Старыгина С.Д., Нуриев Н.К.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Краткий курс для подготовки
IT инженеров

Казань 2020

УДК 519.6
ББК

Рецензенты
к.физ.-мат.н., доцент Галимянов А.Ф.
к.п.н., доцент Сафина В.К.

Старыгина, С.Д.
Вычислительная математика: учебное пособие / С.Д. Старыгина, Н.К. Нуриев. – Казань: Редакционно-издательский центр «Школа», 2020. – 142 с.

Будущим инженерам по IT направлениям подготовки необходимо не только понимать суть численных математических методов, но и использовать их в профессиональной деятельности при решнении проблем разной сложности.

Это учебное пособие в элементарном изложении предназначено для самостоятельного освоения основ вычислительной математики. Поэтому может быть успешно использовано как опорный контент при проектировании on-line курсов по этой дисциплине.

Оглавление

Раздел 1. Элементы теории погрешностей

Решение любой задачи численными методами начинается с построения математической модели изучаемого объекта или явления. Ни одна модель не может учесть всего многообразия свойств объекта или явления, то есть она является продуктом некоторых допущений и упрощений. Для реализации выбранной модели строится алгоритм. Получение точного решения построенным алгоритмом часто требует выполнения бесконечной последовательности некоторых операций, которую приходится прерывать на некотором конечном шаге. Для реализации алгоритма нужны начальные данные, которые обычно являются результатом некоторых измерений. Но ни один измерительный прибор не дает возможности провести точные измерения. В процессе вычислений данные, промежуточные и окончательные результаты заменяются в компьютере представимыми в нем числами и часто в процессе вычислений округляются до необходимого числа десятичных знаков. Мы описали ряд причин, по которым приходится точные величины заменять их приближенными значениями.

1. Приближенные значения и погрешности

Пусть a – точное значение некоторой величины, x – ее приближенное значение.

Абсолютной погрешностью δx называют модуль разности точного и приближенного значений

$$\delta x = |a - x| \tag{1.1}$$

П р и м е р 1.1. Размер файла в компьютере равен 93 696 байт. В окне папки, содержащей этот файл, выведена информация об его размере 92 КБ. Какова абсолютная погрешность информации о размере файла?

Р е ш е н и е. В данном примере точное значение размера файла a = 93696, приближенное значение x = 92·1024 = 94208 байт. Поэтому абсолютная погрешность $\delta x = |a - x| = |93696 - 94208| = 512$ байт.

П р и м е р 1.2. Измерение длины стола дало результат 120 см. Какова абсолютная погрешность измерения?

Р е ш е н и е. В задаче приближенное значение x = 120 см, а точное значение длины a неизвестно. Поэтому абсолютную погрешность найти нельзя. Но если известно, что измерение проводилось с помощью портновского метра, имеющего сантиметровые деления, то абсолютная погрешность не превосходит 1 см. Таким образом, $\delta x \le 1$ см.

Как показано в примере 1.2, часто точное значение величины неизвестно, что не дает возможность определить абсолютную погрешность. Поэтому вводят понятие ***границы абсолютной погрешности.***

Границей абсолютной погрешности называют число Δx***, больше которого абсолютная погрешность быть не может***

$$\delta x \le \Delta x \quad \text{или}$$

$$\left| a - x \right| \le \Delta x \tag{1.2}$$

Границу абсолютной погрешности обычно всегда можно определить из практических соображений, как это сделано в примере 1.2.

Заменим неравенство (1.4) со знаком модуля двойным неравенством

$$-\Delta x \le a - x \le \Delta x\,.$$

Ко всем трем частям полученного двойного неравенства добавим приближенное значение x

$$x - \Delta x \le a \le x + \Delta x\,. \tag{1.3}$$

В средней части неравенства (1.5) записано неизвестное точное значение величины. Левая и правая части сдержат известные приближенное значение и границу абсолютной погрешности. Числа $x - \Delta x$ и $x + \Delta x$ называют соответственно ***нижней*** и ***верхней границами*** приближения.

Вместо неравенства (1.5) часто используют условную запись

$$a = x \pm \Delta x\,. \tag{1.4}$$

П р и м е р 1.3. Проведены два измерения длины $a = 100 \pm 1\,\text{см}$ и $b = 800 \pm 1\,\text{км}$. Какое из измерений точнее?

Р е ш е н и е. Абсолютная погрешность первого измерения значительно меньше, чем во втором измерении. Но она получена на меньшей длине. Вычислим абсолютную погрешность обоих измерений, приходящуюся на единицу длины. В первом случае она равна $\dfrac{1\,\text{см}}{100\,\text{см}} = 0{,}01 = 1\%$, а во втором – $\dfrac{1\,\text{км}}{800\,\text{км}} = 0{,}00125 = 0{,}125\%$. То есть, второе измерение точнее.

Как видно из примера 1.3, абсолютная погрешность не позволяет судить о точности приближения. Введем понятие ***относительной погрешности***.

Относительной погрешностью εx ***приближения называют отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения***

$$\varepsilon x = \frac{\delta x}{|x|}.$$

Как уже говорилось выше, абсолютная погрешность часто неизвестна, что не позволяет определить и относительную погрешность. Поэтому определим границу относительной погрешности $\mathrm{E}x$ как отношение границы абсолютной погрешности к модулю приближенного значения

$$\mathrm{E}x = \frac{\Delta x}{|x|}. \tag{1.5}$$

Обычно относительную погрешность вычисляют в процентах. Тогда

$$\mathrm{E}x = \frac{\Delta x}{|x|} \cdot 100\%. \tag{1.6}$$

2. Запись приближенных чисел

Значащими цифрами числа называют все его цифры, начиная с первой слева ненулевой цифры.

Например, в числе 0,04021 четыре значащих цифры, а в числе 4,02100 – шесть значащих цифр.

Цифра в записи приближенного числа называется ***верной в широком смысле***, если абсолютная погрешность не превосходит единицы разряда, в котором расположена эта цифра. Остальные цифры называют ***сомнительными***.

Пример 2.1. Определите верные и сомнительные цифры в записи приближенного значения $47{,}3825 \pm 0{,}003$.

Решение. Оформим решение в виде таблицы 2.1:

Таблица 2.1

Цифра	Единица разряда α	$0{,}003 \le \alpha$	Вывод
4	10	Да	Верная
7	1	Да	Верная
3	0,1	Да	Верная
8	0,01	Да	Верная
2	0,001	Нет	Сомнительная
5	0,0001	Нет	Сомнительная

Таким образом, в данном приближении первые 4 цифры верны в широком смысле, а последние две – сомнительные.

Очевидно, что нет необходимости выполнять проверку верности каждой цифры. Достаточно найти последнюю верную цифру. Все цифры влево от нее верные, а вправо – сомнительные. Такую возможность дает следующее

Правило. Если абсолютная погрешность записана одной единицей с предшествующими или последующими нулями, то эта единственная единица расположена в разряде последней верной цифры. В противном случае необходимо найти ближайшее к абсолютной погрешности большее число, записанное одной единицей и остальными нулями. Вновь положение единицы определяет разряд последней верной цифры.

В примере 2.1 абсолютная погрешность равна 0,003. Ближайшее большее число с одной единицей и остальными нулями – 0,01. Значит, последняя верная цифра находится в разряде сотых долей, что и было получено.

Цифра в записи приближенного числа называется ***верной в строгом смысле***, если абсолютная погрешность не превосходит половины единицы разряда, в котором расположена эта цифра. Остальные цифры называют ***сомнительными***.

В числе из примера 2.1 последняя верная в широком смысле цифра расположена в разряде сотых долей. Половина единицы этого разряда равна 0,005. Абсолютная погрешность $0{,}003 \le 0{,}005$. То есть эта цифра верна также и в строгом смысле. Если изменить условие задачи и рассмотреть приближенное значение $47{,}3825 \pm 0{,}007$, то в разряде сотых цифра верна в широком смысле, но она неверна в строгом смысле, так как абсолютная погрешность $0{,}007 > 0{,}005$.

Таким образом, количество верных в строгом смысле цифр в записи приближенного числа совпадает или на 1 меньше числа цифр, верных в широком смысле.

Приближенные числа записывают либо с указанием границы абсолютной погрешности, либо только верными цифрами. В последнем случае должно быть указано, верны ли цифры в строгом или широком смысле.

Например, приближение с указанием погрешности $47{,}3825 \pm 0{,}007$ может быть записано как 47,38 со всеми верными в широком смысле цифрами или 47,4 с верными цифрами в строгом смысле.

Естественно, что, отбрасывая в записи приближенного числа сомнительные цифры, необходимо соблюдать правила округления:

- если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то последняя остающаяся цифра сохраняется;
- если первая из отбрасываемых цифр больше 5 или равна 5 и за ней следуют еще цифры, последняя остающаяся цифра увеличивается на 1;

– если отбрасывается только одна цифра 5, то последняя остающаяся четная цифра сохраняется, а нечетная увеличивается на 1.

В качестве примера приведем таблицу 2.2, в первом столбце которой заданы приближенные значения с указанием границы абсолютной погрешности, а во втором и третьем столбцах эти числа записаны верными цифрами соответственно в широком и строгом смысле.

Таблица 2.2

С указанием погрешности	Запись верными цифрами	
	в широком смысле	в строгом смысле
5,43281±0,001	5,433	5,43
5,43281±0,002	5,43	5,43
16,2±0,001	16,200	16,20
16,2±0,004	16,20	16,20
52843±4000	$5\cdot10^4$	$5\cdot10^4$
52843±1000	$5{,}3\cdot10^4$	$5\cdot10^4$

При выполнении действий с приближенными числами результат также будет приближенным. Очевидно, что погрешность результата зависит от погрешностей исходных данных. Если приближенные значение заданы без указания погрешности, то есть, записаны всеми верными цифрами, то абсолютную погрешность считают равной единице разряда последней цифры для широкого смысла и половине этого разряда для строгого смысла.

3. Выполнение приближенных вычислений

Наиболее часто используются вычисления по готовой формуле. Проведем такие вычисления с учетом абсолютной погрешности каждой выполненной операции.

