НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ „МАТЕМАТИКА ЗА ВСЕКИ“ – 2022

На 14 май 2022 г. се проведе състезанието „Математика за всеки“. То се организира от МОН и дава възможност на желаещите да участват в държавен-прием след IV клас в гимназии с профил „Математически“ или „Природни науки“.

Тази година в състезанието участваха повече от 3200 ученици. Максималният възможен резултат е 45 точки, а най-високият постигнат резултат е 41 т. Средният резултата е 9, 24 т., като само 132 участници са постигнали поне 50% от максимално възможния резултат.

1. Ако делимото е 20022, а делителят е 22, колко е сборът на частното и остатъка?

А) 91 **Б)** 93 **В)** 910 **Г)** 912

Отговор Г. $20022 : 22 = 910$ (ост. 2), $910 + 2 = 912$.

2. Неизвестното число x от равенството

$$(444 - 4.x) : 4 = 4\ .\ 4 + 4$$

е равно на:

А) 143 **Б)** 131 **В)** 91 **Г)** 79

Отговор В. От разпределителното свойство получаваме $111 - x = 20$, $x = 91$.

3. Иван тича със скорост 9 км/ч. Петър тича с такава скорост, че всяка минута изминава 50 м повече от Иван. С каква скорост тича Петър?

А) 10 км/ч **Б)** 11 км/ч **В)** 12 км/ч **Г)** 15 км/ч

Отговор В. За час Петър изминава $50.60 = 3000$ м, т.е. 3 км повече от Иван и скоростта му е $9 + 3 = 12$ км/ч.

4. Страниците на книга са номерирани с последователни числа

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

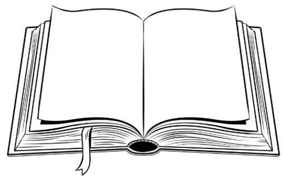
От книгата изпаднали два съседни листа. Сборът на три числа от номерацията на тези листове е 44. Кое е четвъртото число?

А) 14

Б) 15

В) 16

Г) има повече от една възможност



Отговор А. Ако номерата на страниците на изпадналите листи са $a, a+1, a+2, a+3$, то a и $a+2$ са нечетни, а $a+1$ и $a+3$ са четни. Сборът на три от тези числа е четен, само ако две от тях са нечетни, а третото е четно. Така $a+a+2+a+1 = 44$ или $a+a+2+a+3 = 44$. Само във втория случай получаваме решение, което е естествено число: $a = 13$. Трите събрани числа са 13, 15 и 16, а четвъртото е 14.

5. От правоъгълна хартиена лента е отрязан защрихованият квадрат.

Оказало се, че обиколката му е 4 пъти по-малка от обиколката на останалото от лентата парче. Колко пъти лицето на този квадрат е по-малко от лицето на първоначалната лента?

А) 4 **Б)** 6 **В)** 7 **Г)** 8

Отговор Г. Обиколката на останалото парче съдържа $4.4 = 16$ пъти страната на квадрата и тъй като широчината му е равна на страната на квадрата, то дължината е $16 : 2 - 1 = 7$ пъти страната на квадрата. Тогава първоначалната лента съдържа $7 + 1 = 8$ квадрата като защрихования.

6. Нека x е най-малкото четирицифрено число, за което сборът от цифрите му е по-малък от произведението им. Колко е сборът на цифрите на x?

А) 10 **Б)** 9 **В)** 8 **Г)** 7

Отговор Б. Първо е ясно, че в числото няма цифра 0.

Ако числото е от вида $\overline{111a}$, произведението на цифрите е a, а сборът им е $a + 3$ и е по-голям от произведението.

Ако числото е от вида $\overline{112a}$, произведението на цифрите е $2.a$, а сборът им е $a+4$ и е по-малък от произведението, когато a е по-голямо от 4. Най-малкото такова число е 1125 и сборът на цифрите му е 9.

