Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 15-17 ноември 2024 г.

София, 2024 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. Дадени са изразите $A = x^3 + 2x^2y + 2xy + 4y^2$ и $B = x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 2y^3$.
а) Да се разложи на два неконстантни множителя с рационални коефициенти всеки от изразите A, B и $A + 4.B$.
б) Ако $x + 2y = 5$ и $y + 2x^2 = 7$, то намерете най-големия прост делител на цялото число $A + 4.B$.

Решение. а) $A = x^2(x + 2y) + 2y(x + 2y) = (x^2 + 2y)(x + 2y)$.
$B = x^3+2x^2y+x^2y+2xy^2+xy^2+2y^3 = x^2(x+2y)+xy(x+2y)+y^2(x+2y) = (x^2+xy+y^2)(x+2y)$.
$A + 4.B = (x + 2y)(x^2 + 2y + 4x^2 + 4xy + 4y^2) = (x + 2y)(5x^2 + 4xy + 4y^2 + 2y)$.
б) $A + 4.B = (x + 2y)(x^2 + 4xy + 4y^2 + 2y + 4x^2) = (x + 2y)\left((x + 2y)^2 + 2(y + 2x^2)\right) = 5(5^2 + 2 \,.\, 7) = 195$, чийто най-голям прост делител е 13.

Коментар. С повече усилия същият извод се получава с намиране на двойките $(x; y)$, изпълняващи даденото условие, а именно $\left(\frac{1}{8}(1 \pm \sqrt{145}); \frac{1}{16}(39 \mp \sqrt{145})\right)$, и заместването им в израза, като в този случай аргументацията трябва да е валидна и за двете двойки.

Оценяване. (6 точки) 3 т. за а) (по 1 т. за вярно разлагане на всеки от изразите), 3 т. за б), от които 2 т. за изразяване на $A+4.B$ чрез $x+2y$ и $y+2x^2$ и 1 т. за правилно извършване на пресмятанията. При подход б) с намиране на x и y: 1 т. за намиране на двете възможности за x и y и по 1 т. за правилно извършване на пресмятанията във всеки от двата случая.

Задача 8.2. На лист хартия е начертан правоъгълен триъгълник ABC с $\measuredangle ACB = 90^\circ$ и $\measuredangle ABC = 30^\circ$. Известно е, че могат да се начертаят два кръга с радиус 1 cm върху листа така, че всяка точка от вътрешността или обиколката на триъгълника ABC да лежи във вътрешността или обиколката на поне един от кръговете.
а) Покажете един възможен начин за това при $BC = 3$ cm.
б) Докажете, че $BC \leq 3$ cm.

Решение. а) Нека средата на AB е M и симетралата на AB пресича BC в T. Тогава $\measuredangle TAB = \measuredangle TBA = 30^\circ$ и $\measuredangle CAT = \measuredangle BAC - \measuredangle BAT = 30^\circ$, значи $CT = \frac{AT}{2} = \frac{BT}{2}$, съответно $AT = BT = \frac{2BC}{3} = 2$ cm и $CT = 1$ cm. Сега ако K и L са средите на AT и BT, то от съображения за медиана към хипотенуза следва $AK = KC = KM = KT = 1$ cm и $BL = LM = LT = 1$ cm. Следователно кръговете с центрове K и L и радиус 1 cm покриват ABC.

б) Нека допуснем противното. Както в а) въвеждаме T и получаваме $AT = BT = \frac{2BC}{3} > 2$ cm, а също $AB > BC > 2$ cm. Така A, B, T са три точки, никои две от които не лежат в кръг с радиус 1 см (диаметър 2 cm) и значи няма как ABC да е покрит от два кръга.

Коментар. Може да се докаже, че измежду всички правоъгълни триъгълници, които могат да се покрият от два кръга с радиус 1 cm, с максимално лице е именно този с катет 3 cm и прилежащ към него ъгъл 30°.

Оценяване. (6 точки) 3 т. за а), от които 1 т. за описание на центровете на двете окръжности и 2 т. за проверка, че те вършат работа; 3 т. за б), от които 1 т. за описание на три точки, всеки две от които са на разстояние над 2 cm и 2 т. за доказателство, че това е така.

Задача 8.3. Да се намерят всички естествени числа n, такива че

$$a + b + c \quad \text{дели} \quad a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} - n(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

за всеки три различни естествени числа a, b и c.

Отговор. $n = 2$

Решение. Да изберем $b = 2$, $c = 1$ и нека $a \geq 3$ е произволно – тогава $a+3$ дели $a^{2n}+2^{2n}+1-n(5a^2+4)$. Да положим $d = a+3$ – значи d дели $(d-3)^{2n}+2^{2n}+1-n(5(d-3)^2+4)$ и значи дели и $(-3)^{2n}+2^{2n}+1-49n = 9^n+4^n-49n+1$. Така числото $9^n+4^n-49n+1$ има безбройно много естествени делители и трябва непременно да е равно на 0. Директно се проверява, че това не е така за $n = 1$, а при $n \geq 3$ индуктивно имаме $9^n > 49n$, понеже $9^3 = 729 > 441 = 49 \cdot 9$ и (при индукционното предположение) $9^{n+1} = 9 \cdot 9^n > 9 \cdot 49n = 441n > 49n+49 = 49(n+1)$. Остава $n = 2$, което е решение за всякакви a, b, c, понеже $a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2) = (a+b+c)(a-b-c)(b-c-a)(c-a-b)$. (Алтернативно, $c \equiv -a-b \pmod{a+b+c}$ и значи $a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2) \equiv a^4+b^4+(-a-b)^4-2(a^2b^2+b^2(-a-b)^2+(-a-b)^2a^2) \pmod{a+b+c}$, а след разкриване на скобите се вижда, че последното е тъждествено равно на 0.)

Оценяване. (7 точки) 1 т. за разглеждане на числени стойности, по-малки или равни на 3, на две от променливите, 2 т. за достигане до зависимост с делимо, зависещо само от n, 1 т. за обосновка, че това делимо трябва да е 0, 1 т. за довършване на $n \neq 2$ (напр. чрез неравенства с индукция), 2 т. за доказване, че $n = 2$ работи.

Задача 8.4. Дадено е естествено число n. Равностранен триъгълник със страна n е разделен на равностранни триъгълничета със страна 1; техните върхове ще наричаме *възли*. Равностранен триъгълник с върхове три от възлите (и страни не непременно успоредни на страните на началния) ще наричаме *важен*. Означаваме с p_k броя ненаредени двойки различни възли, които са върхове на точно k важни триъгълника. Запишете като многочлен на променливата n в нормален вид изразите: а) $p_0+p_1+p_2$; б) p_1+2p_2.

