Прогнозирование срочных премий и процентных ставок в аффинных моделях.

# Резюме

Автор обнаружил, что стандартный класс аффинных моделей производит плохой прогноз будущих изменений в доходностях казначейских облигаций. Прогноз получше получается при предположении, что доходности следуют случайному блужданию. Несостоятельность этих моделей обусловлена одной из их ключевых черт: компенсация, которую инвесторы получают за риск кратна дисперсии риска. Это значит, что компенсация риска не может изменяться независимо от волатильности процентной ставки. Автор также описывает и эмпирически оценивает класс моделей, которые шире чем стандартный аффинный класс. Эти «существенно аффинные» модели сохраняют удобство манипулирования обычных моделей, но позволяют компенсации за риск процентной ставки изменяться независимо от ее волатильности. Эта дополнительная гибкость оказывается полезной в формировании точных прогнозов будущих доходностей.

Можем ли мы использовать теорию финансов для того, чтобы узнать что-нибудь об эмпирическом поведении доходностей казначейских облигаций, которые мы еще не знаем? В частности, можем ли мы улучшить нашу способность предсказывать будущие уровни доходности? Давно установленный факт о доходностях казначейских облигаций: текущая временная структура содержит информацию о будущих временных структурах. Например, доходность долгосрочных облигаций, как правило, со временем снижается, когда наклон кривой доходности круче, чем обычно. Эти предсказательные отношения основаны исключительно на поведении временных рядов доходностей. Известно из теории финансов, что статистическое и текущее поведение временной структуры должны быть связаны внутренне непротиворечивым образом, чтобы избежать арбитражных возможностей. В принципе, наложение этого ограничения должно позволить нам эксплуатировать больше информации текущей временной структуры, и тем самым улучшить прогнозы. Однако на практике, существование неарбитражных моделей налагает другие ограничения ради удобства манипулирования, таким образом их ценность в качестве инструментов прогнозирования априори неясна.

Автор изучает способность прогнозирования аффинного класса моделей временной структуры. Под названием «аффинные» он имеет ввиду модели, где доходность облигаций с нулевым купоном, их физическая (т.е. истинная) динамика и их нейтральная к риску (т.е. с поправкой на риск) вероятностная мера являются аффинными функциями лежащего в основе вектора состояния. Было разработано множество неаффинных моделей, однако большая часть внимания финансовой сферы сосредоточена именно на аффинных моделях, в силу податливости и видимого изобилия данного класса.

Хотя прогнозирование будущих доходностей и так имеет важное значение, модель, совместимая с теорией финансов и производящая точные прогнозы, может внести и более глубокий вклад в науку о финансах. Это должно позволить нам рассмотреть ключевую проблему: объяснить хорошо задокументированное изменение во времени ожидаемых доходностей активов. В контексте временной структуры, объяснить изменение во времени ожидаемых доходностей значит объяснить упущение гипотезы ожиданий процентных ставок. Иными словами, мы хотели бы иметь интуитивное объяснение положительной корреляции между наклоном кривой доходности и избыточными доходами долгосрочных облигаций. Если же модель производит плохие прогнозы будущих доходностей (и таким образом плохие прогнозы будущих цен на облигации), то маловероятно, что эта модель сможет пролить свет на экономическую часть, лежащую в основе несостоятельности гипотезы ожиданий.

Первый главный вывод, сделанный в данной статье, - класс аффинных моделей, который к настоящему времени изучен наиболее широко, проваливается на прогнозировании. Имеется ввиду класс, который включает в себя многофакторные обобщения Vasicek (1977) и Cox, Ingersoll, Ross (1985), а также в значительной степени проанализирован в Dai и Singleton (2000) как «полностью аффинный». Автор приспосабливает общую трехфакторную полностью аффинную модель к казначейской временной структуре (со сроками погашения от трех месяцев до десяти лет) за период с 1952 по 1994 годы. Прогнозы доходностей, произведенные с использованием этих расчетных моделей, как правило, хуже прогнозов, произведенных при простом предположении, что доходность следует случайному блужданию. Это вывод справедлив для прогнозов как в пределах, так и вне пределов (1995 - 1998) выборки.

Рассмотрим еще более интересную ситуацию, в которой эти расчетные модели терпят неудачу. Произведенные ими ошибки прогноза доходностей строго отрицательно коррелируют с наклоном кривой доходности. Другими словами, эти модели не воспроизводят ключевое эмпирическое соотношение между ожидаемыми доходностями и наклоном кривой доходности; их недооценка ожидаемых избыточных доходов долгосрочных облигаций становится наибольшей, когда наклон временной структуры крут.

Этот недостаток является следствием двух особенностей казначейской временной структуры, в сочетании с ограничением, встроенным в полностью аффинные модели. Первая особенность в том, что доходности казначейских облигаций во времени колеблются в широких пределах с обеих сторон их (выборочных) средних. Другими словами, мы наблюдаем множество форм временной структуры в данных. Второй особенностью является то, что по всему диапазону срока погашения, безусловное среднее избыточной доходности облигаций мало по сравнению с вариацией условных средних избыточной доходности. В то время как средняя доходность по казначейским облигациям не намного больше нуля, наклон временной структуры предсказывает относительно большое количество вариаций в избыточных доходах облигаций. Одним из следствий этого второго признака является то, что, как было отмечено Fama и French (1993), знак предсказанных избыточных доходов казначейских облигаций изменяется с течением времени.

