

Министерство на образованието и науката

72. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 12. февруари 2023 г.

ТЕМА ЗА 10. КЛАС

**Задача 10.1.** Да се реши уравнението

$$8 - 3\sqrt{x^2 + 16} = \frac{56}{2 - \sqrt{x^2 + 16}}.$$

**Задача 10.2.** Две окръжности  $k_1$  и  $k_2$  се пресичат в точки  $A$  и  $B$ . Допирателната в точка  $A$  към  $k_1$  пресича  $k_2$  за втори път в точка  $C$ , а допирателната в точка  $A$  към  $k_2$  пресича  $k_1$  за втори път в точка  $D$ . Точка  $M$  лежи върху отсечката  $AD$ , а точка  $N$  лежи върху отсечката  $AC$ . Ако  $BD = 32$ ,  $BC = 18$ ,  $DM = 20$  и  $AN = 15$ , да се докаже, че четириъгълник  $BNAM$  е вписан.

**Задача 10.3.** Да се намери най-малкото естествено число  $n$ , за което съществуват  $n$  прави в равнината, никои три от които не се пресичат в една точка такива, че

- (i) Броят различни пресечни точки между правите е 23;
- (ii) Броят различни триъгълници, образувани чрез правите е 14.

**Задача 10.4.** Нека  $n \geq 4$  е естествено число. Да се намерят всички цели числа  $a$ , за които полиномът

$$f(x) = x^n + ax^{n-1} + 63$$

може да се напише като произведение  $p(x)q(x)$  на два полинома  $p(x), q(x)$  с цели коефициенти, всеки от които е от степен поне единица.

Математически турнири

<https://www.facebook.com/groups/mathtournament>