III. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

ВАРИАНТ 0

Задание 1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$. Найти A^{-1}; сделать проверку.

Решение. Вычислим определитель матрицы по правилу треугольников:

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot(-1)+2\cdot 3\cdot 2+0\cdot 1\cdot 1-1\cdot(-1)\cdot 2-3\cdot 1\cdot 1-2\cdot 0\cdot(-1)=$$

$=1+12+0+2-3+0=12\neq 0.$

Так как определитель не равен нулю, то матрица имеет обратную. Обратная матрица A^{-1} к матрице A находится по формуле: $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{n1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{1n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}$, где A_{ij} – алгебраическое дополнение к элементу a_{ij}.

Вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)-3\cdot 1=1-3=-2;$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-(2\cdot(-1)-1\cdot 1)=-(-2-1)=3;$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 3-1\cdot(-1)=6+1=7;$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-(0\cdot(-1)-3\cdot 2)=-(0-6)=6;$

$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)-1\cdot 2=-1-2=-3;$

$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-(1\cdot 3-1\cdot 0)=-(3-0)=-3;$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0\cdot 1-(-1)\cdot 2=0+2=2;$

$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-(1\cdot 1-2\cdot 2)=-(1-4)=3;$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)-2\cdot 0=-1-0=-1.$

Таким образом, $A^{-1}=\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix}-2 & 6 & 2\\ 3 & -3 & 3\\ 7 & -3 & -1\end{pmatrix}$.

Чтобы сделать проверку, проверим, что $AA^{-1}=E$ и $A^{-1}A=E$.

Выполним умножение матриц:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1\cdot(-2)+0\cdot3+2\cdot7 & 1\cdot6+0\cdot(-3)+2\cdot(-3) & 1\cdot2+0\cdot3+2\cdot(-1) \\ 2\cdot(-2)+(-1)\cdot3+1\cdot7 & 2\cdot6+(-1)\cdot(-3)+1\cdot(-3) & 2\cdot2+(-1)\cdot3+1\cdot(-1) \\ 1\cdot(-2)+3\cdot3+(-1)\cdot7 & 1\cdot6+3\cdot(-3)+(-1)\cdot(-3) & 1\cdot2+3\cdot3+(-1)\cdot(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} (-2)\cdot1+6\cdot2+2\cdot1 & (-2)\cdot0+6\cdot(-1)+2\cdot3 & (-2)\cdot2+6\cdot1+2\cdot(-1) \\ 3\cdot1+(-3)\cdot2+3\cdot1 & 3\cdot0+(-3)\cdot(-1)+3\cdot3 & 3\cdot2+(-3)\cdot1+3\cdot(-1) \\ 7\cdot1+(-3)\cdot2+(-1)\cdot1 & 7\cdot0+(-3)\cdot(-1)+(-1)\cdot3 & 7\cdot2+(-3)\cdot1+(-1)\cdot(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Следовательно, равенства $AA^{-1} = E$ и $A^{-1}A = E$ выполняются; обратная матрица найдена верно.

Ответ: $A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Задание 2. Проверить совместность системы уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -5; \end{cases}$ в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

Решение. Выпишем матрицу системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, столбец свободных членов $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ и столбец неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Расширенная матрица системы $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & -5 \end{array}\right)$.

Проверим совместность системы. Так как определитель матрицы системы отличен от нуля (см. задание 1), то система совместна и решение ее единственно.

а) Решим систему по формулам Крамера.

Определитель матрицы системы равен $\Delta = 12$ (см. задание 1).

Найдем определители трех дополнительных матриц. Дополнительная матрица получается из основной путем замены элементов одного из трех столбцов основной матрицы элементами столбца свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -12;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 24.$$

Таким образом, решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{12} = 0; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-12}{12} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{24}{12} = 2.$$

Сделаем проверку, подставив найденные значения в систему:

$$\begin{cases} 0 + 2\cdot 2 = 4, \\ 2\cdot 0 - (-1) + 2 = 3, \\ 0 + 3\cdot(-1) - 2 = -5; \end{cases} \quad \begin{cases} 4 = 4, \\ 3 = 3, \\ -5 = -5. \end{cases}$$

При подстановке все уравнения системы обратились в верные равенства. Значит, решение системы найдено верно.