Полностью аффинные модели не одновременно воспроизводят эти две особенности поведения временной структуры. Основным ограничением в этих моделях является то, что компенсация риска кратна дисперсии риска. Такая структура гарантирует, что модели удовлетворяют требованию отсутствия арбитража: компенсация риска стремится к нулю, если риск стремится к нулю. Но поскольку отклонения неотрицательны, эта структура также накладывает существенное ограничение на поведение временных рядов компенсаций, которые инвесторы ожидают получить за встречу с заданным риском. Величина компенсации ограничена нулем, поэтому она не может менять знак с течением времени.

Как будет пояснено в статье, единственный способ, при котором эта система может производить ожидаемые доходности с низкими средними и высокими волатильностями – это лишь при некоторых основных коэффициентах, порождающих временную структуру, имеющую сильную положительную асимметрию. Но эта сильная положительная асимметричность ограничивает способность модели соответствовать широкому спектру форм временной структуры. Таким образом, полностью аффинные модели могут соответствовать любой из этих особенностей доходностей казначейских облигаций, но не обеим одновременно.

Однако, не все потеряно. Вторым главным выводом данной статьи является то, что полностью аффинный класс может быть расширен, с целью разорвать связь между компенсацией риска и волатильностью процентной ставки. Это расширение из полностью аффинного класса до «существенно аффинного» класса, описанное здесь, является безболезненным, в том смысле, что аффинные текущие и статистические свойства цен облигаций сохраняются в существенно аффинных моделях. Существование расширений полностью аффинного класса не ново (Chacko, 1997, строит общий пример равновесия), но эта статья является первой, в которой описывается и эмпирически исследуется общее, очень податливое расширение полностью аффинной модели временной структуры. Автор обнаружил, что существенно аффинные модели могут производить более точные прогнозы доходностей, по сравнению с полностью аффинными моделями, как в пределах, так и вне пределов выборки. Тем не менее, существует компромисс между гибкостью в прогнозировании будущих доходностей и гибкостью в подборе волатильности процентной ставки.

Статья организована следующим образом. Структура аффинных моделей подробно обсуждается в разделе 1. В разделе 2 интуитивно объясняется почему полностью аффинные модели работают плохо. В разделе 3 описана методика оценки. В разделе 4 представлены эмпирические результаты. В разделе 5 представлены выводы.

# Аффинные модели временной структуры

## Аффинное установление цены облигации

Основой аффинных моделей временной структуры является структура Duffie и Kan (1996). Их модель, которая кратко изложена здесь, описывает эволюцию цен на облигации по нейтральной к риску вероятностной мере. Неопределенность порождается броуновскими движениями, . Имеется переменных состояния, обозначенные через . Текущая номинальная процентная ставка, обозначенная , аффинная функция переменных состояния:

где – скаляр и – -вектор. Эволюция переменных состояния по нейтральной к риску вероятностной мере задается следующим равенством:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

где и – матрицы, – -вектор. Верхний индекс используется для того, чтобы отличать параметры по риск-нейтральной мере от соответствующих параметров по физической мере. Матрица является диагональной с элементами

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

где – -вектор и – скаляр. Удобно объединить вектора в матрицу , где - это -ая строка матрицы . Скаляры объединяются в -вектор . Последующее обсуждение предполагает, что динамика (1) хорошо определена, что требует, чтобы являлись неотрицательными для всех и всех возможных . Ограничения параметров, которые обеспечивают выполнение этих требований, находятся в Dai и Singleton (2000).

Обозначим цену облигации с нулевым купоном в момент времени и со сроком погашения в момент времени как . Duffie и Kan показали:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

где – скалярная функция и – -значная функция. Таким образом, доходность облигации является аффинной функцией вектора состояния:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

Функции и можно вычислить численно путем решения ряда обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

## Цена риска и ожидаемые доходности облигации

Модель временной структуры дополняется указанием динамики по физической мере, что эквивалентно указанию динамики цены риска. Обозначим государственный ценовой дефлятор через . Относительная динамика :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

где вектор задан броуновским движением по физической мере. Элемент -вектора представляет собой цену риска, связанного с броуновским движением . Динамика по физической мере может быть записана в терминах и параметрах (1):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

Текущая динамика цены облигации может быть записана в виде

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где через обозначена текущая ожидаемая избыточная доходность полагающаяся владельцу облигации; ожидаемая доходность, сверх , за владение на в момент времени облигацией со сроком погашения . Применяя лемму Ито в сочетании со структурой ОДУ, Duffie и Kan показывают, что

|  |  |
| --- | --- |
| , | (7) |
| . | (8) |

Равенство (7) говорит о том, что изменения во времени ожидаемых избыточных доходов задаются изменениями матрицы волатильности и вектора цены риска . Полностью параметрическая модель динамики доходности облигации требует указания функциональной формы для . Эта форма должна быть достаточно гибкой, чтобы учитывать эмпирически наблюдаемое поведение ожидаемых избыточных доходов. Таким образом, для того, чтобы мотивировать выбор функциональной формы для , мы кратко рассмотрим особенности поведения доходов облигаций.