Отговор. а), б) $\frac{1}{8}(n^4+6n^3+11n^2+6n)$

Решение. а) Броят на възлите е $1+2+\cdots+(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Всяка двойка възли участва в 0, 1 или 2 специални триъгълника, така че $p_0+p_1+p_2$ е всъщност броят на всички ненаредени двойки възли:

$$p_0+p_1+p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \cdot \frac{1}{2}((n+1)(n+2)-1) = \frac{1}{8}(n^4+6n^3+11n^2+6n).$$

б) Имаме $p_1+2p_2 = 3S$, където S е броят важни триъгълници, понеже всеки триъгълник е броен по веднъж откъм трите си страни, така че ще търсим S. Ще казваме, че важният триъгълник τ е *базов*, ако страните му са успоредни на тези на триъгълника със страна n и е със същата ориентация. Всеки важен триъгълник τ може да се потопи в единствен базов триъгълник $f(\tau)$, чиито страни минават през върховете на τ. Ако страната на базов триъгълник е равна на $k \in \{1, \ldots, n\}$ (броят на тези базови триъгълници е $1+2+\cdots+(n+1-k) = \binom{n+2-k}{2}$), то той е равен на $f(\tau)$ за k различни τ (по един за всеки от възлите в основата на $f(\tau)$ без най-десния). Следователно

$$S = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n+2-k}{2} = \binom{n+3}{4}.$$

Можем да се уверим в последното равенство така: $\binom{n+3}{4}$ е броят на всички думи с 4 „А“ и $n-1$ „Б“. Ако между крайните „А“ има $n+2-k$ букви ($k \in \{1;\dots;n\}$), то за местата на крайните „А“ има k варианта, при всеки от които за местата на средните „А“ има $\binom{n+2-k}{2}$ варианта.

(Алтернативно, използвайте без доказателство известните формули $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ и $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. При използването на други формули за суми следва те да бъдат доказвани.) Окончателно

$$p_1 + 2p_2 = 3S = 3\binom{n+3}{4} = \frac{1}{8}(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n).$$

Коментар. От а) и б) следва $p_2 - p_0 = (p_1 + 2p_2) - (p_0 + p_1 + p_2) = 0$, т.е. $p_0 = p_2$. Не ни е известно директно комбинаторно доказателство (напр. със съответствие между двойките от единия тип и двойките от другия) на този факт.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за а), от които 1 т. за пресмятане на броя двойки възли и 1 т. за обосновка защо това е търсеният; 5 т. за б), от които 1 т. за свеждане до пресмятане на S, 2 т. за съответствието между $\binom{n+2-k}{2}$ базови триъгълника и k важни за всяко k и 2 т. за пресмятане на $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n+2-k}{2}$.

Задача 9.1. Да се реши в реални числа системата

$$\left| \begin{array}{ccccc} \dfrac{1}{x} & + & \dfrac{1}{y} & = & 2 \\[2ex] x^2y & + & xy^2 & = & 2. \end{array} \right.$$

Решение. Полагаме $p = x + y$, $q = xy$, с което системата добива вида

$$\left| \begin{array}{ccc} \dfrac{p}{q} & = & 2 \\ pq & = & 2. \end{array} \right.$$

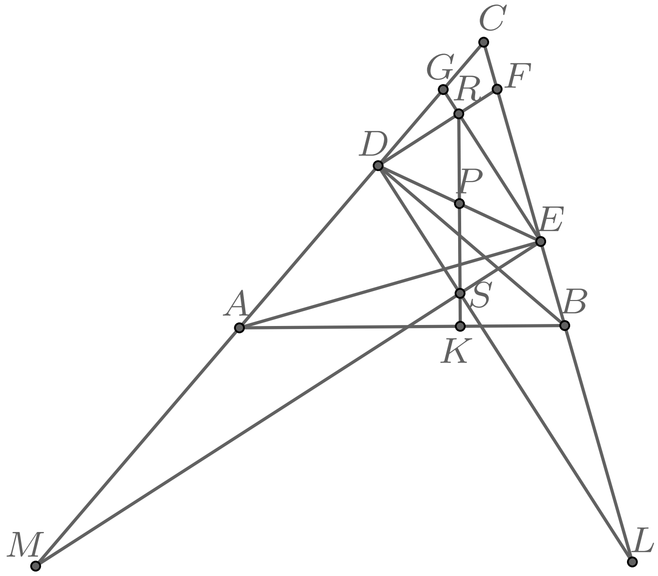
Да отбележим, че x и y са корени на квадратното уравнение $t^2 - pt + q = 0$. Умножавайки двете уравнения от последната система, получаваме $p^2 = 4$, следователно $p \in \{\pm 2\}$. При $p = 2$ имаме $q = 1$ и значи x, y са корени на уравнението $t^2 - 2t + 1 = 0$, т. е. $x = y = 1$. При $p = -2$ и $q = -1$ квадратното уравнение е $t^2 + 2t - 1 = 0$ и има корени $\{x, y\} = \{-1+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}\}$. Окончателно всички решения на системата са

$$(x; y) = (1; 1),\ (-1+\sqrt{2}; -1-\sqrt{2}),\ (-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}).$$

Оценяване. (6 точки) 2 т. за полагането; 2 т. за случая $p = 2$; 2 т. за случая $p = -2$.

Задача 9.2. Даден е остроъгълен разностранен триъгълник ABC с височини AE и BD. Върху правата AC са взети точки G и M, такива че $AE = AG = AM$ и C, G, A, M лежат в този ред. Върху правата BC са взети точки F и L, такива че $BD = BF = BL$ и C, F, B, L лежат в този ред. Нека P е средата на DE. Да се докаже, че перпендикулярът от P към AB и правите EM и DL се пресичат в една точка.

Решение.



Използваме стандартните означения α, β, γ за ъглите на ABC. Нека означим $R = DF \cap GE$ и $S = ME \cap DL$. Можем да намерим, че $\measuredangle DEG = \measuredangle AEG - \measuredangle AED = 45 + \frac{\gamma}{2} - (90 - \alpha) = \alpha + \frac{\gamma}{2} - 45$ и $\measuredangle EDF = \beta + \frac{\gamma}{2} - 45$, откъдето $\measuredangle DRE = 90$. С подобно изразяване намираме $\measuredangle SDE = \measuredangle SDB + \measuredangle BDE = 45 - \frac{\gamma}{2} + 90 - \beta = 135 - \beta - \frac{\gamma}{2} = \measuredangle DEG$, $\measuredangle SED = 135 - \alpha - \frac{\gamma}{2} = \measuredangle BDF$ и $\measuredangle DSE = 90$. Оттук лесно получаваме, че $\measuredangle SDR = \measuredangle SER = 90$, следователно $DRES$ е правоъгълник и значи P лежи на отсечката RS.
Накрая ако означим с K пресечната точка на AB и RS, то с изразяване на ъгли в четириъгълника $BKRE$ намираме

$$\measuredangle KRE + \measuredangle REB + \measuredangle EBK = 135 - \beta - \frac{\gamma}{2} + (45 + \frac{\gamma}{2} + 90) + \beta = 270,$$

следователно $\measuredangle RKB = 90$ и значи $RS \perp AB$. Тогава перпендикулярът от P към AB съвпада с правата RS, с което завършваме доказателството.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за получаване на $\measuredangle DRE = 90^\circ$ или $\measuredangle DSE = 90^\circ$; 1 т. за обосновка на $\measuredangle SDR = \measuredangle SER = 90^\circ$ и извод, че $DSER$ е правоъгълник; 1 т. за извод, че P лежи на RS; 2 т. за доказване, че $RS \perp AB$; 1 т. за завършване. При липса на което и да е от горните се дава 1 т. за доказване, че $DGFE$ или $DELM$ е вписан четириъгълник.

