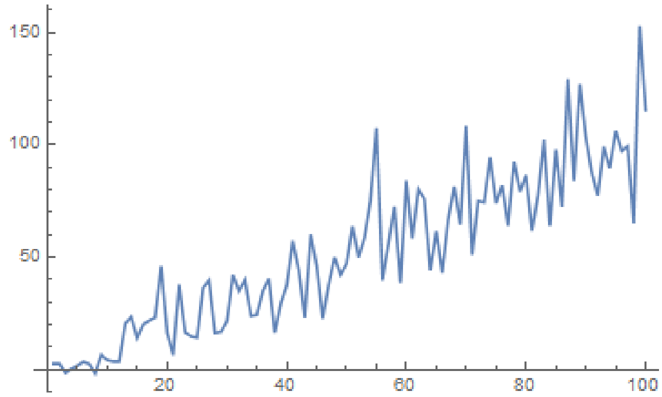
- $\boldsymbol{X \sim MP(2, 1, 0, 1)}$



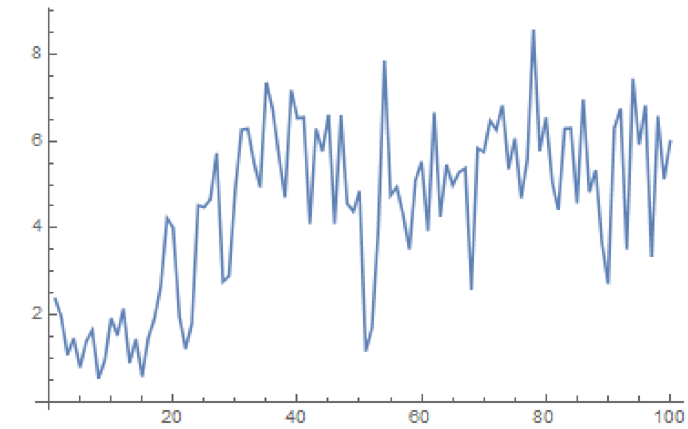
- $X \sim MP(0.5, 0.05, 0, 2)$



- $X \sim MP(2, 0.5, 0, 1.5)$



- $X \sim MP(0.5, 1.5, 0, 1.5)$



Модель GARCH(1, 1) с процессом инноваций Мейкснера MP(1, 0, 0, 2)

Модель GARCH(1,1) задается следующим образом:

$$x_t = \sigma_t z_t,$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2.$$

Были получены следующие оценки параметров модели для дневных значений индекса S&P500:

Период	$\boldsymbol{\alpha_0}$	$\boldsymbol{\alpha_1}$	$\boldsymbol{\beta_1}$	**Ошибка**
Январь 2015	0.	0.1350853	0.3333034	0.0022265
Февраль 2015	6.415×10^{-7}	1.197×10^{-6}	0.131966	0.00058052
Март 2015	6.915×10^{-7}	0.15887	0.39823	0.00071479
Апрель 2015	0.	0.86879	1.2554	0.0012458
Май 2015	8.926×10^{-6}	0.16017	0.090274	0.0068613
Июнь 2015	0.00001711	0.6386	1.752	0.013974
Июль 2015	9.655×10^{-8}	5.317	2.777×10^{-7}	0.003184
Август 2015	0.006903	0.028052	0.03591	0.0052767
Сентябрь 2015	0.	0.	0.28417	0.0014211
Октябрь 2015	2.64×10^{-10}	0.035999	0.112202	0.0006764
Ноябрь 2015	0.	0.021273	0.	0.0001201
Декабрь 2015	0.	0.37351	0.000024069	0.00079984