Mean Field Games in Renewable Energy Markets

João Felipe Vilas Boas

30 de janeiro de 2026

Conteúdo

1 Introdução

Em mercados de energia liberalizados, cada agente (usina ou participante) busca maximizar seu lucro individual, respondendo aos sinais de preço do mercado. Antes de entrar em modelagens estratégicas, é fundamental compreender a estrutura física e econômica subjacente à geração de energia.

Inicialmente, iremos propor um modelo simplificado de geração com diferentes tecnologias.

Para referências de base sobre organização de mercados elétricos, formação de preços e operação econômica, ver [4, 2]. Em particular, discussões empíricas sobre ineficiências e poder de mercado em mercados reestruturados são tratadas em [1].

2 Estrutura Geral do Sistema

Considera-se um horizonte temporal discreto $t = 1, \dots, T$, com demanda conhecida D_t. O balanço energético do sistema é dado por:

$$g_s(t) + g_r(t) + g_h(t) + g_n(t) = D_t + c_t - u_t, \tag{1}$$

- $g_s(t)$: geração proveniente de fontes solares no período t (potência média em MW);
- $g_r(t)$: geração proveniente de outras fontes renováveis intermitentes no período t (por exemplo, eólica, biomassa sazonal, etc.);
- $g_h(t)$: geração proveniente de fontes hidrelétricas no período t (fonte renovável controlável);
- $g_n(t)$: geração proveniente de fontes não renováveis / controláveis no período t (por exemplo, usinas térmicas a gás, carvão, óleo combustível);
- $c_t \geq 0$: energia excedente no período t, associada a decisões de *curtailment*;
- $u_t \geq 0$: déficit de suprimento (energia não atendida) no período t;
- D_t: demanda total de energia a ser atendida no período t.

Tratamos a geração hidrelétrica como uma fonte renovável controlável, sem explicitar dinâmica de reservatório. Assim, impomos apenas um limite de capacidade:

$$0 \leq g_h(t) \leq K_h, \tag{2}$$

onde K_h é a capacidade efetivamente disponível (ou contratada) de geração hidrelétrica no período. Este modelo é intencionalmente minimalista; extensões naturais incluem restrições de rampa e a dinâmica de armazenamento de água no reservatório.

O custo de penalidade associado a desequilíbrios é:

$$C_{\text{pen}} = \sum_t (\pi_u \, u_t + \pi_c \, c_t), \tag{3}$$

com $\pi_u \gg \pi_c$.

3 Modelagem da Geração Solar $g_s(t)$

A geração solar pode ser representada por uma função multiplicativa simples:

$$g_s(t;\theta_s) = K_s\,\eta_{\mathrm{DC}}\eta_{\mathrm{AC}}\,\mathcal{I}(t;\phi,\beta,\gamma)\ [1-\alpha_T\,(T_{\mathrm{amb}}(t)-25°\mathrm{C})]\ \xi_s(t), \tag{4}$$

onde:

- K_s: capacidade instalada (MWp);
- η_{DC}: rendimento médio do arranjo no lado DC (perdas óticas, mismatch entre módulos, cabeamento DC etc.), da ordem de 95%;
- η_{AC}: rendimento médio no lado AC (eficiência dos inversores, transformadores e demais perdas elétricas até o ponto de conexão), da ordem de 98%.
- $\mathcal{I}(t;\phi,\beta,\gamma)$: irradiância efetiva no plano do módulo, dependente da latitude ϕ, inclinação β e azimute γ;
- α_T: coeficiente térmico ($\approx 0{,}004/°\mathrm{C}$);
- $\xi_s(t)$: ruído multiplicativo representando variação de nuvens, com $\mathbb{E}[\xi_s(t)] = 1$.

A irradiância pode ser modelada, em primeira aproximação, por uma função senoidal diária modulada pela sazonalidade.

3.1 Calibração dos parâmetros solares

Nesta versão do modelo, tratamos como *convenções de engenharia/mercado* (isto é, fixamos em valores típicos ou vindos de *datasheet* e ferramentas padrão) os parâmetros de perdas e temperatura, e deixamos como objetos principais de estimação apenas: (i) a irradiância efetiva no plano do módulo $\mathcal{I}(t;\phi,\beta,\gamma)$ e (ii) o termo estocástico multiplicativo $\xi_s(t)$.

