Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Пролетно математическо състезание “проф. Дочо Дочев”

Русе, 30 март 2024 г.

Русе, 2024 г.

Задача 11.1. Нека a е реално число.
а) Да се намерят всички стойности на a, за които неравенството

$$x\log_{\frac{1}{2}} a^4 - x^2 > 3 + 2\log_2 a^2$$

с неизвестно x има решение.
б) Да се пресметне границата

$$\lim_{a\to-\infty}\left(\sqrt{a^2-a+1}+a\right).$$

Решение. а) Тъй като $\log_{\frac{1}{2}}(a^4) = -2.\log_2(a^2)$, то като положим $2\log_2(a^2) = b$, получаваме неравенството $x^2 + b.x + 3 + b < 0$. За да има това неравенство поне едно решение, е необходимо и достатъчно $D = b^2 - 4b - 12 > 0$, чиито решения са $b < -2$ или $b > 6$, откъдето

$\log_2(a^2) < -1$ или $\log_2(a^2) > 3$. От свойствата на логаритмичната функция получаваме $a^2 < \dfrac{1}{2}$ или $a^2 > 8$ и $a \neq 0$. Окончателно

$$a \in \left(-\infty; -2\sqrt{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2}; \infty\right).$$

б) Тъй като $a < 0$, получаваме:

$$(1)\qquad \sqrt{a^2-a+1}+a = \frac{(\sqrt{a^2-a+1}+a)(\sqrt{a^2-a+1}-a)}{\sqrt{a^2-a+1}-a} = \frac{-1+\frac{1}{a}}{-\sqrt{1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}}-1}.$$

Следователно

$$\lim_{a\to-\infty}\left(\sqrt{a^2-a+1}+a\right) = \frac{1}{2}.$$

Оценяване. (6 точки) а) (3 точки); 1 т. за $\log_{\frac{1}{2}}(a^4) = -2.\log_2(a^2)$ и $x^2 + b.x + 3 + b < 0$; 1 т. за $D = b^2 - 4b - 12 > 0$ и за извода $\log_2 a^2 < -1$ или $\log_2 a^2 > 3$ и 1 т. за окончателния отговор; б) (3 точки); 2 т. за (1) и 1 т. за отговора $\dfrac{1}{2}$.

Задача 11.2. Даден е успоредник $ABCD$. Окръжност k минава през върховете A и C и пресича лъчите $AB^{\to}$ и $AD^{\to}$ съответно в точките E и F. Допирателната към окръжността k в точка C и правите BD и EF се пресичат в една точка. Да се докаже, че AC е диаметър на k.

Решение. Нека допирателната към k в точка C пресича лъчите $AB^{\to}$ и $AD^{\to}$ съответно в точките M и N, а правите BD, EF и допирателната се пресичат в точка P. Прилагаме два пъти теоремата на Менелай за $\triangle AMN$ и за правите BD и EF. Получаваме

$$\frac{AD}{ND}.\frac{NP}{MP}.\frac{MB}{AB} = 1 \text{ и } \frac{AF}{NF}.\frac{NP}{MP}.\frac{ME}{AE} = 1,$$

откъдето

$$(1)\qquad \frac{AD}{ND}.\frac{MB}{AB} = \frac{AF}{NF}.\frac{ME}{AE}.$$

Тъй като $ABCD$ е успоредник, то $\frac{AD}{ND} = \frac{MC}{NC} = \frac{MB}{AB}$ (2). От свойството на допирателната и секущите $MC^2 = ME.MA$ и $NC^2 = NF.NA$ (3). От (1), (2) и (3) следва, че

$$\frac{MC^2}{NC^2} = \frac{AF}{NF}.\frac{ME}{AE},$$

т.е. $\dfrac{ME.MA}{NF.NA} = \dfrac{AF}{NF}.\dfrac{ME}{AE}$, откъдето $\dfrac{MA}{NA} = \dfrac{AF}{AE}$. Следователно $AM.AE = AN.AF$, т. е. около четириъгълника $EFNM$ може да се опише окръжност. Тогава $\measuredangle AEF = \measuredangle ANM$, откъдето $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{AEC} - \overset{\frown}{FC}$, т. е. $\overset{\frown}{AEC} = \overset{\frown}{AFC}$. Оттук следва, че AC е диаметър на k.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за теоремата на Менелай и (1); 1 т. за (2); 1 т. за свойството на допирателната и секущите, 2 т. за извода, че $EFNM$ е вписан; 1 т. за окончателния извод.

Задача 11.3. Да се намерят всички естествени числа n, за които броят на положителните делители на НОК$(1, 2, \ldots, n)$ е степен на двойката.

Решение. (Първи начин) Ако $L =$ НОК$(1, 2, \ldots, n) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}$, то броят на положителните делители на L е равен на $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_t + 1)$. За да бъде това число степен на двойката, трябва $\alpha_i = 2^{a_i} - 1$.
При $2^k \leq n < 2^{k+1}$ и $3^s \leq n < 3^{s+1}$ (тъй като $2^{k+1} > n \geq 3^s$, то $k \geq s$) имаме $L = 2^k.3^s.5^{\alpha_3} \ldots$ за $k \geq s \geq 1$. Следователно $k = 2^p - 1$ и $s = 2^q - 1$, като $p \geq q$.

