Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

ПРОЛЕТНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ
за ученици от IV клас
30 март 2024 г.

Задача 1. Намерете a, b и x, ако

$$a = (102\,345 : 15 - 102 \,.\, 56) : 11, \qquad b = (158 \,.\, 85 + 158 \,.\, 58 - 143 \,.\, 144) : 22,$$

а x е неизвестното число в равенството

$$1098 + 7654 : (x : 5 + 68) = 32 \,.\, 37.$$

Томи имал a стикери, Аника имала b стикери, а Пипи имала x стикери. Пипи и Томи дали част от своите стикери на Аника и така и тримата имали по равен брой стикери. Колко стикера е дала Пипи на Аника?

Решение. Намираме
$a = (102\,345 : 15 - 102 \,.\, 56) : 11 = (6823 - 5712) : 11 = 1111 : 11 = 101.$

1 точка

$b = (158 \,.\, 85 + 158 \,.\, 58 - 143 \,.\, 144) : 22 = (158.(85 + 58) - 143.144) : 22 =$
$= (158.143 - 143.144) : 22 = (143.(158 - 144)) : 22 = (143.14) : 22 =$
$= 2002 : 22 = 91.$

1,5 точки

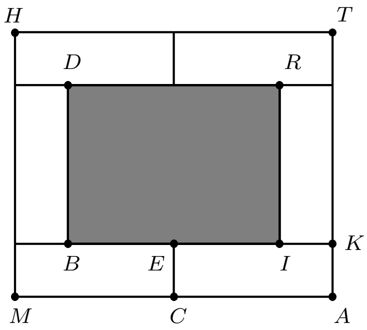
$1098 + 7654 : (x : 5 + 68) = 32 \,.\, 37$
$1098 + 7654 : (x : 5 + 68) = 1184$
$7654 : (x : 5 + 68) = 1184 - 1098, \quad 7654 : (x : 5 + 68) = 86$
$x : 5 + 68 = 7654 : 86, \quad x : 5 + 68 = 89,$
$x : 5 = 89 - 68, \quad x : 5 = 21, \quad x = 5.21, \quad x = 105$

1,5 точки

Всеки от тримата след подялбата има
$(101 + 91 + 105) : 3 = 297 : 3 = 99$ стикери.
Пипи е дала на Аника $105 - 99 = 6$ стикера.

1 точка

Задача 2. Правоъгълникът $MATH$ на чертежа е сглобен от шест еднакви бели правоъгълни плочки и сивата правоъгълна плочка $BIRD$.



Обиколката на правоъгълника $MATH$ е равна на 1 м 14 дм 12 см, а страната му AT е равна на 58 см.

а) Намерете обиколката на белия правоъгълник $CAKE$.

б) Намерете лицето на сивия правоъгълник $BIRD$.

в) Белите плочки са пластмасови, а сивата е метална и тежи 10 пъти повече, отколкото една бяла плочка. Целият правоъгълник $MATH$ тежи 2 кг 80 г. Колко грама тежи сивият правоъгълник $BIRD$?

Решение. а) Обикоката на $MATH$ е 1 м 14 дм 12 см,
т.е. $100 + 140 + 12 = 252$ см. **0,5 точки**
Намираме $MA = 252 : 2 - 58 = 126 - 58 = 68$ см, **0,5 точки**
$MC = CA = 68 : 2 = 34$ см. **0,5 точки**
$KA = (58 - 34) : 2 = 12$ см. **0,5 точки**
$P_{CAKE} = 2.(12 + 34) = 92$ см. **0,5 точки**

б) $BI = 68 - 2.12 = 44$ см. **0,5 точки**
$IR = 34$ см, следователно $S_{BIRD} = 34.44 = 1496$ кв.см. **0,5 точки**

в) Целият правоъгълник $MATH$ тежи 2 кг 80 г, т.е. 2080 г.
Той тежи колкото $6 + 10 = 16$ бели плочки. **0,5 точки**
Една бяла плочка тежи $2080 : 16 = 130$ г. **0,5 точки**
Сивата метална плочка тежи $130.10 = 1300$ г,
или 1 кг 300 г. **0,5 точки**

Задача 3. а) Пипи опекла палачинки. Тя почерпила Томи и Аника с третината от палачинките и още 2 палачинки. След това дала на коня половината от останалите палачинки без 2 палачинки. Накрая останали 10 палачинки за нея. Колко палачинки е опекла Пипи и колко от тях е дала на Томи и Аника?