3.1.1 Parâmetros fixados por convenção

- **Perdas agregadas / derating.** Uma referência amplamente usada em estudos e aplicações é o *PVWatts* (NREL), que adota por padrão perdas totais do sistema de **14%** (em vez do antigo fator DC–AC global), com a eficiência do inversor tratada separadamente [10].
- **Coeficiente térmico.** O coeficiente α_T deve ser obtido do *datasheet* do módulo (coeficiente de temperatura da potência). Para módulos de silício cristalino, valores típicos estão na ordem de 0,3%–0,5%/°C (sinal negativo).
- **η_{DC} e η_{AC}.** Em estudos agregados, é comum consolidar perdas em eficiências médias (ou em um único fator de perdas totais). A interpretação de PR/perdas como agregação de efeitos óticos, elétricos e conversão é padrão em ferramentas de projeto (por exemplo, PVsyst) [?].

3.1.2 Irradiância efetiva no plano do módulo $\mathcal{I}(t;\phi,\beta,\gamma)$

Para construir $\mathcal{I}(t;\phi,\beta,\gamma)$ de forma *convencional*, parte-se de componentes horizontais medidas ou reanalisadas (GHI, DHI, DNI) e aplica-se um modelo de transposição para o plano inclinado (POA). Uma decomposição padrão é:

$$\mathcal{I}_{\text{POA}}(t) = DNI(t)\cos\theta(t;\phi,\beta,\gamma) + DHI(t)\,F_{\text{sky}}(t;\beta) + GHI(t)\,\rho_g\,F_{\text{grd}}(\beta), \tag{5}$$

onde θ é o ângulo de incidência no plano do módulo, ρ_g é o albedo do solo e $F_{\text{sky}}, F_{\text{grd}}$ são fatores geométricos (dependentes do modelo de difusão). Uma referência para esta formulação e seus componentes é Duffie & Beckman [11]. Na implementação prática, pode-se usar um modelo de difusão no plano inclinado como o de Perez (ou isotrópico).

3.1.3 Estimação de $\xi_s(t)$ (resíduo multiplicativo)

Dado um conjunto de parâmetros fixados e uma construção de $\mathcal{I}_{\text{POA}}(t)$, define-se o resíduo multiplicativo como:

$$\xi_s(t) = \frac{P_{\text{AC}}^{\text{obs}}(t)}{K_s\,\eta_{\text{DC}}\eta_{\text{AC}}\,\mathcal{I}_{\text{POA}}(t)\,\left[1-\alpha_T\,(T_{\text{amb}}(t)-25°\text{C})\right]}, \qquad \mathbb{E}[\xi_s(t)] \approx 1, \tag{6}$$

após filtrar períodos de indisponibilidade, falhas de medição e *curtailment*. Na prática, $\xi_s(t)$ captura variabilidade de nuvens sub-horária, erros de sensores/modelo e perdas não modeladas; pode-se descrever sua dispersão por estatísticas simples (p. ex. desvio padrão por hora do dia/mês) e, se necessário, ajustar uma distribuição positiva (ex.: lognormal) para uso em simulação de cenários.

4 Modelagem de Outras Renováveis Intermitentes $g_r(t)$

Para fontes eólicas (ou equivalentes), adota-se um modelo simplificado de disponibilidade:

$$g_r(t;\theta_r) = K_r\,a_r(t), \tag{7}$$

em que $a_r(t) \in [0,1]$ representa a fração de capacidade disponível, com perfil médio $\mu_r(t)$ e ruído $\varepsilon_r(t)$.

Alternativamente, pode-se utilizar uma curva de potência dependente da velocidade do vento $v(t)$:

$$P(v) = \begin{cases} 0, & v < v_{\text{ci}}, \\ P_{\text{rated}}\left(\dfrac{v-v_{\text{ci}}}{v_{\text{r}}-v_{\text{ci}}}\right)^3, & v_{\text{ci}} \le v < v_{\text{r}}, \\ P_{\text{rated}}, & v_{\text{r}} \le v \le v_{\text{co}}, \\ 0, & v > v_{\text{co}}, \end{cases} \tag{8}$$

com v_{ci}, v_{r} e v_{co} sendo as velocidades de entrada, nominal e de corte.

