Секция "Изток" – СМБ

КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 14.12.2024 г.

10 клас

Темата е по формата на НВО

Време за работа: 90 минути

1. Стойността на израза $\frac{12+\sqrt{21}}{12-\sqrt{21}}-\frac{12-\sqrt{21}}{12+\sqrt{21}}$ е равна на:

А) 0 Б) $\frac{110}{41}$ В) $\frac{8\sqrt{21}}{41}$ Г) $\frac{16\sqrt{21}}{41}$

2. Допустимите стойности на израза $\frac{1}{x^2+1}+\frac{x}{27x^3-18x^2+6x-1}$ са:

А) $x\neq\frac{1}{3}$ и $x\neq 0$ Б) $x\neq\frac{1}{3}$ В) $x\neq\frac{1}{3}$**,** $x\neq 1$ и $x\neq -1$ Г) $x\neq\pm 1$ и $x\neq 0$

3. За корените x_1 и x_2 на уравнението $-x^2+7x-5=0$ пресметнете $x_1^4+x_2^4$. Стойността е:

А) $-47,5$ Б) 1471 В) 2401 Г) 1571

4. Даден е трапец ABCD с основи $AB=a$ и $CD=b$, $a>b$, със среди съответно M и N. Ако $MN=\frac{1}{2}(a-b)$, сборът от мерките на ъглите, прилежащи на основата AB на трапеца е равен на:

А) 60º Б) 120º В) 90º Г) 150º

5. Точките Q, P, T и S са среди съответно на страните BC, CD, DE и EA на петоъгълника ABCDE, а точките L и M са средите съответно на отсечките SP и TQ. Кое е вярното векторно равенство ?

А) $\overrightarrow{LM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ Б) $\overrightarrow{LM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ В) $\overrightarrow{LM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ Г) $\overrightarrow{LM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$

6. Върху окръжност с радиус 2 cm са взети три точки, разделящи окръжността на три дъги, дължините на които се отнасят както 3:4:5. През точките са построени три допирателни към окръжността. Лицето на триъгълника, образуван от тези допирателни е:

А) $2\left(1+\sqrt{3}\right)^2$ Б) $6+4\sqrt{3}$ В) $12+8\sqrt{3}$ Г) $24+12\sqrt{3}$

7. Дадени са функциите (1) $f_1(x)=4x-1$, (2) $f_2(x)=8x-2$, (3) $f_3(x)=4x+1$ и (4) $f_4(x)=3x-1$. Успоредни са графиките на:

А**)** (2) и (4) Б) (1) и (4) В) (2) и (3) Г) (1) и (3)

8. Лицето на фигурата, ограничена от графиката на функцията

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x+5 & при\ \ x\le -3\\ 2 & при\ \ -3<x<2\\ -x+4 & при\ \ x\ge 2\end{cases}$$ и абсцисната ос Ox е равно на:

А) 14 Б) 28 В) 9 Г) 11

9. Разликата между най- голямата и най- малката стойност на функцията $y=-x^2+7x-5$ в интервала $\left[-1;5\right]$ е равна на:

А) -13 Б) 20,25 В) 7,25 Г) 5

10. Решенията на системата $\begin{vmatrix}\left(x-1\right)^2-\left(y+2\right)^2=0\\ x^2+y^2+2y+6x=7\end{vmatrix}$ са:

А) $\left(-2;-5\right),\left(1;-2\right),\left(-4;-3\right)$ Б) $\left(-2;-5\right),\left(1;-2\right),\left(4;-3\right)$

В) $\left(-2;5\right),\left(1;-2\right),\left(-4;3\right)$ Г) $\left(-2;-5\right),\left(1;-2\right),\left(-4;3\right)$

11. Даден е $\triangle ABC$, $AB=20$ cm, $BC=7$ cm, $AC=15$ cm. Дължината на ъглополовящата на най-малкия ъгъл в $\triangle ABC$ е равна на:

А) $12\sqrt{2}$ cm Б) 12 cm В) 9 cm Г) 16

12. Стойността на израза $\dfrac{1+\sin\alpha.\cos\alpha}{1+tg\left(90^0-\alpha\right)}.\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}$ при $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\alpha\in\left(0,90°\right)$ е:

А) 3 Б) $1-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ В) $\dfrac{1}{3}$ Г) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

13. Бедрото на равнобедрен триъгълник е 30 cm, а основата му е 48 cm. Разстоянието (в сантиметри) между центровете на вписаната и описаната за триъгълника окръжност е:

А) 18 Б) 15 В) 10 Г) 25

14. Дадена е аритметична прогресия $a_1,a_2,a_3,...,$ за която $a_1=-3$ и разлика $d=2,5$. Кое от числата **не** е член на прогресията:

А) 19,5 Б) 2 В) 12 Г) 22,5

15. Бижутер трябва да разпредели 8 различни чифта обици в 4 витрини. По колко начина може да направи това?

А) 4^8 Б) 8^4 В) C_8^4 Г) $4!$

<u>Пълните решения с необходимите обосновки на задачи 16 и 17 запишете в листа за отговори на указаните за това места</u>

16. Решете уравнението $\sqrt{5x-3}+\sqrt{x}=4\sqrt{3}$

17. Три момчета и n момичета седнали на пейка в парка. Намерете n, ако вероятността трите момчета да са едно до друго е $\frac{1}{15}$.

.

Ключ с верните отговори 10 клас

№ на задача	Отговор	Брой точки
1	Г	4
2	Б	4
3	Б	4
4	В	4
5	А	4
6	В	4
7	Г	4
8	А	4
9	Б	4
10	Г	4
11	А	4
12	В	4
13	Б	4
14	Г	4
15	А	4
16		Общо 20 точки
16	Определяне на допустими стойности на $x \in \left[\frac{3}{5};12\frac{3}{4}\right]$	6 точки
	Свеждане до квадратно уравнение $16x^2-600x+2601=0$	4 точки
	Пресмятане корените на уравнението $x_1=\frac{75+12\sqrt{21}}{4}$ и $x_2=\frac{75-12\sqrt{21}}{4}$	4 точка
	Проверка на неравенството $x_1>12\frac{3}{4}$. Следователно x_1 не е решение на уравнение.	1 точка
	Проверка на неравенството $x_2<12\frac{3}{4}$	2 точки
	Проверка на неравенството $x_2>\frac{3}{5}$	2 точка
	Следователно решение на уравнението е само числото $x_2=\frac{75-12\sqrt{21}}{4}$	1 точка
17		Общо 20 точки
17	Броят на всички деца е $n+3$.	1 точка
	Броят на всички елементарни събития е $(n+3)!$	4 точки
	Броят на благоприятните елементарни събития е $(n+1).3!.n!=6.(n+1)!$	5 точки
	Прилагане на определението за класическа вероятност и получаване на $P=\frac{6.(n+1)!}{(n+3)!}=\frac{1}{15}$	2 точки

	Опростяване на уравнението и достигане до $(n+2)(n+3)=90$ Определяне на $n=7$	4 точки 4 точки

Примерно решение на задача 17: Всички деца са $n+3$. Броят на всички възможни подреждания в редици са $(n+3)!$. Благоприятните елементарни събития, в които трите момчета са едно до друго са $(n+1).3!.n!=6.(n+1)!$. От определението за класическата вероятност получаваме

$$P=\frac{6.(n+1)!}{(n+3)!}=\frac{1}{15}$$

$$(n+2)(n+3)=90$$

$$(n+2)(n+3)=9.10$$

Следователно $n=7$.

Относно задача 11. $\triangle ABC$ е тъпоъгълен. Построяването му по дадени три страни (например в мащаб 1:2) показва, че $\measuredangle C$ е тъп. Задачата има решение с прилагане теоремата за вътрешната ъглополовяща и 3 пъти прилагане на Питагорова теорема. Височината от върха А е 12 cm.