Ответ: $(0; -1; 2)$.

б) Решим систему уравнений матричным методом. В матричной форме система уравнений принимает вид $AX = B$. Тогда, если $\det A \neq 0$, решение системы можно найти следующим образом: $X = A^{-1}B$.

Так как определитель матрицы системы не равен нулю, то существует обратная матрица к матрице системы: $A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ (см. задание 1).

Тогда

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -2\cdot 4 + 6\cdot 3 + 2\cdot(-5) \\ 3\cdot 4 + (-3)\cdot 3 + 3\cdot(-5) \\ 7\cdot 4 + (-3)\cdot 3 + (-1)\cdot(-5) \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $(0; -1; 2)$.

в) Решим систему уравнений методом Гаусса. Для этого будем работать с расширенной матрицей системы и с помощью элементарных преобразований матрицы приведем ее к ступенчатому виду.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & -5 \end{array}\right)_{\substack{II'=II-2I \\ III'=III-I}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \end{array}\right)_{\substack{II'=II/(-1) \\ III'=III/3}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right)_{III'=III-II} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array}\right)_{III'=III/4} \sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Выпишем систему уравнений, соответствующую последней матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 4, \\ x_2 + 3x_3 = 5, \\ \quad x_3 = 2. \end{cases}$$

Начиная решать с последнего уравнения, находим, что $x_3 = 2,\ \ x_2 = -1,\ \ x_1 = 0.$

Ответ: $(0; -1; 2)$.

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и в случае совместности выполнить проверку:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 9x_5 = 10. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 6 & 3 & 9 & 10 \end{array}\right)_{\substack{II'=II-2I \\ III'=III-3I \\ IV'=IV-2I}} \sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 & 2 \end{array}\right)_{III=III-2II} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 & 2 \end{array}\right)_{III=III/(-2)} \sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 & 2 \end{array}\right)_{IV=IV-7III} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \end{array}\right).$$

Из последней матрицы видно, что $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = 4.$ Следовательно, по теореме Кронекера-Капелли система совместна. Поскольку число неизвестных n = 5 больше ранга матрицы системы, то система имеет бесконечно много решений. Количество зависимых переменных равно рангу матрицы и равно 4, тогда число независимых переменных равно $n - \operatorname{rank} A = 5 - 4 = 1$. Пусть независимой переменной будет x_2.

Выпишем систему уравнений, соответствующую последней матрице, и перенесем независимую переменную в правую часть.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4 - x_2, \\ -2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_4 = 1, \\ 3x_5 = -5; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 4 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5, \\ x_3 = \dfrac{2 + 3x_4 - 3x_5}{2}, \\ x_4 = 1, \\ x_5 = -\dfrac{5}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5, \\ x_3 = \dfrac{2+3+5}{2}, \\ x_4 = 1, \\ x_5 = -\dfrac{5}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 4 - x_2 - 15 + 2 + 5, \\ x_3 = 5, \\ x_4 = 1, \\ x_5 = -\dfrac{5}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -4 - x_2, \\ x_3 = 5, \\ x_4 = 1, \\ x_5 = -\dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

Обозначим $x_2 = c, c \in \mathbb{R}$. Тогда решения системы имеют вид: $\left(-4-c; c; 5; 1; -\dfrac{5}{3}\right)$, где c – произвольное число.

