සම්බන්ධ හා ශ්‍රිත.

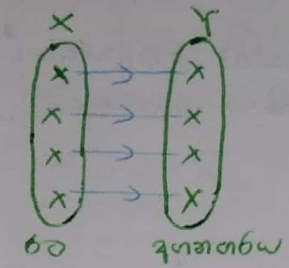
03

සම්බන්ධ.

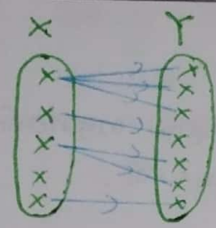
* කුලක දෙකක් අතර පවතින බැඳීමක් සම්බන්ධයක් ලෙස හඳුන්වයි.

* කුලක අතර මූලික සම්බන්ධ 4ක් පවතී.

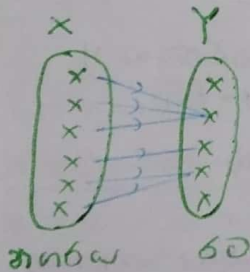
01) ඒක - ඒක සම්බන්ධ.



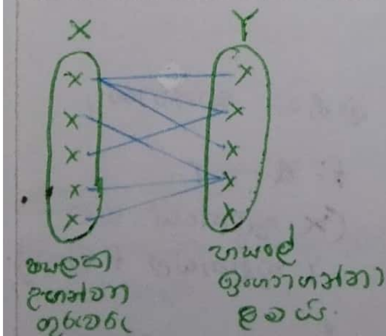
02) ඒක - බහු සම්බන්ධ



03) බහු - ඒක සම්බන්ධ



04) බහු - බහු සම්බන්ධ.



ශ්‍රිත.

* X හා Y නොහිස් කුලක දෙකක් නම්; X කුලකයේ ඇති සෑම අවයවයකටම අනන්‍ය අවයවයක් Y කුලකයෙන් සම්බන්ධ කර ගත හැකි විට X හා Y අතර පවතින f නීතිය ශ්‍රිතයක් ලෙස හඳුන්වයි.

* ඒක-ඒක සහ බහු-ඒක යන සම්බන්ධතාවලින් පමණක් ශ්‍රිතයක් ගොඩනැගිය හැක.

ශ්‍රිතයක වසම.

* X කුලකය හෙවත් ස්වායත්ත විචල්‍යයන් අඩංගු කුලකය ශ්‍රිතයේ වසම ලෙස හඳුන්වයි.

ශ්‍රිතයක සහවසම.

* Y කුලකය හෙවත් පරායත්ත විචල්‍යයන් අඩංගුවන කුලකය ශ්‍රිතයේ සහවසම ලෙස හඳුන්වයි.

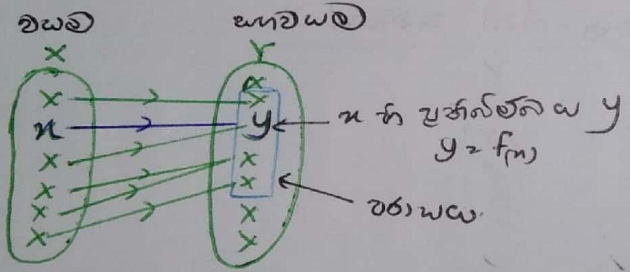
ප්‍රතිබිම්බය.

* වසමේ ඇති x නමැති අවයවයේ ප්‍රතිබිම්බය $f(x)$ ලෙස හඳුන්වයි.

පරාසය.

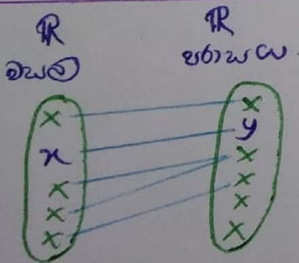
* ප්‍රතිබිම්බ කුලකය පරාසය ලෙස හඳුන්වයි. පරාසය සහවසමේ උපකුලකයකි.

