Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Пролетно математическо състезание "проф. Дочо Дочев"

Русе, 30 март 2024 г.

Задача 10.1. Реалните числа x и y удовлетворяват неравенството

$$x(x-6) \leq y(4-y)+7.$$

Да се намери интервала от стойности за израза $a = x + 2y$.

Задача 10.2. Даден е триъгълник ABC с описана окръжност k и център на вписаната окръжност I. Окръжност ω през точките C и I пресича страните AC и BC съответно в точките P и Q, и пресича k за втори път в точката L. Ъглополовящата на $\angle ALB$ пресича страната AB в точка K. Да се докаже, че големината на $\angle PKQ$ не зависи от избора на окръжността ω.

Задача 10.3. За нечетно естествено число $n > 1$ дефинираме множеството от различните остатъци на степени на двойката при деление на n:

$$S_n = \{a \mid a < n, \exists k \in \mathbb{N} : 2^k \equiv a \pmod{n}\}.$$

Съществуват ли различни нечетни числа m и r такива, че $S_m = S_r$?

Задача 10.4. Ще наричаме граф G *граф на делимости* ако във всеки от върховете му може да се запише различно естествено число така, че ребрата му да отговарят на всички двойки (u, v) за които или $\dfrac{u}{v}$ или $\dfrac{v}{u}$ е цяло число. Да се докаже, че за всяко естествено число n и всяко цяло число $0 \leq e \leq n(n-1)/2$ съществува граф на делимости с точно n върха и e ребра.