Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Пролетно математическо състезание "проф. Дочо Дочев"

Русе, 30 март 2024 г.

Русе, 2024 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 10.1. Реалните числа x и y удовлетворяват неравенството

$$x(x-6) \leq y(4-y)+7.$$

Да се намери интервала от стойности за израза $a = x + 2y$.

Отговор. $a \in [-3; 17]$.

Решение. При $a = x + 2y$ имаме $x = a - 2y$, откъдето

$$\begin{aligned}
(a-2y)(a-2y-6) &\leq y(4-y)+7 \\
a^2 - 2ay - 6a - 2ay + 4y^2 + 12y &\leq 4y - y^2 + 7 \\
5y^2 - 2(2a-4)y + (a^2 - 6a - 7) &\leq 0 \\
D = (2a-4)^2 - 5(a^2 - 6a - 7) &\geq 0 \\
4a^2 - 16a + 16 - 5a^2 + 30a + 35 &\geq 0 \\
a^2 - 14a - 51 &\leq 0 \\
(a-17)(a+3) &\leq 0.
\end{aligned}$$

Окончателно, $a \in [-3; 17]$.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за заместване в условието с $x = a - 2y$; 1 т. за извеждане на квадратното неравенство спрямо y; 2 т. за положителност на дискриминантата и опростяване на формулата; 1 т. за отговор.

Задача 10.2. Даден е триъгълник ABC с описана окръжност k и център на вписаната окръжност I. Окръжност ω през точките C и I пресича страните AC и BC съответно в точките P и Q, и пресича k за втори път в точката L. Ъглополовящата на $\measuredangle ALB$ пресича страната AB в точка K. Да се докаже, че големината на $\measuredangle PKQ$ не зависи от избора на окръжността ω.

Решение. Явно $IP = IQ$ от ъглополовящата CI в ω. Целта ни е да докажем, че $IK = IP$. Наистина, тогава ще следва, че I е център на описаната окръжност за триъгълник PKQ, откъдето $\measuredangle PKQ = \frac{1}{2}\measuredangle PIQ = 90^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle ACB$.

Нека ъглополовящите CI и LK се пресичат в средата T на дъгата $\widehat{AB}$ от k, несъдържаща C. Явно $\measuredangle TAK = \measuredangle TAB = \measuredangle BCT = \measuredangle ACT = \measuredangle ALT$, откъдето $\triangle AKT \sim \triangle LAT$ и $TA^2 = TK \cdot TL$. Предвид $TA = TI$ (следва от разписване на ъгли, известно е като лема на тризъбеца), получаваме $TI^2 = TK \cdot TL$ и $\triangle IKT \sim \triangle LIT$. Оттук

$$IK = IT \cdot \frac{LI}{LT} = AT \cdot \frac{LI}{LT}.$$

От друга страна, окръжностите k и ω дават $\measuredangle LPI = 180^\circ - \measuredangle LCI = \measuredangle LAT$ и $\measuredangle PLI = \measuredangle PCI = \measuredangle ALT$. Оттук $\triangle LAT \sim \triangle LPI$, откъдето

$$\frac{LI}{LT} = \frac{PI}{AT}$$

и исканото следва.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за твърдението, че $\measuredangle PKQ = 90^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle ACB$; по 2 т. за $\triangle IKT \sim \triangle LIT$ и $\triangle LAT \sim \triangle LPI$; 1 т. за довършване.

Задача 10.3. За нечетно естествено число $n > 1$ дефинираме множеството от различните остатъци на степени на двойката при деление на n:

$$S_n = \{a \mid a < n, \exists k \in \mathbb{N} : 2^k \equiv a \pmod{n}\}.$$

Съществуват ли различни нечетни числа m и r такива, че $S_m = S_r$?

Решение. Виж задача 9.4.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за обосновка, че $x \in S_n$, $2x \notin S_n$, е вярно за $x = \frac{n+1}{2}$; 3 т. за обосновка, че $x \leq \frac{n-1}{2}$ не изпълняват това свойство; 1 т. за довършване.

Задача 10.4. Ще наричаме граф G *граф на делимости* ако във всеки от върховете му може да се запише различно естествено число така, че ребрата му да отговарят на всички двойки (u, v) за които или $\dfrac{u}{v}$ или $\dfrac{v}{u}$ е цяло число. Да се докаже, че за всяко естествено число n и всяко цяло число $0 \leq e \leq n(n-1)/2$ съществува граф на делимости с точно n върха и e ребра.

Решение. Разсъждаваме индуктивно по n, като в никой връх няма да записваме числото 1. За $n = 1$ исканото е ясно, за $n = 2$ пример с $e = 1$ е $(2, 4)$ и пример с $e = 0$ е $(2, 3)$. За $n = 3$ пример с $e = 0$ е $3, 5, 7$, пример с $e = 1$ е $2, 4, 7$, пример с $e = 2$ е $2, 4, 10$, пример с $e = 3$ е $2, 4, 8$.

За $n \geq 4$ имаме $n - 1 \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, значи поне едно от $e \geq n - 1$ и $e \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ е изпълнено. Нека първо $e \geq n - 1$. В пример с $n - 1$ върха и $e - (n - 1)$ ребра добавяме връх (от степен $n - 1$), като в него записваме просто число p, по-голямо от числата в останалите върхове, след което умножаваме числата в останалите върхове по p – това не поражда нови ребра между останалите върхове.

Нека сега $e \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. В пример с $n - 1$ върха и e ребра добавяме връх (от степен 0), като в него записваме просто число p, по-голямо от числата в останалите върхове, и не променяме числата в останалите върхове – това не поражда нови ребра.

Оценяване. (7 точки) Непълни решения, в които подходът не е индуктивен, се оценяват с 0 точки. Индуктивни подходи с недовършен преход се оценяват с 1 точка. Индуктивни подходи с коректен преход, в които базата е грешна или използва числото 1 (ако това влияе на аргумента за стъпката), се оценяват с 5 точки.