NOTE.



* වසම තුළ හිස් අවයව තිබිය නොහැක.

ශ්‍රිතීය අංකනය



ශ්‍රිතීය අංකනය;

$f: X \rightarrow Y$

(X කුලකයේ සිට Y කුලකයට f ශ්‍රිතය)

* සාමාන්‍ය ව ප්‍රතිබිම්බයක් ප්‍රකාශ කරන ආකාරයට සංක්ෂිප්ත ගණිත විධියේදී ශ්‍රිතීය අංකනය කරයි.

$$y = f(x)$$

දෙන ලද ශ්‍රිතයක වසම සහ පරාසය

$f(x) = ax + b$

වසම $= D_f = \mathbb{R}$

පරාසය $= R_f = \mathbb{R}$

$f(x) = (x+a)^2 + b$

වසම $= D_f = \mathbb{R}$

පරාසය $= R_f = [b, \infty)$

$f(x) = -(x+a)^2 + b$

වසම $= D_f = \mathbb{R}$

පරාසය $= R_f = (-\infty, b]$

$f(x) = \sqrt{x-a}$

වසම $= D_f = [a, \infty)$

පරාසය $= \mathbb{R}_0^+$

$D_f = x - a \geq 0$

$D_f = x \geq a$

විවිධ ශ්‍රිත වර්ග.

එකට - එක ශ්‍රිත.

* ඒක-ඒක සම්බන්ධතා මත ගොඩනැගෙන ශ්‍රිත එකට එක ශ්‍රිත ලෙස හඳුන්වයි.

⇒ $y = f(x)$ එකට එක ශ්‍රිතයක් නම්, x_1, x_2 වසමේ ඕනෑම අවයව දෙකක් විට,

$$x_1 = x_2 \iff f(x_1) = f(x_2) \text{ වේ.}$$

මතට ශ්‍රිත.

* ශ්‍රිතයක සහවසම සහ පරාසය සමාන වේ නම් එය මතට ශ්‍රිතයක් වේ.

⇒ එනම්; සහවසම = පරාසය = $\mathbb{R}$ විය යුතුය.

ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිත.

* ශ්‍රිතය $y = f(x)$ වල ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතය $y = f^{-1}(x)$ වේ.
* සහවසමෙන් වසමට ගොඩනැගෙන ප්‍රතිලෝම සම්බන්ධතාවය ශ්‍රිතීය සම්බන්ධතාවය තෘප්ත කරන විට ගොඩනැගෙන ශ්‍රිතය ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතයයි.

⇒ දෙන ලද ශ්‍රිතයකට ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතයක් පැවතීම සඳහා එම දෙන ලද ශ්‍රිතය, එකට එක සහ මතට ශ්‍රිතයක් විය යුතුයි.

නියත ශ්‍රිත.

* වසමේ සියලු අවයව සහවසමේ එක් අවයවයක් සමඟ පමණක් සම්බන්ධ වේ නම් එය නියත ශ්‍රිතයක් ලෙස හඳුන්වයි.

$$f(x)=k$$

කඩමනින් ශ්‍රිත.

* වසමේ විවිධ ප්‍රාන්තර තුළ ශ්‍රිතීය නීතිය වෙනස් වන ශ්‍රිත කඩමනින් ශ්‍රිත ලෙස හඳුන්වයි.

සංයුක්ත ශ්‍රිත.

$f(x)=x^2+1$ සහ $g(x)=\sin(x^2+1)$ ශ්‍රිත දෙක සලකමු.

මෙවිට ; $g(x)=\sin f(x)$ වේ.

* මෙහි දී g සහ f මඟින් ශ්‍රිතීය නීති 2ක් කියවේ.
* එනම් g මඟින් sin ද f මඟින් "වර්ගකර්ම +1" ද යන නීති කියවේ.
* මේ අනුව $g \circ f(x)$ මඟින් දක්වන ශ්‍රිතය එනම් මෙම උදාහරණයට අනුව $\sin(x^2+1)$ ශ්‍රිතය සංයුක්ත ශ්‍රිතයක් වේ.

