Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир ”Академик Стефан Додунеков”

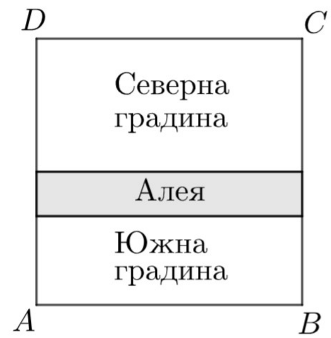
София, 15-17 ноември 2024 г.

София, 2024 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Пети клас

Задача 1. През квадратна градина $ABCD$ прекарали алея, както е показано на чертежа. Алеята разделила $ABCD$ на две правоъгълни градини. Страните на градините, измерени в метри, са естествени числа. Площта на северната градина е с 507 кв.м по-голяма от площта на южната.



Третината от северната градина и половината от южната градина засадили с пипер, а останалата част от градините – с домати. Оказало се, че с пипер са засадили общо 559 кв.м.

а) Колко квадратни метра общо са засадили с домати?

б) Колко квадратни метра е площта на алеята?

Решение. Нека третината от северната градина има площ x кв.м, а половината от южната градина има площ y кв.м. С пипер са засадили общо

$$x + y = 559 \text{ кв.м.}$$

Площта на северната градина е $3x$ кв.м, а на южната градина е $2y$ кв.м. Тогава

$$3x - 2y = 507.$$

Като удвоим първото равенство и съберем с второто, получаваме, че $5x = 1625$, т.е. $x = 325$. Следователно $y = 559 - 325 = 234$.

Площта на северната градина е $3.325 = 975$, а площта на южната градина е $2.234 = 468$; общо $975 + 468 = 1443$ кв.м.

а) С домати са засадили $1443 - 559 = 884$ кв.м.

б) Страната на квадрата е общ делител на площта на северната градина и площта на южната градина. Тъй като $\text{НОД}(975, 468) = 3.13 = 39$, страната на квадрата е делител на 39.

От друга страна, площта на квадрата е по-голяма от общата площ на двете градини $975 + 468 = 1443$ кв.м. Тъй като $37.37 = 1369 < 1443$, то страната на квадрата е по-голяма от 37.

Така получаваме, че страната на квадрата е 39 м.

Площта на алеята е $39.39 - 1443 = 78$ кв.м.

Оценяване. Намиране на площтта на всяка от градините – 2 точки.

Намиране на площта, засадена с домати – 1 точка.

Намиране на страната на квадрата — 2 точки (от които обосновка защо страната може да е само най-големият общ делител на 975 и 468 – 1 т.)

Намиране на площта на алеята: 1 точка.

Задача 2. От началото на числовия лъч тръгнали две феи – червена и жълта. Те се разходили по числовия лъч, като червената фея стъпвала през 12 единици (в 0, 12, 24 и т.н.), а жълтата фея стъпвала през 21 единици (в 0, 21, 42 и т.н.).

Всяка точка, в която стъпи фея, се оцветява в цвета на феята. Ако в някоя точка стъпят и двете феи, цветовете се сливат и точката става оранжева (например, точката 0 е оранжева).

Всяка фея стъпила в точно 101 точки на числовия лъч и отлетяла.

а) Колко точки от числовия лъч са оцветили двете феи?

б) Точката X от числовия лъч е оцветена и броят на оцветените точки наляво от нея е равен на броя на оцветените точки надясно от нея по лъча. Определете на кое число от числовия лъч съответства точката X и в какъв цвят е оцветена тя.

Решение. Червената фея е стъпила в $0, 12, 24, \dots 1200$, а жълтата – в $0, 21, 42, \dots 2100$.

Червената и жълтата едновременно са стъпили в началото и в кратните на НОК$(12, 21) = 84$, които не надхвърлят 1200. Това са оранжевите точки $0, 84, \dots, 14.84 = 1176$ и са 15 на брой.

а) Общо оцветените точки са $2 \cdot 101 - 15 = 187$.

б) Точката X е $(187 + 1) : 2 = 94$-тата оцветена точка.

От 1 до 84 включително има $84 : 12 + 84 : 21 - 1 = 10$ оцветени точки; толкова са оцветените точки от 85 до 168 и т.н. Така от 1 до $84.9 = 756$ включително (което е по-малко от 1200) има $10.9 = 90$ оцветени точки; заедно с оцветеното начало на лъча, стават 91 точки. Остава да отброим още $94 - 91 = 3$ оцветени точки.

След тръгването на феите, първите оцветени точки са 12 (червена), 21 (жълта), 24 (червена) и т.н. Следователно 94-тата оцветена точка е $756 + 24 = 780$ и е червена.

Оценяване. а) Намиране на броя на оранжевите точки – 2 точки.

Намиране на броя на оцветените точки – 1 точка.

б) Показване, че търсената точка е 94-тата оцветена точка – 1 точка.

Определяне на цвета и числото, съответстващи на 94-тата оцветена точка – 2 точки.