Задача 9.3. Едно естествено число наричаме *свободно от квадрати*, ако не се дели на квадрата на никое просто число.
За естествено число a разглеждаме числото $f(a) = a^{a+1} + 1$. Докажете, че:

а) ако a е четно, то $f(a)$ не е свободно от квадрати.
б) съществуват безбройно много нечетни a, за които $f(a)$ не е свободно от квадрати.

Решение. а) Нека p е просто число, което дели $a+1$ (такова има, тъй като $a+1>1$). Понеже $a+1$ е нечетно, то можем да разложим

$$a^{a+1}+1=(a+1)(a^a-a^{a-1}+\cdots-a+1).$$

Сега е ясно, че $a^a-a^{a-1}+\cdots-a+1\equiv(-1)^a-(-1)^{a-1}+\cdots-(-1)+1\equiv a+1\equiv 0 \pmod p$ и значи $p^2\mid a^{a+1}+1$.
б) *Първи метод.* Да забележим, че ако $p\mid a^{a+1}+1=(a^{\frac{a+1}{2}})^2+1$, то $p\equiv 1 \pmod 4$. При фиксиран избор на такова p ще построим нечетно a, за което $p^2\mid a^{a+1}+1$. Понеже простите числа от вида $4k+1$ са безбройно много и всяко число $a^{a+1}+1$ има краен брой прости делители, това е достатъчно, за да докажем твърдението.
И така, нека $p\equiv 1 \pmod 4$ е фиксирано. Ако намерим a, за което $p^2\mid a^2+1$ и $a\equiv 1 \pmod 4$, то a ще е нечетно и $p^2\mid a^2+1\mid (a^2)^{\frac{a+1}{2}}+1=a^{a+1}+1$. За целта първо намираме естествено число x, за което $p\mid x^2+1$ (например $x=\left(\frac{p-1}{2}\right)!$). След това разглеждаме числата

$$x^2+1,\ \ (x+p)^2+1,\ \ (x+2p)^2+1,\ldots,\ \ (x+(p-1)p)^2+1, \qquad (*)$$

всяко от които се дели на p. Ако допуснем, че за някои $k,\ell\in\{0,1,2,\ldots,p-1\}$ с $k\neq\ell$ е изпълнено

$$(x+kp)^2+1\equiv(x+\ell p)^2+1 \pmod{p^2}$$

ще получим $2xkp\equiv 2x\ell p \pmod{p^2}$ и съответно $k\equiv\ell \pmod p$, което е невъзможно. Това означава, че числата в $(*)$ са сравними в някакъв ред с $p,2p,3p,\ldots,(p-1)p,p^2$ при деление на p^2, в частност някое от тях се дели на p^2 и нека го означим с y^2+1. Накрая нека z е числото измежду $y,y+p^2,y+2p^2,y+3p^2$, което изпълнява $z\equiv 1 \pmod 4$. Ясно е, че $z^2+1\equiv y^2+1\equiv 0 \pmod{p^2}$, с което доказателството е завършено.
Втори метод. (Мирослав Маринов, Божидар Димитров) Достатъчно е да докажем, че за безбройно много нечетни a числото $a^{a+1}+1$ се дели на 25. Да забележим, че ако a_0 върши работа, то $100k+a_0$ също върши работа за всяко цяло неотрицателно k, понеже $(100k+a_0)^{100k+a_0+1}+1\equiv a_0^{100k+a_0+1}+1\equiv a_0^{a_0+1}+1 \pmod{25}$ от теоремата на Ойлер.
И така, задачата се свежда до това да намерим някое нечетно a_0, за което $25\mid a_0^{a_0+1}+1$. Еквивалентно, $25\mid a_0^{a_0+1}-49=\big(a_0^{\frac{a_0+1}{2}}+7\big)\big(a_0^{\frac{a_0+1}{2}}-7\big)$. Взимайки предвид $7^4\equiv 1 \pmod{25}$, сега е достатъчно да изберем например $a_0\equiv 7 \pmod{25}$ с $\frac{a_0+1}{2}\equiv 1 \pmod 4$, т.е. $a_0=57$. (Друга възможност е $a_0\equiv -7 \pmod{25}$ с $\frac{a_0+1}{2}\equiv 3 \pmod 4$, т.е. $a_0=93$.)

Оценяване. (7 точки) а) 2 т. за правилна конструкция; б) *Първи метод:* 1 т. за идея при фиксирано p да търсим подходящо a; 3 т. за $p^2\mid y^2+1$; 1 т. за $z\equiv 1 \pmod 4$. *Втори метод:* 1 т. за идея при определено p да търсим подходящи a; 4 т. за правилна конструкция.

Задача 9.4. *Обобщен $2n$-успоредник* ще наричаме изпъкнал многоъгълник с $2n$ страни, така че, обхождани последователно, k-тата страна е успоредна и равна на $(n+k)$-тата страна за $k=1,2,\ldots,n$.
В правоъгълна координатна система е даден обобщен успоредник с 50 върха, всеки с целочислени координати. Да се докаже, че лицето му е поне 300.

Решение. Ще докажем по индукция, че лицето на един обобщен успоредник $A_1A_2\dots A_{2n}$ е равно на сумата от лицата на всички успоредници от вида $MNOP$, където $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ и $\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{A_jA_{j+1}}$ за $1 \le i < j \le n$.
Базовата стъпка се проверява лесно. Да допуснем, че твърдението е вярно за всички обобщени $(2n-2)$-успоредници и нека разгледаме един обобщен $2n$-успоредник $A_1A_2\dots A_{2n}$. Имаме $\overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}} = -\overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{v}$.
Да транслираме точките $A_n, A_{n+1}, \dots, A_{2n-1}$ с $\overrightarrow{v}$. Получаваме нови точки $A'_n, A'_{n+1}, \dots, A'_{2n-1}$, за които $A'_n = A_{n-1}$ и $A'_{2n-1} = A_{2n}$. Ясно е, че фигурата $A_1A_2\dots A_{n-1}A'_{n+1}\dots A'_{2n-1}$ е обобщен $(2n-2)$-успоредник и за него е изпълнена индукционната хипотеза. Останалата част от първоначалния $2n$-успоредник $A_1A_2\dots A_{2n}$ е съставена точно от успоредниците $A_{n+k}A_{n+k+1}A'_{n+k+1}A'_{n+k}$ за $0 \le k \le n-2$, всеки от които има страна $A_{n+k}A'_{n+k}$, успоредна на $A_{n-1}A_n$. Тогава общият брой успоредници, съставящи $A_1A_2\dots A_{2n}$, е точно $\binom{n-1}{2} + n - 1 = \binom{n}{2}$, с което индукционната стъпка е завършена.
Накрая да забележим, че лицето на успоредник, чиито върхове имат целочислени координати, е поне 1 (например чрез формулата на Пик). Понеже лицето на обобщен $2n$-успоредник е равно на сбора от лицата на $\binom{n}{2}$ успоредници, които го съставят, то неговото лице е поне $\binom{n}{2}$. За $n = 25$ имаме $\binom{25}{2} = 300$, с което задачата е решена.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за индукция по броя на страните на обобщен успоредник; 2 т. за трансформацията на $2n-2$-ъгълник в $2n$-ъгълник и обратно чрез транслация; 3 т. за довършване на индукцията или общо 6 т. за друго доказателство на същото твърдение; 1 т. за завършване.

