Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Пролетно математическо състезание “проф. Дочо Дочев”

Русе, 30 март 2024 г.

Задача 12.1. Редицата $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ е такава, че

$$a_1 = 1 \text{ и } a_{n+1} = \frac{9a_n + 4}{a_n + 6} \text{ за всяко } n \in \mathbb{N}.$$

Кои членове на редицата са цели числа?

Задача 12.2. Точките D и E съответно върху страната AC на $\triangle ABC$ и отсечката BD са такива, че $\angle DAE = \angle AED = \angle ABC$. Да се докаже, че $BE = 2CD$ тогава и само тогава, когато $\angle ACB = 90^\circ$.

Задача 12.3. Едно цяло число ще наричаме *студентско*, ако има вида a^{33}, където a е цяло число. С $b(n)$, където n е естествено число, ще означаваме най-малкия възможен брой студентски числа, чийто сбор е n. Например $b(2^{33} - 1) = 2$. Крайно или безкрайно е множеството на естествените числа n, за които:
а) $b(n) = 12$ б) $b(n) = 12^{12^{12}}$?

Задача 12.4. Нека $d \geq 3$ е естествено число. *Пълно d-мерно сдвояване* наричаме разбиване на множеството от двоични вектори с дължина d на 2^{d-1} непресичащи се двойки, като векторите във всяка двойка се различават в точно една позиция. За зададено пълно d-мерно сдвояване $\mathcal{M}$ и естествено число $k \geq 2$, *алтерниращ цикъл с дължина* $2k$ наричаме циклична подредба на $2k$ различни двоични вектора, такива че всяка двойка съседни вектори се различават в точно една позиция и точно половината от тези двойки принадлежат на $\mathcal{M}$. Да се докаже, че за всяко пълно d-мерно сдвояване съществува алтерниращ цикъл с дължина най-много $2d - 2$.