Есть немало литературы, о том, что ожидаемые избыточные доходы по казначейским облигациям (сверхдоходы по краткосрочным казначейским векселям), в среднем, расположены около нуля, и изменяются систематически с временной структурой.[[1]](#footnote-1) Когда наклон временной структуры является более крутым, чем обычно, ожидаемые избыточные доходы по облигации высоки, в то время как когда наклон менее крутой, ожидаемые избыточные доходы низкие, часто даже отрицательные. Таким образом, по всему спектру сроков погашения, отношение среднего ожидаемых избыточных доходов облигации к их стандартному отклонению является небольшим.

Более ранние работы также показали, что форма временной структуры связана с волатильностью доходностей.[[2]](#footnote-2) Однако отношение наклона к ожидаемому доходу не просто аналог отношению волатильности к ожидаемому доходу. Подтверждающие это данные находятся в таблице I, в которой записаны результаты регрессии месячных избыточных доходов облигации по наклону временной структуры и волатильности доходности. Ежемесячные доходы по портфелям из казначейских облигаций взяты из Center for Research in Security Prices. Избыточные доходы по этим портфелям получены путем вычитания текущего дохода по трехмесячному казначейскому векселю. Наклон временной структуры измерен как разница между пятилетней и трехмесячной бескупонными доходностями в конце месяца. Бескупонные доходности интерполированы из купонных облигаций с использованием метода McCCulloch и Kwon (1991), реализованного Bliss (1997).[[3]](#footnote-3) Волатильность доходности – это стандартное отклонение доходности пятилетней бескупонной облигации, измеряемое как корень квадратный из суммы квадратов дневных изменений в доходности в течение месяца.

Период выборки: с июля 1961 по декабрь 1998. Результаты в таблице I показывают, что волатильность в месяце не имеет статистически значимой предсказательной силы для избыточных доходов облигации в месяце . В отличии от этого, все оцениваемые параметры наклона являются значимыми на десятипроцентном уровне, и половина из них значима на пятипроцентном уровне. Кроме того, вариация прогнозируемых избыточных доходов велика относительно их среднего. Рассмотрим, например, облигации со сроками погашения между тремя и четырьмя годами. Средняя избыточная доходность составляет 7 базисных пунктов в месяц, в то время как стандартное отклонение прогнозируемых избыточных доходов составляет примерно 25 базисных пунктов. В результатах, не приведенных здесь, я обнаружил, что выводы остаются прежними после включения волатильности доходностей других облигаций как независимых переменных регрессии.

Вооружившись этой информацией об эмпирическом поведении доходов облигации, мы теперь обсудим три альтернативные параметризации .

## Полностью аффинные модели

Fisher и Gilles (1996) и Dai и Singleton (2000) принимают следующую параметризацию . Пусть является -вектором. Тогда вектор цены риска задается как

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

Этот класс содержит в себе многофакторной версии модели Vasicek (1977) и Cox и др. (1985; далее CIR). Главной причиной популярности этой формы является то, что вектор аффинный по . Это подразумевает аффинную динамику как по риск-нейтральной, так и по физической мерам. Аффинная динамика по физической мере позволяет расчет различных свойств условных плотностей дискретно выбранных доходностей в замкнутой форме. Эти свойства подробно обсуждаются в Duffie, Pan, и Singleton (1999) и Singleton (1999). Менее важным является тот факт, что величина , которая представляет собой текущую дисперсию государственного ценового дефлятора, также аффинная по . Это последнее свойство мотивирует термин «полностью аффинные», что пояснено в следующем разделе.

Эта структура накладывает два взаимосвязанных ограничения на . Во-первых, вариация вектора цены риска полностью определяется вариацией . Поэтому вариации ожидаемых избыточных доходов облигаций задаются исключительно волатильностью доходностей, вывод, который кажется несовместимым с данными из таблицы I. Во-вторых, знак элемента вектора такой же, как и у элемента вектора , так как диагональные элементы матрицы предполагаются неотрицательными. Важность этого ограничения будет пояснена в разделе 2.

## Существенно аффинные модели

Существенно аффинный класс содержит в себе полностью аффинный класс. Сначала определим элементы диагональной матрицы как

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Таким образом, если величина диагонального элемента матрицы выше нуля, то его обратная величина является диагональным элементом матрицы . Для любого диагонального элемента матрицы с величиной ниже нуля (независимо от того, доступна ли она с учетом динамики) соответствующий элемент матрицы устанавливается равным нулю. Поэтому элементы матрицы не возрастают резко, так как соответствующие элементы матрицы обращаются в ноль.

Форма вектора , используемая в существенно аффинной модели записывается в следующем виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

где – матрица размерности . Эта форма разделяет с (9) два важных свойства. Во-первых, если обращается в ноль, не устремляется в бесконечность. Во-вторых, вектор аффинный по . Следовательно, физическая динамика является аффинной, что совместимо с эмпирической оценкой.

