

Trabalho 1 - Equações Elípticas

Vileno Cunha Cavalcante - n^ousp: 12559249

SME0202 - Métodos Numéricos em Equações Diferenciais

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

20 de Abril de 2025

1 O Problema

Consideremos o problema estacionário no domínio retangular $\Omega = [0, 1] \times [-1, 1]$, definido pela equação de convecção-difusão anisotrópica:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1)$$

$$u(0, y) = u(1, y) = 0 \quad \forall y \in [-1, 1] \quad (2)$$

$$(\nabla u \cdot \mathbf{n})|_{(x, -1)} = e \sin(2\pi x) \quad \forall x \in [0, 1] \quad (3)$$

$$(\nabla u \cdot \mathbf{n} + u)|_{(x, 1)} = 0 \quad \forall x \in [0, 1] \quad (4)$$

Fixando $c = 4\pi^2 - 3$ a solução analítica particular para o problema é dado por:

$$u(x, y) = e^{-y} \sin(2\pi x). \quad (5)$$

2 Tarefas

2.1 Discretização do Problema

Para resolver este problema, aproxima-se os termos de difusão e convecção da equação por diferenças finitas de segunda ordem. A equação discretizada para pontos internos do domínio é:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + 3 \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = c \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h}.$$

As condições de contorno verticais (2) não são variáveis do sistema então são excluídos da matriz. Já as condições de contorno (3) e (4) foram tratadas usando diferença progressiva e regressivas de 2^a ordem respectivamente:

- Inferior $(\nabla u \cdot \mathbf{n})|_{(x, -1)} = e \sin(2\pi x) :$

$$\frac{-3u_{i,0} + 4u_{i,1} - u_{i,2}}{2h} = e \sin(2\pi x_i)$$

- Superior $(\nabla u \cdot \mathbf{n} + u)|_{(x,1)} = 0$

$$\frac{3u_{i,Ny-1} - 4u_{i,Ny-2} + u_{i,Ny-3}}{2h} + u_{i,Ny-1} = 0$$

Transformando as equações em um sistema discreto $A\vec{u} = \vec{b}$, geramos um método de aproximação para (1), onde as linhas do sistema são das por:

$$\left(\frac{1}{h^2}\right)u_{i+1,j} + \left(\frac{3}{h^2} + \frac{c}{2h}\right)u_{i,j+1} + \left(-\frac{8}{h^2}\right)u_{i,j} + \left(\frac{3}{h^2} - \frac{c}{2h}\right)u_{i,j-1} + \left(\frac{1}{h^2}\right)u_{i-1,j} = b_{i,j}$$

Ou ainda na sua forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ddots & -8 & 1 & 3 + \frac{ch}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \frac{ch}{2} & 1 & -8 & 1 & 3 + \frac{ch}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \frac{ch}{2} & 1 & -8 & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 - \frac{ch}{2} & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ u_{i-1,j} \\ u_{i,j} \\ u_{i+1,j} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ e \sin(2\pi x_i) \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad (6)$$