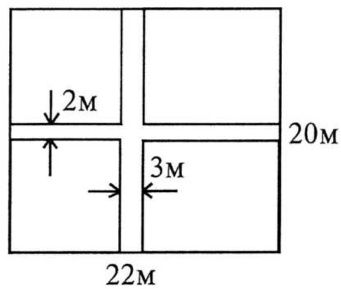
7. Асен, Борис и Виктор тренират футбол, баскетбол и волейбол – всеки от тях различен спорт. Футболистът и Виктор често ходят на гости у Борис. Борис и футболистът вчера гледаха мач на волейболиста. Кой тренира волейбол?

А) Асен **Б)** Борис

В) Виктор **Г)** не може да се определи

Отговор В. Футболистът е Асен. Борис не е волейболист, значи Виктор е волейболист.

8. В правоъгълен участък от парк с дължина 22 м и широчина 20 м направили две пътеки. Едната била широка 2 м, а другата – 3 м.



Колко квадратни метра от участъка са отделени за пътеките?

А) 106 **Б)** 104 **В)** 100 **Г)** 98

Отговор Г. Едната пътека има площ $2.22 = 44$ кв.м, а другата $3.20 = 60$ кв.м. Общата част на двете пътеки има площ $3.2 = 6$ кв.м. За пътеките са отделени $44 + 60 - 6 = 98$ кв.м.

9. Билет за филм струва 24 лв., а с отстъпка – 15 лв. За поредната прожекция продадоха x билета от двата вида за общо 444 лв. Колко е x, ако е възможно най-малко?

А) 16 **Б)** 20 **В)** 23 **Г)** 29

Отговор Б. Нека са продадени a билета по 24 лв. и b билета по 15 лв. Тогава $a.24 + b.15 = 444$, следователно b е четно число. Продадените билети са най-малко, когато евтините билети са възможно най-малко. При $b = 2$ получаваме $a.24 = 414$, което не води до решение. При $b = 4$ получаваме $a.24 = 384$, т.е. $a = 16$. Следователно $x = a+b$ е най-малко $4 + 16 = 20$.

10. В нашия клас сме 26 деца. Моят номер в класа е x и е с толкова по-голям от номера на Ани, с колкото е по-малък от номера на Ели.

Учениците с номер, по-малък от този на Ани, са 4 пъти по-малко от тези с номер, по-голям от този на Ели. Кое от посочените числа може да е x?

А) 7 **Б)** 8 **В)** 9 **Г)** 10

Отговор В. Номерът на Ани е $x - a$, а номерът на Ели е $x + a$. Учениците с номер, по-малък от този на Ани, са $x - a - 1$, а тези с номер, по-голям от номера на Ели, са $4.(x - a - 1)$. Получаваме, че

$$x + a + 4.(x - a - 1) = 26, \quad 5.x - 3.a = 30.$$

От последното равенство получаваме, че x се дели на 3, а от посочените отговори само 9 има това свойство. Следователно $x = 9$, $a = 5$ и Ани е номер 4, Ели е номер 14.

11. В една книжарница 4 тетрадки и 1 химикалка струват колкото 3 несесера, а 2 тетрадки – колкото 1 химикалка и 1 несесер. Кое от твърденията НЕ е вярно?

А) 1 химикалка и 1 тетрадка струват колкото 1 несесер

Б) 1 тетрадка струва колкото 2 химикалки

В) 3 тетрадки струват колкото 2 несесера

Г) 1 несесер струва колкото 2 химикалки

Отговор Г. 4 тетрадки струват колкото 2 химикалки и 2 несесера. Следователно 3 химикалки и 2 несесера струват колкото 3 несесера, т.е. 1 несесер струва колкото 3 химикалки. Тогава Г не е вярно.

12. От кутия с бонбони Иво взел първо 3 бонбона, а после третинката от останалите. Включил се и Вико, който първо взел 2 бонбона от останалите в кутията, а после и половината от новия остатък. Така в кутията вече имало само 6 бонбона, които двете деца си разделили по равно. Колко бонбони е взел Вико?

А) 8 **Б)** 10 **В)** 11 **Г)** 13

Отговор В. В кутията е имало $((6.2 + 2) : 2).3 + 3 = 24$ бонбона. Иво взел $3 + 7 + 3 = 13$ бонбона, а останалите 11 е взел Вико.