Абсолютная погрешность используется для определения верных цифр результата выполненного действия. Для этого она сравнивается с единицей или половиной единицы разряда, в котором расположена цифра. Поэтому не имеет смысла сохранять большое количество значащих цифр в записи абсолютной погрешности. Будем записывать ее не более чем с двумя значащими цифрами. При этом во избежание завышения точности результата будем округлять абсолютную погрешность с избытком, то есть при отбрасывании любых цифр последнюю оставшуюся цифру увеличим на 1.

Определив верные цифры полученного результата операции, будем округлять его, оставляя в нем про запас на одну цифру больше. При округлении в результат операции вносится погрешность округления, которую нужно прибавлять к погрешности выполненного действия.

П р и м е р 3.1. Вычислите значение выражения

$$A = \frac{a^2 + \sqrt{b}}{e^b \cdot \ln(1+b^2)},$$

где исходные данные $a = 0{,}963$, $b = 2{,}436$ записаны всеми верными в строгом смысле цифрами.

Р е ш е н и е . По условию задачи абсолютные погрешности исходных данных $\Delta a = \Delta b = 0{,}0005$. Вычислим на калькуляторе $a^2 = 0{,}963^2 = 0{,}927369$. Абсолютная погрешность возведения в квадрат $\Delta(a^2) = 2a \cdot \Delta a = 2 \cdot 0{,}963 \cdot 0{,}0005 =$ = 0,000963 = 0,00097. Эта погрешность говорит о том, что результат возведения в квадрат содержит два верных в строгом смысле десятичных знака. Поэтому, округляя с одним запасным знаком, получим $a^2 = 0{,}92$7 (запасной знак выделен уменьшением его размера). При этом в результат внесена погрешность округления 0,00037. Поэтому полная погрешность выполненной операции 0,00097+0,00037 = 0,00134 = 0,0014.

Вычислим на калькуляторе $\sqrt{b} = \sqrt{2{,}436} = 1{,}5607690$. Абсолютная погрешность извлечения квадратного корня $\Delta(\sqrt{b}) = \dfrac{\Delta b}{2\sqrt{b}} = 0{,}00017$. Значит, в результате три верных десятичных знака, то есть $\sqrt{b} = 1{,}560$8 с одной запасной цифрой. Погрешность округления равна 0,000031. Поэтому полная погрешность равна 0,00017 + 0,000031 = 0,00021.

Удобно результаты выполненных действий оформить в виде таблицы 3.1. В ней первая строка содержит обозначение действия. Во вторую строку записывается результат выполненного действия. Третья и четвертая строки предназначены для обозначения абсолютной погрешности и ее значения.

Все последующие вычисления выполните с помощью калькулятора самостоятельно, сравнивая свои результаты с результатами из таблицы 3.1.

Таблица 3.1

a	b	a^2	$\sqrt{b}$	$a^2 + \sqrt{b}$
0,963	2,436	0,927	1,5608	2,488

Δa	Δb	$\Delta(a^2)$	$\Delta(\sqrt{b})$	$\Delta(a^2+\sqrt{b})$
0,0005	0,0005	0,0014	0,00021	0,0019

e^b	$1+b^2$	$\ln(1+b^2)$	$e^b\cdot\ln(1+b^2)$	A
11,43	6,934	1,9364	22,13	0,1124
$\Delta(e^b)$	$\Delta(1+b^2)$	$\Delta(\ln(1+b^2))$	$\Delta(e^b\cdot\ln(1+b^2))$	$\Delta(A)$
0,0085	0,0025	0,00040	0,025	0,00025

Округляя результат до последней верной в строгом смысле цифры, и также округляя погрешность до соответствующего разряда результата, окончательно получим $A = 0{,}112 \pm 0{,}0003$ или с записью только верными в строгом смысле цифрами $A = 0{,}112$.

Довольно часто приближенные вычисления выполняют для получения приближенной оценки результата, когда не требуется заботиться о его высокой достоверности. В этом случае не проводят подсчета абсолютной погрешности каждой операции, а пользуются правилами подсчета верных цифр, основанными на формулах оценки погрешностей арифметических операций и вычисления функций:

1. При сложении и вычитании приближенных чисел достаточно определить разряды последних верных цифр в записи всех исходных данных. Старший из этих разрядов указывает разряд последней верной цифры результата.

Следует избегать вычитания близких по величине чисел. При сложении и вычитании нескольких чисел желательно выполнять действия в порядке возрастания абсолютных величин слагаемых.

2. При умножении и делении приближенных чисел нужно выбрать в исходных данных число с наименьшим количеством значащих цифр. Остальные числа округляют так, чтобы в них было только на одну значащую цифру больше. В результате следует считать верными столько значащих цифр, сколько их в числе с наименьшим количеством значащих цифр. Желательно избегать деления на малые числа.

3. При определении количества верных цифр в значениях элементарных функций нужно оценить значение модуля производной этой функции. Если он не превосходит 1 или близок к ней, то значение функции имеет столько же верных десятичных знаков, сколько их в ее аргументе. Если же модуль производной превосходит 1, нужно найти такое наименьшее число k, чтобы $|f'(x)| \le 10^k$.

Количество верных десятичных цифр в значении функции на k меньше, чем в аргументе.

4. В записи результатов вычислений нужно оставлять на одну цифру больше, чем указано в правилах 1 – 3. В окончательном результате запасная цифра округляется.

Пример 3.2. Выполните вычисление выражения из примера 3.1 методом подсчета числа верных цифр.

Решение. Оформим решение в виде таблицы 3.2 из двух строк. В первой строке указываем действие, во второй – его результат. Запасную цифру выделяем уменьшением ее размера.

Вычислим на калькуляторе $a^2 = 0{,}927369$. Модуль производной этой функции равен $2a = 1{,}926 < 10^1$, поэтому в результате верных цифр на одну меньше, чем в исходном числе. Округляя до одной запасной цифры, внесем в таблицу результат 0,927.

Таблица 3.2

a	b	a^2	$\sqrt{b}$	$a^2 + \sqrt{b}$
0,963	2,436	0,927	1,5608	2,488

e^b	$1+b^2$	$\ln(1+b^2)$	$e^b \cdot \ln(1+b^2)$	A
11,43	6,934	1,936	22,13	0,1124

Вычислим на калькуляторе $\sqrt{b} = 1{,}5607690$. Модуль производной этой функции $\frac{1}{2\sqrt{b}} = 0{,}3203548 < 1$. Значит, результат содержит столько же верных десятичных знаков, как и исходное число. Заносим в таблицу результат с одной запасной цифрой 1,5608.

Вычисляем сумму двух полученных ранее результатов, предварительно округлив второе более точное слагаемое до числа десятичных знаков в первом менее точном слагаемом 0,927 + 1,561 = 2,488. Последняя цифра результата сомнительна и сохраняется как запасная.

Вычислим на калькуляторе $e^b = 11{,}427240$. Модуль производной этой функции совпадает с ней самой, он меньше 10^2, то есть значение функции содержит на два верных десятичных знака меньше, чем в ее аргументе. В таблицу вносим с одним запасным знаком 11,43.

Вычислим на калькуляторе $1+b^2=6{,}934096$. 1 – точное число, поэтому результат имеет ту же точность, что и b^2. А она, по величине модуля производной, на один разряд меньше, чем у числа b. То есть результат равен 6,934.

Вычислим $\ln(1+b^2)=1{,}9364368$. Несложно убедиться, что модуль производной этой функции меньше 1, поэтому ее значение имеет столько же верных десятичных знаков, как и аргумент. Вписываем в таблицу значение 1,936.

Перемножаем два множителя e^b и $\ln(1+b^2)$. Они оба имеют по три верных значащих цифры. Поэтому и произведение содержит три верных значащих цифры $e^b\cdot\ln(1+b^2)=22{,}12848=22{,}13$.

И, наконец, вычисляем значение искомого выражения, разделив $a^2+\sqrt{b}$ на $e^b\cdot\ln(1+b^2)$. Делимое и делитель имеют по три верных значащих цифры. Столько же их содержит и результат $A=0{,}1124265=0{,}1124$.

Округляя до верных цифр, получаем $A=0{,}112$.

Сравнивая процесс вычисления рассмотренного выражения с учетом погрешности и методом подсчета верных цифр, можно увидеть хорошее их согласование. Только в одном месте расчетов (при вычислении $\ln(1+b^2)$) результаты незначительно разошлись, что не повлияло на окончательный результат.

Лабораторные работы к разделу 1

С использованием вычислительных средств, решить следующие задачи.

Задача 1.1. Размер файла в компьютере равен 87 696 байт. В окне папки, содержащей этот файл, выведена информация об его размере 86 КБ. Какова абсолютная погрешность информации о размере файла?

Задача 1.2. Проведены два измерения длины $a=200\pm1\text{см}$ и $b=900\pm1\text{км}$. Какое из измерений точнее?

Задача 1.3. Определите верные и сомнительные цифры в записи приближенных значений 76,5583 ± 0,002; 33,68735± 0,0001.

Задача 1.4. Вычислите значение выражения

$$A=\frac{a^2+\sqrt{b}+ab}{e^b\cdot\ln(1+b^2)},$$

где исходные данные a=0,583, b=1,768 записаны всеми верными в строгом смысле цифрами.

З а д а ч а 1.5. Вычислите значение выражения

$$X = \frac{a^2 b}{c},$$

где $a = 3{,}456 \pm 0{,}002$; $b = 0{,}642 \pm 0{,}0005$; $c = 7{,}12 \pm 0{,}004$.

Раздел 2. Численные методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений

Решение уравнений – одна из древнейших математических проблем. Очень многие задачи моделирования приводят к необходимости решения уравнения. Для ограниченного круга уравнений разработаны аналитические методы решения. Из алгебраических уравнений – это линейные и квадратные уравнения. Существует аналитический метод решения кубических уравнений, который выходит за рамки школьной программы. Доказано, что алгебраические уравнения общего вида четвертой степени и выше не могут быть решены аналитическими методами.

Для некоторых трансцендентных уравнений также существуют аналитические методы решения. К ним относятся тригонометрические, показательные, логарифмические и некоторые другие уравнения специального вида.

Все остальные уравнения решаются численными методами, то есть их корни ищут приближенно с необходимой точностью. Следует отметить, что и аналитические методы часто не дают точного решения. Это связано с тем, что аналитическое решение обычно записывается выражением, содержащим иррациональные числа.