Na prática, os parâmetros da curva de potência assumem valores típicos na faixa de:

- v_{ci} (velocidade de entrada): em torno de 3–4 m/s, abaixo da qual a turbina permanece desligada;
- v_{r} (velocidade nominal): tipicamente entre 10 e 15 m/s, faixa em que a turbina atinge a potência nominal P_{rated};

- v_{co} (velocidade de corte): usualmente entre 20 e 25 m/s, acima da qual a máquina é desligada por razões de segurança mecânica.

Essas ordens de grandeza são compatíveis com aerogeradores comerciais de porte utilidade (1–5 MW), podendo variar entre fatores como modelo, tipos de vento, dentre outras. Acredito porém que sirva como boa proxy.

5 Modelagem das Fontes Não Renováveis $g_n(t)$

Fontes controláveis (térmicas) possuem limites físicos de operação:

$$0 \leq g_n(t) \leq K_n, \tag{9}$$

$$|g_n(t) - g_n(t-1)| \leq \rho_n, \tag{10}$$

onde K_n é a capacidade instalada da tecnologia térmica e ρ_n representa o limite máximo de variação admissível (rampa) entre períodos consecutivos.

Para fins de interpretação econômica, separamos o custo operacional total em duas parcelas: custos reais de combustível e operação, e penalidades associadas à suavização do perfil de geração:

$$C_n = C_n^{\mathrm{comb}} + C_n^{\mathrm{ramp}}. \tag{11}$$

O termo C_n^{comb} representa os custos diretamente observáveis (combustível, O&M):

$$C_n^{\mathrm{comb}} = \sum_t \left(c_1\, g_n(t) + \tfrac{1}{2} c_2\, g_n(t)^2 \right), \tag{12}$$

onde c_1 é o custo linear de combustível e $c_2 > 0$ captura o crescimento do custo marginal (com eficiência decrescente, custos variáveis adicionais, etc.).

Assumimos uma função de custo variável convexa para a geração térmica. A forma quadrática é adim de capturar custo marginal crescente (ineficiências, limites técnicos e aumento do custo incremental em níveis altos de despacho), além de manter o problema bem-comportado (convexo) e numericamente estável. Formulações dessa natureza são comuns em textos de operação e economia de sistemas elétricos[3, 2, 4].

Para tornar a modelagem operacionalmente interpretável, adotamos a seguinte calibração *mínima* para $(c_1, c_2, \rho_n, \gamma_n)$, combinando parâmetros técnicos e ajuste aos dados observados.

Custos variáveis (c_1, c_2)**.** Seja $HR(g)$ a curva de *heat rate* (MMBtu/MWh) da unidade térmica, tipicamente aproximada por uma forma afim $HR(g) \approx a + b\,g$ no intervalo de operação. Dado um preço de combustível p_f (R\$/MMBtu) e um custo variável de O&M c_{vom} (R\$/MWh), o custo incremental pode ser aproximado por

$$MC(g) = p_f\, HR(g) + c_{\mathrm{vom}} \approx (p_f a + c_{\mathrm{vom}}) + (p_f b)\, g.$$

Comparando com $MC(g) = \frac{\partial}{\partial g}\left(c_1 g + \frac{1}{2} c_2 g^2\right) = c_1 + c_2 g$, obtém-se a identificação direta:

$$c_1 = p_f a + c_{\mathrm{vom}}, \qquad c_2 = p_f b.$$

Quando não há curva $HR(\cdot)$ disponível, (c_1, c_2) podem ser estimados por regressão de custo (ou oferta) em função do despacho observado, sob restrições de convexidade [3, 2].

Limite de rampa ρ_n. Tomamos ρ_n a partir do *ramp-rate* técnico (MW por unidade de tempo) do equipamento/cluster, isto é, $\rho_n = RR \cdot \Delta t$, onde Δt é o passo temporal do modelo.

Penalidade de suavização γ_n. O parâmetro γ_n é interpretado como regularização intertemporal (não um custo físico direto) e é calibrado para reproduzir a suavidade observada em séries históricas de despacho: escolhe-se γ_n de modo que, ao resolver o despacho com (c_1, c_2, ρ_n) fixos, a estatística $\mathrm{Var}(\Delta g_n)$ ou um quantil alto de $|\Delta g_n|$ (ex.: 95%) se aproxime do observado, preservando a convexidade [8, 7].