Задача 3. Райна написала на един лист

16 ЕСЕНЕН ТУРНИР

След това всяка буква скрила с цифра – еднаквите букви с еднакви цифри, а различните с различни цифри. Тъй като 1 и 6 вече били на листа, Райна не ги използвала.

Оказало се, че числото, което скрило думата ЕСЕНЕН, има точно девет общи делители с 2025, а числото, което скрило ТУРНИР, има точно два общи делители с 2025.

Какъв цифров код се е получил на листа, ако числото, скрило думата ТУРНИР, е възможно най-голямо?

Решение. Най-големият общ делител на ЕСЕНЕН и 2025 има девет делители. Числата с 9 делители се разлагат на прости множители като p^8 или $p^2.q^2$, където p и q са различни прости числа.

Тъй като $2025 = 3^4.5^2$, единственият му делител, който има 9 делители, е $3^2.5^2 = 9.25$.

Следователно 9 и 25 делят ЕСЕНЕН. От признака за делимост на 25 следва, че ЕН е 00, 25, 50 или 75.

При ЕН = 00 получаваме Е = Н = 0, противоречие.

При ЕН = 25, т.е. Е = 2, Н = 5, от признака за делимост на 9 за числото 2С2525 получаваме С = 2 = Е, противоречие.

При ЕН = 50, т.е. Е = 5, Н = 0, от признака за делимост на 9 за числото 5С5050 получаваме С = 3.

При ЕН = 75, т.е. Е = 7, Н = 5, от признака за делимост на 9 за числото 7С7575 получаваме С = 5 = Н, противоречие.

Получихме ЕСЕНЕН = 535050.

ТУРНИР има два общи делители с 2025. Единият е 1, а другият е 3 или 5. Но Е = 5 и Н = 0, следователно Р не е нито 5, нито 0, т.е. ТУРНИР не се дели на 5. Следователно вторият общ делител е 3. Следователно ТУРНИР се дели на 3 и не се дели на 9.

За буквите на ТУРНИР остават цифрите 2, 4, 7, 8 и 9. Тъй като ТУРНИР трябва да е възможно най-голямо, Т = 9, У = 8, Р = 7. Получаваме 9870И7 и от признака за делимост на 3 следва, че И = 2, 5 или 8; тъй като Е = 5, У = 8, то И = 2.

Райна е кодирала 16 ЕСЕНЕН ТУРНИР с 16 535050 987027.

Оценяване. За доказателство, че ЕСЕНЕН се дели на 9 и 25 – 2 т.

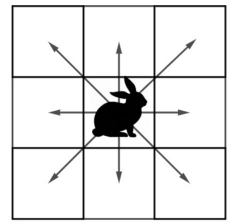
За разглеждане на всеки от четирите случая за ЕН и прилагане на признака за делимост на 9 – по 0,5 т.; общо 2 т.

За доказателство, че ТУРНИР се дели на 3 – 1 т.

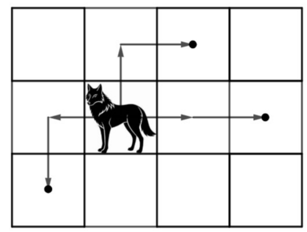
Намиране на най-голямата възможна стойност на ТУРНИР – 2 т.

Задача 4. Кумчо Вълчо и Зайо Байо попадат случайно в две различни квадратчета на квадратна дъска. Те правят ходове, като се редуват. Кумчо Вълчо хваща Зайо Байо, ако попадне в квадратчето му.

Играта започва Зайо, който при всеки ход се мести в квадратче, което има поне един общ връх с неговото. (Възможните ходове на Зайо са показани на чертежа.)

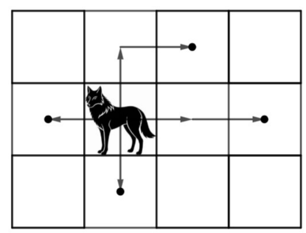


а) Кумчо Вълчо при всеки свой ход се мести **два пъти последователно** от едно квадратче в съседно на него по страна. (На чертежа са показани три възможни хода на Кумчо Вълчо.)



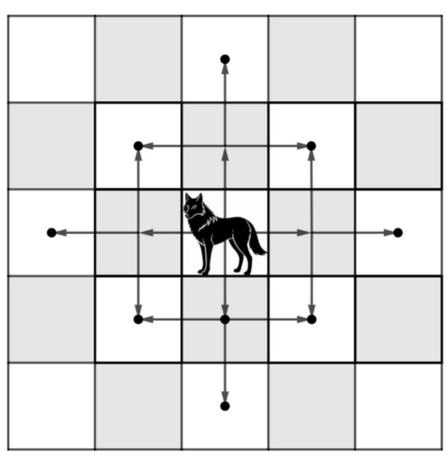
Докажете, че както и да застанат в началото върху дъска 2024×2024, Зайо Байо винаги може да избяга от Кумчо Вълчо, без да напусне дъската.

б) При всеки свой ход Кумчо Вълчо се мести **един или два пъти** от едно квадратче в съседно на него по страна. (На чертежа са показани четири възможни хода на Кумчо Вълчо.)



Докажете, че ако дъската е безкрайна, Зайо Байо винаги може да избяга от Кумчо Вълчо.