13. На едно състезание по математика дали само две задачи и се знае, че:

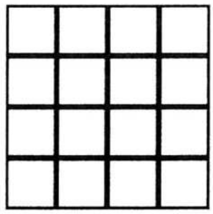
– 40 деца решили първата;
– 30 деца решили втората;
– 20 деца не решили нито една от двете задачи;
– поне 10 деца са решили и двете задачи.

Нека x е възможно най-големия брой участници в състезанието, а y е възможно най-малкия брой. Колко е $x + y$?

А) 140 **Б)** 130 **В)** 120 **Г)** 100

Отговор А. Броят на децата, решили и двете задачи, е най-малко 10 и най-много 30 (ако всички, които са решили втората задача, са решили и първата). Общо децата са най-много $40 + 30 + 20 - 10 = 80$ и най-малко $40 + 20 = 60$. Тогава $x + y = 80 + 60 = 140$.

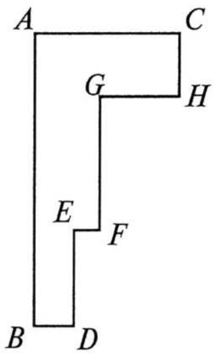
14. Дъска е разделена на 16 квадратчета. Борис оцветил някои от тях така, че всяко от квадратчета на дъската да има точно две съседни по страна оцветени квадратчета. Колко квадратчета е оцветил Борис?



А) 12 **Б)** 11 **В)** 10 **Г)** 9

Отговор А. Борис е оцветил всички $16 - 4 = 12$ квадратчета по границата на дъската.

15. Едновременно от A към C по отсечката AC и от B към C по начупената линия $B–D–E–F–G–H–C$ тръгнали две мравки. Те се движели без да променят скоростите си и пристигнали едновременно в C. Ако отсечката AB е два пъти по-дълга от AC, то колко пъти скоростта на мравката от B е по-голяма от тази на мравката от A?



А) 2 **Б)** 3

В) 4 **Г)** 5

Отговор Б. Ако $AC = x$, то $AB = 2.x$. Дължината на начупената линия $B - D - E - F - G - H - C$ е равна на сбора $AC + AB$. Едната мравка е изминала разстояние x, а другата е изминала $x + 2.x = 3.x$ за едно и също време, значи скоростта на втората мравка е 3 пъти по-голяма от скоростта на първата.

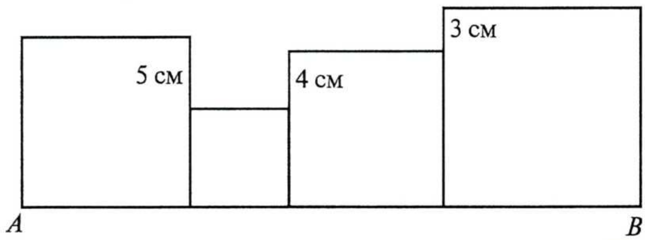
16. В редица са записани 41 естествени числа. Сборът на всеки 4 последователно записани числа е 44, а сборът на всичките числа е 444. Колко е сборът на първото и последното число в тази редица?

Отговор 8. Тъй като сборът на всеки 4 последователно записани числа е един и същ, то числата в редицата се редуват

$$a, b, c, d, a, b, c, d, \ldots, a, b, c, d, a,$$

като $a + b + c + d = 44$. Тъй като $41 : 4 = 10$ (ост. 1), то сборът на всичките числа е $10.44 + a = 444$, откъдето $a = 4$. Първото и последното число в редицата е 4 и сборът им е 8.

17. Четири квадрата са разположени на една права един до друг, като разликите в дължините на съответните страни са 5 см, 4 см и 3 см. Ако дължината на отсечката AB е 44 см, то колко квадратни сантиметра е площта на най-малкия квадрат?



Отговор 49. Ако най-малкият квадрат има страна x, то страните на останалите квадрати са $x+5$, $x+4$ и $x+7$. Получаваме $4.x + 16 = 44$, т.е. $x = 7$. Площта на най-малкия квадрат е 49 кв.см

18. Колко на брой са естествените числа между 1 и 2022, които са произведение на две последователни четни числа?