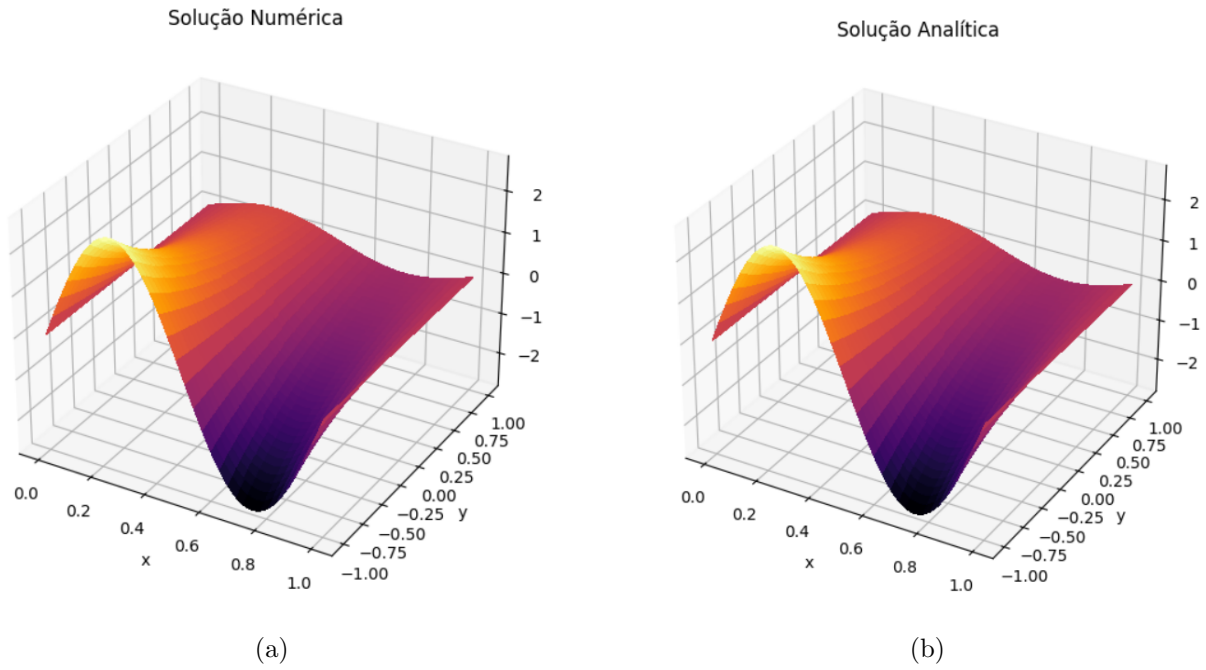
2.2 Análise Gráfica

Foi desenvolvido um código em Python para implementar o método proposto em (6), com $h = 0.01$. Nas Figuras (1a) e (1b) é apresentado os gráficos gerados pela solução numérica proposta e o gráfico da solução analítica (5) par fins de comparação.

Podemos notar que as duas superfícies (analítica e numérica) têm formas muito parecidas. Os picos, vales e curvaturas ocorrem nas mesmas regiões do domínio (x, y) . Além disso, os valores máximos e mínimos são praticamente iguais, o que indica que o erro absoluto entre as soluções é pequeno. Também é possível observar que as cores, que representam a intensidade da solução, variam de forma semelhante nos dois gráficos, indicando que os gradientes da solução também estão corretos.

Visualmente, a solução numérica apresenta uma superfície suave, sem oscilações estranhas ou instabilidades. Além disso, as bordas da superfície estão nos mesmos níveis, indicando que a solução numérica respeita as condições de contorno da mesma forma que a analítica.

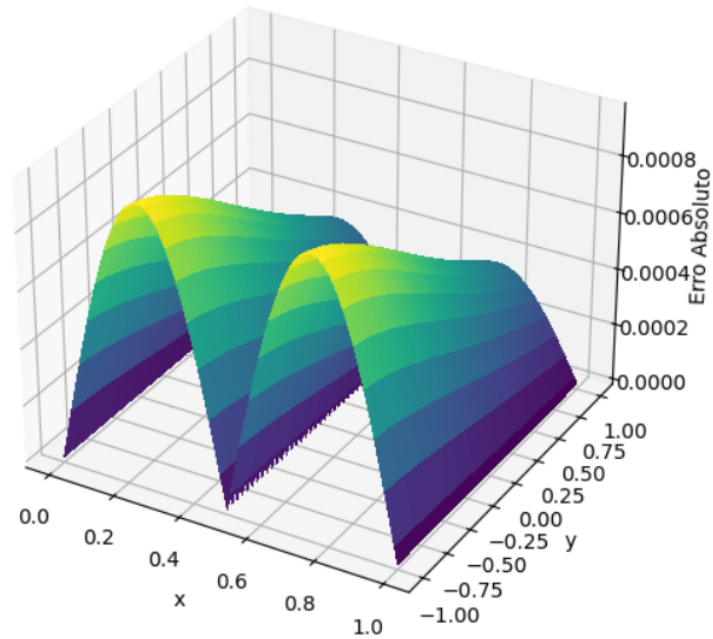
Figura 1: Gráficos da solução do problema de convecção-difusão



2.3 Análise do Erro

Fizemos uma análise do erro cometido pelo método. A Figura 2 mostra o erro absoluto local gerado pela solução numérica em cada ponto do domínio $(x, y) \in \Omega$.