Любой численный метод решения уравнений позволяет найти корень с заданной точностью, если известен промежуток, на котором он находится, и других корней в этом промежутке нет. Поэтому и следует приступать к решению уравнений с поиска таких промежутков.

1. Отделение корней уравнения графическим методом

Пусть дано уравнение

$$F(x) = 0 \qquad (1.1)$$

Требуется найти его корни на промежутке $(a;b)$.

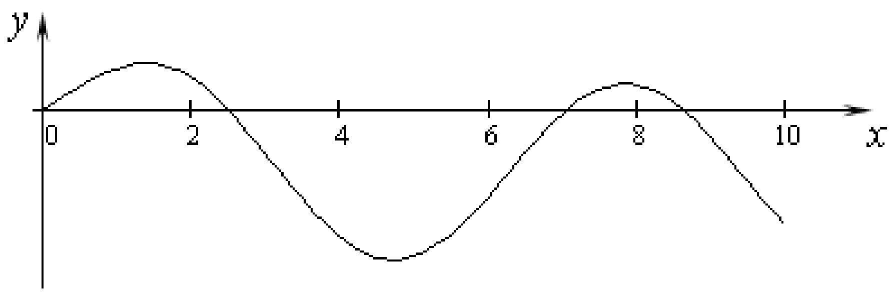
Как было сказано выше, сначала нужно найти промежутки внутри отрезка $(a;b)$, каждый из которых содержит ровно один корень уравнения (1.1). Это можно сделать, например, построив график функции $y = F(x)$ на промежутке $(a;b)$. Абсциссы точек пересечения графика с осью Ox являются корнями уравнения. Правда, построение графика функции обычно начинается с определения ее нулей, то есть с решения уравнения (1.1). Получился замкнутый круг, разорвать который могут помочь прикладные математические программы Microsoft Excel, MATHCAD, MATLAB и другие.

П р и м е р 1.1. Отделить корни уравнения

$$2\sin x - arctgx = 0 \qquad (1.2)$$

на промежутке (0; 10).

Р е ш е н и е . График функции $y = 2\sin x - arctgx$ на промежутке (0; 10), построенный в среде MATHCAD, показан на рис. 1.1. На графике видно, что в заданном промежутке уравнение (1.2) имеет три корня, расположенные на отрезках (2; 3), (6,5; 7,5) и (8; 9).



1.1. Иллюстрация отделения корней уравнения

При отделении корней уравнения полезно иметь в виду следующие очевидные положения:

1. Если непрерывная функция $y = F(x)$ принимает на концах промежутка $(a;b)$ разные знаки, то на этом промежутке уравнение $F(x) = 0$ имеет, по меньшей мере, один корень.

2. Если непрерывная функция $y = F(x)$ принимает на концах промежутка $(a;b)$ разные знаки и она на этом промежутке монотонна, то на этом промежутке уравнение $F(x) = 0$ имеет ровно один корень.

Задача графического отделения корней уравнения может быть облегчена, если уравнение (1.1) преобразовать к виду

$$f(x) = g(x).$$

В этом случае корнями уравнения служат абсциссы точек пересечения графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$.

П р и м е р 1.2. Отделить корни уравнения (1.2), преобразованного к виду :

$$2\sin x = arctgx$$

на том же промежутке (0; 10).

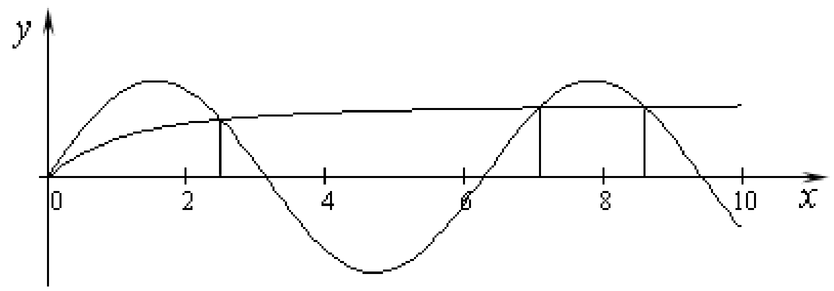


Рис. 1.2. Иллюстрация отделения корней уравнения

Р е ш е н и е . Графики функций $y = 2\sin x$ и $y = arctgx$ хорошо известны, их легко построить вручную. Эти графики показаны на рис. 1.2.

Естественно, что на графике вновь получены три корня из тех же самых промежутков, что и в примере 1.1.

Легко видеть, что рассмотренное в примерах уравнение имеет корень x=0. Так как областью значений функции $y = arctgx$ служит промежуток $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, а область значений функции $y = 2\sin x$ равна [–2; 2] и она периодична, то это уравнение имеет бесконечное множество корней. В силу нечетности обеих функций корни уравнения симметричны относительно начала координат, то есть для любого положительного значения корня существует равный ему по величине отрицательный корень.

Полученные в примерах промежутки можно сократить, вычислив значения функции $y = 2\sin x - arctgx$ во внутренних точках этих промежутков. Так, вычислив $y(2{,}5) = 0{,}006654339$ и $y(2{,}6) = -\ 0{,}172619749$, получим, что первый из полученных на графиках корней находится в промежутке (2,5; 2,6). Аналогично можно убедиться, что два других корня расположены в промежутках (7; 7,1) и (8,6; 8,7).

Отделить корни уравнения $F(x)=0$ на промежутке $(a;b)$ можно и без построения графика. Для этого можно вычислять значения функции $F(x)$ для значений аргумента от $x=a$ до $x=b$ с достаточно малым шагом h. Как только будут найдены два соседних значения x_1 и x_2, в которых значения функции $F(x_1)$ и $F(x_2)$ имеют разные знаки, то можно считать, что единственный корень уравнения находится в промежутке $(x_1;x_2)$. Естественно, шаг h изменения аргумента должен быть выбран достаточно малым, чтобы можно было считать, что на промежутке $(x_1;x_2)$ длиной h функция монотонна (рис. 1.3).

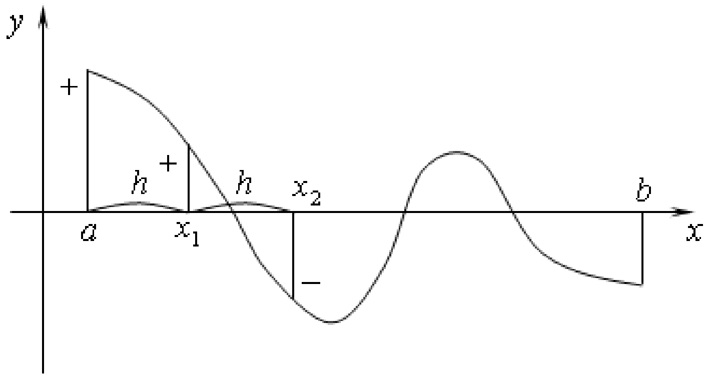


Рис. 1.3. Иллюстрация отделения корней уравнения

Блок-схема алгоритма такого отделения корней изображена на рис. 1.4. Исполнение на компьютере программы, составленной по этой блок-схеме, для уравнения и промежутка из примера 2.1.1 с шагом $h = 0{,}1$, естественно, дает те же самые отрезки (2,5; 2,6), (7; 7,1) и (8,6; 8,7), каждый из которых содержит ровно один корень уравнения.

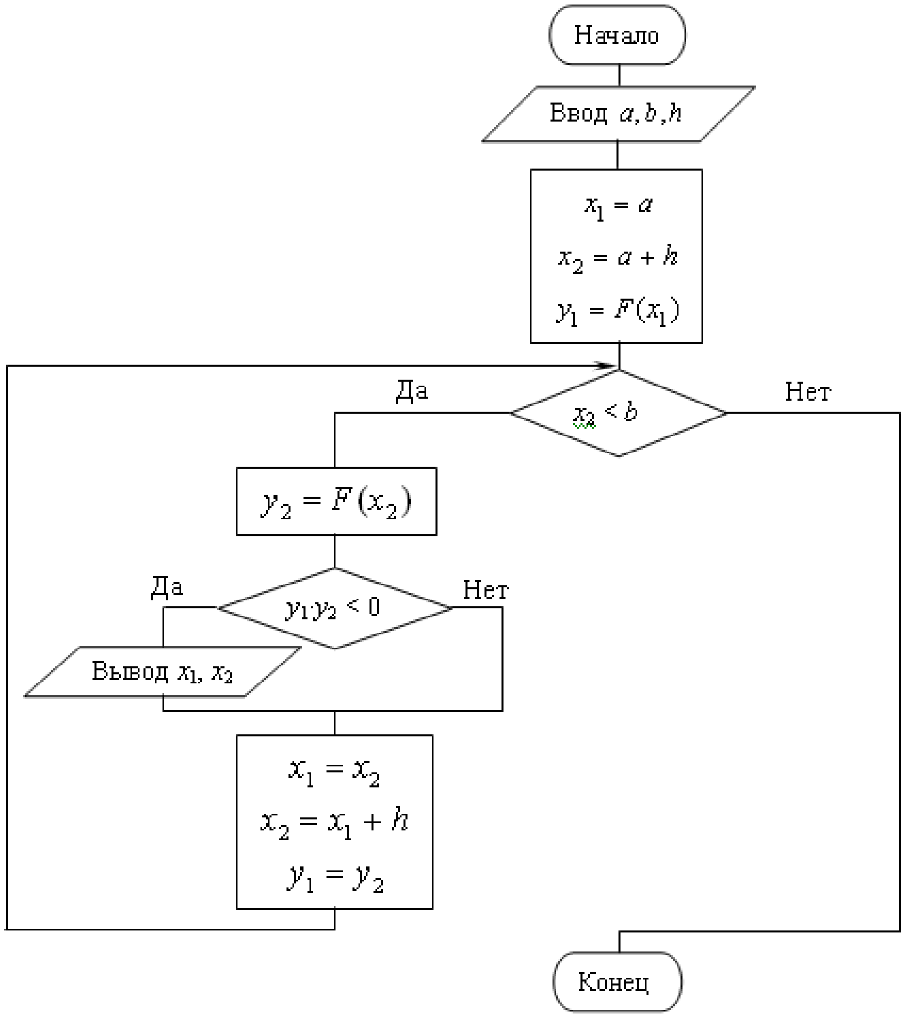


Рис. 1.4. Блок-схема алгоритма отделения корней уравнения

2. Уточнение корня методом половинного деления

Пусть уравнение

$$F(x) = 0$$

имеет единственный корень на промежутке $(a;b)$ и на концах этого промежутка функция $y = F(x)$ имеет разные знаки (рис. 2.1.). Требуется уточнить значение неизвестного корня x с точностью ε. То есть требуется найти такое значение, которое отличалось бы от действительного значения корня x не более чем на ε.