б) Пипи, Томи и Аника решили да изплетат еднакви плитки на гривата на коня. Пипи може да изплете 18 плитки за 30 минути. Томи може да изплете 14 плитки за 35 минути, а Аника може да изплете 20 плитки за 25 минути. Кой от тях плете най-бързо? За колко време тримата ще изплетат 36 плитки, ако започнат да плетат заедно?

Решение. а) Раздаването на палачинките се илюстрира със следната схема.

$$\boxed{} \xrightarrow{:3} \boxed{} \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{} \xrightarrow{-2} \boxed{} \xrightarrow{:2} \boxed{} \xrightarrow{+2} \boxed{10}$$

2 точки

Попълваме последователно квадратчетата отзад напред:

$$\boxed{27} \xrightarrow{:3} \boxed{9} \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{18} \xrightarrow{-2} \boxed{16} \xrightarrow{:2} \boxed{8} \xrightarrow{+2} \boxed{10}$$

Пипи е опекла 27 палачинки. **1 точка**

Томи и Аника са получили общо $27 : 3 + 2 = 11$ палачинки. **1 точка**

б) Пипи може да изплете $18 : 6 = 3$ плитки за $30 : 6 = 5$ минути, Томи $14 : 7 = 2$ плитки за $35 : 7 = 5$ минути и Аника $20 : 5 = 4$ плитки за $25 : 5 = 5$ минути. **1,5 точки**

За 5 минути Аника изплита най-много плитки, следователно тя плете най-бързо. **0,5 точки**

Заедно могат да изплетат $3 + 2 + 4 = 9$ плитки за 5 минути. **1 точка**

За 36 плитки, т.е. за 4 пъти повече плитки, ще са им необходими $4.5 = 20$ минути. **1 точка**

Забележка. До извода, че Аника плете най-бързо, може да се стигне, като се пресметне, че Аника изплита една плитка за 75 секунди, Томи изплита една плитка за 150 секунди, а Пипи изплита 1 плитка за 100 секунди. Това разсъждение (ако не е продължено до пълно решение) се оценява с 1,5 точки.

Задача 4. Пипи Дългото Чорапче пазарува в магазина. Там има общо 36 пасти от четири вида: шоколадови, сметанови, карамелени и ягодови. Шоколадовите пасти са 5 пъти по-малко на брой от сметановите, а карамелените са 3 пъти повече от шоколадовите. В магазина има повече сметанови пасти, отколкото ягодови.

а) По колко пасти от всеки вид има в магазина?

б) Пипи купила всички пасти в магазина. Известно е, че:

- 2 шоколадови и 4 ягодови пасти струват 38 крони,
- 1 ягодова, 2 сметанови и 3 карамелени пасти струват 25 крони,
- 1 шоколадова, 2 ягодови и 5 сметанови пасти струват 44 крони.

Общо колко крони е платила Пипи?

Решение. Нека шоколадовите пасти са x на брой, тогава сметановите са $5.x$, а карамелените са $3.x$. Нека ягодовите пасти са y. По условие те са по-малко от $5.x$. **1 точка**

Получаваме, че $9.x + y = 36$. **1 точка**

Тъй като $9.x$ е по-малко от 36, то x може да е 1, 2 или 3. Разглеждаме всеки от тези случаи.

