Пролетни математически състезания, 2024 г.

Тема за 7. клас

Задача 1. Ако $\left|2x^2 - \left|5x^2 + 48x - y\right|\right| = x^2$, намерете:

а) за кои цели числа x стойността на y е 2024;

б) за кои стойности на x стойността на y е най-малка.

Решение. а) Тъй като $x^2 \geqq 0$, равенството

$$\left|2x^2 - \left|5x^2 + 48x - 2024\right|\right| = x^2$$

е изпълнено, ако

$$2x^2 - \left|5x^2 + 48x - 2024\right| = x^2 \text{ или } 2x^2 - \left|5x^2 + 48x - 2024\right| = -x^2, \text{ т.е.}$$

$$\left|5x^2 + 48x - 2024\right| = x^2 \text{ или } \left|5x^2 + 48x - 2024\right| = 3x^2.$$

Последните равенства са изпълнени при

$$5x^2 + 48x - 2024 = x^2 \text{ или } 5x^2 + 48x - 2024 = -x^2 \text{ или}$$
$$5x^2 + 48x - 2024 = 3x^2 \text{ или } 5x^2 + 48x - 2024 = -3x^2, \text{ т.е.}$$

$$4x^2 + 48x - 2024 = 0 \text{ или } 6x^2 + 48x - 2024 = 0 \text{ или}$$
$$2x^2 + 48x - 2024 = 0 \text{ или } 8x^2 + 48x - 2024 = 0.$$

Равенството

$$4x^2 + 48x - 2024 = 0 \iff x^2 + 12x - 506 = 0 \iff (x+6)^2 = 542$$

не е изпълнено за цяла стойност на x, тъй като $542 = 2.271$ не е втора степен на цяло число.

Равенството $6x^2 + 48x - 2024 = 0$ не е изпълнено за цели x, тъй като $6x^2 + 48x$ се дели на 3, а 2024 не се дели на 3.

Равенството

$$2x^2 + 48x - 2024 = 0 \iff x^2 + 24x - 1012 = 0 \iff$$

$$(x+12)^2 - 34^2 = 0 \iff (x-22)(x+46) = 0$$

е изпълнено при $x = 22$ и $x = -46$.

Равенството

$$8x^2 + 48x - 2024 = 0 \iff x^2 + 6x - 253 = 0 \iff (x+3)^2 = 262$$

не е изпълнено за цяла стойност на x, тъй като $262 = 2.131$ не е втора степен на цяло число.

3 точки

б) Както в а), получаваме, че даденото равенство е изпълнено при

$$4x^2 + 48x - y = 0 \text{ или } 6x^2 + 48x - y = 0 \text{ или}$$
$$2x^2 + 48x - y = 0 \text{ или } 8x^2 + 48x - y = 0.$$

Съответно имаме

$$y = 4(x+6)^2 - 144 \text{ или } y = 6(x+4)^2 - 96 \text{ или}$$
$$y = 2(x+12)^2 - 288 \text{ или } y = 8(x+3)^2 - 72.$$

Тъй като $4(x+6)^2 \geqq 0$, в първия случай най-малката стойност на y е -144.

Тъй като $6(x+4)^2 \geqq 0$, във втория случай най-малката стойност на y е -96.

Тъй като $2(x+12)^2 \geqq 0$, в третия случай най-малката стойност на y е -288.

Тъй като $8(x+3)^2 \geqq 0$, в последния случай най-малката стойност на y е -72.

Следователно най-малката възможна стойност на y е $y = -288$ и се получава при $2(x+12)^2 = 0$, т.е. $x = -12$.

3 точки

Задача 2. В декартова координатна система xOy с единична отсечка 1 cm са дадени точките $A(-6;0)$, $B(4;0)$, C и $D(0;9)$ така, че четириъгълникът $ABCD$ е успоредник. Правата BC пресича оста Oy в точка F, а през точка F е построена права g, перпендикулярна на BC. Правата g пресича оста Ox в точка E.

а) Намерете координатите на точките C, F и E.

б) Ако ъглополовящата на $\sphericalangle ADF$ пресича правата BC в точка P, намерете дължината на отсечката FP.