Разделим промежуток $(a;b)$ пополам точкой $c = \dfrac{a+b}{2}$. Сравним знаки функции $y = F(x)$ в точках a и c. На рисунке эти знаки различны, значит, неизвестный корень x расположен в левой половине отрезка $(a;b)$, то есть на промежутке $(a;c)$.

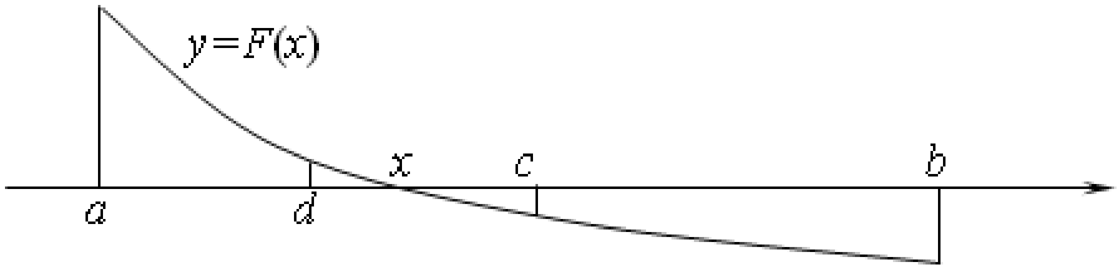


Рис. 2.1. Уточнение корня уравнения методом половинного деления

С полученной половиной промежутка поступим аналогично. Разделим его пополам точкой $d=\frac{a+c}{2}$. Сравним знаки функции $y=F(x)$ в точках a и d. Теперь на рисунке эти знаки совпадают. Значит, неизвестный корень x расположен в правой половине отрезка $(a;c)$, то есть на промежутке $(d;c)$.

Так будем продолжать до тех пор, пока длина полученного промежутка не станет меньше или равна удвоенной точности 2ε. За приближенное значение искомого корня примем середину последнего промежутка. Так как неизвестный корень лежит внутри этого промежутка, то он удален от середины промежутка не более чем на ε, то есть требуемая точность достигнута.

П р и м е р 2.1. Найдите корень уравнения

$$2\sin x - arctgx = 0$$

из промежутка (2,5; 2,6) с точностью ε = 0,001.

Р е ш е н и е . Реализацию метода половинного деления удобно оформить в виде таблицы 2.1 (ее форма может быть и иной). Первые два столбца таблицы содержат концы текущего промежутка, содержащего корень. В третьем столбце проверяется, достигнута ли заданная точность (условие перестало выполняться). В четвертом столбце определяется середина текущего промежутка. В пятом и шестом столбцах записываются значения функции $F(x)=2\sin x - arctgx$ в начале и середине промежутка. Седьмой столбец определяет половину промежутка, в которой находится корень: условие выполняется – корень в левой половине промежутка, иначе – в правой половине.

Поскольку корень ищется с точностью до трех десятичных знаков, вычисления ведем с четырьмя знаками после запятой.

Таблица 2.1

a	b	$b-a>2\varepsilon$	$c=\dfrac{a+b}{2}$	$F(a)$	$F(c)$	$F(a)\cdot F(c)<0$
2,5	2,6	Да	2,55	0,0067	– 0,0817	Да
2,5	2,55	Да	2,525	0,0067	– 0,0372	Да
2,5	2,525	Да	2,5125	0,0067	– 0,0152	Да
2,5	2,5125	Да	2,5062	0,0067	– 0,0042	Да
2,5	2,5062	Да	2,5031	0,0067	0,0013	Нет
2,5031	2,5062	Да	2,5046	0,0013	– 0,0014	Да
2,5031	2,5046	Да	2,5038	0,0013	0,00003	Нет
2,5038	2,5046	Нет	2,5042			

Середина последнего промежутка и есть искомый корень с точностью до третьего знака после запятой: x = 2,504.

Блок-схема алгоритма метода половинного деления показана на рис. 2.2.

Реализация этого алгоритма на компьютере для уравнения (2.1) с корнями, изображенными на рис. 1.2, с точностью до трех десятичных знаков дает результаты 2,504, 7,080 и 8,610.

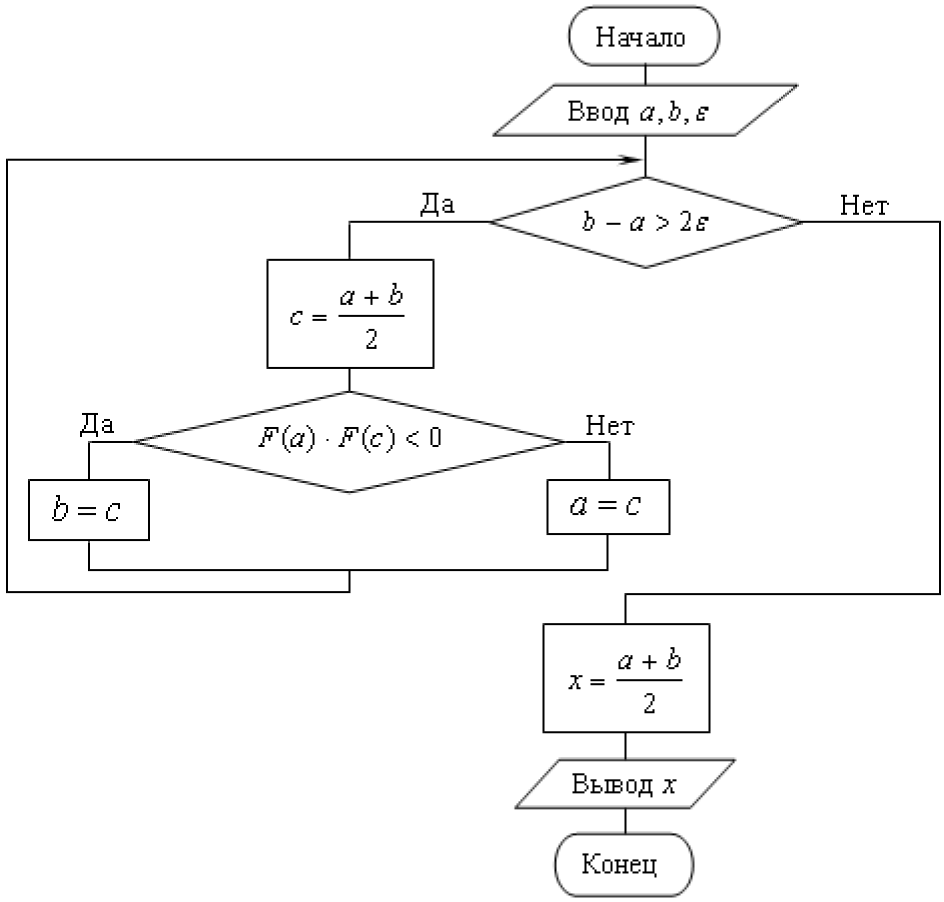


Рис. 2.2. Блок-схема алгоритма уточнения корня уравнения методом половиного деления

3. Уточнение корня методом простой итерации

Пусть уравнение (1.1)

$$F(x)=0$$

имеет единственный корень на промежутке $(a;b)$. Требуется уточнить значение неизвестного корня x с точностью ε.

Выразим каким-либо способом из этого уравнения неизвестную x, то есть, преобразуем его к виду

$$x=f(x). \tag{3.1}$$

Выберем в качестве начального приближенного значения корня произвольное число x_0 из промежутка $(a;b)$. Подставив это значение в правую часть выражения (3.1), получим новое приближенное значение неизвестной

$$x_1=f(x_0).$$

Теперь подставим полученное первое приближение в правую часть равенства (3.1) и получим второе приближение

$$x_2=f(x_1).$$

Продолжая аналогично, будем получать приближения с произвольным номером i

$$x_i=f(x_{i-1}),\qquad i=1,2,3,... \tag{3.2}$$

Таким образом, получим последовательность приближенных значений неизвестной

$$x_0,x_1,x_2,...,x_i,... \tag{3.3}$$

Предположим, что последовательность (3.3) имеет предел

$$\lim_{i\to\infty} x_i = x.$$

Перейдем к пределу при $i\to\infty$ в равенстве (3.2)

$$\lim_{i\to\infty} x_i=\lim_{i\to\infty} f(x_{i-1}),$$

или

$$\lim_{i\to\infty} x_i= f(\lim_{i\to\infty} x_{i-1}),$$

то есть

$$x=f(x).$$

Таким образом, искомый корень уравнения – это предел последовательности (3.3), если этот предел существует.

Не вдаваясь в строгую теорию пределов, можно видеть, что последовательность (3.3) имеет предел, если каждая пара последующих значений в ней отличается меньше, чем предыдущая пара. То есть, для любых трех соседних членов последовательности x_{i-1}, x_i, x_{i+1} выполняется неравенство

$$|x_{i+1}-x_i|<|x_i-x_{i-1}|.$$

Разделим обе части записанного неравенства на его правую часть

$$\left|\frac{x_{i+1}-x_i}{x_i-x_{i-1}}\right|<1.$$

Заменим переменные в числителе в соответствии с (3.2)

$$\left|\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\right|<1.$$

Перейдем в полученном неравенстве к пределу при $i\to\infty$

$$\left|\lim_{i\to\infty}\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\right|<1. \qquad (3.4)$$

Выражение под знаком модуля – это производная функции $f(x)$. В качестве начального приближения мы брали произвольную точку промежутка $(a;b)$. Значит, последовательность (3.3) может содержать может содержать любые числа из этого промежутка. Поэтому неравенство (3.4) означает, что последовательность (3.3) имеет предел, то есть, уравнение (3.1) приводит к решению методом простой итерации, если модуль производной функции $f(x)$ меньше 1 во всех точках этого промежутка

$$|f'(x)|<1, \quad x\in(a,b). \qquad (3.5)$$

Таким образом, алгоритм метода простой итерации состоит в следующем:

1. Преобразовать исходное уравнение вида $F(x)=0$ к виду $x=f(x)$.
2. Проверить сходимость метода, то есть выполнение условия (3.5).
3. Построить последовательность итераций (3.3), начиная с произвольного значения $x_0\in(a,b)$.
4. Завершить построение последовательности итераций, когда два соседних значения станут отличаться меньше, чем заданная точность ε. В качестве приближенного значения корня взять последнюю итерацию, округлив ее в соответствии с полученной точностью.