Коментар. Формулата за лице на обобщения успоредник няма нужда от целочисленост на координатите. Формулата на Пик може да се използва свободно без доказателство, както и общата формула за лице на изпъкнал многоъгълник чрез декартовите координати на страните му. Доказаната граница е класическа, но не е много точна. Има различни други граници свързани със задачата за минимално лице на многоъгълници с целочислени координати, както и редица отворени проблеми.

Задача 10.1. Да се намерят всички двойки реални числа $(x; y)$, които са решения на системата

$$\left| \begin{array}{l} (x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = 88 \\ (x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = 40 \end{array} \right. .$$

Отговор. 4 решения: $(x; y) = (\sqrt{7} \pm 1, \sqrt{7} \mp 1)$; $(x; y) = (-\sqrt{7} \pm 1, -\sqrt{7} \mp 1)$.
Решение. Първи метод. Тъй като $x^2 + y^2 \ge 0$, то в дефиниционната област на квадратния корен попадат всички реални $(x; y)$. Събирайки двете уравнения и разделяйки всяка от двете страни на две, получаваме

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 = 64 = 4^3 \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{x^2+y^2} = 4 \text{ и } x^2+y^2 = 16.$$

Изваждайки от първото уравнение второто и разделяйки всяка от двете страни на две, получаваме

$$xy\sqrt{x^2+y^2} = 24 \qquad \Longrightarrow \qquad xy = 24/4 = 6 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2y^2 = 36.$$

Според формулите на Виет x^2 и y^2 са корените на уравнението

$$t^2 - 16t + 36 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad t_{1,2} = 8 \pm 2\sqrt{7} = \left(\sqrt{7} \pm 1\right)^2.$$

Оттук $x, y \in \{\sqrt{7} \pm 1, -\sqrt{7} \pm 1\}$. От съображения за симетрия виждаме, че ако $(x; y)$ е решение, то решения са и $(y; x)$, $(-x; -y)$ и $(-y; -x)$. Тъй като $xy = 6 > 0$, то x и y са с еднакви знаци. Следователно всяка една от четирите възможности за $x \in \{\sqrt{7} \pm 1, -\sqrt{7} \pm 1\}$ еднозначно определя съответното y и така получаваме четирите решения на задачата $(x; y) = (\sqrt{7} \pm 1, \sqrt{7} \mp 1)$; $(x; y) = (-\sqrt{7} \pm 1, -\sqrt{7} \mp 1)$.

Втори метод. От $x^2 + y^2 = 16$ и $xy = 6$ получаваме $(x + y)^2 = 16 + 2 \cdot 6 = 28$, откъдето $|x + y| = 2\sqrt{7}$. Ако $x + y = 2\sqrt{7}$, то x и y са корени на квадратното уравнение

$$t^2 - 2\sqrt{7} + 6 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t_{1,2} = \sqrt{7} \pm 1,$$

и поради симетрията на x и y в този случай уравнението има 2 решения: $(x; y) = (\sqrt{7} \pm 1; \sqrt{7} \mp 1)$.

Ако пък $x + y = -2\sqrt{7}$, то x и y са корени на квадратното уравнение

$$t^2 + 2\sqrt{7} + 6 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t_{1,2} = -\sqrt{7} \pm 1,$$

и поради симетрията на x и y в този случай уравнението има 2 решения: $(x; y) = (-\sqrt{7} \pm 1; -\sqrt{7} \mp 1)$.

Оценяване. (6 точки) *Първи метод:* По 1 т. за $x^2 + y^2 = 16$ и $xy = 6$; 2 т. за $x, y \in \{\sqrt{7} \pm 1, -\sqrt{7} \pm 1\}$; 2 т. за намирането на четирите решения. *Втори метод:* по 1 т. за $|x + y| = 2\sqrt{7}$ и $xy = 6$; по 2 т. за всеки от случаите $x + y = \pm 2\sqrt{7}$, минус 1 т., ако е изпусната симетрията $(x; y) \to (y; x)$. *И при двата подхода,* ако преобразуванията не са еквивалентни, а само следствени (т.е., $\Longleftrightarrow$ е заменено с $\Longrightarrow$), то се отнема 1 т. при липса на проверка.

Задача 10.2. Даден е неравнобедрен остроъгълен триъгълник ABC, в който AL ($L \in BC$) е ъглополовящата на $\measuredangle BAC$ и M е средата на BC. Нека ъглополовящите на $\measuredangle AMB$ и $\measuredangle CMA$ пресичат AB и AC съответно в точките P и Q. Да се докаже, че описаната окръжност около триъгълника APQ се допира до BC тогава и само тогава, когато минава през L.

Решение. От свойството на ъглополовящата и факта, че $BM = MC$, получаваме

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AM}{BM} = \frac{AM}{MC} = \frac{AQ}{QC}$$

и от теоремата на Талес $PQ \parallel BC$. Следователно $\measuredangle BLP = \measuredangle LPQ = \varphi$. Нека ω е описаната окръжност около триъгълника APQ.

Нека ω се допира до BC в точка L'. Тогава

$$\measuredangle L'QP = BL'P = \measuredangle L'PQ,$$

т.е. L' е средата на дъгата $\overset{\frown}{PQ}$ от ω. Следователно AL' е ъглополовящата на $\measuredangle PAQ$, т.е. $L' \equiv L$.

Нека $L \in \omega$. Тогава понеже AL е ъглополовяща на $\measuredangle PAQ$, то $PL = LQ$, откъдето

$$\measuredangle PQL = \measuredangle LPQ = \measuredangle BLP = \varphi.$$

Последното означава, че ω се допира до BC.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за $PQ \parallel BC$, по 2 т. за всяка от двете посоки.