Есть три важных различия между (9) и (10). Во-первых, при , величина не аффинная по . Следовательно, эта модель не является полностью аффинной, но дисперсия государственного ценового дефлятора не влияет на цены облигаций. Это и есть мотивация для термина «существенно аффинный». Во-вторых, нарушается тесная связь между вектором цены риска и матрицей волатильности. Существенно аффинная постановка обеспечивает независимую вариацию цен риска, которая является своего рода гибкостью, необходимой для соответствия эмпирическому поведению ожидаемых избыточных доходов облигаций. В-третьих, удаляется ограничение на знак отдельных элементов .

Для дальнейшего использования нам необходимо явно определить физическую динамику . Подставим (10) в (6) и определим как диагональную матрицу размерности с элементами , если , , если . Тогда физическая динамика в существенно аффинных моделях может быть записано в следующем виде

|  |  |
| --- | --- |
| . | (11) |

Приводя слагаемые и обозначая -ый элемент вектора через , (11) может быть переписано в следующем виде

|  |  |
| --- | --- |
| . | (12*a*) |

где

|  |  |
| --- | --- |
|  | (12*b*) |

и

|  |  |
| --- | --- |
|  | (12*с*) |

## Пример существенно аффинной модели

Следующая двухфакторная модель иллюстрирует ряд особенностей существенно аффинной модели. Текущая процентная ставка задана гауссовским процессом, и есть некоторые другие факторы , заданные процессом квадратного корня. Удобно начать с моделирования их динамики по физической мере. В соответствии с этой мерой, процессы независимы, как показано в (13):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

Модель является закрытой с описанием динамики рыночной цены риска. Если мы принимаем полностью аффинную версию в (9), результатом будет классическая модель Vasicek (1977) для . В такой постановке, переменная не имеет никакого значения для цен облигаций, и мы получаем стандартную однофакторную гауссовскую модель.

Однако, если мы используем существенно аффинную спецификацию для рыночной цены риска, фактор может повлиять на цены облигации, даже если он не может повлиять на . Причина заключается в том, что компенсация, которую инвесторы требуют за встречу с риском может изменяться с изменением Существенно аффинная модель определяет цену риска как

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Динамика государственного ценового дефлятора, следовательно, задается как

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Динамики и по нейтральной к риску мере (из (12*a*) и (12*b*) ):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (14) |

где под и понимаются средние и соответственно по риск-нейтральной мере.

Есть три важных различия между этим описанием динамик цен облигации и стандартной моделью Vasicek. Во-первых, текущий уровень процентной ставки влияет на цену риска процентной ставки при помощи параметра . В модели Vasicek цена риска процентной ставки является постоянной. Во-вторых, есть источник неопределенности цен облигации, который не зависит от физической динамики . Фактор влияет на цены облигаций при помощи параметра . Chacko (1997) в своей работе строит аффинную модель временной структуры, специально разработанную для того, чтобы показать эту вторую особенность, и мой пример был вдохновлен его (в значительной степени более сложной) моделью. Мы увидим в разделе 4, что такого рода особенность имеет решающее значение для понимания фактической динамики доходностей казначейских облигаций. В-третьих, цена риска, связанная с инновациями в , может менять знак в зависимости от уровня фактора .

Поскольку эта модель принимает в качестве примитива динамику государственного ценового дефлятора, она не в состоянии предоставить нам основанное на полезности объяснение перемен знака в готовности инвесторов к встрече с риском. Тем не менее, как мы знаем из результатов стохастической дифференциальной полезности, при произвольной динамике государственного ценового дефлятора, существует некоторый градиент полезности и оптимальный процесс потребления, которые согласуются с динамикой дефляторов. Для обсуждения учебника, см. Duffie (1996).

Существенно аффинная структура , хотя и является более гибкой по сравнению с полностью аффинной структурой, тем не менее, накладывает ограничения на возможную динамику цен облигаций. Заметим, что один элемент из (первая матрица правой части равенства (13)) является таким же, как и соответствующий элемент (первая матрица правой части равенства (14)). Элемент (1, 2) должен быть равен нулю как по физической, так и по риск-нейтральной мерам. В противном случае, дрейф при мог бы быть отрицательным (потому что это зависело бы от ), что не может быть позволено, т.к. входит в .

Чтобы освободить этот элемент, и таким образом позволить более гибкую спецификацию цены риска, мы можем смоделировать как гауссовский процесс. Пример такой модели рассмотрен Fisher (1998). С другой стороны, если и , и были смоделированы как диффузионные процессы квадратного корня, существенно аффинная структура была бы идентична полностью аффинной структуре. Это иллюстрирует более общий случай, отмеченный Duffie и Kan (1996) и Dai и Singleton (2000), и это мы увидим в эмпирической работе текущей бумаги. С аффинным установлением цены облигации, существует компромисс между построением модели, которая может учитывать сложную динамику волатильности, и модели, которая может учитывать сложную динамику ожидаемых доходов.

