Пролетни математически състезания, 2024 г.

Тема за 5. клас

Задача 1. Дари написала компютърна програма, която съставя редица от числа по следния начин.

1. В началото Дари въвежда първото и второто число в редицата.

2. На всяка стъпка, след последните две числа a и b в редицата, програмата пресмята и изписва на екрана следващото число, равно на $2 \cdot \dfrac{b}{a}$.

$$a,\ b,\ 2 \cdot \frac{b}{a}, \ldots$$

3. Програмата спира, когато за първи път сборът на всички числа на екрана (включително въведените от Дари), стане по-голям от 1000.

Дари въвела първо числото $1\frac{1}{2}$. След като въвела и второто си число, на екрана се изписало третото число в редицата: 1,6.

а) Кое е второто число, което е въвела Дари?

б) На колко е равен сборът на първите 95 числа в редицата?

в) Колко числа ще има в редицата, когато програмата спре?

Решение. а) **Отговор:** 1,2. Нека второто въведено число на Дари е X. От равенството

$$2 \cdot X : 1\frac{1}{2} = 1{,}6 \quad \text{намираме} \quad X = 1{,}2.$$

1 точка

б) **Отговор:** 202,3. Началото на редицата е

$$1\frac{1}{2};\ \ 1{,}2;\ \ 1{,}6;\quad 2 \cdot 1{,}6 : 1{,}2 = \frac{8}{3};\quad 2 \cdot \frac{8}{3} : 1{,}6 = \frac{10}{3};\quad 2 \cdot \frac{10}{3} : \frac{8}{3} = \frac{5}{2};$$
$$2 \cdot \frac{5}{2} : \frac{10}{3} = 1\frac{1}{2};\quad 2 \cdot 1\frac{1}{2} : \frac{5}{2} = 1{,}2\ldots$$

Следователно в редицата периодично се повтарят първите шест числа $1\frac{1}{2}$, 1,2, 1,6, $2\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{2}$. Сборът на шестте повтарящи се числа е

$$1\frac{1}{2} + 1{,}2 + 1{,}6 + 2\frac{2}{3} + 3\frac{1}{3} + 2\frac{1}{2} = 12,8.$$

Тъй като $95 : 6 = 15$ (ост. 5), сборът на първите 95 числа в редицата е

$$16 \cdot 12{,}8 - 2\frac{1}{2} = 204{,}8 - 2{,}5 = 202{,}3.$$

3 точки

в) **Отговор:** 470. Тъй като $1000 : 12{,}8 = 78\frac{1}{8}$, то в редицата ще са записани 78 пъти шестте числа $1\frac{1}{2}$, 1,2, 1,6, $\frac{8}{3}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{5}{2}$. Така ще са записани $78 \cdot 6 = 468$ числа със сбор $78 \cdot 12{,}8 = 998{,}4$.

При записване на следващото, 469-то число, сборът ще стане $998{,}4 + 1{,}5 = 999{,}9$.

При записване на 470-тото число, сборът ще стане $999{,}9 + 1{,}2 = 1001{,}1$, ще надхвърли 1000 и програмата ще спре.

2 точки

Задача 2. Децата в летен лагер говорят немски или английски и никой не говори и двата езика. Известно е, че:

- 40% от немскоговорящите са момичета,
- 30% от момчетата говорят немски,
- 20% от англоговорящите са момчета.

а) Колко процента от децата са момичетата, които говорят английски език?

б) Колко процента от момичетата говорят немски език?

Решение. Нека немскоговорящите са x; от тях $0{,}4x$ са момичета и $0{,}6x$ са момчета. Тези $0{,}6x$ немскоговорящи момчета са 30% от момчетата, следователно всички момчета са $0{,}6x : 0{,}3 = 2x$. Тогава англоговорящите момчета са $2x - 0{,}6x = 1{,}4x$. Тези $1{,}4x$ англоговорящи момчета са 20% от англоговорящите. Следователно децата, които говорят английски, са $1{,}4x : 0{,}2 = 7x$. Следователно момичетата, които говорят английски, са $7x - 1{,}4x = 5{,}6x$.

