Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Пролетно математическо състезание "проф. Дочо Дочев"

Русе, 30 март 2024 г.

Задача 8.1. Намерете всички двойки (x, y) от реални числа, за които

$$4y^4 + x^4 + 12y^3 + 5x^2(y^2 + 1) + y^2 + 4 = 12y.$$

Задача 8.2. Точките A, B, Y и C лежат в този ред на окръжност k с център O, като $BC = 2$ см, $\angle BAY = 42^\circ$ и $\angle CAY = 78^\circ$. Известно е, че окръжността ω през точките A, O и B се допира до правата BY. Окръжността през точките A и C, допираща се до правата CY, пресича ω за втори път в точката N. Да се намери:

а) дължината на отсечката BO; б) големината на ъгъла $\angle YAN$.

Задача 8.3. На дъската отначало е записано трицифрено естествено число n. Двама играчи, А и Б, извършват ходове, редувайки се, като А е пръв. Който е на ход, намалява числото на дъската с някой негов собствен делител (т.е. различен от 1 и от самото число). Например ако в някакъв момент числото на дъската е 6, то може да се намали с 2, след което числото на дъската вече ще е 4. Който не може да направи ход, губи, а другият побеждава. Известно е, че играчът А има начин да победи, както и да играе Б. Колко са всички възможни n?

Задача 8.4. Неотрицателните реални числа x, y, z са такива, че $(x + y)(y + z)(z + x) = 1$. Означаваме с m и M съответно най-малката и най-голямата възможна стойности на израза $A = (xy + yz + zx)(x + y + z)$.

а) Да се намерят m и M.

б) Съществува ли тройка от неотрицателни рационални числа (x, y, z), изпълняващи даденото равенство, за която $A = m$?