шоколадови x	ягодови y	сметанови $5.x$	карамелени $3.x$
1	27	5	3
2	18	10	6
3	9	15	9

1,5 точки

Сметановите пасти са повече от ягодовите само в последния случай. Следователно шоколадовите са 3, ягодовите са 9, сметановите са 15 и карамелените са 9. **0,5 точки**

б) Щом две шоколадови и четири ягодови пасти струват общо 38 крони, то една шоколадова и две ягодови пасти струват наполовина, т.е. 19 крони. **0,5 точки**

Тъй като една шоколадова, две ягодови и 5 сметанови пасти струват общо 44 крони, то 5 сметанови пасти струват $44 - 19 = 25$ крони, т.е. цената на сметановата паста е 5 крони. **1 точка**

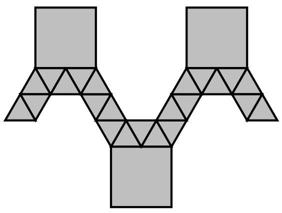
Тъй като една ягодова, две сметанови и три карамелени пасти струват общо 25 крони, то една ягодова и три карамелени пасти струват общо $25 - 2.5 = 15$ крони. **0,5 точки**

Получихме, че една шоколадова и две ягодови пасти са 19 крони, а една ягодова и три карамелени пасти са 15 крони. Като съберем двете покупки, получаваме, че една шоколадова, три ягодови и три карамелени пасти струват общо $15 + 19 = 34$ крони. **0,5 точки**

Те са третината от наличните в магазина пасти от тези видове. Намираме, че 3 шоколадови, 9 ягодови и 9 карамелени пасти струват общо $34.3 = 102$ крони. **1 точка**

Остава да прибавим 15 сметанови пасти по 5 крони. Общо всички пасти струват $102 + 15.5 = 177$ крони. **0,5 точки**

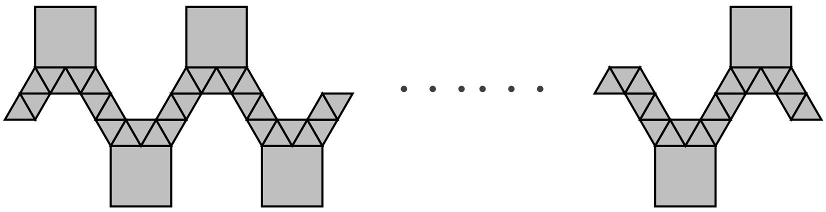
Задача 5. Фигурата на чертежа вдясно е образувана от 3 квадрата и няколко равностранни триъгълника.



Обиколката на фигурата е 222 см.

а) Намерете страната на квадрата.

б) Фигурата на следващия чертеж е образувана от същите по размер триъгълници и квадрати, но се състои от 15 квадрата. От колко триъгълника е образувана фигурата? Намерете обиколката на тази фигура.



Решение. а) Фигурата се състои от 23 триъгълника. Нека страната на един триъгълник е x см. Страната на квадрата е $2.x$ см. **0,5 точки**

В обиколката участват:

- по 3 от страните на квадратите, т.е. $9.2.x = 18.x$;
- по две страни на първия и последния триъгълник, т.е. $4.x$;
- по една страна от останалите триъгълници, без първия, последния и тези два, над (под) които има квадрати, т.е. $(21 - 6).x = 15.x$.

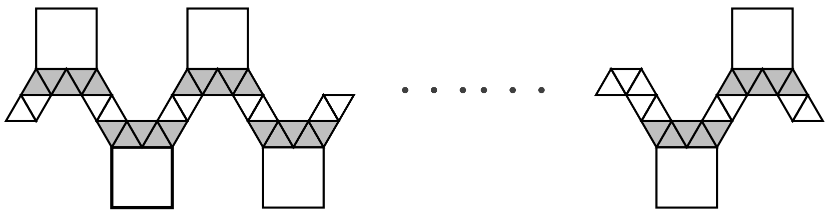
Следователно
$$18.x + 4.x + 15.x = 222,$$

2 точки

т.е. $37.x = 222$ или $x = 222 : 37 = 6$ см. **1 точка**

Страната на квадрата е $6.2 = 12$ см. **0,5 точки**

б) Разделяме триъгълниците на групи по 5, разположени под (над) всеки квадрат и свързващи ги звена от по 2 триъгълника. **1 точка**



