Математически турнир „Иван Салабашев“
30 ноември 2024 г.
Решения на задачите от темата за 10-12. клас

Задача 1. За даден триъгълник да се намери най-голямото реално число m такова, че през всяка точка от равнината минава права, която отсича от него отсечка с дължина поне m.
Решение. Ще докажем, че ако $h_a \leq h_b, h_c$ за $\Delta = \triangle ABC$, то $m = h_a$.
Очевидно през всяка точка от равнината минава права, която пресича Δ във връх и точка от срещуположната му страна, например D and D_1. Понеже $|DD_1| \geq h_d \geq h_a$, следва, че $m \geq h_a$.
От друга страна, можем да изберем O така, че $AO \perp BC$, $\measuredangle ABO \geq 90^\circ$ и $\measuredangle ACO \geq 90^\circ$. Нека права през O пресича Δ в точки E и E_1. Можем да считаме, че $E \in [AB]$ и $E_1 \in [A_1B]$, където $A_1 = AO \cap BC$. Тогава $|OE_1| \geq |OA_1|$ и $|OE| \leq |OA|$ (понеже $\measuredangle AEO \geq \measuredangle ABO \geq 90^\circ$ при $E \neq A$), откъдето $|EE_1| \leq |AA_1| = h_a$. Следователно $m \leq h_a$.
Оценяване. 2 т. за $m \geq h_a$ и 5 т. $m \leq h_a$.

Задача 2. Да се докаже, че съществуват безбройно много функции от вида $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, където $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, такива, че $f(f(f(x))) = x$ за всяко $x \in \mathbb{R}$, за които лявата страна е дефинирана.

Решение. Директно се проверява, че функциите $f_{a,d}(x) = a - \dfrac{(a+d)^2}{x+d}$, $a \neq -d$, имат исканото свойство.
Оценяване. 3 т. за пример и 4 т. за проверка.
Забележка. В комплексния случай може да се докаже, че:
а) $f(f(z)) = z$ точно когато $f(z) = z$, $f(z) = -z + b$ или $f(z) = \dfrac{az+b}{z-a}$, $a^2 \neq -b$.
б) $f(f(f(z))) = z$ точно когато $f(z) = z$, $f(z) = e^{2\pi i/3}z$, $f(z) = e^{4\pi i/3}z$ или $f(z) = f_{a,d}(z)$, $a \neq -d$.

Задача 3. Нека $c \in \mathbb{R}$, m и n са естествени числа, по-големи от 1, а P и Q са такива неконстанти полиноми с реални коефициенти, че $(P(x))^m - (Q(x))^n = c$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Да се докаже, че $c = 0$.
Решение. Ясно е, че даденото равенство е изпълнено за всяко $z \in \mathbb{C}$. По-долу ще разглеждаме полиноми с комплексни коефициенти.
Да допуснем, че $c \neq 0$. Нека $z_1, \ldots, z_m$ са комплексните m-ти корени на c. Тогава (1) $Q^n = (P - z_1)\ldots(P - z_m)$. Понеже всеки два от полиномите в това произведение нямат обща нула, то (2) $P - z_k = Q_k^n$ за $k = 1, \ldots, m$, където Q_k са полиноми. Тогава (3) $0 \neq z_1 - z_2 = Q_1^n - Q_2^n$ и както по-горе следва, че $Q_1 - Q_2$ е константен полином, съвпадащ с всеки от комплексните n-ти корени на $z_1 - z_2$, което е противоречие.
Оценяване. По 2 т. за (1) и (2), 1 т. за (3) и 2 т. за довършване. 2 т., ако е разгледан само случаят, когато НОД$(m, n) = k > 1$, с помощта на разлагането $a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1})$.
Забележка. Вярно е и по-общо твърдение: разликата на два различни неконстанти полиноми без прости комплексни нули не може да бъде константен полином.