Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Пролетно математическо състезание “проф. Дочо Дочев”

Русе, 30 март 2024 г.

Русе, 2024 г.

Задача 12.1. Редицата $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ е такава, че

$$a_1 = 1 \text{ и } a_{n+1} = \frac{9a_n + 4}{a_n + 6} \text{ за всяко } n \in \mathbb{N}.$$

Кои членове на редицата са цели числа?

Решение. Очевидно всички членове на редицата са положителни. Ще докажем по индукция, че $a_n < 4$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. При $n = 1$ това е вярно и имаме

$$4 - a_{n+1} = \frac{20 - 5a_n}{a_n + 6} > 0$$

от индукционната хипотеза. Да забележим, че

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-a_n^2 + 3a_n + 4}{a_n + 6} = \frac{(4 - a_n)(a_n + 1)}{a_n + 6} > 0$$

и следователно редицата е строго растяща. Тогава ако тя съдържа цяло число освен първия член, то трябва да е 2 или 3. Тъй като $a_2 = \frac{13}{7} < 2$, $a_3 = \frac{29}{11} \in (2, 3)$ и $a_4 = \frac{61}{19} > 3$, единствено a_1 е цяло число.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за $a_n < 4$; 2 т. за строгата монотонност; 2 т. за довършване.

Задача 12.2. Точките D и E съответно върху страната AC на $\triangle ABC$ и отсечката BD са такива, че $\angle DAE = \angle AED = \angle ABC$. Да се докаже, че $BE = 2CD$ тогава и само тогава, когато $\angle ACB = 90°$.

Решение. Нека $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$ и $\gamma = \angle C$. Тогава

$$\frac{BE}{\sin(\alpha - \beta)} \overset{(1)}{=} \frac{AB}{\sin(\pi - \beta)}, \quad \frac{CD}{\sin(\alpha - \beta)} \overset{(2)}{=} \frac{BC}{\sin 2\beta}, \quad \frac{AB}{\sin\gamma} \overset{(3)}{=} \frac{BC}{\sin\alpha}$$

и значи

$$\frac{BE}{CD} = \frac{\sin 2\beta \sin\gamma}{\sin\beta \sin\alpha} \overset{(4)}{=} \frac{2\cos\beta \sin\gamma}{\sin\alpha} \overset{(5)}{=} \frac{2\cos\beta\sin\gamma}{\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma}.$$

Следователно (6) $BE = 2CD \Leftrightarrow \cos\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 90°$.

Оценяване. (6 точки) По 1 т. за всяко (i).

Задача 12.3. Едно цяло число ще наричаме *студентско*, ако има вида a^{33}, където a е цяло число. С $b(n)$, където n е естествено число, ще означаваме най-малкия възможен брой студентски числа, чийто сбор е n. Например $b(2^{33} - 1) = 2$. Крайно или безкрайно е множеството на естествените числа n, за които:

а) $b(n) = 12$ б) $b(n) = 12^{12^{12}}$?

Решение. а) От теоремата на Ферма и $y^2 \equiv 1 \pmod{67} \Leftrightarrow y \equiv \pm 1 \pmod{67}$ следва, че всяко студентско число дава остатък 0, 1 или 66 при деление на 67. Да разгледаме числата 12^{66k+1}, където $k \in \mathbb{N}$. Те се представят като сума на 12 студентски числа. Освен това от теоремата на Ферма $12^{66k+1} \equiv 12 \pmod{67}$. Това показва, че $b(12^{66k+1}) = 12$ за всяко $k \in \mathbb{N}$. Следователно множеството в тази подточка е безкрайно.

б) За $P \in \mathbb{Z}[X]$ да положим $\Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x)$. Ясно е, че ако P е от степен d със старши коефициент a, то $\Delta(P) \in \mathbb{Z}[X]$ е полином от степен $d-1$ със старши коефициент ad. Да разгледаме редицата от полиноми $P_1(x) = x^{33}$, $P_{k+1} = \Delta(P_k)$ за $k \in \mathbb{N}$. Лесно се вижда по индукция спрямо k, че за всеки $x \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$ числото $P_k(x)$ е сума на 2^{k-1} студентски числа. Освен това имаме, че $P_{33}(x) = 33!x + b$ за някое $b \in \mathbb{Z}$. Тъй като 1 и -1 са студентски числа, всяко цяло число е сума на не повече от $2^{32} + 33! < 12^{12^{12}}$ студентски числа. Тогава множеството от тази подточка е празно, а значи и крайно.