6 Problema de Otimização Social

Recordando que o custo operacional total das fontes não renováveis (térmicas) é dado por

$$C_n = \sum_t \left(c_1\, g_n(t) + \tfrac{1}{2} c_2\, g_n(t)^2\right) + \sum_t \frac{\gamma_n}{2} \left[g_n(t) - g_n(t-1)\right]^2, \tag{13}$$

onde o primeiro termo representa os custos "reais" de combustível e operação, e o segundo termo é uma penalidade que desencoraja variações bruscas de geração (*rampas*), e que pode ser interpretada como um termo de regularização temporal.

As penalidades associadas a desequilíbrios entre geração e demanda são

$$C_{\text{pen}} = \sum_t \left(\pi_u\, u_t + \pi_c\, c_t\right), \tag{14}$$

com $\pi_u \gg \pi_c$, isto é, o déficit de suprimento é muito mais caro do que o *curtailment* de energia excedente.

O problema de despacho centralizado, visto sob a ótica de um planejador social, consiste em escolher as trajetórias de geração e desequilíbrio de modo a minimizar o custo total esperado:

$$\min_{\{g_s, g_r, g_h, g_n, c, u\}} \mathbb{E}\left[C_n + C_{\text{pen}}\right] \quad \text{sujeito a (1), (4), (7), (2) e demais restrições.} \tag{15}$$

O termo quadrático de rampa deve ser interpretado como uma *regularização* (penalidade de modelagem) que induz suavidade em $g_n(t)$, e não como um custo físico diretamente observado. Em particular, como já impomos explicitamente o limite de rampa $|g_n(t)-g_n(t-1)| \leq \rho_n$, o planejador social pode, se desejar, adotar a formulação "mínima" com $\gamma_n = 0$, mantendo apenas custos operacionais observáveis (12) e restrições físicas. Na prática, valores $\gamma_n > 0$ podem ser usados para capturar custos não modelados (partidas/paradas, desgaste, fricções operacionais) ou para melhorar a estabilidade numérica do despacho [3, 7].

Explicitamente, as restrições incluem:

- balanço de energia em cada período t:

$$g_s(t) + g_r(t) + g_h(t) + g_n(t) = D_t + c_t - u_t;$$

- modelagem da geração solar $g_s(t)$ dada por (4);

- modelagem da geração renovável intermitente $g_r(t)$ dada por (7);
- limites físicos das fontes térmicas:

$$0 \le g_n(t) \le K_n, \qquad \big|g_n(t) - g_n(t-1)\big| \le \rho_n;$$

- não negatividade das variáveis de desequilíbrio:

$$c_t \ge 0, \qquad u_t \ge 0 \qquad \text{para todo } t.$$

A presença da média $\mathbb{E}[\cdot]$ reflete o fato de que a geração renovável e, eventualmente, a demanda podem ser estocásticas. Nas condições de primeira ordem, pode-se trabalhar cenário a cenário e, em seguida, tomar a média sobre os cenários. Modelos de decisão sob incerteza e formulações por cenários em sistemas elétricos são discutidos em [5, 6].

7 Condições de Primeira Ordem (KKT)

Para caracterizar soluções ótimas do problema (15), introduzimos multiplicadores de Lagrange λ_t associados às restrições de balanço (1) em cada período t. Esses multiplicadores podem ser interpretados economicamente como o valor marginal da energia (ou preço sombra) no período t.

7.1 Tecnologia Controlável

Focamos inicialmente na variável $g_n(t)$, que representa a geração térmica (controlável). A partir de (13), a derivada do custo total das fontes não renováveis em relação a $g_n(t)$ é, para períodos t no interior do horizonte,

$$\frac{\partial C_n}{\partial g_n(t)} = c_1 + c_2\, g_n(t) + \gamma_n \big[2g_n(t) - g_n(t-1) - g_n(t+1)\big]. \tag{16}$$

Para escrever as KKT corretamente quando há desigualdades ativas, introduzimos multiplicadores associados às restrições de capacidade e rampa:

$$0 \le g_n(t) \le K_n \quad \Rightarrow \quad \mu_t^{\ell} \ge 0 \ \ (\text{para } g_n(t) \ge 0), \qquad \mu_t^{u} \ge 0 \ \ (\text{para } g_n(t) \le K_n), \tag{17}$$

$$g_n(t) - g_n(t-1) \le \rho_n \quad \Rightarrow \quad \nu_t^{+} \ge 0, \tag{18}$$

$$g_n(t-1) - g_n(t) \le \rho_n \quad \Rightarrow \quad \nu_t^{-} \ge 0. \tag{19}$$