## Полу-аффинные модели

Duarte (2000) в своей работе выбирает альтернативное обобщение полностью аффинных моделей. Пусть представляет собой -вектор. Вектор цены риска описывается равенством

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

В такой форме, элементы могут менять знак с течением времени, однако они не могут изменяться независимо от . Как отмечалось в разделе 1.4, эта последняя особенность оказывается несовместимой с эмпирическими данными. Таким образом, на первый взгляд кажется, что полу-аффинная постановка допускает некоторую, но не всю, гибкость существенно аффинной постановки. Тем не менее, существуют параметризации , для которых полу-аффинная модель обеспечивает большую гибкость, чем это делает существенно аффинная модель. Одним из примеров является многофакторная модель CIR, которая находится в центре внимания эмпирической работы Duarte. Следует отметить, что существенно аффинные и полу-аффинные структуры вложены в структуру со следующим вектором цены риска:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Как и в случае полу-аффинной формы , эта более общая форма предполагает неаффинную динамику по физической мере. Duarte (2000) отмечает, что с неаффинной физической динамикой, аппроксимация или методы моделирования, как правило, необходимы для воспроизведения свойств дискретно выбранных доходностей.

## Каноническая форма существенно аффинных моделей

Существует множество нормировок, которые могут быть приняты в отношении аффинных моделей. Здесь я последовал примеру Dai и Singleton’s (2000) канонической полностью аффинной модели. Они приводят матрицу к единичной матрице. Они также формируют так, что если коэффициентов влияют на текущую дисперсию (потому что они входят в один из диагональных элементов ) и коэффициентов – нет, то влияющие коэффициентов выносятся на позиции от до , а не влияющие располагают на позициях от до . Полученная модель называется моделью. Они также полагают первые элементов равными 0, а оставшиеся элементов – равными 1. Таким образом, их версия (2)

|  |  |
| --- | --- |
|  | (15) |

где для

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Используя их структуру, мы можем записать диагональные элементы и как

|  |  |
| --- | --- |
|  | (16) |

Следует отметить, что в формуле (11) матрица есть только в слагаемом . Поэтому мы можем нормализовать первые строк , положив их элементы равными нулю. Теперь рассмотрим формулу (7), задающую текущий избыточный доход держателю облигации с оставшимся сроком до погашения . Из (10), (15) и (16), в канонической форме это может быть записано в виде

|  |  |
| --- | --- |
|  | (17) |

В формуле (17), - -вектор нулей. Матрица определена аналогично. Подматрица – диагональная матрица с -ым диагональным элементов равным -ому элементу вектора . Строка матрицы задается первыми элементами вектора . Подматрица состоит из строк матрицы .

Дополнительная гибкость существенно аффинной модели в соответствии изменений во времени ожидаемых избыточных доходов по облигациям учитывается в матрице . В полностью аффинной постановке, является нулевой матрицей. Поэтому все элементы , которые не влияют на текущую волатильность (т.е. элементы ), так же неспособны повлиять на текущие ожидаемые избыточные доходы облигаций. Когда матрица ненулевая, все такие элементы вектора могут повлиять на ожидаемые избыточные доходы. Кроме того, предоставляет возможность для всех других элементов в влиять на ожидаемые доходы другим путем, отличным от и .

Если все элементы влияют на текущую волатильность (т.е., коррелированная многофакторная модель CIR или, как ее называют Dai и Singleton (2000), модель ), то матрицы нет (у нее 0 строк). Поэтому существенно аффинная модель обобщает полностью аффинную модель только тогда, когда есть хотя бы один элемент в , который не влияет на текущую волатильность .

# Интуитивное понимание несостоятельности полностью аффинных моделей

Успешная модель временной структуры должна быть согласована с множеством форм временных структур, наблюдаемых в данных. Например, модель должна быть способна производить низкие пологие временные структуры, низкие крутые временные структуры и такие же высокие временные структуры. Кроме того, модель должна воспроизводить эмпирически наблюдаемые закономерности в ожидаемых доходах по облигациям; или, что эквивалентно, производить прогнозы будущих доходностей, которые включают прогностическую информацию из наклона временной структуры. В этом разделе объясняется, что аппроксимация полностью аффинными моделями исторического поведения казначейских доходностей не достигнет одновременно обеих этих целей.

Для наших целей, ключевыми особенностями избыточных доходов по облигациям являются то, что они, в среднем, небольшие и демонстрируют достаточно предсказуемую вариацию. Напомним, из раздела 1, что обозначает текущий ожидаемый доход по облигации со сроком погашения . Несмотря на то, что мы не наблюдаем текущие доходы, данные в таблице I показывают, что отношение невелико – значительно ниже единицы – для всех . (Это отношение является обратным к коэффициенту вариации .)

Ниже мы увидим, что полностью аффинные модели могут быть параметризованы для производства низких значений для всех . Тем не менее, полностью аффинные модели могут аппроксимировать это поведение только отказавшись от способности аппроксимировать широкий спектр форм временных структур. С другой стороны, они могут быть параметризованы для аппроксимации наблюдаемых форм временных структур, но не поведения ожидаемых избыточных доходов. Интуитивные догадки, лежащие в основе этого результата, лучше всего видны в два этапа. Сначала мы рассмотри поведение однофакторных полностью аффинных моделей. Затем мы увидим, что важные свойства однофакторных моделей переносятся на многофакторные.

## Однофакторные модели

Интуитивное понимание полностью аффинной однофакторной модели очень просто. Ожидаемые текущие избыточные доходы облигации, , пропорциональны дисперсии фактора, следовательно, они ограничены нулем. Для того, чтобы случайная величина, которая ограничена нулем, имела стандартное отклонение значительно больше, чем его среднее, она должна иметь сильно скошенное распределение. Эта высокая асимметричность является очень жестким ограничением на допустимые значения , и, таким образом, жестким ограничением на допустимые значения коэффициента.