П р и м е р 3.1. Найдите корень уравнения

$$2\sin x-arctgx=0$$

из промежутка (2,5; 2,6) с точностью ε = 0,001 методом простой итерации.

Р е ш е н и е. Исходное уравнение можно преобразовать к виду (3.1) разными способами:

$a)\ x = tg(2\sin x);$

$b)\ x = (-1)^n \arcsin(\frac{1}{2} arctgx) + \pi n,\ n \in Z;$

$c)\ x = x + C \cdot (2\sin x - arctgx),$ где C – подходящая константа.

Рассмотрим вариант b). В нем

$$f(x) = (-1)^n \arcsin(\frac{1}{2} arctgx) + \pi n,\ n \in Z.$$

Тогда

$$f'(x) = \frac{(-1)^n}{2(1+x^2)\sqrt{1-\frac{1}{4}(arctgx)^2}}.$$

Так как $|arctgx| < \frac{\pi}{2}$, то значение квадратного корня не может быть меньше $\sqrt{1-\frac{\pi^2}{16}} > 0,6$. При отделении корней рассматриваемого уравнения (примеры 2.1.1 и 2.1.2) мы видели, что оно имеет бесконечное множество корней. За исключением очевидного нулевого корня, все остальные корни лежат вне промежутка [–2; 2]. То есть для всех корней $|x| > 2$. Поэтому знаменатель дроби в записи производной больше 6 и, значит, $|f'(x)| < \frac{1}{6} < 1$. Таким образом, последовательность итераций сходится, то есть в качестве функции $f(x)$ выбираем выражение b).

Чтобы значение корня оказалось в заданном промежутке, нужно в нем положить $n = 1$. То есть

$$f(x) = \pi - \arcsin(\frac{1}{2} arctgx).$$

В качестве начального значения корня выберем правый конец промежутка $x_0 = 2,6$.

Процесс построения последовательности итераций оформим в виде таблицы 3.1 из двух строк. В первой строке будем записывать значение очередной итерации. Во второй строке будем следить за достижением точности, то есть будем записывать в нее модуль разности текущей и предыдущей итераций. Так как требуется точность до третьего десятичного знака, вычисления ведем с четырьмя знаками.

Таблица 3.1

x	2,6	2,4958	2,5045	2,5038
Точность		0,1042	0,0087	0,0007

Требуемая точность достигнута уже при третьей итерации. Таким образом, округляя до трех десятичных знаков, получаем $x = 2{,}504$.

Блок-схема алгоритма уточнения корня методом простой итерации показана на рис. 3.1.

При выполнении описанного алгоритма преобразование уравнения $F(x) = 0$ к виду $x = f(x)$ и проверку сходимости метода приходится выполнять вручную, что может оказаться непростой задачей. Чтобы этого избежать, можно поступить следующим образом.

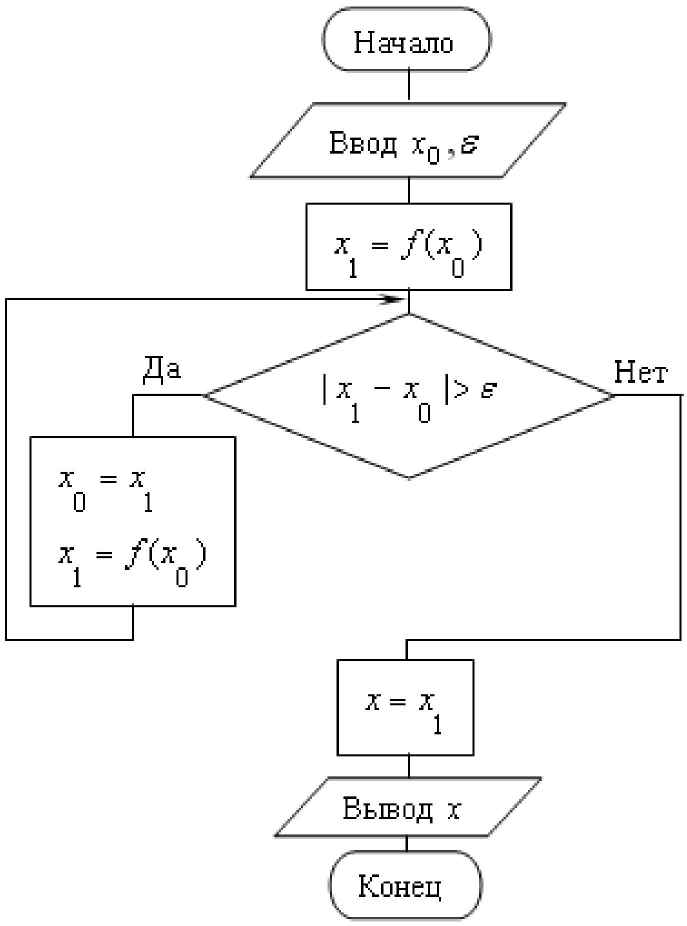


Рис. 3.1. Блок-схема алгоритма уточнения корня уравнения методом простой итерации

Уравнение $F(x)=0$ заменим равносильным ему уравнением

$$x = x + C \cdot F(x),$$

где C – подходящая отличная от 0 константа, то есть

$$f(x) = x + C \cdot F(x).$$

Пусть $F'(x) > 0$. Выберем $C = -\frac{1}{M}$, где $M > |F'(x)|$ для всех $x \in (a,b)$, то есть

$$f(x) = x - \frac{1}{M} \cdot F(x).$$

Очевидно, что в этом случае $|f'(x)| < 1$, и итерационная последовательность (3.3) сходится.

Если же $F'(x) < 0$, то $C = \frac{1}{M}$ и

$$f(x) = x + \frac{1}{M} \cdot F(x)$$

с тем же результатом.

Таким образом, итерационная формула (3.2) в этом случае имеет вид:

$$x_i = x_{i-1} - \mathrm{sgn}(F'(x)) \cdot \frac{F(x_{i-1})}{M}. \qquad (3.6)$$

Знак производной $\mathrm{sgn}(F'(x))$ на промежутке (a,b) определить просто даже вручную. Для этого достаточно сравнить значения функции $F(x)$ на концах промежутка. Если $F(a) < F(b)$, производная положительна, в противном случае – отрицательна.

Поиск верхней границы модуля производной на промежутке также может оказаться затруднительным. Поэтому разобьем промежуток (a,b) на 100 равных частей. Длина одной части $h = \frac{b-a}{100}$ окажется достаточно малой. Тогда производную в каждой точке деления можно будет заменить отношением приращения функции к шагу h. Найдем максимальное значение модуля этого отношения, и, увеличив его на 1, примем полученное значение за значение M.

За начальное значение корня примем середину промежутка (a,b).

Блок-схема этого алгоритма показана на рис. 3.2.

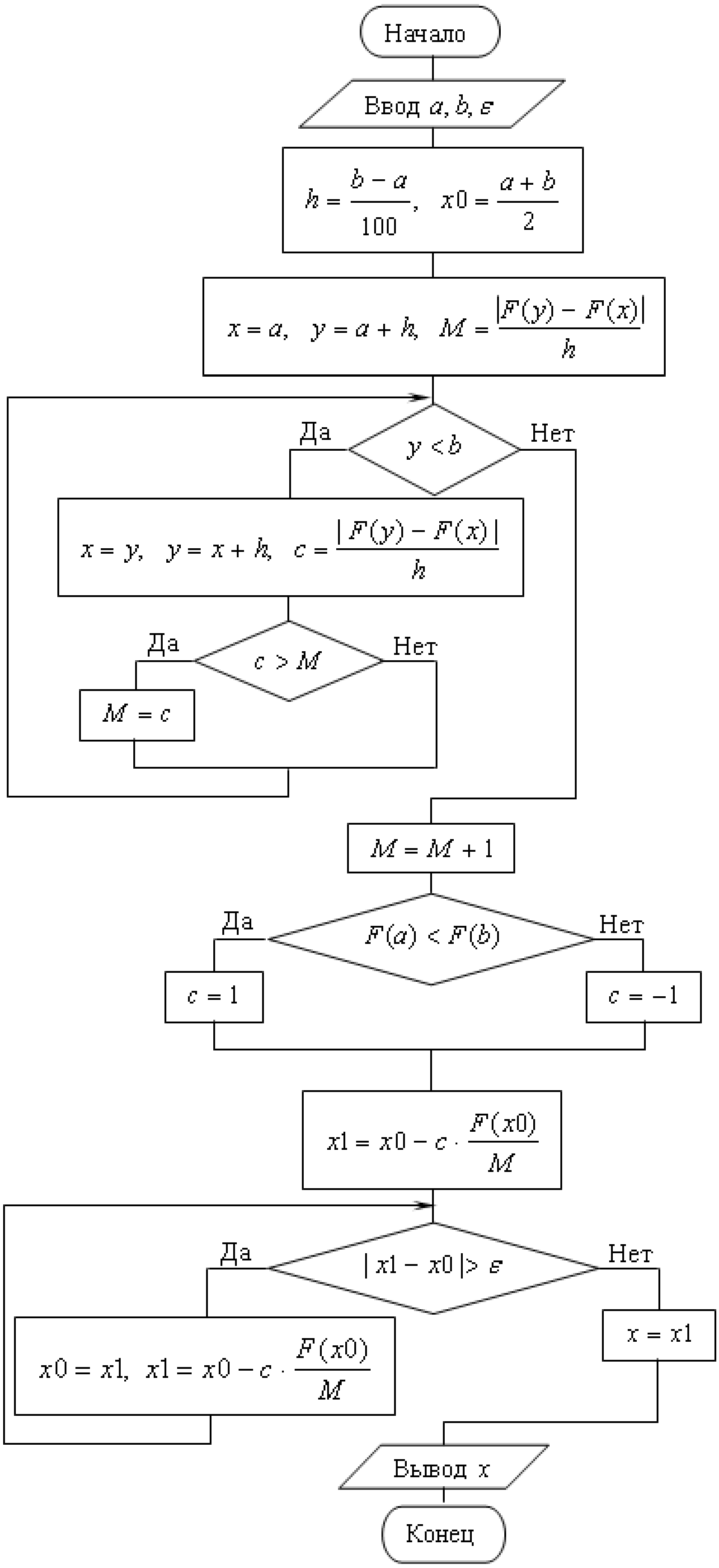


Рис. 3.2. Блок-схема алгоритма метода простой итерации

4. Уточнение корня методом хорд

Пусть уравнение (1.1)

$$F(x)=0$$

имеет единственный корень на промежутке $(a;b)$, функция $y=F(x)$ имеет разные знаки на концах этого промежутка, и ее вторая производная на этом промежутке не меняет знака, то есть, на графике в промежутке $(a;b)$ нет точек перегиба. Требуется найти корень уравнения с точностью ε.