Решение. а) Да оцветим дъската шахматно. Можем да забележим, че при всеки свой ход, състоящ се от две премествания в съседно по страна квадратче, Кумчо Вълчо отива в квадратче с един и същ цвят.



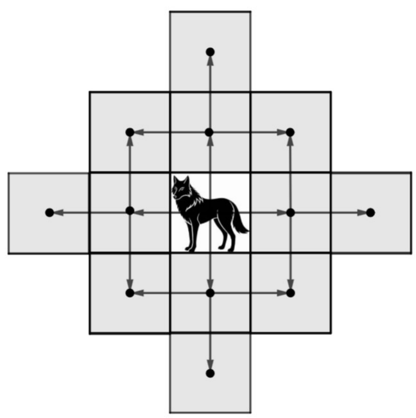
Зайо Байо обаче може да смени цвета на квадратчето, в което е (с преместване нагоре, надолу, наляво или надясно) или да не го променя (с преместване по диагонал). Зайо постъпва по следния начин:

- ако в началото цветът на квадратчето му е като този на Кумчо Вълчо, той сменя цвета при първия си ход и след това да се движи само по диагонал;

- ако в началото цветът на квадратчето му е различен от този на Кумчо Вълчо, се движи само по диагонал.

Така и в двата случая след всеки ход Зайо Байо и Кумчо Вълчо ще са в квадратчета с различен цвят, следователно Зайо никога няма да бъде хванат.

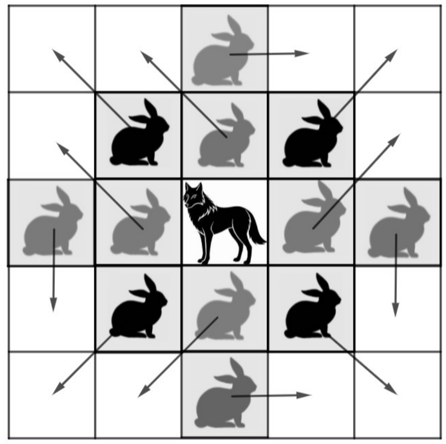
б) Ще наричаме *опасна територия* ромба, състоящ се от квадратчетата, в които Кумчо Вълчо може да попадне при следващия си ход. На чертежа опасната териотория е оцветена в сиво.



Ако заекът се намира в опасната територия, с един ход по диагонал той може да излезе от нея. Тогава вълкът на следващия си ход не може да го хване.

Ако заекът се намира извън опасната територия, винаги може да направи такъв ход, че да не влезе в нея (дъската е безкрайна). Така вълкът на следващия си ход не може да го хване и заекът може да бяга безкрайно.

Ето една примерна стратегия на заека:



След всеки ход на вълка опасната територия се променя и заекът трябва да действа според горепосочената стратегия.

Оценяване. а) Пълно решение: 4 точки.

За шахматно оцветяване – 1 точка.

За стратегия, ако Вълчо и Зайо са на едноцветни полета – 1 точка.

За стратегия, ако Вълчо и Зайо са на едноцветни полета – 1 точка.

За коментар защо Зайо винаги може да реагира – 1 точка.

За конкретна стратегия без доказателство: в зависимост от обосновката, до 2 точки.

б) Пълно решение: 3 точки.

За определяне на опасната територия – 1 точка.

За довършване – 2 точки.

Шести клас

Задача 1. В аквариум с форма на правоъгълен паралелепипед имало определено количество вода. При почистване източили 40% от водата. След това добавили филтрирана вода, при което увеличили с 40% количеството вода, останало след източването. Накрая в аквариума имало 2,1 литра вода.

а) Колко литра вода имало в аквариума отначало?

б) Широчината на дъното на аквариума е 20 cm и е с 20% по-малка от неговата дължина. Околната повърхнина на аквариума е 7,2 dm^2. Колко процента от обема на аквариума са били запълнени с вода отначало?

Решение. а) Нека отначало в аквариума е имало x литра вода. След източването са останали $60\%x$ литра, а след доливането на филтрираната вода, в аквариума имало $140\%.60\%x = 84\%x$ литра вода. От равенството $84\%x = 2{,}1$ намираме $x = 2{,}5$ литра.

б) Широчината на дъното $a = 20$ cm е с 20% по-малка от дължината b, т.е. е равна на $80\%b$. От равенството $20 = 80\%b$ намираме $b = 25$ cm. Обиколката на дъното е $P = 90$ cm и тъй като $S = 7,2\ \mathrm{dm}^2 = 720\ \mathrm{cm}^2$, височината на аквариума е $c = S : P = 720 : 90 = 8$ cm.

Обемът на аквариума е $V = 20.25.8 = 4000\ \mathrm{cm}^3 = 4\ \mathrm{dm}^3$.

Водата отначало е $\dfrac{2,5}{4} = 62,5\%$ от обема на аквариума.

Оценяване. а) Пълно решение: 3 точки.

Намиране, че крайното количество е 84% от първоначалното – 2 точки.

Определяне на началното количество вода – 1 точка.