උදා:- 01) $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$; $x \neq -1$

$g(x)=x^2$

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = \frac{2g(x)-1}{g(x)+1} = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$$ //

මාපාංක ශ්‍රිතය.

* $y=|f(x)|$ මඟින් අංකනය කරන සහ

$$y=\begin{cases} f(x) ; & f(x)>0 \\ -f(x) ; & f(x)<0 \end{cases}$$

මඟින් අර්ථ දක්වන ලද ශ්‍රිතය මාපාංක ශ්‍රිතය ලෙස හඳුන්වයි.

බහු පද ශ්‍රිත.

* ශ්‍රිතීය සම්බන්ධතාවය ප්‍රකාශිත විචල්‍යයේ ධන පූර්ණ බල සහිත පද මඟින් ප්‍රකාශ කළ හැකි ශ්‍රිත බහුපද ශ්‍රිත වේ.

උදා:- 1) $f(x)=3x^3+2x^2+5 \rightarrow$ 3 වන මාත්‍රය, නායක පදය $=3x^3$

2) $f(x)=x-1 \rightarrow$ 1 වන මාත්‍රය, නායක පදය $=x$

බහු පද ශ්‍රිතයක ලක්ෂණ.

1) බහු පද ශ්‍රිතයක විශාලතම බලය එහි මාත්‍රය ලෙස හඳුන්වයි.
2) බහු පද ශ්‍රිතයක විශාලතම බලය සහිත පදය එහි නායක පදයයි.
3) ඕනෑම තාත්වික නියතයක් ප්‍රකාශිත විචල්‍යයේ ශුන්‍ය මාත්‍රයේ බහු පදයක් ලෙස සැලකිය හැක.

උදා:- $y=5 \Rightarrow f(x)=5x^0$, $f(y)=5y^0$

බහු පද දෙකක් සමාන වීමට අවශ්‍යතාවය

1) බහු පද දෙකේ මාත්‍ර සමාන විය යුතුය.
2) බහු පද දෙකේ එක් එක් බලයන්ට අනුරූප පදවල සංගුණක සමාන විය යුතුය.

බහු පද ශ්‍රිත මත ගණිත කර්ම.

බහු පද ශ්‍රිත දෙකක එකතුව සහ අන්තරය.

* මෙහි දී සමාන බල සහිත පද එකට සුළුකර පසු වීජීය සුළු කිරීම කරනු ලැබේ.

බහු පද ශ්‍රිත දෙකක ගුණිතය.

* ඕනෑම මාත්‍රයක බහු පද 2ක් ගුණ කළ හැක.
* ගුණිතය ලෙස ලැබෙන බහු පද ශ්‍රිතයේ මාත්‍රය ගුණිතයට ගත් ශ්‍රිතවල මාත්‍රයන්ගේ එකතුවට සමාන වේ.

බහු පද බෙදීම.

* දෙන ලද බහු පදයක් දෙන ලද තවත් බහු පදයකින් බෙදීම මූලික ක්‍රම 2ක් යටතේ අධ්‍යයනය කරයි.

(01) දීර්ඝ බෙදීම.

$$
\begin{array}{r l}
 & x^3 + x^2 - x + 1 \\
x^2+1 \,\big|\, & x^5 + x^4 + 2x^2 + 5 \\
 & x^5 + x^3 \\ \hline
 & x^4 - x^3 + 2x^2 + 5 \\
 & x^4 + x^2 \\ \hline
 & -x^3 + x^2 + 5 \\
 & -x^3 - x \\ \hline
 & x^2 + x + 5 \\
 & x^2 + 1 \\ \hline
 & x + 4
\end{array}
$$