Отговор 21. Произведението на две последователни четни числа може да е $2.4 = 8$, $4.6 = 24$ и т.н., $40.42 = 1680$, $42.44 = 1848$, а $44.46 = 2024$ вече надхвърля 2022. Броят на търсените числа е $42 : 2 = 21$.

19. Антон записва в нарастващ ред всички естествени числа със сбор на цифрите 44. Кое е 11-тото поред число, което ще запише Антон?

Отговор 197999. Първото число е 89999, после следват 98999, 99899, 99989, 99998. Най-малкото шестцифрено със сбор на цифрите 44 е 179999 и после следват 188999, 189899, 189989, 189998. Следващото, 11-то число, е 197999.

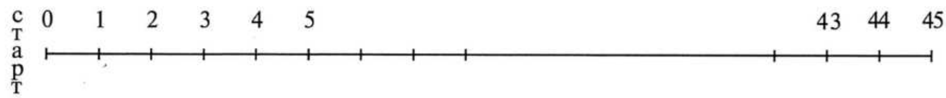
20. В ребуса СОК + СОК = ВОДА на еднаквите букви съответстват еднакви цифри, а на различните букви – различни цифри. Колко е ВОДА, ако е възможно най-малкото четирицифрено число?

Отговор 1254. Ясно е, че В $=$ 1.

Ако О е 0, то Д е 0 или 1, като и в двата случая има повторение.

Ако О е 2, то С е 6, а Д е 4 или 5. Ако Д е 4, сборът на единиците е по-малък от 10, значи К е най-много 4; но при К $=$ 0 получаваме и А $=$ 0, а при К $=$ 3 получаваме А $=$ 6 и има повторение. При Д $=$ 5 най-малкото решение е К$=$ 7, А $=$ 4.

Задача 1. Таралежите Тарльо и Барльо се подготвят за поредното си състезание със Заю. Този път са избрали за тренировка прав участък от горска пътека. Покрай пътеката са наредени през 1 метър 46 колчета, номерирани последователно с целите числа от 0 до 45. Двамата стартират едновременно от колче номер 0 и тичат без да спират с постоянни и еднакви скорости.



Тарльо тича до колче номер 1, обръща се (не губи време при обръщане) и се връща до старта. После тича до колче номер 2 и пак се връща до старта и така продължава да тича до следващото поред колче и да се връща до старта. Тренировката му свършва, когато стигне до колче номер 45 за първи път.

Барльо стартира и стига до колче номер 45. Обръща се (не губи време при обръщане) и се връща до колче номер 1. После отново тича до колче номер 45 и се връща до колче номер 2 и така всеки път тича до колче номер 45 и се връща до следващото поред колче. Тренировката му свършва, когато стигне до колче номер 444 и финишира до колче номер 45.

а) Колко метра е изминал Тарльо до момента, в който за първи път е до колче номер 10? Колко метра е изминал Барльо по време на тренировката си?

б) До кое колче е Тарльо и до кое е Барльо в момента, в който всеки е изминал точно 2022 метра?

в) До кое колче (след колче номер 1) е първата им среща?

г) Между кои две съседни колчета се намира Тарльо точно по средата на тренировката си?

Решение. а) Тарльо е изминал

$$2.(1+2+3+4+5+6+7+8+9)+10 = 2.45+10 = 100 \text{ м}$$

до момента, в който за първи път е до колче 10.

Барльо изминал по време на тренировката си общо

$$45 + 2.(44 + 43 + \cdots + 1) = 45 + 45.44 = 2025 \text{ м;}$$

толкова е изминал и Тарльо.

б) Тарльо изминава 2022 м, когато е на 3 м от края на тренировката си, т.е. на 42-то колче. Барльо изминава 2022 м, когато е на 44-то колче.

