

Министерство на образованието и науката

72. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 12. февруари 2023 г.

ТЕМА ЗА 12. КЛАС

Задача 12.1. Да се реши неравенството:

$$\sqrt{3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1} \geq 3^{x+1} - 5.$$

Задача 12.2. Даден е триъгълник ABC , за който ъглополовящата на средния по големина ъгъл е равна на най-малката му страна и числата $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$, взети в този ред, образуват аритметична прогресия. Да се намерят отношението, в което центърът на вписаната окръжност J разделя тази ъглополовяща, радиусът r на тази окръжност и дължините на страните на триъгълника, при условие че лицето му S е равно на $21\sqrt{15}$.

Задача 12.3. Естествено число n ще наричаме *хубаво*, ако $\text{НОД}((n-1)! + 1, n!) > 1$. Нека a , b и c са три хубави числа. Естествено число N ще наричаме *прекрасно*, ако простите му делители са измежду простите делители на произведението abc .

Да се докаже, че от всеки 8 прекрасни числа или има точен квадрат на естествено число, или могат да се изберат две числа с произведение точен квадрат на естествено число.

Задача 12.4. Дадена е функцията $f(x) = x^3 - 2ax^2 + 3ax$, където a е реален параметър. Да се намерят стойностите на параметъра a , при условие че графиката на $y = f(x)$ има единствена обща точка C с абсцисната ос и $A \neq B$, където с A и B върху тази графика са отбелязани локалните екстремуми. За всяка от тези стойности на параметъра да се докаже, че точките A и B лежат в първи квадрант и лицето на триъгълника ABC е по-малко от 6.

Математически турнири

<https://www.facebook.com/groups/mathtournament>