Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Пролетно математическо състезание "проф. Дочо Дочев"

Русе, 30 март 2024 г.

Задача 9.1. Да се реши неравенството:

$$\frac{x^2 - |x-1| - 4}{x-4} \geq 2x - 1.$$

Задача 9.2 Даден е триъгълникът ABC и M - среда на AB. Дадени са ъглите $\angle ABC = 30^\circ$ и $\angle BCM = 105^\circ$. Да се докаже, че $CM.AC = BM.BC$.

Задача 9.3 Наричаме n прави в равнината *трипосочни*, ако могат да бъдат разделени в три непразни множества, X, Y, Z. Всеки две прави от едно и също множество са успоредни помежду си, никои две прави от различни множества не са успоредни помежду си и никои три прави не се пресичат в една точка.
С S_n бележим максималният брой области, на които n трипосочни прави могат да разделят равнината. Като за област считаме свързана част от равнината, не задължително крайна, чиито граници са определени от трипосочните прави.

Кое е най-голямото n за което $S_n < 128$?

Задача 9.4. За нечетно естествено число $n > 1$ дефинираме множеството от различните остатъци на степени на двойката при деление на n:

$$S_n = \{a \mid a < n, \exists k \in \mathbb{N} : 2^k \equiv a \pmod{n}\}.$$

Съществуват ли различни нечетни числа m и r такива, че $S_m = S_r$?