Сделаем проверку, подставив найденные выражения для переменных в систему:

$$\begin{cases} -4 - c + c + 3\cdot 5 - 2\cdot 1 + 3\cdot\left(-\dfrac{5}{3}\right) = 4, \\ 2\cdot(-4-c) + 2\cdot c + 4\cdot 5 - 1 + 3\cdot\left(-\dfrac{5}{3}\right) = 6, \\ 3\cdot(-4-c) + 3\cdot c + 5\cdot 5 - 2\cdot 1 + 3\cdot\left(-\dfrac{5}{3}\right) = 6, \\ 2\cdot(-4-c) + 2\cdot c + 6\cdot 5 + 3\cdot 1 + 9\cdot\left(-\dfrac{5}{3}\right) = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} -4 - c + c + 15 - 2 - 5 = 4, \\ -8 - 2c + 2c + 20 - 1 - 5 = 6, \\ -12 - 3c + 3c + 25 - 2 - 5 = 6, \\ -8 - 2c + 2c + 30 + 3 - 15 = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} 4 = 4, \\ 6 = 6, \\ 6 = 6, \\ 10 = 10. \end{cases}$$

Следовательно, система решена верно.

Ответ: $\left\{\left(-4-c; c; 5; 1; -\dfrac{5}{3}\right), c \in \mathbb{R}\right\}$.

Задание 4. Даны три вектора: $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{j} - 3\vec{k}, \vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$. Найти:

а) скалярное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$;

б) векторное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$;

в) смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Решение. Запишем координаты векторов: $\vec{a} = \{3;1;2\}, \vec{b} = \{0;2;-3\}, \vec{c} = \{1;-3;1\}$.

Если заданы координаты векторов $\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$, $\vec{b} = \{x_b; y_b; z_b\}$, $\vec{c} = \{x_c; y_c; z_c\}$, то:

а) скалярное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$ равно $\vec{a}\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$;

б) векторное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$ находится как $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$;

в) смешанное произведение вычисляется по формуле $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$.

Поэтому получаем, что:

а) $\vec{a}\vec{b} = 3\cdot 0 + 1\cdot 2 + 2\cdot(-3) = -4$;

б) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 9\vec{j} + 6\vec{k}$,

т. е. $\vec{a} \times \vec{b} = \{-7; 9; 6\}$;

в) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -3\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}2 & -3\\ -3 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-21-3-4=-28.$

Ответ: $\vec{a}\vec{b}=-4,\ \ \vec{a}\times\vec{b}=\{-7;9;6\},\ \ \vec{a}\vec{b}\vec{c}=-28.$

Задание 5. Даны точки $A(1;2;3),\ B(2;3;4),\ C(-1;2;-3),\ D(0;1;8).$ Найти:

а) угол треугольника *ABC* между сторонами *AB* и *BC*;

б) площадь треугольника *ABC*;

в) объем пирамиды *ABCD*.

Решение. а) Угол между сторонами *AB* и *BC* образован векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$. Поэтому задача нахождения угла между сторонами треугольника сводится к задаче нахождения косинуса угла между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$. Найдем координаты этих векторов:

$\overrightarrow{BA}=\{1-2;2-3;3-4\}=\{-1;-1;-1\};$

$\overrightarrow{BC}=\{-1-2;2-3;-3-4\}=\{-3;-1;-7\}.$

Косинус угла между векторами найдем через скалярное произведение по формуле:

$$\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{-1\cdot(-3)-1\cdot(-1)-1\cdot(-7)}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2}\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+(-7)^2}}=\frac{11}{\sqrt{3}\sqrt{59}}=\frac{11}{\sqrt{177}},$$

тогда $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\arccos\frac{11}{\sqrt{177}}.$

б) Площадь треугольника найдем через векторное произведение векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$, образующих этот треугольник, по формуле: $S_{\vartriangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|.$

Векторное произведение равно $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -1 & -1\\ -3 & -1 & -7\end{vmatrix}=6\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}.$

Тогда $S_{\vartriangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+(-4)^2+(-2)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{56}=\sqrt{14}.$

в) Объем пирамиды *ABCD* найдем через смешанное произведение векторов $\overrightarrow{BA},$ $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$, на которых построена пирамида, т. е. $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}\right|.$