Выберем в качестве начального приближения корня левый конец промежутка $x_0=a$.

Проведем хорду, соединяющую концы графика функции. Из курса аналитической геометрии известно уравнение прямой, проходящей чрез две точки с координатами $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (4.1)$$

Координаты концов нашей хорды $(a;F(a))$ и $(b;F(b))$. Подставив их в уравнение (4.1), получим уравнение хорды

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-F(a)}{F(b)-F(a)}. \qquad (4.2)$$

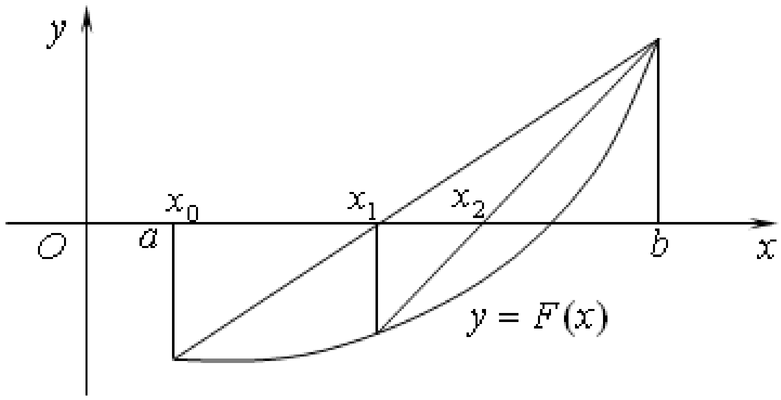


Рис. 4.1. Иллюстрация метода хор решения уравнения

В качестве нового приближения корня x_1 выберем точку пересечения хорды с осью абсцисс. Ее координаты $(x_1;0)$. Эта точка лежит на хорде, то есть обращает уравнение хорды в верное равенство. Подставим их в уравнение (4.2)

$$\frac{x_1-a}{b-a}=\frac{-F(a)}{F(b)-F(a)}.$$

Умножим обе части полученного равенства на $(b-a)$

$$x_1 - a = -\frac{(b-a)F(a)}{F(b)-F(a)}.$$

Перенесем a вправо

$$x_1 = a - \frac{(b-a)F(a)}{F(b)-F(a)}.$$

Приведем правую часть к общему знаменателю и раскроем скобки

$$x_1 = \frac{a(F(b)-F(a))-(b-a)F(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{aF(b)-aF(a)-bF(a)+aF(a)}{F(b)-F(a)} =$$

$$= \frac{aF(b)-bF(a)}{F(b)-F(a)}.$$

То есть

$$x_1 = \frac{aF(b)-bF(a)}{F(b)-F(a)}.$$

Левый конец промежутка a мы выбрали за начальное приближение x_0. Поэтому полученное выражение можно переписать в виде

$$x_1 = \frac{x_0F(b)-bF(x_0)}{F(b)-F(x_0)}.$$

Теперь с отрезком $(x_1;b)$ поступим так же, как с промежутком $(a;b)=(x_0;b)$: проведем хорду, соединяющую концы графика, и найдем точку ее пересечения с осью абсцисс

$$x_2 = \frac{x_1F(b)-bF(x_1)}{F(b)-F(x_1)}.$$

Продолжая аналогично, получим последовательность

$$x_0, x_1, x_2, ..., x_i, ..., \tag{4.3}$$

члены которой вычисляются по формуле

$$x_i = \frac{x_{i-1}F(b)-bF(x_{i-1})}{F(b)-F(x_{i-1})}, \ i = 1, 2, ... \tag{4.4}$$

По чертежу видно, что последовательность (4.4) сходится к значению корня x – точке пересечения графика с осью Ox.

Будем считать, что требуемая точность ε достигнута, когда разность двух очередных значений по модулю станет меньше или равна ε. Последнее значение и будем считать приближенным значением корня x.

Рассмотрим все возможные способы поведения графика нелинейной функции $y = F(x)$ в окрестности корня (рис. 4.2). В случаях а) и б) в качестве начального приближения нужно выбрать левый конец промежутка. На графике а) значение функции в левом конце промежутка отрицательно, а сам график вогнут, то есть вторая производная на этом промежутке положительна. На графике б) значение функции в левом конце промежутка положительно, а сам график выпуклый, то есть вторая производная на этом промежутке отрицательна.

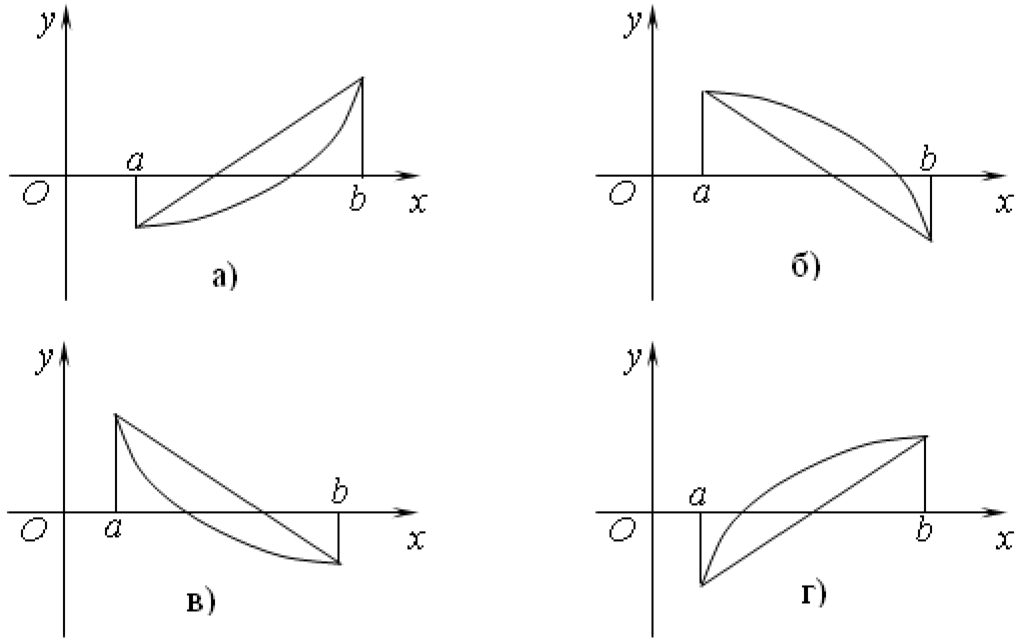


Рис. 4.2. Четыре возможных способа поведения графика нелинейной функции в окрестности корня

В случаях в) и г) в качестве начального приближения нужно выбрать правый конец промежутка. На графике в) значение функции в правом конце промежутка отрицательно, а сам график вогнут, то есть вторая производная на этом промежутке положительна. На графике г) значение функции в правом конце промежутка положительно, а сам график выпуклый, то есть вторая производная на этом промежутке отрицательна.

Таким образом, в качестве начального приближения корня нужно выбирать тот конец промежутка $(a;b)$, знак функции в котором отличается от знака второй производной на этом промежутке. Когда начальным приближением выбран правый конец промежутка, формула (4. 4) примет вид

$$x_i = \frac{x_{i-1}F(a) - aF(x_{i-1})}{F(a) - F(x_{i-1})}, \quad i = 1, 2, ... \qquad (4.5)$$

Если после выбора одного из концов промежутка за начальное приближение корня второй его конец обозначить буквой c, то формулы (4.4) и (4.5) можно объединить в одну

$$x_i = \frac{x_{i-1}F(c) - cF(x_{i-1})}{F(c) - F(x_{i-1})}, \ \ i = 1, 2, ... \tag{4.6}$$

Сформулируем теперь алгоритм уточнения корня уравнения методом хорд:

1. Определить знаки функции $F(x)$ и второй ее производной в левом конце промежутка.
2. Если знаки различны, этот конец принять за начальное приближение корня $x_0 = a$, иначе $x_0 = b$. Второй конец промежутка обозначить c.
3. Вычислять последовательно по формуле (4. 6) значения x_i до тех пор, пока не будет выполнено условие $|x_i - x_{i-1}| \le \varepsilon$. Последнее из полученных значений считать приближенным значением корня.

П р и м е р 2.1.4. Найдите корень уравнения

$$2\sin x - arctgx = 0$$

из промежутка (2,5; 2,6) с точностью ε = 0,0001 методом хорд.

Р е ш е н и е . $F(x) = 2\sin x - arctgx$. Тогда $F'(x) = 2\cos x - \frac{1}{1+x^2}$ и $F''(x) = -2\sin x + \frac{2x}{(1+x^2)^2}$. Вычислим $F(2{,}5) = 0{,}00665$ и $F''(x) = -2{,}2988$.

Значения функции и второй ее производной в левом конце промежутка имеют разные знаки, поэтому $x_0 = 2{,}5$ и $c = 2{,}6$.

Дальнейшие вычисления оформим в виде таблицы 4.1. Поскольку требуется точность в четыре десятичных знака, вычисления ведем с пятью знаками после запятой, т.е. точности $\varepsilon = 0{,}0001$, поэтому, округляя до десятитысячных долей, Разность двух последних значений по модулю стала равна требуемой $x = 2{,}50381 = 2{,}5038$.