Задача 10.3. Да се намерят всички полиноми P с цели коефициенти, за които съществува естествено число N, такова че за всяко $n \geq N$, всеки прост делител на $n + 2^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$ е делител и на $P(n)$. (Тук $\lfloor x \rfloor$ означава най-голямото цяло число, по-малко или равно на реалното число x.)

Отговор. $P \equiv 0$.

Решение. Очевидно $P \equiv 0$ върши работа. Ще покажем, че други P няма. Да забележим, че $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = k$ за всеки две естествени n и k, за които $n \in [k^2, k^2 + 2k]$. Да фиксираме естествено число $m \geq N$ и просто число p. Да положим в горното $k = p - 1 + m$ и да разгледаме интервала $[k^2, k^2 + 2k]$. Той има дължина $2k > p$, следователно в него съществува естествено число $n \equiv -2^m \pmod{p}$. Тогава от теоремата на Ферма получаваме

$$n + 2^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} = n + 2^k \equiv -2^m + 2^{p-1+m} \equiv 0 \pmod{p}$$

Следователно $p \mid P(n)$. Понеже P е полином с цели коефициенти,

$$P(-2^m) \equiv P(n) \equiv 0 \pmod{p}$$

Така $p \mid P(-2^m)$ за всяко просто число p. Следователно $P(-2^m) = 0$ за всяко естествено число $m \geq N$. Това значи, че $P \equiv 0$, с което решението е завършено.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за ясната идея за разглеждане на числа n в интервали от вида $[k^2, k^2 + 2k]$, 4 т. за конструиране на двойки $(n; p)$ от посочения вид и доказване на делимостта, 2 т. за довършване.

Задача 10.4. Дадени са пълен ориентиран граф G с 2024 върха и естествено число $k \leq 10^5$. Ангел и Борис играят следаната игра: Ангел оцветява k от ребрата на G в червено и поставя пул в един от върховете на G. След това двамата правят ходове, редувайки се; Ангел започва. На всеки свой ход той премества пула в съседен връх, след което Борис променя ориентацията на някое от ребрата, което не е червено. Ако в някакъв момент Ангел не може да премести пула, то той губи и победител е Борис. Да се определи в зависимост от G и k дали Борис има печеливша стратегия.

Отговор. Борис има печеливша стратегия при $k \leq 2$ и всякакъв граф G, както и при $k \geq 3$, когато в G няма цикли.

Решение. Ще започнем решението със следните две леми.

Лема 1. Нека G е ориентиран граф с n върха, в който няма цикли. Тогава можем да номерираме върховете му с естествените числа от 1 до n така, че ако за някои два върха x и y с номера i и j съответно има ребро $x \to y$, то непременно $i < j$.

Решение. Ще използваме индукция по n. При $n = 2$ твърдението е тривиално. Нека сега исканото е в сила за всеки граф с по-малко от n върха. Ако допуснем, че от всеки връх в G излиза поне по едно ребро, то бихме получили цикъл, което е противоречие. Значи съществува връх v, от който не излизат ребра. Номерираме него с n, а останалите върхове номерираме съгласно индуктивната хипотеза за графа $G_1 := G \setminus \{v\}$ (понеже в G няма цикли, то и в G_1 няма). Това гарантира, че условието за ребрата в G_1 се изпълнява. Останалите ребра са от вида $u \to v$, но номерът на v е най-големият възможен (n), значи и за тях исканото е в сила. С това лемата е доказана.

Лема 2. Нека G е пълен ориентиран граф с n върха, в който има поне един цикъл. Тогава в G има цикъл с дължина 3.

Решение. Да допуснем противното и да разгледаме цикъл $v_1v_2 \dots v_kv_1$ с минимална дължина $k \geq 4$. Ако има ребро $v_3 \to v_1$, то $v_1v_2v_3v_1$ е цикъл с дължина $3 < k$, което е противоречие. Значи имаме реборото $v_1 \to v_3$; сега обаче $v_1v_3 \dots v_kv_1$ е цикъл с дължина $k - 1 < k$, което отново е противоречие. Следователно в G има цикъл с дължина 3, с което лемата е доказана.

Сега да пристъпим към решението. Ако $k \geq 3$ и в G има цикъл, то съгласно Лема 2 в G има цикъл C с дължина 3. Значи Ангел може да оцвети C и още произволни $k - 3$ ребра в червено и да постави пула в един от върховете на C. Понеже Борис не може да промени ориентацията на ребрата на този цикъл, то Ангел може да направи неограничен брой ходове, което го прави победител.

Нека сега е вярно, че в G или няма цикъл, или $k \leq 2$. Ще докажем, че и в двата случая Борис може след краен брой промени (възможно нула) да приведе G в граф, който може да бъде номериран със свойството в Лема 1. В първия случай това следва директно от лемата, остава да го проверим за $k \leq 2$. Да разгледаме червените ребра, които Ангел оцветява. Понеже те двете не образуват цикъл, то можем да номерираме участващите в тях върхове по желания начин. Останалите върхове в G номерираме по произволен начин и докато има ребра от вида $i \to j$, където $i > j$, Борис променя тяхната ориентация. Така получихме пълен ориентиран граф H с върхове числата от 1 до 2024 и ребра $i \to j$ за всеки $1 \leq i < j \leq 2024$. Нека след преместването от страна на Ангел пулът се намира във връх n. Разделяме върховете на H на 2 групи по следния начин:

$$A = \{1, 2, \dots, 1000\}; \; B = \{1001, 1002, \dots, 2024\}.$$

Да забележим, че ако ребрата, излизащи от върха, в който се намира пулът (в случая се намира в n) преди хода на Ангел, са само към такива с по-голям номер, то непременно върхът, в който пулът бива преместен, има по-голям номер. Остава да покажем, че Борис може да поддържа това свойство в сила.

Ребрата между двойка върхове от една и съща група са повече от 10^5 и за двете групи, следователно и в двете групи има поне по едно ребро, което не е червено – нека това са $a = a_1 \to a_2$ (респективно от върхове в A) и $b = b_1 \to b_2$ (респективно от върхове в B). Действаме по следния начин:

- ако пулът е във връх от A, променяме b;
- ако пулът е във връх от $B \setminus \{b_2\}$, променяме a;

- ако пултът е във b_2 и имаме реброто $b_1 \to b_2$, променяме a;
- ако пултът е във b_2 и имаме реброто $b_2 \to b_1$, променяме b.

Лесно се съобразява, че исканото се изпълнява при тази стратегия.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за пълно описание на случая, в който Ангел печели, 3 т. за пълно описание на случая, в който Борис печели, 1 т. за завършване. При формулиране на стратегията на Ангел според дължината на минималния цикъл на G и отсъствие на Лема 2 се отнемат 2 т.

Задача 11.1. Да се намерят всички реални числа a, за които уравнението

$$x^3 - (a+2)x^2 - (a-2)x + 2a - 1 = 0$$

има три различни корена x_1, x_2 и x_3, и тези корени заедно с числото a в някакъв ред образуват аритметична прогресия.