в) При първото си връщане, Барльо среща Тарльо. Когато Тарльо е за пръв път в колче 9, той е изминал

$$2.(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) + 9 = 81 \text{ м.}$$

Когато Барльо е изминал 81 м, той е на $81 - 45 = 36$ м от колче 45, т.е. при колче номер $45 - 36 = 9$. Следователно първата им среща е при колче номер 9.

г) По средата на тренировката си Тарльо е изминал 1012 м и половина. Тъй като

$$2.(1 + 2 + \cdots + 32) = 31.32 = 992,$$

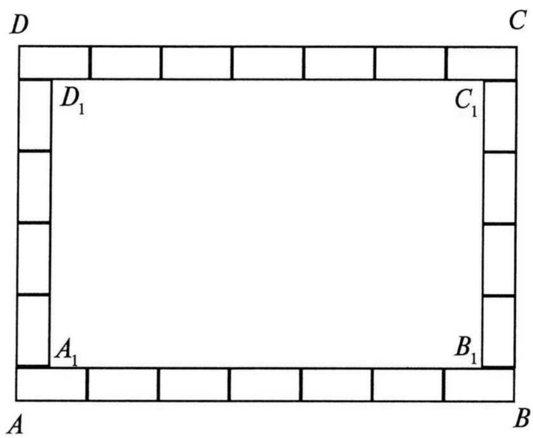
то на 992-ия метър от тренировката си той е до колче 0. На 1012-ия метър е на колче $1012 - 992 = 20$, значи по средата на тренировката си е между колчета 20 и 21.

Задача 2. В двора на Вичо има два басейна. Дъното на всеки от тях е с правоъгълна форма и трябва да се покрие с правоъгълни плочки. Вичо поканил майстор Фичо да направи това.

а) Дъното на първия басейн е правоъгълник $ABCD$. По краищата Фичо наредил плътно една до друга 22 еднакви правоъгълни плочки с дължина 25 см, както е показано на черт. 1. Оказало се, че разликата между обиколките на $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ е 96 см.

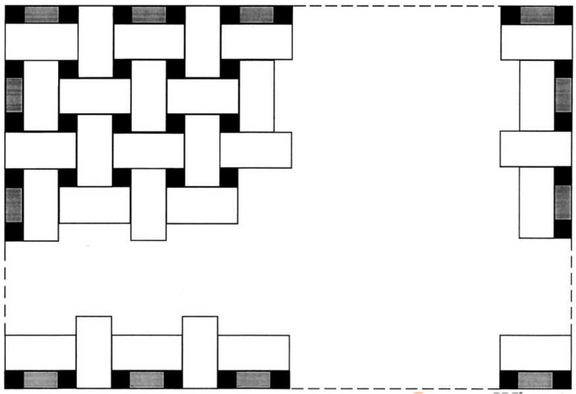
Колко сантиметра е широчината на една плочка?

Колко квадратни дециметра площ от дъното на басейна остава да покрие Фичо?



черт. 1

б) Дъното на втория басейн е с дължина 5 м и широчина 2 м. Фичо изцяло го покрил с плътно наредени плочки, както е показано на черт. 2. Той използвал три вида плочки – черни квадратни с дължина на страната 5 см, сиви правоъгълни със същата широчина и 2 пъти по-голяма дължина и по-големи бели плочки.



черт. 2

Колко сантиметра е обиколката на една бяла плочка?

По колко плочки от всеки вид е наредил Фичо?

Решение. а) Всяка страна на правоъгълника $ABCD$ е по-голяма от съответната ѝ страна в $A_1B_1C_1D_1$ с два пъти широчината на плочката. Следователно разликата на обиколите е $4.2 = 8$ пъти широчината на плочката. Широчината на плочката е $96 : 8 = 12$ см.

Оставащата площ е $(4.25).(7.25 - 2.12) = 15100$ кв.см $= 151$ кв.дм.

б) Бялата плочка има страни 20 см и 10 см и обиколка 60 см.

Белите плочки са в $(500 - 5) : 15 = 33$ вертикални ивици и във всяка от тях има 13 бели плочки, общо $33.13 = 429$ бели плочки.

Сивите плочки са $2.17 + 2.6 = 46$.

Черните плочки са $34.14 = 476$.