Ако се решава като рачешка задача, по 1,5 т. за всяка стъпка.

б) Пълно решение: 3 точки.

Намиране на дължината – 1 точка.

Намиране на виочината – 1 точка.

Намиране на обема и определяне на търсения процент – 1 точка.

Задача 2. За дадени числа a, b, c, d означаваме $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$.
Например, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - (-2) \cdot 3 = 2$.

а) Пресметнете сбора

$$S = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 43 & -44 \\ -46 & 45 \end{vmatrix}$$

б) Намерете числото X в равенството

$$\begin{vmatrix} X & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & 4 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} X & \frac{1}{23} \\ \frac{1}{24} & 22 \end{vmatrix} = \frac{11}{12}.$$

Решение. а) Забелязваме, че

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ -c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - (-b) \cdot (-c) = a \cdot d - b \cdot c = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Следователно $S = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 43 & 44 \\ 46 & 45 \end{vmatrix} =$

$= (0{\cdot}2-1{\cdot}3)+(1{\cdot}3-2{\cdot}4)+(2{\cdot}4-3{\cdot}5)+\cdots+(43{\cdot}45-44{\cdot}46) = 0-44{\cdot}46 = -2024$,

тъй като в получения сбор събираемите, без първото и последното, се разделят на двойки противоположни със сбор 0.

б) Даденото равенство се записва във вида

$$-X-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+2X-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}-3X-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+4X-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}+\cdots+22X-\frac{1}{23}\cdot\frac{1}{24}=\frac{11}{12}.$$

Имаме

$-X+2X-3X+4X+\cdots+22X = (-1+2-3+4-5+\cdots-21+22)X = 11X$,

тъй като $-1+2 = -3+4 = \cdots = -21+22 = 1$. От друга страна,

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{23}\cdot\frac{1}{24} = -\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{23}-\frac{1}{24}\right) =$$

$$= -\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{24}\right) = -\frac{11}{24}.$$

Получаваме $11X - \frac{11}{24} = \frac{11}{12}$, откъдето намираме $X = \frac{1}{8}$.

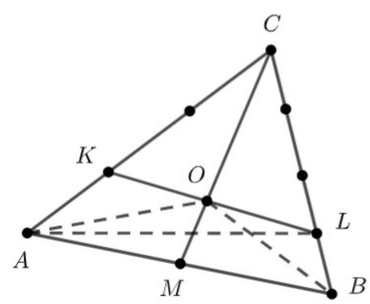
Оценяване. а) Пълно решение: 2 точки.
б) Пълно решение: 4 точки.
Определяне на коефициента пред X – 1,5 точки.
Пресмятане на телескопичния сбор – 1,5 точки.
Намиране на X – 1 точка.

Задача 3. Даден е триъгълник ABC. На страната AB е отбелязана точка M така, че $AM = \dfrac{1}{2}AB$; на страната AC е отбелязана точка K така, че $AK = \dfrac{1}{3}AC$; на страната BC е отбелязана точка L така, че $BL = \dfrac{1}{4}BC$. Отсечките KL и CM се пресичат в точка O и лицето на четириъгълника $AMOK$ е 36 cm^2.

Намерете лицето на триъгълника COL и лицето на триъгълника ABC.

Решение. Ако h_L е разстоянието от L до AC, а h_A е разстоянието от A до BC, имаме

$$\frac{S_{CKL}}{S_{ALC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot CK\cdot h_L}{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot h_L} = \frac{CK}{AC} = \frac{2}{3}, \quad \frac{S_{ALC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot CL\cdot h_A}{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot h_A} = \frac{CL}{BC} = \frac{3}{4}$$



и като умножим тези равенства, получаваме

$$\frac{S_{CKL}}{S_{ABC}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

Следователно лицето на триъгълника CKL е равно на половината от лицето на триъгълника ABC. От друга страна,

$$\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot AM\cdot h_C}{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot h_C} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2},$$

т.е. лицето на триъгълника AMC е равно на половината от лицето на триъгълника ABC (по-нататък ще използваме това свойство на медианата без доказателство).

Следователно $S_{AMC} = S_{CKL}$, т.е.

$$S_{AMOK} + S_{KOC} = S_{KOC} + S_{COL} \iff S_{AMOK} = S_{COL}.$$

Така получихме, че $S_{COL} = 36$ cm^2.

От $\dfrac{S_{COB}}{S_{COL}} = \dfrac{BC}{LC} = \dfrac{4}{3}$ следва, че

$$S_{COB} = \frac{4}{3}S_{COL} = 48 \text{ cm}^2.$$

Тъй като CM е медиана в триъгълника ABC, то $S_{AMC} = S_{BMC}$.

Освен това, OM е медиана в триъгълника ABO и $S_{AMO} = S_{BMO}$.

