

Пролетно математическо състезание “проф. Дочо Дочев”

Русе, 30 март 2024 г.

Задача 11.1. Нека a е реално число.

а) Да се намерят всички стойности на a , за които неравенството

$$x \log_{\frac{1}{2}} a^4 - x^2 > 3 + 2 \log_2 a^2$$

с неизвестно x има решение.

б) Да се пресметне границата

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{a^2 - a + 1} + a \right).$$

Задача 11.2. Даден е успоредник $ABCD$. Окръжност k минава през върховете A и C и пресича лъчите AB^{\rightarrow} и AD^{\rightarrow} съответно в точките E и F . Допирателната към окръжността k в точка C и правите BD и EF се пресичат в една точка. Да се докаже, че AC е диаметър на k .

Задача 11.3. Да се намерят всички естествени числа n , за които броят на положителните делители на $\text{НОК}(1, 2, \dots, n)$ е степен на двойката.

Задача 11.4. Във вътрешността на изпъкнал 2024-ъгълник $A_1 A_2 \dots A_{2024}$ са избрани 1000 точки, така че никои три от всички 3024 точки не лежат на една права. Някои от точките са свързани с отсечки, които не се пресичат, като вътрешността на 2024-ъгълника е разделена на триъгълници. Във всяка една от всички 3024 точки е записано едно от числата 1, -1 , 2 или -2 , като за всяко $i = 1, 2, \dots, 1012$ числата, записани на A_i и A_{i+1012} , са противоположни. Да се докаже, че в някои два от върховете на някой от триъгълниците, на които е разделен 2024-ъгълника, са записани противоположни числа.