A condição de estacionariedade do Lagrangiano em relação a $g_n(t)$ passa a ser

$$\frac{\partial C_n}{\partial g_n(t)} - \lambda_t - \mu_t^{\ell} + \mu_t^{u} + \nu_t^{+} - \nu_t^{-} - \nu_{t+1}^{+} + \nu_{t+1}^{-} = 0, \tag{20}$$

isto é,

$$\lambda_t = \frac{\partial C_n}{\partial g_n(t)} - \mu_t^{\ell} + \mu_t^{u} + \nu_t^{+} - \nu_t^{-} - \nu_{t+1}^{+} + \nu_{t+1}^{-}. \tag{21}$$

Quando nenhuma restrição de desigualdade está ativa (solução interior), temos $\mu_t^{\ell} = \mu_t^{u} = \nu_t^{+} = \nu_t^{-} = 0$, e recupera-se o caso simples $\lambda_t = \partial C_n/\partial g_n(t)$. Já quando $g_n(t) = K_n$ ou algum limite de rampa está ativo, os termos adicionais em (21) ajustam o *custo marginal efetivo*, refletindo a escassez de capacidade ou de flexibilidade intertemporal.

Em outras palavras, no ótimo, o multiplicador λ_t coincide com o *custo marginal de geração térmica* no período t, levando em conta tanto o custo de combustível quanto o efeito intertemporal das rampas.

7.2 *Curtailment* e Déficit

As variáveis de desequilíbrio c_t (energia excedente, associada a *curtailment*) e u_t (déficit de suprimento) aparecem no custo de penalidade (14) e na restrição de balanço (1). Introduzimos multiplicadores de não negatividade $\alpha_t \geq 0$ e $\beta_t \geq 0$ associados, respectivamente, às restrições $c_t \geq 0$ e $u_t \geq 0$.

O Lagrangiano contém os termos

$$\pi_c c_t + \pi_u u_t \; + \; \lambda_t(\cdots + c_t - u_t) \; - \; \alpha_t c_t \; - \; \beta_t u_t.$$

As condições de estacionariedade são:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \pi_c + \lambda_t - \alpha_t = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = \pi_u - \lambda_t - \beta_t = 0. \tag{23}$$

Com as condições de complementaridade

$$\alpha_t c_t = 0, \qquad \beta_t u_t = 0,$$

obtêm-se os seguintes regimes ótimos:

$$c_t > 0 \;\Rightarrow\; \lambda_t = -\pi_c, \tag{24}$$

$$u_t > 0 \;\Rightarrow\; \lambda_t = \pi_u, \tag{25}$$

$$c_t = u_t = 0 \;\Rightarrow\; -\pi_c \leq \lambda_t \leq \pi_u. \tag{26}$$

Assim, no caso de *curtailment* o preço sombra é negativo, refletindo que um aumento marginal da demanda reduz a penalidade de excedente. Quando há déficit, o preço coincide com o custo marginal de energia não atendida. No regime interior, o preço permanece em um intervalo no qual não é ótimo ativar nem *curtailment* nem déficit.

7.3 Capacidade Instalada

Se, além das decisões de despacho de curto prazo, os níveis de capacidade instalada (K_s, K_r, K_n) também forem tratados como variáveis de decisão de planejamento, introduzimos custos anualizados de investimento (q_s, q_r, q_n) para cada tecnologia.

Nesse caso, as condições de primeira ordem associadas às capacidades assumem a forma

$$\mathbb{E}\left[\sum_t \lambda_t\, g_s'(K_s)\right] = q_s, \qquad \mathbb{E}\left[\sum_t \lambda_t\, g_r'(K_r)\right] = q_r, \qquad \mathbb{E}\left[\sum_t \lambda_t\, g_n'(K_n)\right] = q_n, \tag{27}$$

onde $g_x'(K_x)$ denota a derivada da trajetória de geração $g_x(t)$ em relação à capacidade instalada K_x, para $x \in \{s, r, n\}$.

Essas equações expressam que, no ótimo de planejamento, o valor esperado do benefício marginal de adicionar capacidade em cada tecnologia deve ser igual ao custo marginal de capital correspondente. Assim, o problema de despacho de curto prazo e as decisões de expansão de longo prazo são conectados pelos preços sombra λ_t que emergem das condições de otimalidade do sistema.