Като извадим почленно двете равенства. получаваме

$$S_{AOC} = S_{COB}, \text{ т.е. } S_{AOC} = 48 \text{ cm}^2.$$

Но $\dfrac{S_{AOK}}{S_{AOC}} = \dfrac{AK}{AC} = \dfrac{1}{3}$, следователно

$$S_{AOK} = \frac{1}{3} S_{AOK} = 16 \text{ cm}^2.$$

Тогава

$$S_{AOM} = S_{AMOK} - S_{AOK} = 36 - 16 = 20 \text{ cm}^2,$$

откъдето и $S_{BMO} = 20 \text{ cm}^2$. Така $S_{ABC} = 2.(20 + 48) = 136 \text{ cm}^2$.

Оценяване. Доказателство, че лицето на триъгълника CKL е равно на половината от лицето на триъгълника ABC – 2 точки.

Доказателство, че $S_{AMC} = S_{CKL}$ – 1 точка.

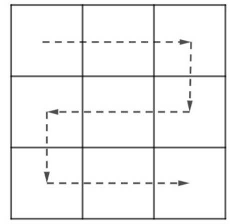
Намиране на лицето на COL – 1 точка.

Намиране на S_{COB} – 1 точка.

Намиране на S_{AOK} – 1 точка,

Намиране на S_{ABC} – 1 точка.

Задача 4. Серпентина ще наричаме квадратна таблица $n \times n$, в която са записани последователни цели числа по следния начин: най-малкото от числата е в горния ляв ъгъл; в първия ред числата нарастват отляво надясно; в последното поле от реда се прави завой към полето под него; във втория ред числата нарастват отдясно наляво и т.н. (Стрелките на фиг. 1 показват реда на попълване на последователните числа в серпентина 3×3.)



Фиг. 1

При всеки ход се избират две съседни полета в таблицата (т.е. полета с обща страна) и към числата в тях се прибавя едно и също число. На фиг. 2 са показани два поредни хода в таблица 3×3: при първия ход към числата в сивите квадратчета се прибавя 2, а при втория ход към избраните квадратчета се прибавя (-6).

-2	-1	0
3	2	1
4	5	6

$\rightarrow$

0	-1	0
5	2	1
4	5	6

$\rightarrow$

0	-1	0
5	2	1
4	-1	0

Фиг. 2

Една серпентина наричаме **особена**, ако след няколко хода от нея може да се получи таблица, във всички полета на която е записана 0.

а) Намерете всички особени серпентини при $n = 5$.

б) Съществува ли особена серпентина при $n = 10$?

Решение. Ако оцветим таблицата шахматно, при всеки ход едно бяло и едно черно поле се увеличават или намаляват с едно и също число. Това означава, че разликата между сбора на числата в белите полета и сбора на числата в черните полета се запазва.

а) Общият вид на серпентина 5×5 е следният:

$a-12$	$a-11$	$a-10$	$a-9$	$a-8$
$a-3$	$a-4$	$a-5$	$a-6$	$a-7$
$a-2$	$a-1$	a	$a+1$	$a+2$
$a+7$	$a+6$	$a+5$	$a+4$	$a+3$
$a+8$	$a+9$	$a+10$	$a+11$	$a+12$

Сборът на числата в черните полета е $S_b = 13a$, а сборът на числата в белите полета е $S_w = 12a$. След всеки ход се запазва разликата между сбора на числата в черните полета и сбора на числата в белите полета, който отначало е $S_b - S_w = a$.

Следователно ако серпентината 5×5 е особена, то $a = 0$.

Остава да покажем, че при $a = 0$ с няколко хода може да се получи таблица само с 0. В таблицата

-12	-11	-10	-9	-8
-3	-4	-5	-6	-7
-2	-1	0	1	2
7	6	5	4	3
8	9	10	11	12

разделяме полетата по двойки и след 10 хода

$$(-12;-11) \to (0;1),\ (-10;-9) \to (1;2),\ (-8;-7) \to (2;3),$$
$$(-6;-5) \to (3;4),\ (-4;-3) \to (4;5),\ (-2;-1) \to (5;6),$$
$$(7;8) \to (0;1),\ (9;10) \to (1;2),\ (5;4) \to (2;1),\ (3;12) \to (2;11)$$

стигаме до таблица, в която има 11 двойки съседни полета, във всяка от които са записани равни числа:

0	1	1	2	2
5	4	4	3	3
5	6	0	1	2
0	6	2	1	2
1	1	2	11	11

От тук с 11 хода получаваме таблица само с 0.

б) В серпентина 10×10 са записани 100 числа; ако в горния ляв ъгъл е числото $a-50$, най-голямото число в таблицата $a+49$ ще е записано в долния ляв ъгъл. Сборът на всички числа в таблицата е $100a-50$.

Ако оцветим таблицата шахматно така, че $a-50$ да е в черно поле, сборът на числата в черните полета ще е

$$S_b = (a-50)+(a-48)+\cdots+(a-2)+a+(a+2)+\cdots+(a+48) = 50a-50,$$

а сборът на числата в белите полета ще е

$$S_w = (100a-50)-(50a-50) = 50a,$$

което означава, че $S_w - S_b = 50$ след всеки ход. Това означава, че не съществува особена серпентина 10×10.

Забележка. По същия начин може да се докаже, че особена серпентина съществува само за нечетно n.

Оценяване. За шахматно оцветяване и съображението, че сборът на числата в черните полета се променя по същия начин като сбора на числата в белите полета – 1 т.