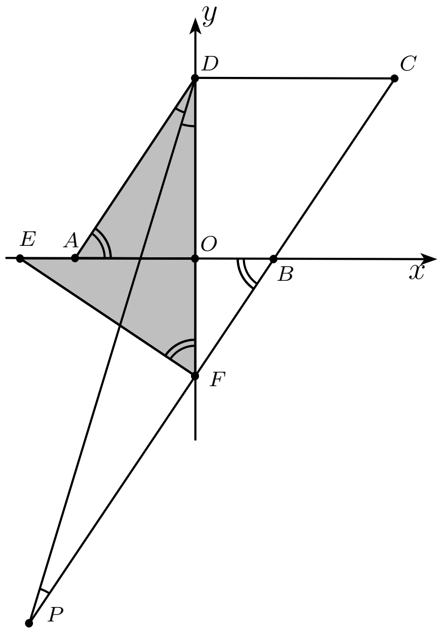
Решение. От $CD||Ox$ следва, че $y_C = y_D = 9$; $CD = AB = 10$, следователно $C(10;9)$. **(0,5 точки)**

От $AD||BC$ следва, че

$$S_{ADF} = S_{ADB} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}AB.DO = 45 \text{ cm}^2.$$

Но $S_{ADF} = \dfrac{1}{2}AO.DF$, следователно $DF = 15$ cm, $OF = 6$ cm и $F(0;-6)$.

(1,5 точки)



Да означим $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABF = \alpha$ (кръстни). От $\triangle BEF$ изразяваме $\sphericalangle BEF = 90^\circ - \alpha$.

Така получаваме, че $\triangle FOE \cong \triangle AOD$
($AO = OF$, $\sphericalangle AOD = \sphericalangle EOF = 90^\circ$, $\sphericalangle ADO = \sphericalangle OEF = 90^\circ - \alpha$).

(**1,5 точки**)

Следователно $OE = OD = 9$ и намираме $E(-9; 0)$. (**0,5 точки**)

б) От $\sphericalangle ADP = \sphericalangle FDP$ и $\sphericalangle ADP = \sphericalangle DPF$ (кръстни), следва, че $\sphericalangle DPF = \sphericalangle FDP$, т.е. триъгълникът PFD е равнобедрен и

$$PF = DF = 15 \text{ cm}.$$

(**2 точки**)

Задача 3. Даден е равностранен триъгълник ABC. На правата AB е избрана точка D така, че B е между A и D. Симетралата на отсечката AD пресича страната BC на триъгълника в точка E.

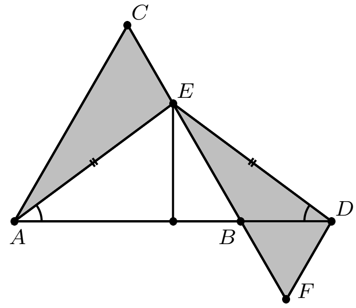
а) Да се докаже, че $BD = CE$.

б) Ако $\sphericalangle BAE = 45^\circ$ и P е пресечната точка на DE и AC, да се докаже, че

$$PE : DE = AP^2 : 2AD^2 \quad \text{и} \quad 2 \cdot AB = AP + 4 \cdot BD.$$

Решение. От $E \in s_{AD}$ следва, че $EA = ED$, откъдето $\sphericalangle EAD = \sphericalangle EDA = \alpha$.

a) *Първо решение.* Да построим равностранен триъгълник BFD, както е показано на чертежа. Имаме



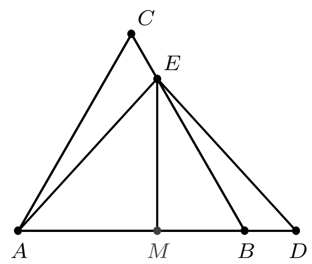
$$\sphericalangle AEC = \sphericalangle ABE + \sphericalangle BAE = 60^\circ + \alpha$$

(външен ъгъл за $\triangle ABE$) и

$$\sphericalangle FDE = \sphericalangle FDB + \sphericalangle BDE = 60^\circ + \alpha.$$

Тогава $\triangle ACE \cong \triangle EFD$ ($AE = DE$, $\sphericalangle C = \sphericalangle F = 60^\circ$, $\sphericalangle AEC = \sphericalangle FDE = 60^\circ + \alpha$). Следователно $FD = CE$, т.е. $BD = CE$.