8 Incorporação de Incertezas e Reservas

Define-se o erro agregado das fontes intermitentes:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_s(t) + \varepsilon_r(t), \qquad \mathrm{Var}[\varepsilon_t] = \sigma_\varepsilon^2(t). \tag{28}$$

Exige-se reserva ascendente

$$R_t \geq z_{1-\alpha}\, \sigma_\varepsilon(t), \tag{29}$$

com custo associado κR_t e restrição

$$g_n(t) + R_t \leq K_n. \tag{30}$$

Aqui κ pode ser interpretado como custo de oportunidade (R\$/MW por período) de manter capacidade não despachada para prover reserva. Interpretamos R_t como *reserva ascendente* (spinning/operativa) disponível no período t para cobrir erros de previsão das fontes intermitentes no horizonte de tempo associado a Δt. Para manter a formulação mínima, impomos R_t apenas sobre a tecnologia térmica, mas é natural estender o modelo permitindo que a hidrelétrica também contribua para reservas quando houver folga de capacidade, p.ex. via $g_h(t) + R_t^h \leq K_h$ e custo associado.

Assumindo que o erro agregado ε_t (erro de previsão líquido de solar+eólica) é aproximadamente Normal com média zero,

$$\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2(t)),$$

temos $\mathbb{P}(\varepsilon_t \leq z_{1-\alpha}\sigma_\varepsilon(t)) = 1 - \alpha$, onde $z_{1-\alpha}$ é o quantil da Normal padrão (por exemplo, $z_{0.95} \approx 1.645$ e $z_{0.99} \approx 2.33$). Se não se deseja assumir Normalidade, pode-se substituir $z_{1-\alpha}\sigma_\varepsilon(t)$ por um quantil empírico dos erros (p.ex. $\widehat{Q}_{1-\alpha}(|\varepsilon_t|)$) calculado diretamente dos dados.

A variância $\sigma_\varepsilon^2(t)$ é estimada a partir de erros históricos de previsão no mesmo horizonte: definindo $\varepsilon_t := (g_s^{\text{real}}(t) + g_r^{\text{real}}(t)) - (g_s^{\text{prev}}(t) + g_r^{\text{prev}}(t))$, estima-se $\sigma_\varepsilon(t)$ por estatísticas condicionais (por hora do dia/mês/estação) ou por uma janela móvel, de modo a capturar heterocedasticidade (maior incerteza em certos horários/estações).

A necessidade de reservas e o impacto da variabilidade de renováveis na operação são temas amplamente discutidos na literatura de integração [6, 9].

8.1 Cenários de incerteza e hierarquia de decisões (operação vs. investimento)

Modelamos a incerteza por um espaço de probabilidade finito (cenários) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, com $\Omega = \{1, \ldots, S\}$ e probabilidades $p_\omega = \mathbb{P}(\omega)$. Cada cenário ω representa uma *realização diária* (ou um dia típico) dentro de um mês/estação, com séries temporais exógenas

$$D_t^\omega, \quad a_r^\omega(t), \quad \xi_s^\omega(t), \quad \mathcal{I}_{\text{POA}}^\omega(t), \quad t = 1, \ldots, T.$$

Para uma capacidade instalada fixa (K_s, K_r, K_n), a decisão de operação é cenário-a-cenário:

$$x^\omega := \{g_s^\omega(t), g_r^\omega(t), g_h^\omega(t), g_n^\omega(t), c_t^\omega, u_t^\omega, R_t^\omega\}_{t=1}^T \in \mathcal{X}^\omega(K),$$

onde $\mathcal{X}^\omega(K)$ codifica balanço, limites físicos e definições tecnológicas.

(i) Problema de operação estocástico. O despacho de curto prazo pode ser formulado como um problema de otimização estocástica:

$$
\begin{aligned}
Q(K) \;:=\; \sum_{\omega=1}^{S} p_\omega \min_{x^\omega \in \mathcal{X}^\omega(K)} \Bigg\{ \sum_{t=1}^{T} \Big(& c_1 g_n^\omega(t) + \tfrac{1}{2} c_2 (g_n^\omega(t))^2 \\
& + \tfrac{\gamma_n}{2} (g_n^\omega(t) - g_n^\omega(t-1))^2 + \pi_u u_t^\omega + \pi_c c_t^\omega + \kappa R_t^\omega \Big) \Bigg\}. \qquad (31)
\end{aligned}
$$

A presença de desigualdades e penalidades torna $Q(K)$ tipicamente convexo em decisões de operação, cenário a cenário (sob hipóteses usuais: $c_2 > 0$, $\gamma_n \geq 0$, conjuntos factíveis convexos).