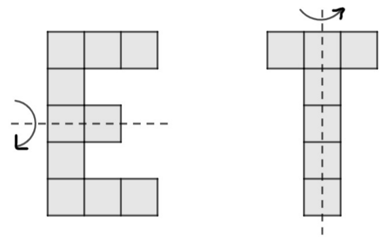
а) Доказателство, че в централното квадратче е записана 0 – 2 точки.

Пример как се стига до таблица само с 0 – 2 точки.

б) Доказателство, че разликата на сбора на числата в черните полета и сбора на числата в белите полета е ненулева константа – 2 точки.

Тема за 7. клас

Задача 1. Фигурите **E** и **T** на чертежа са съставени от квадратчета със страна 2 cm. Всяка от фигурите се завърта на 360° около оста си на симетрия (означена с пунктир) и се получават ротационните тела P_{E} и P_{T}.



а) Намерете отношението на лицата на повърхнините на P_{E} и P_{T}.

б) Машинни детайли с формата и размерите на P_{E} и P_{T} се отляти от метална сплав. Намерете съответната им маса, като използвате, че 1 cm^3 от сплавта тежи 7 g и приемете, че $\pi \approx \dfrac{22}{7}$.

Решение. а) Повърхнината на P_{E} се състои от: околната повърхнина на цилиндър с $r = 5$ cm, $h = 6$ cm; околната повърхнина на цилиндър с $r = 3$ cm, $h = 4$ cm; околната повърхнина на цилиндър с $r = 1$ cm, $h = 2$ cm; кръг с $r = 5$ cm; кръг с $r = 1$ cm и два кръгови венеца, които общо съставят кръг с $r = 5$ cm. Следователно

$$S_{\text{E}} = 2\pi.5.6 + 2\pi.3.4 + 2\pi.1.2 + 2.\pi.5^2 = 138\pi \text{ cm}^2.$$

Повърхнината на P_{T} се състои от: околната повърхнина на цилиндър с $r = 3$ cm, $h = 2$ cm; околната повърхнина на цилиндър с $r = 1$ cm, $h = 8$ cm; кръг с $r = 3$ cm; кръг с $r = 1$ cm и кръгов венец, които общо съставят кръг с $r = 3$ cm. Следователно

$$S_{\text{T}} = 2\pi.3.2 + 2\pi.1.8 + 2\pi.3^2 = 46\pi \text{ cm}^2.$$

Намираме $S_{\text{E}} : S_{\text{T}} = 138\pi : 46\pi = 3 : 1$.

б) Обемът на P_{E} се получава, като се съберат обемите на цилиндър с $r = 5$ cm, $h = 6$ cm и на цилиндър с $r = 1$ cm, $h = 2$ cm и се извади обемът на цилиндър с $r = 3$ cm, $h = 4$ cm, т.е.

$$V_{\text{E}} = \pi.5^2.6 + \pi.1^2.2 - \pi.3^2.4 = 116\pi \text{ cm}^3.$$

Тогава масата на P_{E} е приблизително $116 \cdot \dfrac{22}{7} \cdot 7 = 2552$ g.

Обемът на P_{T} се се получава, като се съберат обемите на цилиндър с $r = 3$ cm, $h = 2$ cm и на цилиндър с $r = 1$ cm, $h = 8$ cm, т.е.

$$V_{\text{T}} = \pi.3^2.2 + \pi.1^2.8 = 26\pi \text{ cm}^3.$$

Тогава масата на P_{T} е приблизително $26 \cdot \dfrac{22}{7} \cdot 7 = 572$ g.

Оценяване. а) Пълно решение: 3 точки.

б) Пълно решение: 3 точки.

Задача 2. Намерете всички двойки естествени числа $(p; q)$, за които

$$p^2 - q^2 = M,$$

където

$$M = \frac{12^{p-2q} \cdot 75^{6+6q-3p}}{18^{2p-4q-3} \cdot 15^{11-6p+12q}}.$$

Решение. Ако означим $p - 2q = n$, имаме

$$M = \frac{12^{p-2q} \cdot 75^{6+6q-3p}}{18^{2p-4q-3} \cdot 15^{11-6p+12q}} = \frac{12^{n} \cdot 75^{6-3n}}{18^{2n-3} \cdot 15^{11-6n}} =$$

$$= \frac{(2^{2n} \cdot 3^{n}) \cdot (3^{6-3n} \cdot 5^{2(6-3n)})}{(2^{2n-3} \cdot 3^{2(2n-3)}) \cdot (3^{11-6n} \cdot 5^{11-6n})} = \frac{2^{2n} \cdot 3^{6-2n} \cdot 5^{12-6n}}{2^{2n-3} \cdot 3^{5-2n} \cdot 5^{11-6n}} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120.$$

Тогава

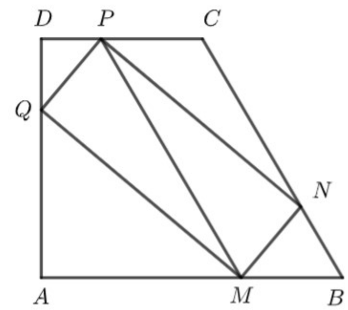
$$p^2 - q^2 = 120 \iff (p-q)(p+q) = 120.$$