02) බෙදීමේ ඇල්ගොරිතමය භාවිත කර බෙදීම

$$
\begin{array}{r l}
 & Q_{(x)} \leftarrow \text{ලබ්ධිය} \\
g_{(x)} \,\big|\, & f_{(x)} \\
 & \vdots \\ \hline
 & R_{(x)}
\end{array}
$$

භාජකය ($g_{(x)}$), භාජ්‍යය ($f_{(x)}$), ශේෂය ($R_{(x)}$)

භාජ්‍යය = භාජකය × ලබ්ධිය + ශේෂය

$$f_{(x)} = g_{(x)} \times Q_{(x)} + R_{(x)}$$

$R_{(x)}$ මාත්‍රය = $g_{(x)}$ මාත්‍රය − 1

$Q_{(x)}$ මාත්‍රය = $f_{(x)}$ මාත්‍රය − $g_{(x)}$ මාත්‍රය

ශේෂ ප්‍රමේයය.

* $f(x)$ බහු පදය $(x-\alpha)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $f(\alpha)$ වේ.

සාධනය.

$$
\begin{array}{r l}
 & Q_{(x)} \\
x-\alpha \,\big|\, & f_{(x)} \\
 & \vdots \\ \hline
 & R
\end{array}
$$

ශේෂය R ද ලබ්ධිය $Q_{(x)}$ ද නම්,

$f_{(x)} = (x-\alpha)\,Q_{(x)} + R$

$x = \alpha$ විට

$f(\alpha) = R$

* ශේෂ ප්‍රමේයය සාර්ථකව භාවිතා කළ හැක්කේ භාජකය පළමු මාත්‍රයේ බහු පදයක් නම් පමණි.
* භාජකය දෙවන මාත්‍රයේ හෝ ඊට වඩා වැඩි නම් බෙදීම පිළිබඳ ඇල්ගොරිතමය භාවිතා කරන්න.

සාධක ප්‍රමේයය.

* $f(x)$ බහු පදයේ $f(\alpha) = 0$ නම්, $f(x)$ හි $(x-\alpha)$ සාධකයකි.

සාධනය.

⇒ $f(x)$ බහු පදය $(x-\alpha)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $f(\alpha)$ වේ. [ශේෂ ප්‍රමේයයෙන්]

⇒ නමුත් $f(\alpha) = 0$ නිසා $f(x)$ යන්න $(x-\alpha)$ මගින් ඉතිරි නැතිව බෙදේ. ∴ $f(x)$ හි $(x-\alpha)$ සාධකයකි.

සාධක ප්‍රමේයයේ විලෝමය.

* $f(x)$ බහු පදයේ $(x-\alpha)$ සාධකයක් නම් $f(\alpha)$ ශුන්‍ය වේ.

සාධනය.

⇒ $f(x)$ බහුපදය $(x-\alpha)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $f(\alpha)$ වේ. [ශේෂ ප්‍රමේයයෙන්]

⇒ නමුත් $f(x)$ හි $(x-\alpha)$ සාධකයක් නම් $f(x)$ යන්න $(x-\alpha)$ මගින් ඉතිරි නැතිව බෙදේ. එනම් ශේෂය ශුන්‍ය වේ.

∴ $f(\alpha) = 0$

පරිමේය ශ්‍රිත.

* $f(x)$ සහ $g(x)$ බහු පද ශ්‍රිත දෙකක් විට $g(x) \neq 0$ ද විට, $\frac{f(x)}{g(x)}$ මගින් ප්‍රකාශ කළ හැකි ශ්‍රිත පරිමේය ශ්‍රිත ලෙස හඳුන්වයි.

පරිමේය ශ්‍රිත.

නියම පරිමේය ශ්‍රිත	විෂම පරිමේය ශ්‍රිත
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f(x)}{g(x)}$
$g(x)$ මාත්‍රය > $f(x)$ මාත්‍රය	$f(x)$ මාත්‍රය ≥ $g(x)$ මාත්‍රය
Eg:- $\frac{x}{x^2+1}$	Eg:- $\frac{x^3+1}{(x^2+1)(x-1)}$

භින්න භාග.