Групите от 5 триъгълника са колкото квадратите, т.е. 15 на брой, а свързащите ги звена са 16. Следователно триъгълниците са общо

$$15.5 + 16.2 = 75 + 32 = 107.$$

2 точки

Както в подусловие а), обиколката на фигурата се състои от:

- по три страни на всеки квадрат: $15.3.12 = 540$ см; **1 точка**
- по две страни на първия и последния триъгълник:
  $4.6 = 24$ см; **1 точка**
- по една страна на останалите триъгълници без първия, последния и тези два, разположени под (над) всеки квадрат:
  $(105 - 15.2).6 = 450$ см. **2 точки**

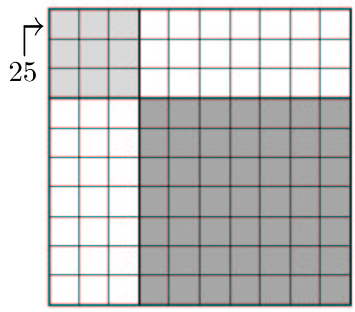
Обиколката на фигурата е равна на $540 + 24 + 450 = 1014$ см.
1 точка

Забележка. В б) идеята за групиране на фигурите в еднакви блокове (различни от посочения) също се оценява с 1 точка и по-нататък решението се оценява според постигнатия напредък.

Задача 6. Във всяка клетка на таблица с 10 реда и 10 стълба е написано по едно число (различно от 0) така, че във всеки ред и във всеки стълб сборът на числата е един и същ.

Сборът на числата в горния ляв квадрат 3×3 е 25.

а) Покажете, че не е възможно сборът на числата в долния десен квадрат 7×7 да е 85.



б) Ако сборът на числата в долния десен квадрат 7×7 е 89, намерете сбора на всички числа в таблицата.

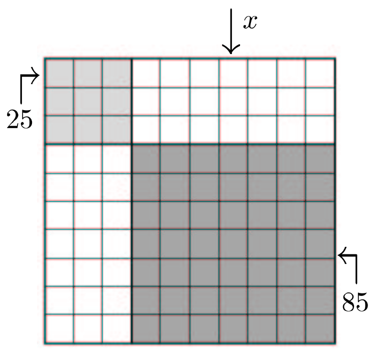
Решение. Нека сборът на числата в един ред (стълб) е a и сборът на всички числа в десния правоъгълник 3×7 е x.

а) Сборът на числата, записани в първите три реда е

$$25 + x = 3a.$$

1,5 точки

Ако в квадрата 7×7 сборът на числата е 85, то сборът на числата в последните 7 стълба е



$$85 + x = 7a.$$

1,5 точки

Следователно $4a = 85 - 25 = 60$, т.е. $a = 15$. **1 точка**

Тогава $x = 3.15 - 25 = 20$. **1 точка**

Но в правоъгълника 3×7 има 21 клетки и сборът на числата в тях е най-малко 21. Следователно не е възможно в квадрата 7×7 сборът от числата да е 85. **1 точка**

б) Както в подусловие а) имаме

$$25 + x = 3a, \quad 89 + x = 7a.$$

2 точки

Следователно $4a = 89 - 25 = 64$, т.е. $a = 16$. **1 точка**

Тогава $x = 3.16 - 25 = 23$. **1 точка**

Възможно е сборът на числата в правоъгълника 3×7 да е 23 (в две от клетките е числото 2, а в останалите има 1).

Сборът на числата в таблицата е $10.16 = 160$. **1 точка**

Лесно се намира пример за реализиране на този случай.

5	2	2	1	1	1	1	1	1	1
2	4	2	1	1	1	1	1	2	1
2	2	4	1	1	1	1	1	1	2
1	2	1	1	1	1	1	1	1	6
1	1	2	1	1	1	1	1	6	1
1	1	1	1	1	1	1	7	1	1
1	1	1	1	1	1	7	1	1	1
1	1	1	1	1	7	1	1	1	1
1	1	1	1	7	1	1	1	1	1
1	1	1	7	1	1	1	1	1	1

1 точка