

УТВЕРЖДЕНЫ

Протокол №4 от 23.11.2022г.
Зав. кафедрой высшей математики

_____ Пыжкова О.Н.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ (ЛАиАГ)

1. Найти произведение матриц $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.
2. Найти произведение матриц AB и BA , если $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.
4. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ путем разложения по второму столбцу.
5. Решить систему линейных уравнений

$$6. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 5 \\ 4x - y + 5z = 3 \end{cases}$$
7. Даны векторы своими координатами $\vec{a} = \{1; -3; 5\}$, $\vec{b} = \{2; 0; -1\}$, $\vec{c} = \{-4; 6; -2\}$.
Найти координаты векторов $2\vec{a}$, $-3\vec{b}$, $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ и проекции $pr_{Oy} \vec{a}$, $pr_{Ox} \vec{b}$.
8. Найти координаты и модуль вектора \overrightarrow{AB} , если $A(2; 4; -3)$, $B(5; 0; 9)$.
9. Даны векторы своими координатами $\vec{a} = \{1; -3; 5\}$, $\vec{b} = \{2; 0; -1\}$, $\vec{c} = \{-4; 6; -2\}$.
Найти координаты векторов $2\vec{a}$, $-3\vec{b}$, $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ и проекции $pr_{Oy} \vec{a}$, $pr_{Ox} \vec{b}$.
10. Найти координаты и модуль вектора \overrightarrow{AB} , если $A(2; 4; -3)$, $B(5; 0; 9)$.
11. Даны векторы $\vec{a} = \{-4; 2; 4\}$ и $\vec{b} = \{0; -3; 4\}$. Найти $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и косинус угла $\hat{\vec{a} \vec{b}}$ между ними.
12. Даны вершины четырехугольника $A(1; 4; 0)$, $B(-4; 1; 1)$, $C(-5; -5; 3)$, $D(1; -2; 2)$.
Доказать, что его диагонали AC и BD перпендикулярны.
13. Даны координаты вершин треугольника $A(1; 2; 4)$, $B(-3; 2; 1)$, $C(4; 2; 0)$. Найти внутренний угол α при вершине A и внешний угол γ при вершине C .
14. Найти проекцию вектора $\vec{a} = \{2; -4; 4\}$ на ось l , составляющую с \vec{a} угол $\varphi = \frac{5\pi}{6}$.
15. Даны векторы $\vec{a} = \{-4; 2; 4\}$ и $\vec{b} = \{0; -3; 4\}$. Найти $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и косинус угла $\hat{\vec{a} \vec{b}}$ между ними.