Таблица 4.1

i	x_{i-1}	$x_i = \frac{x_{i-1}F(c) - cF(x_{i-1})}{F(c) - F(x_{i-1})}$	$\lvert x_i - x_{i-1}\rvert$
1	2,5	2,50371	0,00371
2	2,50371	2,50381	0,0001

При реализации алгоритма на компьютере можно избежать ручного вычисления второй производной. Если выбрать приращение аргумента положительным, например, $h = \frac{b-a}{100}$, то знак второй производной будет совпадать со знаком приращения функции второго порядка. Приращения функции первого порядка $\Delta F(a) = F(a+h) - F(a)$ и $\Delta F(a+h) = F(a+2h) - F(a+h)$. Тогда приращение функции второго порядка

$$\Delta^2 F(a) = \Delta F(a+h) - \Delta F(a) = (F(a+2h) -$$
$$- F(a+h)) - ((F(a+h) - F(a)) = F(a+2h) - 2F(a+h) + F(a).$$

Блок-схема алгоритма уточнения корня методом хорд приведена на рис. 4.3.

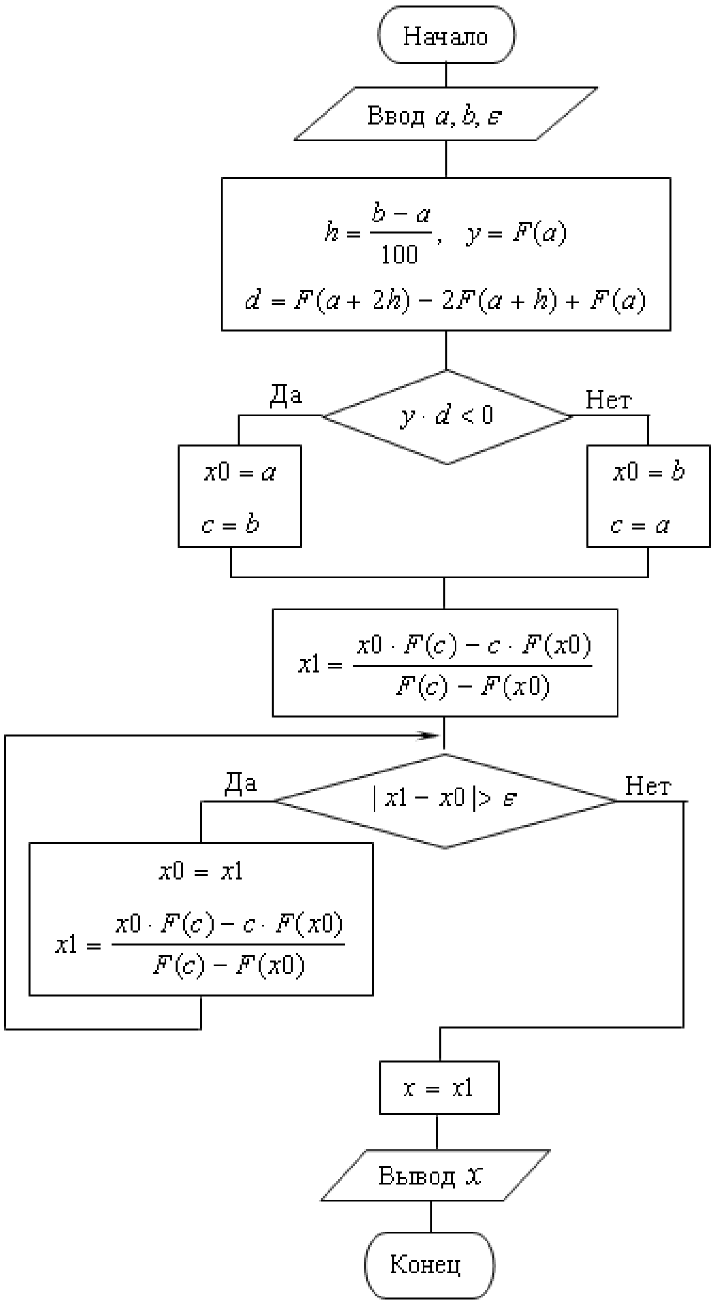


Рис. 4.3. Блок-схема алгоритма уточнения корня уравнения методом хорд

5. Уточнение корня методом касательных

Пусть уравнение

$$F(x) = 0$$

имеет единственный корень на промежутке $(a;b)$, функция $y = F(x)$ имеет разные знаки на концах этого промежутка, и ее вторая производная на этом промежутке не меняет знака, то есть, на графике в промежутке $(a;b)$ нет точек перегиба (рис. 5. 1). Требуется найти корень уравнения с точностью ε.

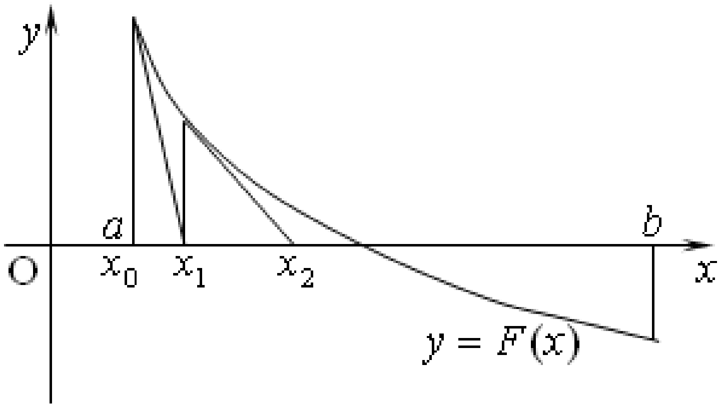


Рис. 5.1. Иллюстрация метода касательных решения уравнения

Выберем начальное приближение корня $x_0 = a$. В точке графика с этой абсциссой проведем к нему касательную. Из курса математического анализа известно, что уравнение касательной к графику функции $y = F(x)$ в его точке с координатами $(x_0; y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = F'(x_0) \cdot (x - x_0). \tag{5.1}$$

В нашем случае точка касания имеет координаты $(a; F(a)) = (x_0; F(x_0))$. Подставим эти координаты в уравнение (5.1).

$$y - F(x_0) = F'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

В качестве нового приближенного значения корня выберем абсциссу точки пересечения касательной с осью Ox. Чтобы ее найти, подставим ее координаты $(x_1; 0)$ в полученное уравнение касательной

$$-F(x_0) = F'(x_0) \cdot (x_1 - x_0).$$

Отсюда

$$x_1 - x_0 = -\frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$$

и

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}.$$

Проведем теперь касательную к графику нашей функции в ее точке с абсциссой x_1. Абсциссу x_2 точки ее пересечения с осью Ox примем за новое приближение корня. Легко видеть, что

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)}.$$

Продолжая аналогично, получим последовательность приближений

$$x_0, x_1, x_2, ..., x_i, ...$$

сходящуюся к искомому корню. Каждый последующий член этой последовательности вычисляется по формуле

$$x_i = x_{i-1} - \frac{F(x_{i-1})}{F'(x_{i-1})},\ \ i = 1, 2, ... \qquad (5.2)$$

Вычисления приближений заканчивается, когда два последних значения станут отличаться не более чем на величину заданной точности ε. Последнее из них принимается за искомое значение корня.

Возвращаясь к рис. 5.1, можно увидеть, что в качестве начального приближения корня x_0 в методе касательных нужно выбирать тот конец промежутка $(a;b)$, на котором знак функции совпадает со знаком ее второй производной.

Сформулируем алгоритм метода касательных.

1. Найти первую $F'(x)$ и вторую $F''(x)$ производные функции.
2. Вычислить значения функции и второй ее производной в левом конце промежутка $F(a)$ и $F''(a)$.
3. Если знаки $F(a)$ и $F''(a)$ совпадают, выбрать начальное приближение $x_0 = a$, иначе выбрать $x_0 = b$.
4. Вычислять последовательно приближенные значения корня по формуле (5.2) до тех пор, пока два последних вычисленных значения станут отличаться не более чем на заданную точность ε. Последнее значение принять за искомое значение корня.

П р и м е р 2.1.5. Найдите корень уравнения

$$2\sin x - arctgx = 0$$

из промежутка (2,5; 2,6) с точностью ε = 0,0001 методом касательных.

Р е ш е н и е . $F(x) = 2\sin x - arctgx$. Тогда $F'(x) = 2\cos x - \dfrac{1}{1+x^2}$ и $F''(x) = -2\sin x + \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$. Вычислим $F(2{,}5) = 0{,}00665$ и $F''(x) = -2{,}2988$. Значения функции и второй ее производной в левом конце промежутка имеют разные знаки, поэтому $x_0 = 2{,}6$.

Дальнейшие вычисления оформим в виде таблицы 5.1. Поскольку требуется точность в четыре десятичных знака, вычисления ведем с пятью знаками после запятой.

Таблица 5.1

i	x_{i-1}	$x_i = x_{i-1} - \dfrac{F(x_{i-1})}{F'(x_{i-1})}$	$\lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
1	2,6	2,50632	0,00368
2	2,50632	2,50382	0,00250
3	2,50382	2,50382	0

Разность двух последних значений по модулю стала меньше требуемой точности $\varepsilon = 0{,}0001$, поэтому, округляя до десятитысячных долей, $x = 2{,}50382 = 2{,}5038$.

При исполнении алгоритма на компьютере придется вручную найти производную функции, так как ее выражение должно быть включено в программу вычислений. Определение начального приближения в зависимости от знака значения второй производной выполним в самом алгоритме так, как мы это сделали в алгоритме метода хорд.

Блок-схема алгоритма уточнения корня уравнения методом касательных показана на рис. 5.2.