	момчета	момичета	общо
Английски	$1{,}4x$	$5{,}6x$	$7x$
Немски	$0{,}6x$	$0{,}4x$	x
общо	$2x$	$6x$	$8x$

3 точки

а) Търсим колко процента от всички деца ($8x$) са момичетата, които говорят английски ($5{,}6x$), или

$$\frac{5{,}6x}{8x} = 70\%.$$

1 точка

б) Търсим колко процента от момичетата ($6x$) са момичетата, които говорят немски ($0{,}4x$), или

$$\frac{0{,}4x}{6x} = \frac{40}{6.100} = \frac{20}{3}\% = 6\frac{2}{3}\%.$$

2 точки

Задача 3. Най-малкото общо кратно на естествените числа a и b е 360. Ако a се намали с 20% и b се намали с 25%, се получават две взаимнопрости естествени числа.

Намерете a и b, ако е известно, че тяхната разлика се дели на 7.

Решение. След намаление на a с 20% се получава $\frac{4}{5}a$, което трябва да е естествено число, т.е. a се дели на 5. Нека $a = 5n$, където n е естествено число. След промяната получаваме $\frac{4}{5} \cdot 5n = 4n$.

1 точка

След намаление на b с 25% се получава $\frac{3}{4}b$, което трябва да е естествено число, т.е. b се дели на 4. Нека $b = 4m$, където m е естествено число. След промяната получаваме $\frac{3}{4} \cdot 4m = 3m$.

1 точка

От условието НОД$(4n, 3m) = 1$ следва, че m и n са взаимнопрости, m не се дели на 2 и n не се дели на 3.

1 точка

Имаме НОК$(5n, 4m) = 360 = 2.2.2.3.3.5$.

Тъй като n не се дели на 3, то 3.3 участва в разлагането на m.

1 точка

Тъй като m не се дели на 2, то 2.2.2 участва в разлагането на n.

1 точка

Възможни са следните два случая.

	n	m	$a = 5n$	$b = 4m$
1.	2.2.2	3.3	40	36
2.	2.2.2	3.3.5	40	180

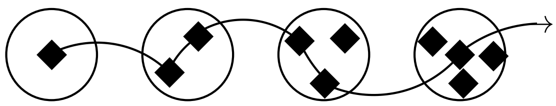
Разликата на a и b се дели на 7 само при $a = 40$, $b = 180$.

2 точки

Задача 4. В галактиката на Малкия принц има пет планети. На първата планета има един град, на втората има два града и т.н., на петата планета има 5 града.

Малкият принц планира пътешествие между градовете на тези планети така, че да не посети нито един град повече от веднъж (възможно е да пропусне някои градове). Той тръгва от града на първата планета към втората, след това към третата и така нататък, като пътешествието му свършва в някой град на петата планета. На всяка планета Малкият принц избира в кой град да кацне, кои градове да посети и в какъв ред, а след това отлита към следващата планета. На всяка той посещава планета поне един град.

Началото на неговото пътешествие би могло да изглежда така:



а) Колко са различните маршрути, по които може да пътешества Малкият принц?

б) Преди началото на пътешествието, един от градовете бил затворен за посещение. Малкият принц пресметнал, че му остават 332 800 възможни маршрути. На коя планета е затвореният град?

Решение. За планета с номер n Малкият принц може да посети само един град по n начина; точно два града по $n(n-1)$ начина; $\ldots$ всички градове по $n.(n-1).(n-2)\ldots 3.2.1$ начина.

За всяка планета пресмятаме броя на маршрутите на нея.

Планета	Брой маршрути
1	1
2	$2+2.1=4$
3	$3+3.2+3.2.1=15$
4	$4+4.3+4.3.2+4.3.2.1=64$
5	$5+5.4+5.4.3+5.4.3.2+5.4.3.2.1=325$

4 точки

Броят на възможните маршрути е $1.4.15.64.325 = 1\ 248\ 000$.

1 точка

б) Ако затвореният град е на n-тата планета, $n>1$, броят на маршрутите на нея е равен на броя на маршрутите на $n-1$-та планета.

Тъй като 332 800 не се дели на 3, то в произведението $1.4.15.64.325$ множителят 15, който е кратен на 3, трябва да се замени с 4. И наистина, $1.4.4.64.325 = 332800$. Затвореният град е на третата планета.

2 точки