Оценяване. (7 точки) За а) (общо 3т.): 1т. за $a^{33} \equiv 0, \pm 1 \pmod{67}$, 1т. за работеща конструкция, 1т. за доказателство, че конструкцията работи; за б) (общо 4т.): 1т. за идеята за намаляване на степента на полиноми чрез разлики, 2т. за доказване, че съществуват $a, b, c \in \mathbb{N}$ такива, че всяко естествено число, което дава остатък b при деление на a, се записва като сума на c студентски числа (в решението $a = 33!$ и $c = 2^{32}$), 1т. за довършване.

Задача 12.4. Нека $d \geq 3$ е естествено число. *Пълно d-мерно сдвояване* наричаме разбиване на множеството от двоични вектори с дължина d на 2^{d-1} непресичащи се двойки, като векторите във всяка двойка се различават в точно една позиция. За зададено пълно d-мерно сдвояване $\mathcal{M}$ и естествено число $k \geq 2$, *алтерниращ цикъл с дължина* $2k$ наричаме циклична подредба на $2k$ различни двоични вектора, такива че всяка двойка съседни вектори се различават в точно една позиция и точно половината от тези двойки принадлежат на $\mathcal{M}$. Да се докаже, че за всяко пълно d-мерно сдвояване съществува алтерниращ цикъл с дължина най-много $2d-2$.

Решение. Да разгледаме граф G с върхове двоичните вектори с дължина d и ребра, свързващи двойките вектори, които се различават в точно една позиция. Нека $\mathcal{M}$ е пълно d-мерно сдвояване. Ще докажем, че за всеки връх $\mathbf{x} \in \{0,1\}^d$ на G можем да намерим алтерниращ цикъл с дължина не повече от $2d-2$ измежду векторите на разстояние най-много 2 от $\mathbf{x}$. Нека $\mathbf{x} \in \{0,1\}^d$ има за съседи $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_d$ в G. Нека без ограничение на общността $\{\mathbf{x}, \mathbf{x}_1\} \in \mathcal{M}$, а векторите $\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_d$ формират двойки в $\mathcal{M}$ респективно с $\mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_d$ (които са на разстояние 2 от $\mathbf{x}$). Да забележим, че всеки един от векторите $\mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_d$ има точно два съседа измежду $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_d$ в G. Ще разгледаме два случая:

Случай 1. Някой от векторите $\mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_d$, да кажем $\mathbf{y}_i$, е съсед на $\mathbf{x}_1$ в G. Тогава $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i$ формират алтерниращ цикъл с дължина $4 \leq 2d-2$.

Случай 2. Никой от векторите $\mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_d$ не е съсед на $\mathbf{x}_1$ в G. Да разгледаме следния алгоритъм. В началото, да поставим жетон във връх $\mathbf{x}_2$ и на всяка стъпка:

- ако жетонът се намира във връх $\mathbf{x}_i$ за някое $i \in \{2, \ldots, d\}$, го преместваме във връх $\mathbf{y}_i$;
- ако жетонът се намира във връх $\mathbf{y}_i$ за някое $i \in \{2, \ldots, d\}$, го преместваме в съседа на $\mathbf{y}_i$, различен от x_i.

Очевидно след не повече от $2d-2$ хода на алгоритъма някой връх ще бъде повторен. Тъй като алгоритъмът описва разходка върху графа G, където всяко нечетно ребро е в $\mathcal{M}$ и всяко четно ребро е извън $\mathcal{M}$, то той намира алтерниращ цикъл след най-много $2d-2$ хода, откъдето твърдението следва и в този случай.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за въвеждане на графа G; 2 т. за разглеждане на частта от графа, съставена от върховете на разстояние най-много 2 от даден връх; 1 т. за първия случай; 2 т. за втория случай

Задачите са предложени от: 8.1, 8.3 – Ивайло Кортезов; 8.2, 8.4 – Мирослав Маринов; 9.1, 10.1 – Недялка Димитрова; 9.2, 9.3 – Константин Делчев; 9.4 (10.3) – Александър Иванов; 10.2 – Александър Иванов и Мирослав Маринов; 10.4 – Данила Черкашин; 11.1, 11.2 – Аделина Чопанова; 11.3, 11.4 – Емил Колев; 12.2 – Николай Николов; 12.1, 12.3 – Борислав Кирилов; 12.4 – Любен Личев