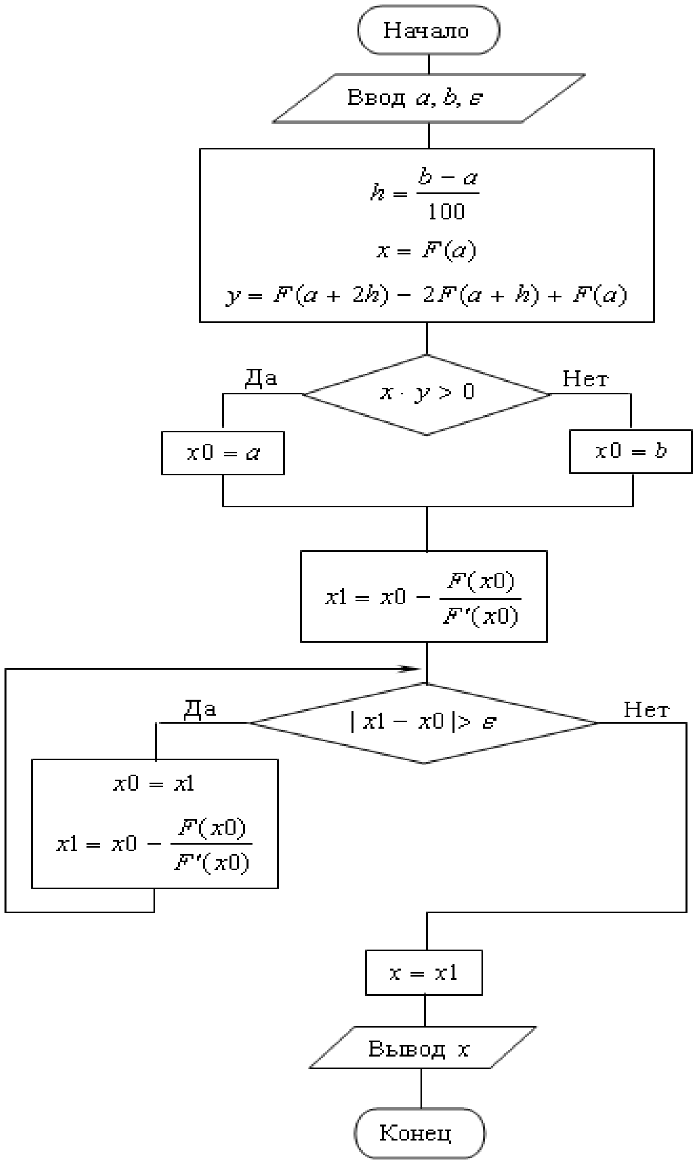


Рис. 5.2. Блок-схема алгоритма уточнения корня уравнения методом касательных

6. Уточнение корня комбинированным методом хорд и касательных

Рассматривая одну и ту же задачу уточнения корня уравнения

$$F(x) = 0$$

на промежутке $(a;b)$ с точностью ε методом хорд и методом касательных, мы в качестве начального приближения корня каждый раз выбираем противоположные концы промежутка. И, как следствие, приближаемся к действительному значению корня с противоположных сторон. Применяя одновременно оба эти метода, будем получать каждый раз такую пару уточненных приближений, что действительное значение корня находится между этими двумя значениями.

Алгоритм такого метода имеет следующий вид:

1. Найти первую $F'(x)$ и вторую $F''(x)$ производные.
2. Вычислить значения функции $F(a)$ и второй ее производной $F''(a)$ в левом конце промежутка.
3. Если знаки $F(a)$ и $F''(a)$ различны, выбрать $x_0 = a, x_1 = b$ и $c = b$, иначе выбрать $x_0 = b, x_1 = a$ и $c = a$.
4. Вычислять пары новых приближений с четными номерами по формуле (4.6) метода трапеций и с нечетными номерами по формуле (5.2) метода касательных до тех пор, пока не будет получена пара значений, модуль разности которых окажется меньше или равен удвоенной заданной точности.
5. Значением искомого корня уравнения считать среднее арифметическое двух последних приближений.

П р и м е р 6.1. Найдите корень уравнения

$$2\sin x - arctgx = 0$$

из промежутка (2,5; 2,6) с точностью ε = 0,0001 комбинированным методом хорд и касательных.

Р е ш е н и е . $F(x) = 2\sin x - arctgx$. Тогда $F'(x) = 2\cos x - \dfrac{1}{1+x^2}$ и $F''(x) = -2\sin x + \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$. Вычислим $F(2{,}5) = 0{,}00665$ и $F''(x) = -2{,}2988$. Значения функции и второй ее производной в левом конце промежутка имеют разные знаки, поэтому $x_0 = 2{,}5$; $x_1 = 2{,}6$ и $c = 2{,}6$.

Дальнейшие вычисления оформим в виде таблицы 6.1. Поскольку требуется точность в четыре десятичных знака, вычисления ведем с пятью знаками после запятой.

Таблица 6.1

i	x_{i-1}	$x_i = \dfrac{x_{i-1}F(c) - cF(x_{i-1})}{F(c) - F(x_{i-1})}$	$x_i = x_{i-1} - \dfrac{F(x_{i-1})}{F'(x_{i-1})}$	$\lvert x_{2i} - x_{2i-1} \rvert$
1	2,5	2,50371		
2	2,6		2,50632	0,0026
3	2,5037	2,50381		
4	2,5063		2,50382	0,00001

Разность двух последних значений по модулю стала меньше удвоенной требуемой точности $2\varepsilon = 0{,}0002$, поэтому $x = \dfrac{2{,}50381 + 2{,}5.382}{2} = 2{,}503815$ и, округляя до десятитысячных долей, $x = 2{,}503815 = 2{,}5038$.

Построим блок-схему алгоритма (рис. 6.1).

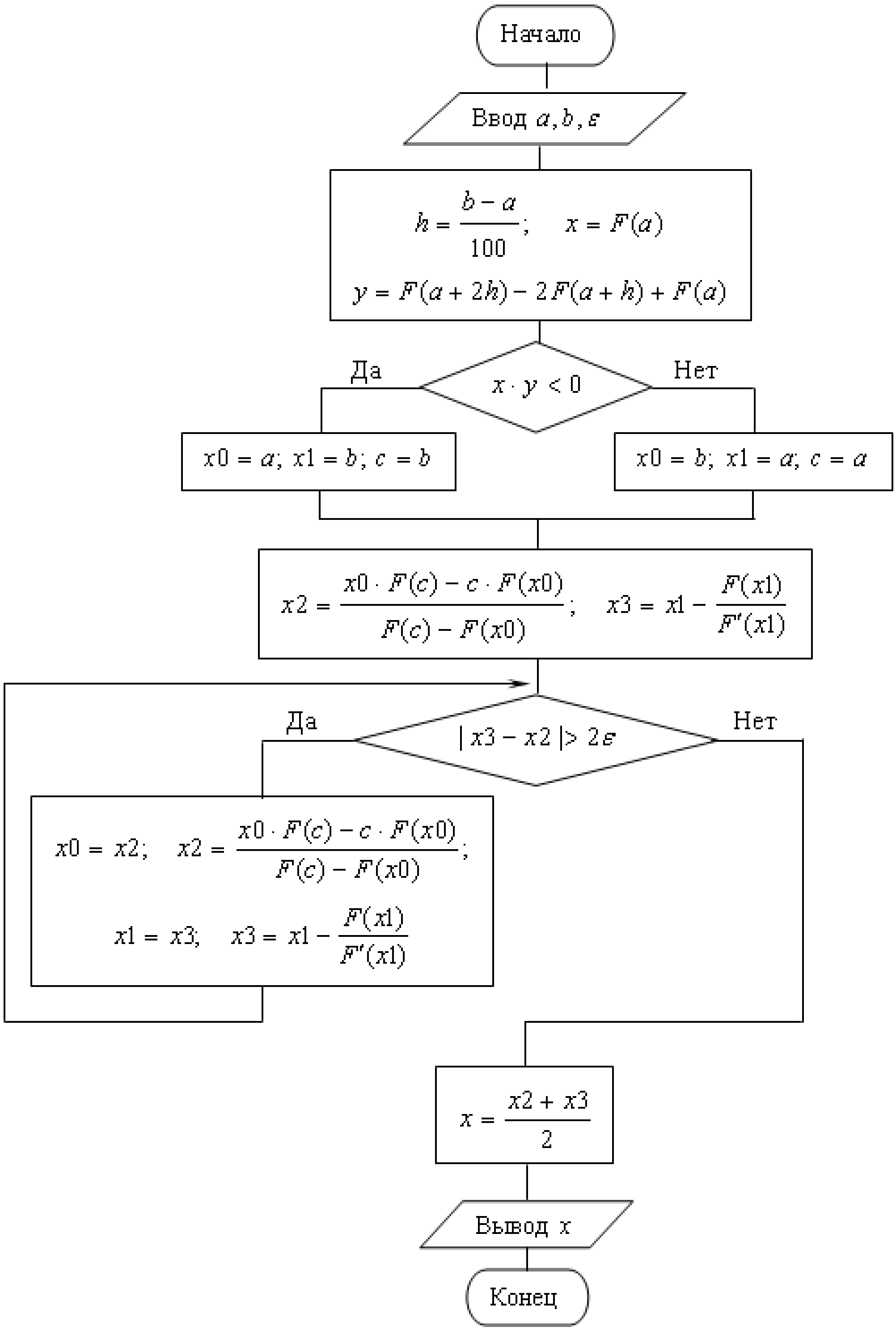


Рис. 6.1. Блок-схема алгоритма уточнения корня уравнения комбинированным методом хорд и касательных

Лабораторные работы к разделу 2

С использованием вычислительных средств, решить следующие задачи.

З а д а ч а 2.1. Отделить корни уравнения

$$e^x - x^2 = 0$$

на промежутке (-2; 2).

З а д а ч а 2.2. Найдите корень уравнения

$$e^x - x^2 = 0$$

из промежутка (-2; 2) с точностью ε = 0,001.

З а д а ч а 2 .3. Найдите корень уравнения

$$e^x - x^2 = 0$$

из промежутка (-2; 2) с точностью ε = 0,001 методом простых итераций.

З а д а ч а 2 .4. Найдите корень уравнения

$$e^x - x^2 = 0$$

из промежутка (-2; 2) с точностью ε = 0,0001 методом хорд.

З а д а ч а 2 .5. Найдите корень уравнения

$$e^x - x^2 = 0$$

из промежутка (-2; 2) с точностью ε = 0,0001 методом касательных.

Задача 2. 6. Найдите корень уравнения

$$e^x - x^2 = 0$$

из промежутка (-2; 2) с точностью ε = 0,0001 комбинированным методом хорд и касательных.