Чтобы отчетливо это увидеть, мы покажем это математически. Наша цель состоит в том, чтобы воспроизвести стилизованный факт, что отношение мало. Мы ограничимся рассмотрением негауссовской модели, так как для полностью аффинной гауссовской модели . Такая модель записывается в виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Из формулы (7), текущий ожидаемый избыточный доход по облигации со сроком погашения :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Таким образом, отношение, обратное коэффициенту вариации ,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (18) |

Равенство (18) неявно накладывает ограничение , которое является условием того, что среднее избыточных доходов облигации будет положительным. Положим , что является типичным значением отношения для предсказываемых избыточных доходов в таблице I. Положим безусловное среднее и стандартное отклонение текущей процентной ставки равным и процентов соответственно. Эти значения соответствуют моментам трехмесячной доходности векселя за период с 1952 по 1998 годы. В этой модели . Положим, что стандартное отклонение в (18) производит процента. Отсюда следует, что процента, чтобы соответствовать среднему текущей процентной ставки.

Требование о том, что среднее мало по сравнению с его стандартным отклонением, дает модели мало гибкости в производстве краткосрочных процентных ставок со значениями ниже среднего. Текущая процентная ставка не может быть меньше, чем процента. Но за период с 1952 по 1998 годы, трехмесячная доходность колебалась от до процентов. Иными словами, параметры модели и наблюдаемая вариация краткосрочных процентных ставок в течение этого периода подразумевают диапазон от до ; предполагаемые являются отрицательными в более чем 40 процентах ежемесячных наблюдений. Неотрицательность в подразумеваемых значениях требует процентов. При таком , модель будет обладать гибкостью для соответствия широкому спектру краткосрочных процентных ставок, наблюдаемых в данных, однако соотношение будет превышать .

Мы также можем подумать об ограничения этой модели на поведение процентных ставок с точки зрения асимметричности в ожидаемых избыточных доходах. С целью произвести небольшое значение отношения , модель будет генерировать ожидаемые избыточные доходы, которые всегда положительны, обычно очень близки к нулю и иногда значительно выше нуля. Но, как было отмечено в разделе 1, наблюдаемые ожидаемые избыточные доходы не настолько положительно искажены; они варьируются от положительных до отрицательных.

## Многофакторные модели

Многофакторные модели лучше проявляют себя при аппроксимации поведения ожидаемых избыточных доходов облигаций. Например, очень просто сгенерировать близкое к нулю значение для определенного срока погашения, сохраняя при этом достаточную гибкость в соответствии формам временных структур. В многофакторной модели CIR единственным требованием является то, что цены риска (элементы вектора ) имеют разные знаки. Если один из элементов является положительным, а другой – отрицательным, то при каком-то сроке погашения факторные нагрузки будут утяжелять эти цены риска так, что будет и .

Тем не менее, полностью аффинные модели не будут производить близкие к нулю значения для всех сроков погашения, при этом позволяя широкий спектр форм временных структур. Слегка упрощенно, интуитивно понятно, что на доходности долгосрочных облигаций влияет только один фактор – фактор с наибольшей устойчивостью по нейтральной к риску мере. Таким образом, мы может использовать ранние интуитивные догадки, выведенные для однофакторных моделей, чтобы сделать вывод, что многофакторные модели не могут воспроизводить наблюдаемое поведение долгосрочных доходностей.

Причина, почему только один фактор будет влиять на доходности долгосрочных облигаций, носит практический, а не теоретический характер. Существует множество различных видов характеристик, которые влияют на временную структуру (например, уровень, наклон, изгиб), и многофакторные модели учитывают это разнообразие при помощи коэффициентов, которые исчезают при различных ставках по риск-нейтральной мере. В принципе, мы могли бы построить модель с множеством факторов, влияющих на доходности долгосрочных облигаций. Единственным требованием является заставить факторы придерживаться одной и той же низкой скорости возврата к среднему. Но делая это, мы ослабляем главное преимущество многофакторных моделей – способность аппроксимировать различные виды характеристик временной структуры. Таким образом, такая модель будет производить плохую аппроксимацию временной структуры относительно данных модели, в которой каждый фактор имеет собственную скорость возврата к среднему.

Неспособность полностью аффинных моделей соответствовать эмпирическому поведению облигаций можно увидеть в оценках параметров трехфакторных полностью аффинных моделей в Dai и Singleton (2000). Они используют доходности процентного свопа в долларах США для оценивания таких же обычных трехфакторных полностью аффинных моделей, которые оцениваются в данной работе. Я использую параметры предпочтенной ими модели и доходности свопа для производства подразумеваемых временных рядов вектора состояния и ожидаемых избыточных доходов по облигациям. Результаты такого действия, которые не указаны ни в одной таблице, указывают на то, что модель отражает сочетание низкого среднего и высокой волатильности ожидаемых избыточных доходов. Тем не менее, в течение одной четверти наблюдений в их данных, предполагаемое значение вектора состояния нарушает ограничение на неотрицательность. Такие нарушения, как правило, происходят, когда длинный конец временной структуры значительно ниже его среднего значения. Таким образом, результаты, полученные Dai и Singleton, подтверждают вывод о том, что полностью аффинные модели не соответствуют одновременно поведению ожидаемых доходов по облигациям и множеству форм временной структуры в данных.