Множителите $p-q$ и $p+q$ са с еднаква четност, като $p-q < p+q$. Тъй като произведението е четно, то $p-q$ и $p+q$ са четни числа. Числото 120 може да се представи като произведение на две четни числа по четири начина $(2 \cdot 60 = 4 \cdot 30 = 6 \cdot 20 = 10 \cdot 12)$ и получаваме следните възможности:

1. случай. $p-q = 2$ и $p+q = 60$, откъдето $p = 31$ и $q = 29$ са решение;
2. случай. $p-q = 4$ и $p+q = 30$, откъдето $p = 17$ и $q = 13$ са решение;
3. случай. $p-q = 6$ и $p+q = 20$, откъдето $p = 13$ и $q = 7$ са решение;
4. случай. $p-q = 10$ и $p+q = 12$, откъдето $p = 11$ и $q = 1$ са решение.

Оценяване. Намиране на M – 3 точки.
Намиране на двойките решения – 3 точки.

Задача 3. Даден е правоъгълен трапец $ABCD$ с основи AB и CD и прав ъгъл при върха A. В четириъгълника е вписан правоъгълник $MNPQ$, така че M, N, P, Q лежат съответно на страните AB, BC, CD, DA и



$$PD : DQ = DQ : QA = QA : AM = 3 : 4,$$

а диагоналът MP е успореден на BC.

а) Намерете отношението $DP : PC$.

б) Върху отсечката AM е избрана точка X така, че отсечката AX е равна на 37% от MB. Пресечната точка на отсечките PN и MC е означена с E, а пресечната точка на PX и MQ с F. Докажете, че

$$S_{MEPF} = S_{AXFQ} + S_{MBN} + S_{ENC} + S_{DQP}.$$

Решение. От $PD = 3k$, $DQ = 4k$ по Питагорова теорема за триъгълника DPQ получаваме $QP^2 = (3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$, т.е. $QP = 5k$.

Аналогично, от $QA = 3n$, $AM = 4n$ намираме $QM = 5n$.

Тъй като $DQ : QA = 3 : 4$, то

$$\frac{4k}{3n} = \frac{3}{4} \iff k : n = 9 : 16.$$

Изразяваме $S_{MNPQ} = 5k \cdot 5n = 25kn$ и $S_{MNP} = \dfrac{1}{2}S_{MNPQ} = \dfrac{25}{2}kn$.

Тъй като PM е успоредна на BC и AB е успоредна на CD, то $MBCP$ е успоредник. Тогава

$$S_{MNP} = \frac{1}{2} \cdot MP \cdot h_{MP} = \frac{1}{2} \cdot S_{MBCP}$$

и получаваме, че $S_{MBCP} = 2S_{MNP} = 25kn$.

От друга страна, $S_{MBCP} = PC \cdot AD$ и тъй като

$$AD = 4k + 3n = 4 \cdot \frac{9}{16}n + 3n = \frac{21}{4}n,$$

от равенството $25kn = PC \cdot \dfrac{21}{4}n$ намираме $PC = \dfrac{100}{21}k$. Тогава

$$DP : PC = 3 : \frac{100}{21} = 63 : 100.$$

б) Имаме $AX = 37\% MB = 37\% PC = 37\% \cdot \dfrac{100}{21}k = \dfrac{37}{21}k$.

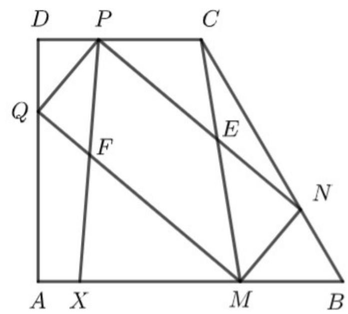
Равенството

$$S_{MEPF} = S_{AXFQ} + S_{MBN} + S_{ENC} + S_{DQP}$$

е еквивалентно на

$$S_{MNPQ} = S_{AXPD} + S_{MBC}$$

(получава се, като се прибави към двете страни на равенството $S_{FPQ} + S_{MNE}$). Но



$$S_{AXPD} + S_{MBC} = \frac{AX + DP}{2} \cdot AD + \frac{MB}{2} \cdot AD = \frac{AX + DP + MB}{2} \cdot AD =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{37}{21}k + 3k + \frac{100}{21}k\right) \cdot \frac{21}{4}n = \frac{1}{2} \cdot \frac{200}{21}k \cdot \frac{21}{4}n = 25kn = S_{MNPQ},$$

което искахме да докажем.

Оценяване. а) Пълно решение: 5 точки.

Изразяване на PD, DQ, QA, AM – 1 точка.

Прилагане на Питагоровата теорема и изразяване на страните и лицето на правоъгълника – 2 точки.

Доказателство, че лицето на успоредника $MBCP$ е равно на лицето на правоъгълника – 1 точка.

Изразяване на PC и намиране на търсеното отношение – 1 точка.