Решение. Тъй като

$$x^3 - (a+2)x^2 - (a-2)x + 2a - 1 = (x-1)(x^2 - (a+1)x - 2a + 1),$$

то $x_1 = 1$, а x_2 и x_3 са корени на $f(x) = x^2 - (a+1)x - 2a + 1 = 0$. Тъй като $x_2 + x_3 = a + 1$, то за дадената аритметична прогресия, с точност до симетрия, има две възможности – $x_2, 1, a, x_3$ или $1, x_2, x_3, a$.
В първия случай $x_2 = 2 - a$ и след заместване в уравнението получаваме

$$f(2-a) = 0 \iff 2a^2 - 7a + 3 = 0$$

с корени $a = 3$ и $a = \dfrac{1}{2}$.
Във втория случай $d = x_2 - 1$, като $x_2 = \dfrac{a+2}{3}$ и получаваме

$$f\left(\frac{a+2}{3}\right) = 0 \iff 2a^2 + 23a - 7 = 0,$$

с корени $a = \dfrac{-23 + \sqrt{585}}{4}$ и $a = \dfrac{-23 - \sqrt{585}}{4}$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за разлагането $(x-1)(x^2-(a+1)x-2a+1)$; 1 т. за наблюдението, че $x_2 + x_3 = a + 1$ води до разглеждането на само два случая; по 2 т. за пълно решаване на всеки от двата случая.

Задача 11.2. Ъглите при върховете A, B и C на триъгълник ABC са съответно първи, втори и трети член на намаляваща аритметична прогресия. Намерете ъглите на триъгълника, ако $\measuredangle BHI = 60^\circ$, където H и I са съответно ортоцентърът и центърът на вписаната окръжност на триъгълника.

Отговор. $80^\circ, 60^\circ, 40^\circ$.

Решение. Първи метод. От условието следва, че $\measuredangle B = 60^\circ$. Тогава $\measuredangle AIC = 120^\circ$ и ако P е симетричната на I спрямо AC, то $\measuredangle APC = 120^\circ$. Това означава, че P е върху описаната около ABC окръжност. Тъй като симетричната на H спрямо AC също лежи на описаната окръжност (означаваме тази точка с Q), то $QHIP$ е равнобедрен трапец. Следователно $\measuredangle PQH = \measuredangle IHQ = 120^\circ$.
Четириъгълникът $QBCP$ е вписан в окръжност, откъдето получаваме $\measuredangle PCB = 180^\circ - \measuredangle BQP = 60^\circ$. Понеже $\measuredangle BCI = \measuredangle ICA = \measuredangle ACP$, получаваме $\measuredangle ACB = 40^\circ$ и $\measuredangle BAC = 80^\circ$.

Втори метод. (Б. Димитров) Ще използваме стандартно означение за ъглите на триъгълника ABC. Тогава от даденото условие получаваме $2\beta = \alpha+\gamma \implies 3\beta = 180^\circ \implies \beta = 60^\circ$. Ще решим задачата за остроъгълен триъгълник (когато $\triangle ABC$ е тъпоъгълен, разсъжденията са аналогични). Имаме $\measuredangle AHC = \measuredangle AIC = 120^\circ$, откъдето четириъгълникът $AHIC$ е вписан. Сега

$$180 - \alpha = \measuredangle BHC = \measuredangle BHI + \measuredangle IHC = 60^\circ + \measuredangle IAC = 60^\circ + \frac{\alpha}{2} \implies \alpha = 80^\circ$$

От последното получаваме $\gamma = 40^\circ$

Оценяване. (6 точки) *Първи метод:* 1 т. за $\beta = 60^\circ$; 1 т. за доказване, че симетричната на I лежи на описаната окръжност; 2 т. за вписания четириъгълник $QBCP$; 2 т. за намиране на ъглите. *Втори метод:* 1 т. за $\beta = 60^\circ$; 2 т. за вписания четириъгълник $AHIC$; 3 т. за намиране на ъглите.

Задача 11.3. Кристи иска да раздаде бонбони на $n \geq 3$ свои съученици. Той разполага всеки от тях върху точка в двора на училището. Точките са в една равнина, като никои три от тях не лежат на една права. За всеки изпъкнал многоъгълник P с върхове сред тези точки, Кристи прави следното. Преброява учениците, които се намират вътре в P или на страните му, нека техният брой е S_P. Той раздава по S_P бонбона на всеки от тези S_P ученици. Ученик, получил най-малко бонбони след всички раздавания, наричаме *нещастен* (нещастните ученици могат да са един или повече). Определете максималното количество бонбони, които може да получи нещастен ученик.

Решение. Нека X е множеството от n точки. За изпъкнал многоъгълник P с върхове в X да означим с $C(P)$ множеството от точки в X, които са вътре или на контура на P. Нека Q е общият брой бонбони, получени от всички ученици, а m е броят бонбони, получени от нещастен ученик. Имаме

$$Q = \sum_P |C(P)|^2 \leq \sum_{A \subset X} |A|^2 = \sum_{k=3}^{n} k^2 \binom{n}{k}.$$

Първото неравенство е в сила, защото $P \to C(P)$ е инекция от множеството на изпъкналите многоъгълници с върхове в X към множеството от всички подмножества на X. Използвайки

$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$ и $\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i} = 2^m$, пресмятаме:

$$\begin{aligned}
Q = \sum_{k=3}^{n} k^2\binom{n}{k} &= n\sum_{k=3}^{n} k\binom{n-1}{k-1} \\
&= n\sum_{k=3}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1} + n\sum_{k=3}^{n}\binom{n-1}{k-1} \\
&= n(n-1)\sum_{k=3}^{n}\binom{n-2}{k-2} + n\sum_{k=3}^{n}\binom{n-1}{k-1} \\
&= n(n-1)(2^{n-2}-1) + n(2^{n-1}-(n-1)-1) \\
&= n(n+1)2^{n-2} - 2n(n-1) - n \qquad (1).
\end{aligned}$$

От (1) следва

$$m \leq (n+1)2^{n-2} - 2n + 1$$

Да разположим сега учениците във върховете на правилен n-ъгълник. Тогава за всяко $A \subset X$, изпъкналата обвивка на A се състои от всички върхове на A. Значи в (1) равенството се достига и $Q = n(n+1)2^{n-2} - n - 2n(n-1)$. От друга страна поради симетрията всеки ученик получава равен брой бонбони и значи $m = Q/n = (n+1)2^{n-2} - 2n + 1$.

Оценяване. (7 точки) 5 т. за доказване оценката отгоре, 2 т. – че тя се достига (примера). При валидна оценка отгоре, но липса на аргументация, че $P \to C(P)$ е инекция (или еквивалентно разсъждение) се отнема 1 т. Ако формулата за m не е в затворен вид, (т.е. пресмятанията в (1) не са направени) се отнема 1 т.