1. Ако $p = q$, то $k = s$ и тогава $2^{k+1} > n \geq 3^k$, което е изпълнено при $k = 1$. При $k > 1$ по индукция следва, че неравенството не е изпълнено. Тъй като $n < 3^{s+1}$, получаваме $n < 9$.

2. Ако $p > q$ имаме $p \geq q + 1$ и тогава $k = 2^p - 1 \geq 2^{q+1} - 1 = 2(2^q - 1) + 1 = 2s + 1$. Получаваме:
$$3^{s+1} > n \geq 2^k \geq 2^{2s+1} = 2.4^s.$$

Горното неравенство е изпълнено при $s = 1$, а при $s > 1$ по индукция следва, че неравенството не е изпълнено. Тъй като $n < 3^{s+1}$, получаваме $n < 9$.

Получихме, че $n < 9$ и директна проверка показва, че решения са само $n = 1, 2, 3$ и 8.

(Втори начин) За всяко просто p числата от интервала $n \in [p^2, p^3)$ не са решения, понеже степента на p в разлагането на НОК-а е 2, съответно допринася с множител 3 към броя на делителите и така този брой не е степен на 2. От постулата на Бертран за вско просто p има просто q с $p < q < 2p$, съответно $p^2 < q^2 < 4p^2 < p^3 < q^3$ за $p \geq 5$; също $3^2 < 5^2 < 3^3 < 5^3$. Следователно всеки интервала $[p^2, p^3)$ и $[q^2, q^3)$ за последователни прости числа $3 \leq p < q$ се пресичат. Получихме, че $n < 9$ и директна проверка показва, че решения са само $n = 1, 2, 3$ и 8.

Оценяване. (7 точки) При първото решение: 1 т. за формулата за брой на делителите и извода, че всички степени са степен на двойката минус 1; 1 т. за разглеждане на двете неравенства $2^k \leq n < 2^{k+1}$ и $3^s \leq n < 3^{s+1}$; 1 т. за случая $p = q$; 3 т. за случая $p > q$ (от тях 1 т. за $k \geq 2s + 1$); 1 т. за получаване на всички решения. При второто решение: 1 т. за формулата за брой на делителите и извода, че всички степени са степен на двойката минус 1; 1 т. за идея за прилагане на постулата на Бертран; 2 т. за отхвърлянето на $n \in [p^2, p^3)$ за просто p, 2 т. за обосновка, че $[p^2, p^3)$ и $[q^2, q^3)$ се пресичат за последователни прости $3 \leq p < q$, 1 т. за получаване на всички решения.

Задача 11.4. Във вътрешността на изпъкнал 2024-ъгълник $A_1 A_2 \ldots A_{2024}$ са избрани 1000 точки, така че никои три от всички 3024 точки не лежат на една права. Някои от точките са свързани с отсечки, които не се пресичат, като вътрешността на 2024-ъгълника е разделена на триъгълници. Във всяка една от всички 3024 точки е записано едно от числата 1, -1, 2 или -2, като за всяко $i = 1, 2, \ldots, 1012$ числата, записани на A_i и A_{i+1012}, са противоположни. Да се докаже, че в някои два от върховете на някой от триъгълниците, на които е разделен 2024-ъгълника, са записани противоположни числа.

Решение. Ясно е, че ако има две съседни точки A_i и A_{i+1} с противоположни числа, задачата е решена. Без ограничение нека $A_1 = 1$ и да разгледаме всички отсечки A_iA_{i+1} за $i = 1, 2, \dots, 1012$. Тъй като $A_{1013} = -1$, то измежду разглежданите отсечки има нечетен брой, чиито краища са едно положително и едно отрицателно число. Тези две числа могат да бъдат $\{-1, 2\}$ или $\{1, -2\}$ и нека броят на отсечките с краища от първия вид да е p, а броят на отсечките с краища от втория вид да е q. Поради симетрията броят на отсеките A_iA_{i+1} за $i = 1013, \dots, 2024$ ($A_{2025} \equiv A_1$) с краища $\{1, -2\}$ е равен на p. Следователно всички отсечки с краища $\{1, -2\}$ са $p + q$, което е нечетно число.
Сега да разгледаме произволен триъгълник, който няма два върха с противоположни числа. Имаме следните възможности за трите числа:

$$(1, 1, -2), (1, 1, 2), (-1, -1, 2), (-1, -1, -2), (2, 2, -1), (2, 2, 1), (-2, -2, 1), (-2, -2, -1).$$

Всеки от тези триъгълници има четен брой (2 или 0) страни с краища 1 и -2. Следователно общият брой отсечки с краища 1 и -2 (броени с кратности) е четно число. Но всяка отсечка във вътрешността на 2024-ъгълника се брои два пъти (по веднъж от двата триъгълника, в които участва), а всяка отсечка, която е страна на 2024-ъгълника се брои по веднъж. Полученото противоречие показва, че съществува триъгълник с исканото свойство.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за разглеждане на броя на страните на 2024-ъгълника с едно положително и едно отрицателно число, 1 т. за доказване, че броят на страните от този вид измежду $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{1012}A_{1013}$ е нечетен, 1 т. за доказване на броят на страните на 2024-ъгълника с $\{1, -2\}$ е нечетен, 3 т. за доказване, че всеки триъгълник, който не изпълнява исканото, съдържа четен брой страни с $\{1, -2\}$, 1 т. за довършване