б) Пълно решение: 2 точки.

Свеждане на даденото равенство до $S_{MNPQ} = S_{AXPD} + S_{MBC}$ – 1 точка.

Доказване на това равенство – 1 точка.

Задача 4. За редица от нули и единици са разрешени следните действия:

Действие X: две поредни цифри 01 се заменят с 10. Например,

$$1\mathbf{01}0 \xrightarrow{X} 1\mathbf{10}0.$$

Действие Y: две поредни цифри 01 се заменят с 110. Например,

$$1\mathbf{01}0 \xrightarrow{Y} 1\mathbf{110}0.$$

а) Започваме от редица A, която се състои от 20 цифри (0 или 1), и последователно прилагаме действие X:

$$A \xrightarrow{X} A_1 \xrightarrow{X} A_2 \text{ и т.н., докато е възможно.}$$

Най-много колко пъти последователно може да се приложи действие X? При коя начална редица A се получава това?

б) Започваме от редица B, която се състои от 20 цифри (0 или 1), и последователно прилагаме действие Y:

$$B \xrightarrow{Y} B_1 \xrightarrow{Y} B_2 \text{ и т.н., докато е възможно.}$$

Най-много колко цифри може да има в редица, която е получена по този начин?

Решение. а) Нека в редицата A има a цифри 0 и $20-a$ цифри 1.

Към всяка двойка 0 и 1 в A действието X може да се приложи най-много веднъж (защото след това тази нула минава вдясно от единицата). Двойките 0 и 1 в редицата A са $a(20-a)$ на брой. Следователно действието X може да се приложи най-много $a(20-a)$ пъти. Тази стойност се реализира при $A = \underbrace{0\ldots0}_{a}\underbrace{1\ldots1}_{20-a}$:

$$\underbrace{0\ldots0}_{a}\underbrace{1\ldots1}_{20-a} \xrightarrow{X} \underbrace{0\ldots0}_{a-1}10\underbrace{1\ldots1}_{19-a} \xrightarrow{X} \underbrace{0\ldots0}_{a-2}100\underbrace{1\ldots1}_{19-a} \xrightarrow{X} \cdots \xrightarrow{X}$$

$$1\underbrace{0\ldots0}_{a}\underbrace{1\ldots1}_{19-a} \xrightarrow{X} \cdots \xrightarrow{X} 11\underbrace{0\ldots0}_{a}\underbrace{1\ldots1}_{18-a} \xrightarrow{X} \cdots \xrightarrow{X} \underbrace{1\ldots1}_{20-a}\underbrace{0\ldots0}_{a}.$$

Броят на действията X в редица с a цифри 0 и $20-a$ цифри 1 е най-много

$$a(20-a) = 100 - (a-10)^2 \leqq 100,$$

т.е. е най-много 100, като тази стойност се достига при $a = 10$ и $A = \underbrace{0\ldots0}_{10}\underbrace{1\ldots1}_{10}$.

б) Нека вляво от дадена цифра 1 има k цифри 0. Това поражда следните последователни действия Y:

$$\underbrace{0\ldots0}_{k}1 \xrightarrow{Y} \underbrace{0\ldots0}_{k-1}110 \xrightarrow{Y} \underbrace{0\ldots0}_{k-2}11010 \xrightarrow{Y} \underbrace{0\ldots0}_{k-2}111100 \xrightarrow{Y}$$

$$\underbrace{0\ldots0}_{k-3}11011100 \xrightarrow{Y} \underbrace{0\ldots0}_{k-3}111101100 \xrightarrow{Y} \underbrace{0\ldots0}_{k-3}1111110100 \xrightarrow{Y}$$

$$\underbrace{0\ldots0}_{k-3}\underbrace{11111111}_{2^3}000 \xrightarrow{Y} \cdots \xrightarrow{Y} \underbrace{1\ldots1}_{2^k}\underbrace{0\ldots0}_{k}$$

Ако в редицата има b цифри 0 и $c = 20 - b$ цифри 1, най-дългата възможна редица е с дължина $c \cdot 2^b + b$. Ако увеличим броя на единиците до $c+1$ и нулите станат $b-1$, получаваме максимална дължина $(c+1) \cdot 2^{b-1} + b - 1$. Тъй като

$$c \cdot 2^b + b = 2c \cdot 2^{b-1} + b > (c+1) \cdot 2^{b-1} + b - 1,$$

следва, че с увеличаване на броя на единиците, максималната дължина на редиците намалява.

Следователно най-дълга редица се получава, когато $c = 1$ и $b = 19$.

Получихме, че с действие Y може да се получи редица с най-много $2^{19} + 19$ цифри.

Оценяване. а) Пълно решение: 2 точки.

За посочване на верен отговор за максимален брой ходове – 0,5 точки.

Посочване на примера, при който се достига максимумът – 0,5 точки.

Доказателство – 1 точка.

б) Пълно решение: 5 точки.

За посочване на верен отговор за максималната дължина – 1 точка.

Посочване на примера, при който се достига най-голяма дължина на редицата – 1 точка.

Доказателство – 3 точки.