Задача 11.4. Да се намери най-малкото естествено число n, за което съществуват n две по две различни естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, такива че стойността на израза

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 - 2025}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

е естествено (т.е. цяло положително) число.

Отговор. $n = 9$.

Решение. Нека означим

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i\,;\; Q = \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Тъй като a_i и a_i^2 са от еднаква четност, то S и Q също са от еднаква четност. Щом Q дели $S^2 - 2025$, то S и Q са нечетни. Но тогава $S^2 - 2025 = (S-45)(S+45)$ се дели на 8 и понеже Q е нечетно, получаваме

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 - 2025}{\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)} \geq 8.$$

От друга страна от неравенството между средно аритметично и средно квадратично имаме:

$$nQ \geq S^2 > S^2 - 2025 \geq 8Q,$$

следователно $n > 8$, значи $n \geq 9$. Ще докажем, че за $n = 9$ е възможно да удовлетворим условията. Искаме да намерим решение на уравнението $S^2 - 2025 = 8Q$, тъй като знаем, че ако изразът има стойност, различна от 8, то $n > 16$. Целейки симетрия, нека положим $(a_1, a_2, a_3) = (x-1, x, x+1)$, $(a_4, a_5, a_6) = (y-1, y, y+1)$ и $(a_7, a_8, a_9) = (z-1, z, z+1)$ за естествени числа x, y и z. Тогава можем да пренапишем уравнението $S^2 - 2025 = 8Q$ като

$$(3x + 3y + 3z)^2 - 2025 = 8(3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6).$$

Разделяйки двете страни на 3 и разлагайки лявата страна, получаваме:

$$3(x + y + z - 15)(x + y + z + 15) = 8(x^2 + y^2 + z^2 + 2).$$

От съображения по модул 3 за дясната страна, точно едно от числата x, y и z не е кратно на 3. Нека $x = 3u + 1$, $y = 3v$, $z = 3w$ за $u, v, w \in \mathbb{N}$ (избрахме $x = 3u + 1$, но решения могат да се намерят и в случая $x = 3u + 2$). Пренаписвайки уравнението отново, получаваме:

$$(3u + 3v + 3w - 14)(3u + 3v + 3w + 16) = 8(3u^2 + 3v^2 + 3w^2 + 2u + 1).$$

Можем да забележим, че $u \equiv 2 \pmod 3$, разглеждайки уравнението отново по модул 3. При $u = 2$ уравнението е еквивалентно на

$$3(v - w)^2 + \frac{1}{2}(2v - 7)^2 + \frac{1}{2}(2w - 7)^2 + 55 = 0.$$

Последното няма решения, понеже лявата страна е положителна, а при $u = 5$ намираме $(v; w) = (7; 10)$, което води до решението

$$(a_1, a_2, \ldots, a_9) = (15, 16, 17, 20, 21, 22, 29, 30, 31).$$

Оценяване. (7 точки) 5 т. за $n \geq 9$, (1 т. за доказване $n \geq c$, където $c \in [3..8]$); 2 т. за показване, че $n = 9$ е възможен (пример).

Задача 12.1. Редицата $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ е зададена чрез

$$a_0 = c,$$
$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{a_n}{2} + c \text{ за } n \geq 0,$$

където $c > 0$ е реален параметър. Да се намерят всички стойности на c, за които редицата (a_n) е сходяща и при тези стойности да се определи нейната граница.

Отговор. $c \in (0, 1/16]$.

Решение. Нека първо $c > \frac{1}{16}$. Тогава имаме

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{16} + \frac{a_n}{2} + c - \frac{1}{16} \geq a_n + (c - \frac{1}{16}),$$

т.к $x^2 + \frac{1}{16} \geq \frac{x}{2}$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Така получаваме, че $a_n \geq c + (n-1)(c - \frac{1}{16})$ за $n \in \mathbb{N}$, т.е редицата е неограничена и следователно не е сходяща.

Обратно, нека $c \leq \frac{1}{16}$. Ще докажем с индукция по n, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ е в сила $a_n \geq a_{n-1}$ и $a_n \leq l$, където l е по-малкият корен на уравнението $f(x) = x^2 - \frac{x}{2} + c = 0$.
За $n = 0$ е ясно, че $a_1 > c = a_0$, а т.к $f(c) = c^2 + \frac{c}{2} > 0$ и c е по-малко от поне един от двата корена на f(това е вярно т.к уравнението има поне един корен по-голям от $1/4$ от формулите на Виет) то следва, че $c < l$.
Ако допуснем, че твърдението е вярно за n, то т.к имаме $a_{n+1} - a_n = f(a_n)$, получаваме, че $f(a_n) > 0$, понеже $a_n < l$. Също така имаме, че

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{a_n}{2} + c \leq l^2 + \frac{l}{2} + c = l,$$

където първото неравенство следва, т.к $x \mapsto x^2 + \frac{x}{2}$ е растяща в $(0,1)$, а последното равенство следва от $f(l) = 0$. Така индукцията е завършена откъдето следва, че a_n е растяща и ограничена, следователно сходяща. Ако t е границата ѝ, то $f(t) = 0$ и т.к $a_n < l$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, то получаваме, че

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l = \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{16} - c}.$$

Оценяване. (6 точки) 3 т. за $c \leq 1/16$, 2 т. за доказване, че ако $c \leq 1/16$, то a_n е растяща, 1 т. за довършване.

Задача 12.2. Даден е $\triangle ABC$ и точка X е във вътрешността му. Нека точките S_A, S_B и S_C са средите на дъгите $\widehat{BXC}$, $\widehat{AXC}$ и $\widehat{AXB}$ в окръжностите, описани съответно около $\triangle BXC$, $\triangle AXC$ и $\triangle AXB$. Да се докаже, че точките S_A, S_B, S_C и X лежат на една окръжност.

Решение. Нека l_A е правата през A, перпендикулярна на AX и нека l_B, l_C са дефинирани аналогично. Нека $l_B \cap l_C = A_1$, $l_C \cap l_A = B_1$ и $l_A \cap l_B = C_1$. Имаме, че A_1S_A е вътрешната ъглополовяща на $\measuredangle B_1A_1C_1$, т.к $A_1 \in (BXC)$. Така получаваме, че правите A_1S_A, B_1S_B, C_1S_C се пресичат в точка I, където I е центърът на вписаната окръжност в $\triangle A_1B_1C_1$. Също така имаме, че A_1X е диаметър в (BXC), следователно $\measuredangle IS_AX = 90^\circ$, т.е S_A лежи на окръжността с диаметър IX. Аналогично получаваме, че точките S_B и S_C лежат на същата окръжност, с което задачата е решена.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за построяване на l_A, l_B, l_C, 2 т. за доказване, че A_1S_A, B_1S_B и C_1S_C се пресичат в една точка, 2 т. за довършване.

Задача 12.3. Нека $n \geq 2$ е естествено число. Ако $m \in \mathbb{N}$ е такова, че делителите на m могат да се разбият на n непресичащи се множества, така че сумата от числата във всяко множество е една и съща, то да се докаже, че $m \geq 2^{n+1} - 2$.