# Оценивание существенно аффинных моделей

## Трехфакторные аффинные модели

Все аффинные модели, оцениваемые в данной статье, имеют три основных фактора (). Litterman и Scheinkman (1991) обнаружили, что три фактора описывают подавляющее большинство движений цен казначейских облигаций. Это удачно, так как обычные трехфакторные аффинные модели уже в вычислительном плане тяжело оцениваются из-за количества параметров. Добавление еще одного фактора сделало бы это исследование нецелесообразным. Оцениваются семь моделей: четыре полностью аффинных модели и три существенно аффинных модели. Полностью аффинная модель оценивается для каждого возможного количества факторов, которые не влияют на текущую волатильность (от трех до нуля). Используется каноническая форма, описанная в разделе 1.7. В их обозначениях, оценивались модели от до . Другие оцениваемые модели являются существенно аффинными обобщениями , и . (Напомним, что для не существует существенно аффинного обобщения.)

Оцениваемые модели имеют следующие выражения для текущей процентной ставки, физической динамики и вектора цены риска:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (19*a*) |
|  | (19*b*) |
|  | (19*c*) |
|  | (19*d*) |

В зависимости от модели в (19*a*) - (19*d*) накладываются различные ограничения на параметры.

## Данные

Я использую доходности бескупонных казначейских облигаций в конце месяца (интерполированные из купонных облигаций), рассчитанные с использованием метода из работы McCulloch и Kwon (1991). Их выборка, которая заканчивается в феврале 1991 года, расширена в работе Bliss (1997). Весь набор данных охватывает период с января 1952 года по декабрь 1998 года.[[4]](#footnote-4) Я ограничился на сроках погашения меньших либо равных десяти годам из-за большого числа отсутствующих наблюдений за облигациями с более длительными сроками погашения.

Для того, чтобы выполнить тесты как в, так и вне пределов выборки, я оцениваю модели временной структуры используя данные с 1952 по 1994 годы. Последние четыре года данных резервируются для построения ошибок прогноза за пределами выборки.

## Методика оценки

Я оцениваю эти модели с использованием метода квази-максимального правдоподобия (МКМП), который особенно легко реализовать для полностью и существенно аффинных моделей. Хотя МКМП не использует всю информацию в плотности вероятности доходностей, он в полной мере использует информацию о первом и втором условных моментах временной структуры. Таким образом, МКМП будет учитывать в аффинных моделях связь между аппроксимацией условных средних и условных дисперсий.

Еще одно преимущество МКМП (которое он разделяет с методом максимального правдоподобия и связанными с ним методами) является то, что существует положительная вероятность того, что оцениваемая модель действительно может генерировать наблюдаемый временной ряд временных структур. Это является важной задачей оценивания аффинных моделей временных структур. Как отмечено в разделе 2, существует компромисс между аппроксимацией коэффициентов вариации ожидаемых избыточных доходов облигаций и аппроксимацией множества форм временных структур, наблюдаемых в данных. Модель, оцененная МКМП, будет гарантировать, что вектор состояния в момент времени , вытекающий из доходностей в момент времени , будет находиться в допустимом пространстве векторов состояния (чтобы избежать вероятности нулевого вектора). В противоположность этому, рассмотрим такие методы, как эффективный метод моментов (ЭММ), который сравнивает выборочные моменты данных с моментами распределения модели. Эти методы не требуют, чтобы оцениваемая модель временной структуры была достаточно гибкой для воспроизведения форм временной структуры в данных. Параметры модели в Dai и Singleton (2000), которые были оценены с помощью ЭММ, иллюстрируют этот факт.

Я реализовываю МКМП, следуя примеру Fisher и Gilles (1996), в котором содержится более подробное описание. Я предполагаю, что в конце каждого месяца , , доходности по облигациям измеряются без ошибки. (Напомним, что – размерность вектора состояния.) Эти облигации имеют фиксированные сроки до погашения Доходности других облигаций предполагаются полученными с некоррелированными погрешностями измерений с нулевыми средними. Ковариационная матрица этих ошибок измерения постоянна и обозначена .

Для того, чтобы вычислить значение логарифмического правдоподобия для вектора параметров кандидата, объединим «идеальные» (т.е. измеренные без ошибки без ошибки) наблюдаемые доходности в вектор , а «неидеальные» наблюдаемые доходности - в вектор . Обозначим вектор параметров . При заданном , может быть получен с использованием (4), а вектор состояния как в (20):

|  |  |
| --- | --- |
| . | (20) |

В (20) представляет собой -вектор с элементами задаваемыми отношением , а - матрицу со строками задаваемыми отношением . Вектор параметров кандидата должен согласовываться с . Это обеспечивается требованием, чтобы был из допустимого пространства , что эквивалентно требованию, чтобы диагональные элементы в (19*c*) были действительными.