(ii) Problema de investimento (primeiro estágio) + operação (segundo estágio). Se as capacidades forem endógenas, com custos anualizados $q = (q_s, q_r, q_n)$, obtemos a formulação biestágio:

$$
\min_{K_s, K_r, K_n \geq 0} \; q_s K_s + q_r K_r + q_n K_n \; + \; Q(K), \qquad (32)
$$

com $Q(K)$ definido em (31). Esta separação formaliza o contraste: o *investimento* é uma decisão lenta e comum a todos os cenários; a *operação* é adaptativa e específica a cada cenário.

(iii) Não-antecipatividade e estrutura de "dias". Se cada ω for um dia independente, a operação x^ω não requer restrições de não-antecipatividade (além de parâmetros fixos K), pois cada dia é resolvido separadamente. Se, porém, os cenários representarem *trajetórias multi-dia* (p. ex. $t = 1, \ldots, T_{\text{mês}}$) ou houver estados intertemporais (armazenamento, nível de reservatório hidro, indisponibilidades acumuladas), introduz-se um estado $s^\omega(t)$ e restrições dinâmicas do tipo

$$
s^\omega(t+1) = f\big(s^\omega(t), x^\omega(t), \omega\big),
$$

e, quando apropriado, restrições de não-antecipatividade: decisões no instante t devem coincidir para cenários indistinguíveis até t (mesma informação filtrada), isto é,

$$
x^\omega(t) = x^{\omega'}(t) \quad \text{se } \mathcal{I}_t^\omega = \mathcal{I}_t^{\omega'}.
$$

Essa condição é central em modelos multiestágio e distingue formalmente *adaptação* de *antecipação.*

(iv) Métrica de risco O critério expectativa em (31) pode ser substituído por uma medida convexa de risco $\rho(\cdot)$, por exemplo CVaR_α sobre o custo operacional aleatório C^ω:

$$
\min_{K \geq 0} \; q^\top K \; + \; \rho\big(C^\omega(K)\big), \qquad \rho(C) = \mathrm{CVaR}_\alpha(C) = \min_{\eta \in \mathbb{R}} \left\{ \eta + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{\omega} p_\omega \left(C^\omega - \eta\right)_+ \right\}. \qquad (33)
$$

Isso permite capturar aversão a caudas (eventos raros de déficit) de maneira controlada.

(v) Construção prática dos cenários (amostragem por estação). Formalmente, para um mês/estação $\mathcal{M}$, escolhe-se um conjunto de dias $\{\omega\}$ (históricos ou simulados) e define-se p_ω (uniforme ou ponderado) para aproximar integrais:

$$\mathbb{E}[C] \approx \sum_{\omega=1}^{S} p_\omega C^\omega.$$

A qualidade da aproximação pode ser controlada por aumento de S (amostragem Monte Carlo) ou por seleção de dias típicos com preservação de momentos (p. ex. média, variância e quantis de ξ_s e a_r), dependendo do objetivo do estudo.

9 Mean Field Games e próximos passos

Até aqui o modelo é *centralizado* (planejador social) e gera um preço-sombra λ_t pelo balanço. A conexão com *Mean Field Games* (MFG) consiste em substituir o planejador por uma população grande de agentes que tomam decisões *descentralizadas* respondendo a um preço endógeno, e fechar o modelo por uma condição de consistência agregada (mercado/balanço).

9.1 Agentes, estado e dinâmica (heterogeneidade)

Considere uma população continuum de agentes com tecnologia $\tau \in \{s, r, h, n\}$ e estado individual $x_t \in \mathcal{X}_\tau$ (ex.: disponibilidade renovável, rampa/nível operacional, estoque/energia, parâmetros de custo). O estado evolui (tempo discreto) por

$$x_{t+1} = f_\tau(x_t, a_t, \varepsilon_{t+1}), \tag{34}$$

onde a_t é a ação (decisão) e ε_{t+1} é choque idiossincrático. A distribuição populacional (lei) dos estados é $m_t \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$, atualizada pelo operador *forward*

$$m_{t+1} = \Phi_\tau(m_t, \pi_t), \tag{35}$$

onde π_t é a política (feedback) ótima.