* $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ලෙස ප්‍රකාශ කරගත් විට $\frac{1}{2}$ ට සහ $\frac{1}{3}$ ට $\frac{5}{6}$ හි භින්න භාග වේ.

පරිමේය ශ්‍රිත භින්න භාගවලට වෙන් කිරීම.

* දෙන ලද පරිමේය ශ්‍රිතයක් හරයේ සරලතම සාධකවල එකතුවක් ලෙස ප්‍රකාශ කර ගැනීම පරිමේය ශ්‍රිතය භින්න භාගවලට වෙන් කිරීම නම් වේ.

නියම පරිමේය ශ්‍රිත භින්න භාගවලට වෙන් කිරීම.

(i) හරයේ ඒකජ සාධක පමණක් පවතින අවස්ථා.

* හරයේ $ax+b$ ආකාරයේ සාධකයක් ඇති විට $\frac{A}{ax+b}$ ආකාරයේ භින්න භාග කොටසක් යෙදිය යුතුය.

උදා:- i) $\frac{x^2+1}{(2x-1)(x+2)x} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x}$

(ii) හරයේ ඒකජ සාධකවලට අමතරව වර්ගජ සාධක පවතින විට.

* මෙහි දී හරයේ රේඛීය සාධකවලට වෙන්කරගත නොහැකි ax^2+bx+c ආකාරයේ සාධකයක් ඇති විට $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ ආකාරයේ භින්න භාග කොටසක් ලිවිය යුතුය.

උදා:- 1) $\frac{x^2+1}{(x^2+5)(x-1)x} = \frac{Ax+B}{x^2+5} + \frac{C}{(x-1)} + \frac{D}{x}$

(iii) හරයේ ඒකජ සාධක, වර්ගජ සාධකවලට අමතරව පුනරාවර්තන වන ඒකජ සාධක පවතින විට;

* හරයේ $(ax+b)^n$ ආකාරයේ සාධකයක් පවතින විට, $\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$ ආකාරයේ භින්න භාග කොටස් ලිවිය යුතුය.

උදා:- 1) $\frac{x}{(x-1)^2(2x^2+5)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{2x^2+5}$

විෂම පරිමේය ශ්‍රිත භින්න භාගවලට වෙන් කිරීම.

$\frac{f(x)}{g(x)}$ විෂම පරිමේය ශ්‍රිතය සලකමු.

01) $f(x)$ මාත්‍රය $=$ $g(x)$ මාත්‍රය නම් $\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} =$ නියතයක් $+ \frac{h(x)}{Q(x)}$

මෙහි $h(x)$ මාත්‍රය $<$ $Q(x)$ මාත්‍රය.

02) $f(x)$ මාත්‍රය $=$ $g(x)$ මාත්‍රය $+1$ නම් $\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda x + \mu + \frac{h(x)}{Q(x)}$

මෙහි $h(x)$ මාත්‍රය $<$ $Q(x)$ මාත්‍රය

03) $f(x)$ මාත්‍රය $=$ $g(x)$ මාත්‍රය $+2$ නම් $\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda x^2 + \mu x + \gamma + \frac{h(x)}{Q(x)}$

මෙහි $h(x)$ මාත්‍රය $<$ $Q(x)$ මාත්‍රය.

NOTE.

01) $\frac{x^3+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \lambda + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$

02) $\frac{x^4+1}{(x-1)(2x^2+1)} = \lambda x + \mu + \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{2x^2+1}$

03) $\frac{x^5+1}{x^2(2x-1)} = \lambda x^2 + \mu x + \gamma + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{2x-1}$

NOTE

$\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ - තාත්වික සංඛ්‍යා කුලකය -3, 3 හැර

$\mathbb{R}_0^+$ - 0 සහිත (+) තාත්වික සංඛ්‍යා.