Figura 2: Gráfico dos erros locais da solução numérica



Note que erro absoluto é bem pequeno no geral, o máximo em torno de 9.62×10^{-4} , o que é

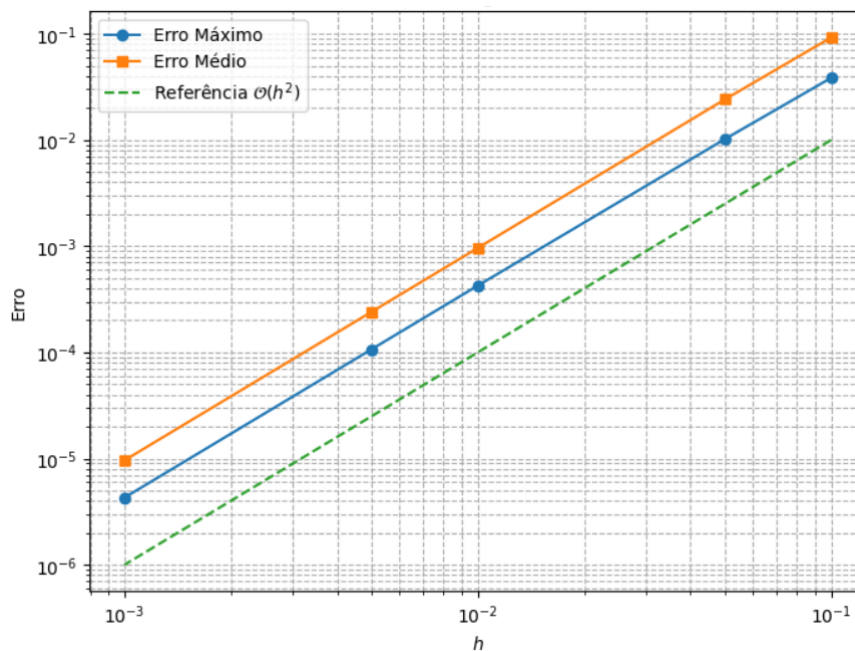
excelente. No entanto, o erro não é uniforme, podemos notar que ele se concentra mais em certas regiões. Visualmente, os maiores erros ocorrem onde o gráfico da solução tem maiores variações, ou seja, onde a solução muda mais rapidamente em x , como picos e vales (em torno de $x \approx 0.2$ e $x \approx 0.8$).

Isso ocorre porque os métodos numéricos baseados em diferenças finitas têm mais dificuldade em capturar com precisão a curvatura da solução nessas regiões, o que gera um erro local maior. Além disso, em regiões onde a derivada de $u(x, y)$ é maior, o erro de truncamento da aproximação numérica também é maior, isso vem do fato de que a discretização aproxima dessa região podem não capturar toda a variação da função.

2.4 Análise de Convergente

Afim de capturar o comportamento assintótico do erro foi feito um estudo de convergência numérica. A Figura (3) mostra a visualização gráfica desse estudo.

Figura 3: Comportamento Assintótico do Erro em Função do Tamanho da Malha



No gráfico podemos ver o erro máximo (linha azul) e o erro médio (linha laranja) para diferentes malhas. No gráfico também contém uma linha de referência (linha verde tracejada) que representa a ordem que método deve convergir.

Visualmente, ambas as curvas (erro máximo e erro médio) têm inclinação paralela ou muito próxima da linha de referência. Indicando que método esta convergindo com ordem esperada de $\mathcal{O}(h^2)$