16. Даны вершины четырехугольника $A(1; 4; 0)$, $B(-4; 1; 1)$, $C(-5; -5; 3)$, $D(1; -2; 2)$.
Доказать, что его диагонали AC и BD перпендикулярны.
17. Даны координаты вершин треугольника $A(1; 2; 4)$, $B(-3; 2; 1)$, $C(4; 2; 0)$. Найти внутренний угол α при вершине A и внешний угол γ при вершине C .
18. Найти проекцию вектора $\vec{a} = \{2; -4; 4\}$ на ось l , составляющую с \vec{a} угол $\varphi = \frac{5\pi}{6}$.
19. Даны векторы $\vec{a} = \{1; 2; -2\}$, $\vec{b} = \{-5; 0; 1\}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Найти $\text{пр}_{\vec{c}}(2\vec{a} - \vec{b})$, направляющие косинусы вектора \vec{a} .
20. Даны векторы $\vec{a} = \{4; -5; 3\}$ и $\vec{b} = \{-4; 0; 2\}$. Проверить, что $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ и найти площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.
21. Даны векторы $\vec{a} = \{2; -4; -5\}$, $\vec{b} = \{-4; 1; 6\}$, $\vec{c} = \{5; -5; -1\}$. Найти смешанные произведения \vec{abc} , \vec{acb} , \vec{cab} .
22. Проверить компланарность векторов $\vec{a} = \{3; -4; 7\}$, $\vec{b} = \{1; 2; -3\}$, $\vec{c} = \{2; -1; 2\}$.
23. Доказать, что точки $A(1; 2; 0)$, $B(4; 3; 4)$, $C(2; -3; -2)$, $D(3; 0; 1)$ лежат в одной плоскости.
24. Найти точку пересечения прямых $3x + 2y = 5$ и $2x - 3y = 7$.
25. Найти точку пересечения прямых $x - y - 13 = 0$ и $2x + 3y = 11$.
26. Записать уравнения прямой, проходящей через точку $A(1; 0)$ перпендикулярно прямой BC , если $B(2; 3)$; $C(-3; 1)$.
27. Найти расстояние между двумя прямыми $2x + y - 2 = 0$ и $x + 2y - 5 = 0$.
28. Найти расстояние между параллельными прямыми $3x + 4y - 5 = 0$ и $3x + 4y + 7 = 0$.
29. Даны координаты точек $A_1(4; 2; 0)$, $A_2(6; 1; 1)$, $A_3(4; 6; 6)$. Найти уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ и уравнение прямой A_1A_2 .
30. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1; 2)$ перпендикулярно прямой $12x + 5y - 10 = 0$.
31. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$:
32. $A_1(4; 5; 7)$; $A_2(7; 5; 3)$; $A_3(9; 4; 4)$; $A_4(7; 9; 6)$. Найти длину ребра A_1A_2 и угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 .
33. Даны координаты точек $A_1(5; 7; 8)$; $A_2(9; 5; 5)$; $A_3(-3; 7; 1)$. Найти: угол между A_1A_2 и A_1A_3 и уравнение прямой A_1A_2 .
34. Найти уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки: $A_1(5; 7; 8)$; $A_2(9; 5; 5)$; $A_3(-3; 7; 1)$.
35. Даны вершины треугольника ABC : $A(2; 0)$, $B(4; 5)$, $C(6; 7)$. Найти уравнения стороны AC , высоты BK и медианы BM .
36. Найти расстояние между двумя прямыми $3x + 2y - 6 = 0$ и $6x + 4y + 5 = 0$.
37. Даны вершины четырехугольника $ABCD$: $A(-1; 3)$, $B(2; 1)$, $C(2; 5)$, $D(0; 4)$.
Докажите, что его диагонали взаимно перпендикулярны.
38. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(3; 4)$ перпендикулярно прямой $y = 5x + 3$.

39. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $K(1; -4)$ параллельно прямой AB : $A(3; 4)$, $B(-1; -4)$.
40. Записать уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент 2 и проходящей через точку $A(-3; 5)$.
41. Определить вид кривой линии и изобразить ее на чертеже $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 = 0$.
42. Записать каноническое уравнение кривой $y^2 + 4y + x^2 = 0$.
43. Найти координаты центра и радиус окружности $3x^2 + 3y^2 - 4x - 6y - 15 = 0$.
44. Назвать и построить кривую $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

45. Дана гипербола $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Определить ее полуоси, фокусы, вершины, эксцентриситет, асимптоты.

46. Даны комплексные числа $z_1 = -1$, $z_2 = \pi$, $z_3 = -2i$, $z_4 = 3i - 3$,

$$z_5 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad z_6 = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}.$$

- а) Найти действительную и мнимую части комплексных чисел z_1, \dots, z_6 ;
- б) записать числа, сопряженные данным;
- в) изобразить числа z_1, \dots, z_6 и им сопряженные $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_6$ соответствующими точками на комплексной плоскости;
- г) выполнить действия $z_1 - z_4 + z_5 + z_6$, $z_1^3 + z_3^3 + (2 - i) \cdot z_4$, $\frac{z_3}{z_4}$.

47. Даны комплексные числа $z_1 = -1$, $z_2 = \pi$, $z_3 = -2i$, $z_4 = 3i - 3$, $z_5 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$,

$$z_6 = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}.$$

- а) Найти модули и аргументы комплексных чисел z_1, \dots, z_6 ;
- б) записать эти числа в тригонометрической и показательной формах;
- в) выполнить действия $z_4 \cdot z_5$, $\frac{z_6}{z_4}$, z_5^{14} , $\sqrt{z_3}$, $\sqrt[4]{z_5^{12}}$

48. Числа z_1 и z_2 представить в тригонометрической форме и выполнить указанные над ними действия:

$$z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1^2}{z_2}, \quad \text{если } z_1 = 2\sqrt{3} - 2i, \quad z_2 = 3 - 3\sqrt{3}i.$$

$$z_1^2 \cdot \bar{z}_2, \quad \frac{\bar{z}_2}{z_1}, \quad \text{если } z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, \quad z_2 = \sqrt{8} - \sqrt{8}i.$$

49. Показать, что в линейном пространстве квадратных матриц 2-го порядка

элементы $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ образуют базис, и найти

в указанном базисе координаты элемента $\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$. Чему равна размерность данного линейного пространства?