Вектор $\overrightarrow{BD}$ имеет координаты $\overrightarrow{BD}=\{0-2;1-3;8-4\}=\{-2;-2;4\}.$

Вычисляя смешанное произведение

$$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=\begin{vmatrix}-1 & -1 & -1\\ -3 & -1 & -7\\ -2 & -2 & 4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1 & -7\\ -2 & 4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-3 & -7\\ -2 & 4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -2 & -2\end{vmatrix}=-12,$$

получим $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}\right|=\frac{1}{6}\cdot|-12|=2.$

Ответ: $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\arccos\frac{11}{\sqrt{177}},\ \ S_{\vartriangle ABC}=\sqrt{14},\ \ V_{ABCD}=2.$

Задание 6. Найти вектор $\vec{a}$, такой, что $\vec{a}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AB}$ и $\left|\vec{a}\right|=30$, если $A(0;3;-1), B(1;1;-1)$. Найти его направляющие косинусы.

Решение. Так как $\vec{a}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AB}$, то $\vec{a}=-\lambda\overrightarrow{AB}$, где $\lambda=\dfrac{\left|\vec{a}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$. Координаты вектора $\overrightarrow{AB}=\{1;-2;0\}$, поэтому $\lambda=\dfrac{30}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{30}{\sqrt{5}}=6\sqrt{5}$. Значит, $\vec{a}=-6\sqrt{5}\overrightarrow{AB}=\left\{-6\sqrt{5};12\sqrt{5};0\right\}$.

Найдем направляющие косинусы вектора $\vec{a}$:

$$\cos\alpha=\frac{x_a}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{-6\sqrt{5}}{30}=-\frac{\sqrt{5}}{5};\ \cos\beta=\frac{y_a}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{12\sqrt{5}}{30}=\frac{2\sqrt{5}}{5};\ \cos\gamma=\frac{z_a}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{0}{30}=0.$$

Ответ: $\vec{a}=\left\{-6\sqrt{5};12\sqrt{5};0\right\}$, $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\beta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\gamma=0$.

Задание 7. Даны точки $A(4;-9), B(-1;3), C(2;7)$. Найти уравнения прямых, проходящих через точку C: а) параллельно прямой AB; б) перпендикулярно прямой AB.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, записывается по формуле: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Составим уравнение прямой AB: $\dfrac{x-4}{-1-4}=\dfrac{y+9}{3+9}$. Преобразовав, получим общее уравнение AB: $12x+5y-3=0$. Выразив y, получим $y=-\dfrac{12}{5}x+\dfrac{3}{5}$. Следовательно, угловой коэффициент прямой $k_{AB}=-\dfrac{12}{5}$.

Пусть прямая $CD\parallel AB$. Тогда $k_{CD}=k_{AB}=-\dfrac{12}{5}$. Уравнение прямой CD получим как уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом k, проходящей через данную точку $(x_0;y_0)$, по формуле $y-y_0=k(x-x_0)$. Таким образом, уравнение прямой CD имеет вид $y-7=-\dfrac{12}{5}(x-2)$, или $y=-2,4x+11,8$.

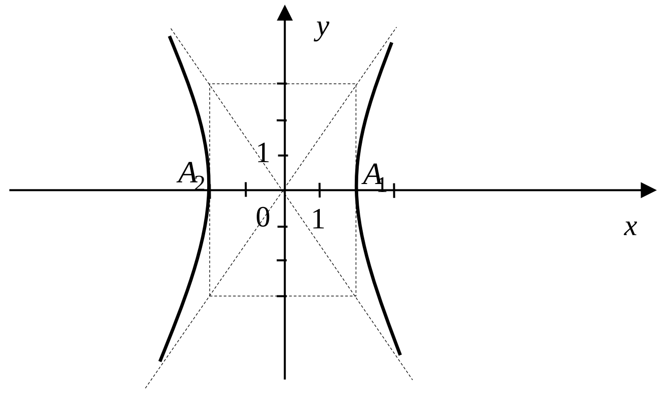
Угловой коэффициент прямой CH, $CH\perp AB$, найдем из соотношения $k_{CH}\cdot k_{AB}=-1$. Получаем, что $k_{CH}=\dfrac{5}{12}$. Аналогично предыдущему случаю, уравнение прямой CH: $y-7=\dfrac{5}{12}(x-2)$, т. е. $y=\dfrac{5}{12}x+6\dfrac{1}{6}$.