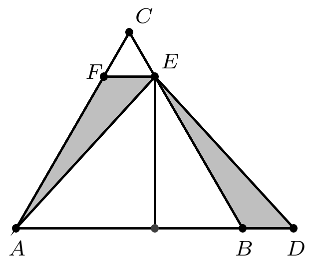
Второ решение. Нека означим страната на равностранния триъгълник с a и $BD = b$. Ако $s_{AD} \cap AB = M$, то $AM = MD = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}(a+b)$. Тогава $MB = AB - AM = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}$. В правоъгълния триъгълник MBE имаме $\sphericalangle MEB = 30^\circ$, следователно $BE = 2 \cdot MB = 2 \cdot \frac{a-b}{2} = a - b$. Тогава $CE = a - BE = a - (a-b) = b$, което трябваше да докажем.



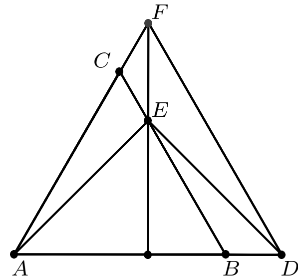
Трето решение. Да построим равностранния триъгълник CEF, както е показано на чертежа. От равенството $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EFC = 60^\circ$ следва, че $EF || AB$. Триъгълниците BDE и AFE са еднакви по втори признак:

1. $EA = ED$
2. $\sphericalangle AFE = \sphericalangle DBE = 120^\circ$
3. $\sphericalangle AEF = \sphericalangle DAE$ (кръстни), а $\sphericalangle DAE = \sphericalangle ADE$ ($\triangle ADE$ –равнобедрен)

Следователно $DB = EF = CE$.

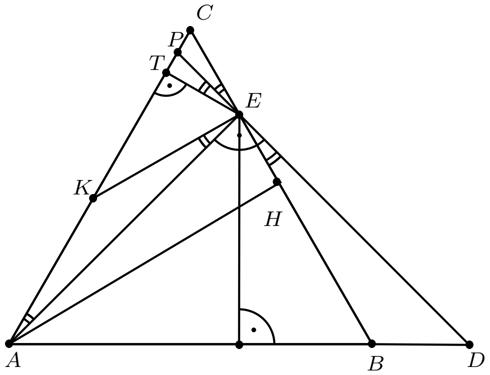


Четвърто решение. Да построим равностранния триъгълник ADF, както е показано на чертежа. Тъй като $AF = FD$ и $AE = ED$, то $EF \equiv s_{AD}$, следователно EF е и ъглополовяща в равностранния триъгълник ADF, т.е. $\sphericalangle AFE = 30^\circ$. Тогава $\sphericalangle CEF = \sphericalangle ACB - \sphericalangle CFE = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$, следователно $CF = FE$. От друга страна, $CF = AF - AC = AD - AB = BD$.



б) Тъй като $\sphericalangle ADE = \sphericalangle DAE = 45^\circ$ (от а)), то $\sphericalangle AED = 90^\circ$. Ако M е средата на хипотенузата AD в равнобедрения правоъгълен триъгълник ADE, то $EM = \dfrac{AD}{2}$, $EM \perp AD$.

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{AD}{2} = \frac{AD^2}{4}.$$



Триъгълникът APE също е правоъгълен ($\sphericalangle AEP = 90^\circ$) и $\sphericalangle PAE = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$. Ще използваме, че в правоъгълен триъгълник с ъгъл 15° височината към хипотенузата е равна на $\dfrac{1}{4}$ от хипотенузата.

(Ако K е средата на AP, то медианата към хипотенузата в $\triangle APE$ е $EK = KP = PA$; триъгълникът AKE е равнобедрен и външният му ъгъл срещу основата е $\sphericalangle EKT = 2\sphericalangle EAK = 30^\circ$. Ако ET е височина в триъгълника APE, то $\triangle KTE$ е правоъгълен с ъгъл 30°, следователно $TE = \dfrac{1}{2} \cdot EK = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{AP}{2} = \dfrac{AP}{4}$.)

Тогава

$$S_{APE} = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot ET = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot \frac{AP}{4} = \frac{AP^2}{8}.$$

Следователно

$$\frac{S_{APE}}{S_{ADE}} = \frac{AP^2}{8} : \frac{AD^2}{4} = \frac{AP^2}{2AD^2}.$$

От друга страна,

$$\frac{S_{APE}}{S_{ADE}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AE \cdot PE}{\frac{1}{2} \cdot AE \cdot DE} = \frac{PE}{DE}.$$

От двете последни равенства следва, че

$$\frac{PE}{DE} = \frac{AP^2}{2AD^2},$$

което трябваше да се докаже първо.