50. Показать, что многочлены $\bar{e}_1 = x^2 + x + 1$, $\bar{e}_2 = x^2 + 2x + 4$, $\bar{e}_3 = x^2 + 3x + 9$ образуют базис в пространстве многочленов степени не выше 2. Определить

координаты многочлена $x^2 + 4x + 16$ и произвольного квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ в указанном базисе.

51. Показать, что в линейном пространстве нечетных многочленов степени не выше 5 многочлены $\bar{e}_1 = x^5 - x^3$, $\bar{e}_2 = x^3 - 2x$, $\bar{e}_3 = x^5 - 3x$ образуют базис, и найти в этом базисе координаты многочлена $2x^5 - 2x^3 - 3x$.

52. Являются ли линейно независимыми:

а) векторы $\bar{x}_1 = (1; 1; 2; -1)$, $\bar{x}_2 = (3; 5; 0; 5)$, $\bar{x}_3 = (0; 0; 1; -1)$, $\bar{x}_4 = (0; 5; 6; -1)$ в \mathbf{R}^4 ;

б) матрицы $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_4 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$;

в) многочлены $\bar{e}_1 = x + 3x^2 - x^3$, $\bar{e}_2 = 2x^3 + x - 2$, $\bar{e}_3 = 3 + x - x^2$, $\bar{e}_4 = x + 2x^2 + x^3$?

53. Найти координаты:

а) вектора $\bar{y} = (5; 10; 8; 7) \in \mathbf{R}^4$ в базисе $\bar{x}_1 = (0; 1; 3; -1)$,

$\bar{x}_2 = (-2; 1; 0; 2)$, $\bar{x}_3 = (3; 1; -1; 0)$, $\bar{x}_4 = (0; 1; 2; 1)$;

б) матрицы $\bar{a} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ в базисе $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$,

$\bar{e}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_4 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$;

в) многочлена $\bar{y} = 13 - 2x - 8x^2 - 9x^3$ в базисе $\bar{e}_1 = x + 3x^2 - x^3$, $\bar{e}_2 = 2x^3 + x - 2$, $\bar{e}_3 = 3 + x - x^2$, $\bar{e}_4 = x + 2x^2 + x^3$.

54. Найти матрицы перехода от базиса $\{x^2; x; 1\}$ к базису $\{(x+1)^2; x+1; 1\}$ и от базиса $\{(x+1)^2; x+1; 1\}$ к базису $\{x^2; x; 1\}$.

55. Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $f(\bar{x}) = (2x_1; x_2 + 5x_3; -x_1)$, $g(\bar{x}) = (x_1 - x_2; x_2 + x_3; 0)$. Найти матрицы операторов f и g , а также матрицы и явный вид операторов $2f + 3g$.

56. Даны два базиса $\{\bar{e}_1; \bar{e}_2\}$ и $\{\bar{e}'_1; \bar{e}'_2\}$ линейного пространства и матрица

$A_f = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ линейного оператора в базисе $\{\bar{e}_1; \bar{e}_2\}$. Найти матрицу этого

оператора в базисе $\{\bar{e}'_1; \bar{e}'_2\}$, если $\bar{e}'_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{e}'_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$.

57. Какие из векторов $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{x}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ являются собственными

векторами линейного оператора f с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$?

58. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора f , имеющего в некотором базисе матрицу:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

е) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

59. В базисе $\{\bar{e}_1; \bar{e}_2\}$ линейный оператор f задается матрицей $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти

базис, в котором матрица оператора f примет диагональный вид.

60. Привести к каноническому виду уравнения линий второго порядка:

а) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$; **б)** $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;

в) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$; **г)** $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$;

61. Установить с помощью критерия Сильвестра, является ли данная квадратичная форма знакоопределенной:

а) $4x^2 + 2xy + 3y^2$;

б) $-x^2 + 2xy - 2y^2$;

в) $-16x^2 + 24xy - 9y^2$;

г) $2x^2 + 9y^2 + 19z^2 + 8xy + 4xz$;

Лектор

Чайковский М.В.