9.2 Problema individual (controle ótimo dado λ_t)

Dada uma trajetória de preços $(\lambda_t)_{t=1}^T$, cada agente resolve um problema de programação dinâmica:

$$V_t^\tau(x) = \min_{a \in \mathcal{A}_\tau(x)} \Big\{ \ell_\tau(t, x, a; \lambda_t) + \mathbb{E}\big[V_{t+1}^\tau(x_{t+1}) \mid x_t = x, a_t = a\big] \Big\}, \tag{36}$$

com $V_{T+1}^\tau(\cdot) = 0$. Um custo instantâneo canônico é

$$\ell_\tau(t, x, a; \lambda_t) = c_\tau(t, x, a) \; - \; \lambda_t \, g_\tau(t, x, a) \; + \; \text{(penalidades: rampa, limites, etc.)}, \tag{37}$$

onde $g_\tau(t, x, a)$ é a injeção/geração do agente. A política ótima é $\pi_t^\tau(x) \in \arg\min(\cdot)$.

9.3 Fechamento do mercado: consistência agregada e limites de preço

A oferta agregada é

$$G_t = \int g_\tau(t, x, \pi_t^\tau(x))\, m_t(dx),$$

e deve satisfazer o balanço (com variáveis agregadas de ajuste c_t, u_t):

$$G_t = D_t + c_t - u_t, \qquad c_t \geq 0, \;\; u_t \geq 0. \tag{38}$$

Mantendo o mesmo mecanismo de penalidades do modelo centralizado, o preço de equilíbrio fica naturalmente limitado por

$$-\pi_c \leq \lambda_t \leq \pi_u, \tag{39}$$

com $\lambda_t = -\pi_c$ quando há excedente/curtailment (sinal de preço negativo) e $\lambda_t = \pi_u$ quando há déficit.

9.4 Definição de equilíbrio MFG

Um equilíbrio MFG é um trio $(\{\pi_t^\tau\}, \{m_t\}, \{\lambda_t\})$ tal que:

1. (**Ótimo individual**) π_t^τ resolve (36) dado (λ_t);
2. (**Forward**) $m_{t+1} = \Phi_\tau(m_t, \pi_t)$ em (35);
3. (**Consistência**) λ_t (e c_t, u_t) fecha (38) respeitando (39).

9.5 Próximos passos a partir do modelo atual

- **Baseline**: usar λ_t do despacho centralizado como *preço exógeno* e resolver (36) para classes de agentes (τ), introduzindo heterogeneidade via x_t.
- **Ponto fixo**: iterar $\lambda \to \pi \to m \to G \to \lambda$ (ajuste de mercado/balanço) até convergência.
- **Possíveis extensões de complexidade**: incluir risco (p.ex. CVaR) no custo individual, estados intertemporais (reservatório/armazenamento) e choques comuns (clima) para capturar correlações entre agentes.

10 Referências

Referências

[1] S. Borenstein, J. Bushnell, F. Wolak, *Measuring Market Inefficiencies in California's Restructured Wholesale Electricity Market*, American Economic Review, 92(5), 2002.

[2] D. Kirschen, G. Strbac, *Fundamentals of Power System Economics*, John Wiley & Sons, 2ª edição, 2018.

[3] A. J. Wood, B. F. Wollenberg, G. B. Sheblé, *Power Generation, Operation, and Control*, John Wiley & Sons, 3ª edição, 2013.

[4] S. Stoft, *Power System Economics: Designing Markets for Electricity*, IEEE Press / Wiley-Interscience, 2002.

[5] A. J. Conejo, M. Carrión, J. M. Morales, *Decision Making Under Uncertainty in Electricity Markets*, Springer, 2010.

[6] J. M. Morales, A. J. Conejo, H. Madsen, P. Pinson, M. Zugno, *Integrating Renewables in Electricity Markets*, Springer, 2014.

[7] R. Baldick, *Applied Optimization: Formulation and Algorithms for Engineering Systems*, Cambridge University Press, 2006.

[8] D. P. Bertsekas, *Nonlinear Programming*, Athena Scientific, 2ª edição, 1999.

[9] International Energy Agency, *Renewables Integration in Power Systems*, IEA Report, 2018.

[10] A. P. Dobos, *PVWatts Version 5 Manual*, NREL/TP-6A20-62641, 2014.

[11] J. A. Duffie, W. A. Beckman, *Solar Engineering of Thermal Processes*, 4th ed., Wiley, 2013.