Решение. Първи метод. За $n = 2$ твърдението се проверява директно. Нататък ще считаме, че $n \geq 3$ и $m \geq 7$. Да отбележим, че m се среща в някоя от групите, така че $mn \leq \sum\limits_{d|m} d$.

Нека $k \in (m/3, m/2)$ е естествено число (такова има поради $m \geq 7$). Тогава

$$mn \leq \sum_{d|m} d = \sum_{d|m} \frac{m}{d} \leq m \left(\sum_{d \leq m, d|m} \frac{1}{d} \right)$$
$$\leq m \left(\sum_{d \leq m/2, d|m} \frac{1}{d} \right) + 1$$
$$\leq m \left(\sum_{d \leq m/2} \frac{1}{d} \right) - \frac{m}{k} + 1$$
$$< m \left(\sum_{d \leq m/2} \frac{1}{d} \right),$$

понеже m няма делители между $\frac{m}{2}$ и m и т.к k не дели m.
От друга страна имаме, че ако $t \in \mathbb{N}$ е такова, че $2^t \leq m < 2^{t+1}$, то

$$\sum_{d \leq m/2} \frac{1}{d} \leq \sum_{d < 2^t} \frac{1}{d} = \sum_{s=0}^{t-1} \sum_{d=2^s}^{2^{s+1}-1} \frac{1}{d} \leq \sum_{s=0}^{t-1} \sum_{d=2^s}^{2^{s+1}-1} \frac{1}{2^s} = t$$

Така получаваме, че $t > n$, откъдето следва, че $m \geq 2^{n+1}$.
Коментар. Оценката не е точна, може да се покаже, че $\sum\limits_{d|m} d = O(m \log\log m)$. Ето един възможен начин:
Втори метод. (Д.Грозев) Да означим с $s(x)$ сумата от делителите на $x \in \mathbb{N}$. Имаме $s(m) \geq mn$. Нека $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, където p_i са различни прости числа и $a_i \geq 1$. Имаме

$$s(m) \leq m \prod_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^j},$$

защото всеки делител на m присъства в дясната страна. И така,

$$s(m) \leq m \prod_{i=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_i - 1}\right) \leq m \cdot \exp\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i - 1}\right).$$

Тук използвахме неравенството $1 + x \leq e^x$. Нататък,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i - 1} \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{q_i - 1} \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} < \ln(k+1) \qquad (1),$$

където $q_1, q_2, \ldots, q_k$ са първите k прости числа. Това дава $mn \leq s(m) < m(k+1)$ или $k > n - 1$, значи $k \geq n$. При $n \geq 3$ получаваме

$$m \geq \prod_{i=1}^{k} q_i \geq 2 \cdot 3 \cdot 5^{k-2} \geq 6 \cdot 5^{n-2} > 5^{n-1} > 2^{n+1}.$$

При $n = 2$ имаме $k \geq 2$ и $m \geq 2 \cdot 3 = 6$. Вижда се, че $n = 2, m = 6$ възможно, другите опции са $n = 2, m \geq 12$ (ако въобще има такива.)

Коментар. Оценката в (1), може да се подобри така

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{q_1 - 1} \leq 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{q_k} \leq 1 + 1 + \ln \ln k.$$

Така получаваме, $mn \leq s(m) \leq me^2 \ln k$ и значи $\ln k \geq n/e^2$, $k \geq e^{n/9}$ и

$$m \geq \prod_{i=1}^{k} q_i \geq 2^k \geq 2^{e^{n/9}}.$$

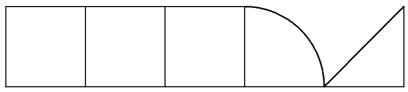
Също може да се докаже, че

$$\sum_{d|m} d \leq H_m + \log H_m e^{H_m},$$

където $H_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i}$.

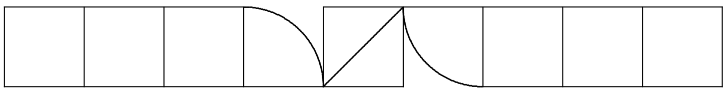
Оценяване. (7 точки) 1 т. за $mn \leq \sum\limits_{d|m} d$, 3 т. за подходяща нетривиална оценка за $\sum\limits_{d|m} d$, 1 т. за m няма делител в $(m/2, m)$ **и** $(m/3, m/2)$, 2 т. за довършване. Случаят $n = 2$ не носи точки!

Задача 12.4. Нека L е фигурата, съставена от 3 единични квадрата, четвърт кръг с радиус 1 и правоъгълен равнобедрен триъгълник с катет 1, скачени така:



Да се докаже, че всеки 18 точки в равнината могат да се покрият с копия на L, които не се припокриват в свои вътрешни точки. (Копията на L могат да бъдат ротирани и обръщани.)

Решение. Да разгледаме следната фигура M, получена чрез залепяне на 2 копия на L.



Имаме, че M се съдържа в правоъгълник с размери 1×9 и заема повече от $17/18$ от лицето му. Нека S е множество от 18 точки в равнината и нека C е случайно покриване на равнината с правоъгълници 1×9. По-конкретно фиксираме покриване A на равнината с правоъгълници 1×9 и избираме $X \sim U[0, 9], Y \sim U[0, 1]$, а след това получаваме C като транслираме A с X единици в x направлението и Y единици в y направлението. Всяко такова покриване на равнината дава еднозначно определено покритие на част от равнината с копия на M.

Да отбележим, че за всяка точка $s \in S$ имаме

$$\mathbb{P}(s \text{ е покрита от някое копие на } M) > 17/18.$$

Така получаваме, че $\mathbb{P}(s \text{ не е покрита от копие на } M) < \frac{1}{18}$. Следователно

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\exists\, s \in S : s \text{ не е покрита от копия на } M\right) &\leq \sum_{s\in S} \mathbb{P}(s \text{ не е покрита от копия на } M)\\ &< |S|/18 = 1,\end{aligned}$$

откъдето следва, че съществува покриване на равнината, за което всяка точка от S е покрита от някое копие на M.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за разглеждане на M, 5 т. за довършване. 3 т. за доказване на по-слабо твърдение като „всеки 8 точки в равнината могат да се покрият с копия на L“ чрез вероятностен метод.

Задачите са предложени от: 8.1 и 8.4 – Ивайло Кортезов; 8.2 и 8.3 – Мирослав Маринов; 9.1 и 9.4 – Константин Делчев; 9.2 и 9.3 – Любен Балтаджиев; 10.1 – Станислав Харизанов; 10.2, 10.3 и 10.4 – Божидар Димитров; 11.1 и 11.2 – Емил Колев; 11.3 – Cristi Savescu; 11.4 – Марин Христов; 12.1, 12.2, 12.3 – Кристиян Василев; 12.4 – Teun Verstraaten.