Ответ: $y=-2,4x+11,8$; $y=\dfrac{5}{12}x+6\dfrac{1}{6}$.

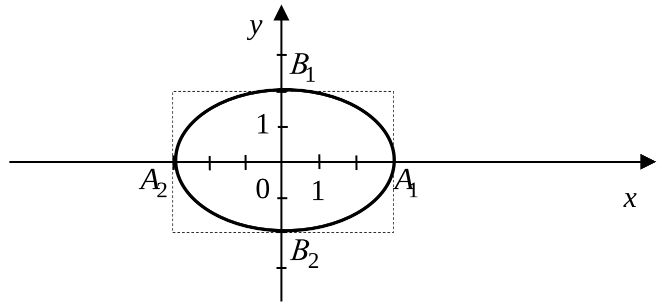
Задание 8. Построить линии, заданные каноническими уравнениями:

а) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$; б) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$; в) $y^2=-2x$.

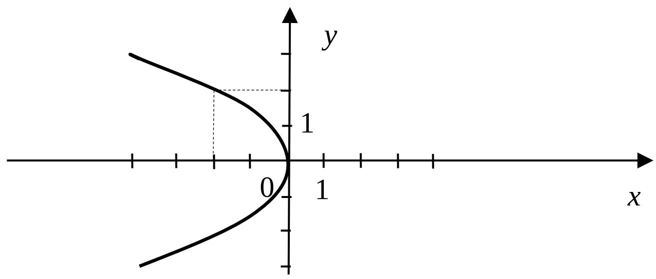
Решение. а) Уравнение $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ задает гиперболу с полуосями $a=2$, $b=3$. Построим основной прямоугольник гиперболы и продлим его диагонали. Полученные прямые являются асимптотами гиперболы. Точки $A_1(2;0)$, $A_2(-2;0)$ – вершины гиперболы.



б) Уравнение $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ задает эллипс с большой полуосью $a=3$, малой полуосью $b=2$. Точки $A_1(3;0)$, $A_2(-3;0)$, $B_1(0;2)$, $B_2(0;-2)$ – вершины эллипса.



в) Уравнение $y^2=-2x$ задает параболу с вершиной в точке $O(0;0)$ и параметром $p=1$. Ветви направлены влево. Чтобы точнее изобразить параболу, найдем какую-нибудь точку на ней. Например, точка $(-2;2)$ принадлежит параболе.



Задание 9. Выделив полные квадраты, привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и сделать рисунок кривой:

а) $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0;$ б) $x^2+y^2-2y-3=0.$

Решение. а) Приведем уравнение кривой к каноническому виду, выделив полные квадраты по x и по y:

$$4x^2+9y^2-8x-36y+4=0;$$

$$4(x^2-2x)+9(y^2-4y)+4=0;$$

$$4(x^2-2\cdot1\cdot x+1-1)+9(y^2-2\cdot2\cdot y+4-4)+4=0;$$

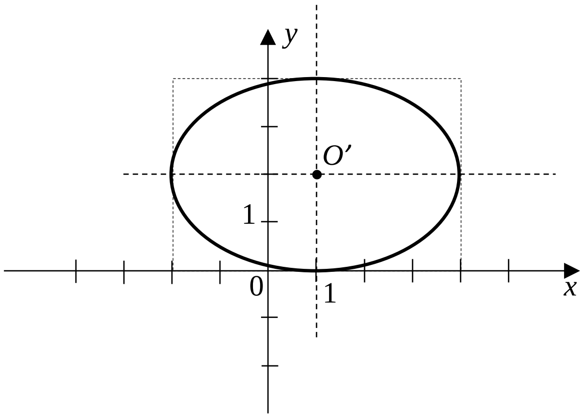
$4(x-1)^2-4+9(y-2)^2-36+4=0;$

$4(x-1)^2+9(y-2)^2-36=0;$

$4(x-1)^2+9(y-2)^2=36;$

$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1.$

Полученное уравнение есть уравнение эллипса с центром в точке $O'(1;2)$ и полуосями $a=3$, $b=2$. Построим эллипс, сместив оси координат в точку O'.



