

Математически турнир „Иван Салабашев“
30 ноември 2024 г.

Тема за 10-12. клас
(време за работа 120 минути)

Задача 1. За даден триъгълник да се намери най-голямото реално число m такова, че през всяка точка от равнината минава права, която отсича от него отсечка с дължина поне m .

Задача 2. Да се докаже, че съществуват безбройно много функции от вида

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

където $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, такива, че $f(f(f(x))) = x$ за всяко $x \in \mathbb{R}$, за които лявата страна е дефинирана.

Задача 3. Нека $c \in \mathbb{R}$, m и n са естествени числа, по-големи от 1, а P и Q са такива неконстанти полиноми с реални коефициенти, че

$$(P(x))^m - (Q(x))^n = c$$

за всяко $x \in \mathbb{R}$. Да се докаже, че $c = 0$.