Да построим височината AH в равностранния триъгълник ABC; тя е медиана и ъглополовяща, т.е. $BH = CH = \dfrac{BC}{2}$ и $\sphericalangle BAH = \sphericalangle CAH = 30^\circ$. Тъй като $\sphericalangle CAE = 15^\circ$, то AE е ъглополовяща на $\sphericalangle CAH$. От свойството на ъглополовящата следва, че $EH = ET$. Но $ET = \dfrac{AP}{4}$, а

$$EH = CH - EC = \frac{BC}{2} - BD,$$

следователно $\dfrac{BC}{2} - BD = \dfrac{AP}{4} \iff 2 \cdot AB = AP + 4 \cdot BD.$

Оценяване. а) **3 точки**;
б) доказателство на равенството $PE : DE = AP^2 : 2AD^2$ – **2 точки**
доказателство на равенството $2 \cdot AB = AP + 4 \cdot BD$ – **2 точки**

Задача 4. В малко село в Средната земя живеят хобити и джуджета. Всички хобити са в приятелски отношения помежду си, а всяко джудже се е скарало с точно пет джуджета.

Тръгвайки на пътешествие, вълшебникът Гандалф решил да покани двама хобити и две джуджета да го придружат. Той установил, че възможностите за избор на двама хобити са точно толкова, колкото са възможностите за избор на две джуджета, които не са скарани.

а) Колко са хобитите и колко – джуджетата?

б) Всеки хобит и всяко джудже имат отделен дом. Домовете са разположени така, че никои три не лежат на една права. Някои домове са свързани с пътеки, като всяка пътека е отсечка и никои две пътеки не се пресичат във вътрешна точка (но може да имат общ край). Най-много колко пътеки свързват домовете в това село?

Решение. а) Нека хобитите са n, а джуджетата са m на брой. От условието следва, че $n \geqq 2$ и $m \geqq 7$ (защото ако джуджетата са само 6, всеки две ще са скарани и няма възможност за избор на две нескарани джуджета).

Възможностите за избор на двама хобити са $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Възможностите за избор на две джуджета, които не са скарани, са $\dfrac{m(m-6)}{2}$.

Получаваме равенството

$$n(n-1) = m(m-6) \iff 4n^2 - 4n = 4m^2 - 24m \iff$$

$$(2n-1)^2 - 1 = (2m-6)^2 - 36 \iff (2m-6)^2 - (2n-1)^2 = 35 \iff$$

$$(2m+2n-7)(2m-2n-5) = 35.$$

От условието следва, че $2m+2n-7 \geqq 2.7+2.1-7=9$. Това означава, че

$$2m+2n-7=35, \quad 2m-2n-5=1,$$

откъдето намираме $m=12$ и $n=9$.

б) Върху картата на селото да отбележим домовете на хобитите и джуджетата с точки, а пътеките с отсечки. Нека изпъкналата обвивка на полученото множество от $12+9=21$ точки е k-ъгълник K; $3 \leqq k \leqq 21$. Останалите $21-k$ точки са вътрешни за K.

Като построим максималния възможен брой непресичащи се отсечки, които свързват тези точки, ще получим триангулация на K (т.е. ще разделим K на триъгълници). Нека тези триъгълници са t на брой. Ако съберем ъглите на тези триъгълници, ще получим ъглите на K и по 360° във всяка от отбелязаните $(21-k)$ вътрешни точки. Следователно

$$180^\circ t = 180^\circ(k-2)+360^\circ(21-k) \iff t=40-k.$$

Остава да преброим отсечките. От t триъгълника получаваме $3t$ отсечки, като в този брой вътрешните участват в два триъгълника и са броени 2 пъти, а страните на K участват по веднъж. Вътрешните отсечки са

$$\frac{3t-k}{2}=\frac{3(40-k)-k}{2}=60-2k,$$

следователно всички отсечки са $k+60-2k=60-k$.

Отсечките са най-много, когато k е възможно най-малко, т.е. при $k=3$. Получаваме, че възможно най-големият брой отсечки (пътеки) е 57.

Пример с 57 пътеки може да се построи лесно, като се изберат първо три точки и се свържат, а всяка следваща точка се избира да е вътрешна за някой триъгълник и се свързва с трите му върха; така отсечките стават $3+(21-3).3=57$.

Оценяване. а) **3 точки**;
б) **4 точки**. Само за пример, без идея за изпъкнала обвивка – **1 точка**.