б) Выделим полный квадрат по y:

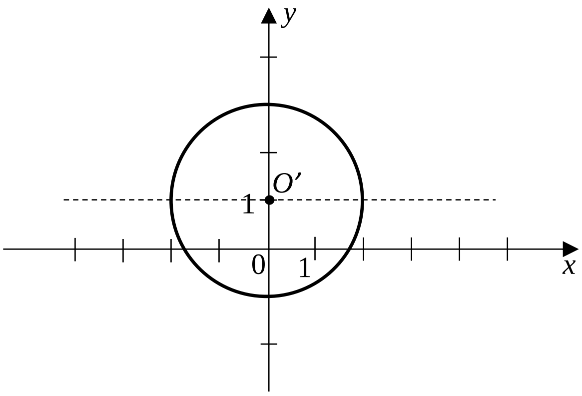
$x^2+y^2-2y-3=0;$

$x^2+(y^2-2\cdot1\cdot y+1)-1-3=0;$

$x^2+(y-1)^2-4=0;$

$x^2+(y-1)^2=4.$

Последнее уравнение есть уравнение окружности с центром в точке $O'(0;1)$ и радиусом $R=2$.



Задание 10. Определить, является ли система многочленов $2t+t^5$, t^3-t^5, $t+t^3$ линейно независимой.

Решение. Составим линейную комбинацию многочленов и приравняем ее к нулю:

$\lambda_1(2t+t^5)+\lambda_2(t^3-t^5)+\lambda_3(t+t^3)=0.$

Раскроем скобки и перегруппируем:

$t^5(\lambda_1-\lambda_2)+t^3(\lambda_2+\lambda_3)+t(2\lambda_1+\lambda_3)=0.$

Многочлен будет тождественно равен нулю, если все его коэффициенты равны нулю. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)_{III'=III-2I} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)_{III'=III-2II} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Получаем, что система уравнений имеет единственное решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$ Следовательно, данная система многочленов линейно независима.

Ответ: система многочленов линейно независима.

Задание 11. Найти координаты матрицы $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ в базисе $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ пространства квадратных матриц 2-го порядка.

Решение. Чтобы найти координаты вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$, нужно представить вектор $\bar{a}$ в виде $\bar{a} = \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \lambda_3\bar{a}_3 + \lambda_4\bar{a}_4.$ Тогда числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ и будут координатами матрицы $\bar{a}$ в заданном базисе.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_4 & 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 & -\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

Две матрицы равны, если равны их соответствующие элементы. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_4 = 2, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 2, \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 = 8, \\ -\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 3. \end{cases}$$

Решим ее методом Гаусса:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)_{\substack{II'=II-3I \\ IV'=IV+I}} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right)_{III'=III+II} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&2&2\\0&1&1&-5&-4\\0&0&4&-4&4\\0&0&1&3&5\end{array}\right)_{III'=III/4}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&2&2\\0&1&1&-5&-4\\0&0&1&-1&1\\0&0&1&3&5\end{array}\right)_{IV'=IV-III}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&2&2\\0&1&1&-5&-4\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&4&4\end{array}\right).$$