При известном значении , могут быть вычислены доходности для других облигаций. Соберем их все в вектор . Тогда вектор ошибки измерения в месяце находится как . Для вычисления значения квази-правдоподобия, предположим, что условное распределение переменных состояния через один период является многомерным нормальным и равно

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Математическое ожидание и ковариационная матрица может быть вычислена с использованием результатов из Приложения, и таким образом известно. Затем распределение при условии равно

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Также предположим, что ошибки измерений имеют совместное нормальное распределение . Тогда логарифмическое правдоподобие наблюдения в момент :

|  |  |
| --- | --- |
| . | (21) |

Стационарность накладывается на модели требованием, чтобы собственные значения были положительными, что приводит к равенству распределения безусловному распределению величины . Оценка вектора параметров выбирается как решение

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

При оценивании, я предполагаю, что облигациями без ошибок измерения являются облигации со сроками погашения в шесть месяцев, два года и десять лет. Такой выбор был мотивирован желанием охватывать как можно большую часть временной структуры без предположения о том, что трехмесячная доходность, которая проявляет уникальное поведение, наблюдается без ошибки. Облигации с сроками погашения в три месяца, год и пять лет и ошибками измерений заполняют пробелы в этой временной структуре. Ковариационная матрица ошибок измерений оценивается с использованием его разложения Cholesky:

|  |  |
| --- | --- |
| . | (22) |

Всего необходимо оценить шесть элементов в нижнем треугольнике матрицы . В более ранней версии этой статьи предполагается диагональная структура . Хотя результаты более общей структуры строго отвергают предположение о том, что эти погрешности измерения некоррелированные, оценки параметров остальной части модели в основном не зависят от формы, выбранной для .

Однако важно включить эти дополнительные доходности облигаций в процедуру оценивания. В более ранних версиях этой статьи не включаются доходности облигаций, измеренных с ошибкой. Ранние результаты показали, что общие трехфакторные модели, изучаемые здесь, - особенно существенно аффинные модели – могут привести к достаточно неправдоподобным формам временной структуры. Эти формы иногда пересекаются с наблюдаемыми временными структурами в случае трех сроков погашения: сроков погашения, связанных с облигациями, измеренными без ошибок. При включении облигаций, измеренных с ошибкой, значения правдоподобия, связанные с этими неправдоподобными временными структурами, сильно штрафуются.

## Методика максимизации

Функции МКМП для этих моделей имеют большое количество локальных максимумов. Наиболее важной причиной для этого является отсутствие структуры, находящейся в матрице обратной связи . Аналогичные значения МКМП могут быть получены путем различных взаимодействий между элементами вектора состояния. Другая причина заключается в том, что это допустимое пространство параметров не является выпуклым для всех моделей с непостоянной волатильностью. Допустимый вектор параметров удовлетворяет требованию, что диагональные элементы действительны для всех . Поскольку я использую каноническую форму из раздела 1.7, это требование выполняется, когда для . (Напомним, что – это количество переменных состояния, которые влияют на текущую волатильность .) В силу вышесказанного, это требование налагает ограничений на вектор параметров. Ограничения являются нелинейными функциями от параметров и данных. Эти проблемы привели к следующей методике максимизации.

Шаг 1. Случайным образом генерируем вектор параметров из многомерного нормального распределения с диагональной ковариационной матрицей. Средние и дисперсии были произвольно установлены на «правдоподобные» значения.

Шаг 2. Используем формулу (20) для вычисления для всех .

Шаг 3. Если вектор параметров является недопустимым, возвращаемся к шагу 1; в противном случае продолжаем.

Шаг 4. Используем симплекс-метод для определения вектора параметров, который максимизирует значение МКМП.

Шаг 5. Используем полученный на шаге 4 вектор параметров как начальную точку, используем NPSOL для того, чтобы сделать какие-либо окончательные улучшения значения МКМП.

Эта процедура повторяется пока шаги 4 и 5 не будут пройдены 1000 раз. Для большинства оцениваемых моделей, после первых нескольких сотен итераций вносились очень малые улучшения в значение МКМП.

## Спецификационные тесты

1. Объем литературы слишком велик, чтобы полностью здесь цитировать. Ранние исследования включают в себя Fama и Bliss (1987). Две стандартные ссылки: Fama и French (1989, 1993). [↑](#footnote-ref-1)
2. Объем такой литературы также слишком велик, чтобы цитировать полностью. В одной важной статье, Chan, Karolyi, Longstaff и Sanders (1992) изучают чувствительность волатильности к уровню краткосрочных процентных ставок. Andersen и Lund (1997) усовершенствовали их работу путем разложения вариации волатильности процентных ставок на компоненту, связанную с уровнем краткосрочных процентных ставок, и компоненту стохастической волатильности. [↑](#footnote-ref-2)
3. Я благодарю Rob Bliss за предоставленные мне данные о доходности. [↑](#footnote-ref-3)
4. Bliss и McCulloch-Kwon используют немного различные методы фильтрации, поэтому доходности, сообщаемые ими на перекрывающихся периодах, в точности не совпадают. Отсюда возникает вопрос о том, где склеить эти ряды вместе. Я использую доходности из McCulloch и Kwon в течение всего их периода выборки, а данные Bliss – после февраля 1991 года. [↑](#footnote-ref-4)