Запишем соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_4=2,\\ \lambda_2+\lambda_3-5\lambda_4=-4,\\ \lambda_3-\lambda_4=1,\\ 4\lambda_4=4;\end{cases}\quad\begin{cases}\lambda_1=2-2\lambda_4,\\ \lambda_2=-4-\lambda_3+5\lambda_4,\\ \lambda_3=1+\lambda_4,\\ \lambda_4=1;\end{cases}\quad\begin{cases}\lambda_1=2-2\lambda_4,\\ \lambda_2=-4-\lambda_3+5\lambda_4,\\ \lambda_3=1+1,\\ \lambda_4=1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda_1=2-2,\\ \lambda_2=-4-2+5,\\ \lambda_3=2,\\ \lambda_4=1;\end{cases}\quad\begin{cases}\lambda_1=0,\\ \lambda_2=-1,\\ \lambda_3=2,\\ \lambda_4=1.\end{cases}$$

Решение системы $\lambda_1=0; \lambda_2=-1; \lambda_3=2; \lambda_4=1$ дает коэффициенты разложения $\bar{a}=0\cdot\bar{a}_1-1\cdot\bar{a}_2+2\cdot\bar{a}_3+1\cdot\bar{a}_4$, т. е. координаты вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3,\bar{a}_4$.

Ответ: $\bar{a}=(0;-1;2;1)$.

Задание 12. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A=\begin{pmatrix}1&-4&-8\\-4&7&-4\\-8&-4&1\end{pmatrix}$.

Решение. Составим характеристический многочлен матрицы:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-4&-8\\-4&7-\lambda&-4\\-8&-4&1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+9\lambda^2+81\lambda-729.$$

Найдем корни характеристического многочлена:

$-\lambda^3+9\lambda^2+81\lambda-729=0.$

Методом подбора находим один из корней уравнения: $\lambda_1=9$. Разделив многочлен $-\lambda^3+9\lambda^2+81\lambda-729$ на $\lambda-9$, получим:

$$-\lambda^3+9\lambda^2+81\lambda-729=(\lambda-9)\left(-\lambda^2+81\right)=-(\lambda-9)^2(\lambda+9).$$

Тогда собственные значения оператора равны: $\lambda_{1,2}=9, \lambda_3=-9$.

Собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_{1,2}=9$, удовлетворяют условию $(A-\lambda E)X=\bar{0}$, т. е.

$$\begin{pmatrix}1-9&-4&-8\\-4&7-9&-4\\-8&-4&1-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ \text{где}\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

Таким образом, координаты собственных векторов удовлетворяют однородной системе уравнений

$$\begin{cases} -8x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0, \\ -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ -8x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & -4 & -8 & 0 \\ -4 & -2 & -4 & 0 \\ -8 & -4 & -8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Значит, координаты собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_{1,2} = 9$, связаны соотношением $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$, или $x_2 = -2x_1 - 2x_3$.

Так как ранг матрицы равен 1, то фундаментальная система решений содержит два решения ($n - \operatorname{rank} A = 3 - 1 = 2$). Зададим два набора значений свободных переменных и составим два собственных вектора.

1. Пусть $x_1 = 1, x_3 = 0,$ тогда $x_2 = -2,$ т. е. собственный вектор $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

2. Пусть $x_1 = 0, x_3 = 1,$ тогда $x_2 = -2,$ т. е. собственный вектор $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Найдем собственный вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, соответствующий $\lambda_3 = -9$:

$$\begin{pmatrix} 1+9 & -4 & -8 \\ -4 & 7+9 & -4 \\ -8 & -4 & 1+9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} 10x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0, \\ -4x_1 + 16x_2 - 4x_3 = 0, \\ -8x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -4 & -8 & 0 \\ -4 & 16 & -4 & 0 \\ -8 & -4 & 10 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 18 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -18 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ 2x_2 - x_3 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = \dfrac{1}{2} x_3. \end{cases}$$

Ранг матрицы равен 2, значит фундаментальная система решений содержит 1 решение. Зададим значение свободной переменной и составим собственный вектор. Пусть $x_3 = 2,$ тогда $x_1 = 2, x_2 = 1,$ откуда собственный вектор $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Ответ: $\lambda_{1,2}=9$, $X_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\lambda_3=-9$, $X_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.