Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Пролетно математическо състезание “проф. Дочо Дочев”

Русе, 30 март 2024 г.

Русе, 2024 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 9.1. Да се реши неравенството:

$$\frac{x^2 - |x-1| - 4}{x-4} \geq 2x - 1.$$

Отговор. $x \in (-\infty; 1] \cup (4; 7]$.

Решение. Да отбележим, че $x \neq 4$ и $|x-1| = x-1$ за $x > 1$, в противен случай $|x-1| = 1-x$.
Случай 1. $x > 1$.
Разкриваме модула и привеждаме под общ знаменател. Получаваме:

$$\frac{x^2 - 8x + 7}{x-4} \leq 0.$$

Разлагаме числителя:

$$\frac{(x-7)(x-1)}{x-4} \leq 0.$$

От тук получаваме решението $x \in (4, 7]$.
Случай 2. $x \leq 1$.
Разкриваме модула и привеждаме под общ знаменател. Получаваме:

$$\frac{x^2 - 10x + 9}{x-4} \leq 0.$$

Разлагаме числителя:

$$\frac{(x-9)(x-1)}{x-4} \leq 0.$$

От тук получаваме решението $x \in (-\infty, 1]$.
Окончателното решение е обединението на двата интервала.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за разкриване на модула и дефиниционно множество, по 2 т. за случай, 1 т. за отговор.

Задача 9.2 Даден е триъгълникът ABC и M - среда на AB. Дадени са ъглите $\angle ABC = 30^\circ$ и $\angle BCM = 105^\circ$. Да се докаже, че $CM.AC = BM.BC$.

Решение. Построяваме AA_1 височината от т.A в $\triangle ABC$. Да отбележим че тя лежи на продължението на BC, защото този триъгълник е тъпоъгълен. Триъгълникът $\triangle AA_1B$ е правоъгълен с ъгъл 30°. Следователно $AA_1 = AM = A_1M = BM = x$. Последователно намираме директно:
$\angle CMB = 45^\circ$ (от сбора на ъгли в $\triangle CMB$);
$\angle A_1MA = 60^\circ$ ($\triangle AMA_1$ е равностранен триъгълник);
$\angle A_1MC = 75^\circ$ (от сбора на ъгли върху правата AB при точка M);
$\angle MCA_1 = 75^\circ$ (външен ъгъл за $\triangle MCB$).
Значи $\triangle MCA_1$ е равнобедрен. Тогава $CA_1 = x$ и $\triangle AA_1C$ е равнобедрен и правоъгълен, следователно $\angle ACA_1 = 45^\circ$ и следователно $\angle ACM = 30^\circ$.
Ще пресметнем лицето на $\triangle ACM$ по два различни начина.
$S_{ACM} = \frac{AC.CM}{4}$, защото $\angle ACM = 30^\circ$, т.е. височината към AC е равна на $MC/2$.
Да, но също така M е среда на AB. Значи $S_{ACM} = \frac{S_{ABC}}{2} = \frac{BC.AA_1}{4} = \frac{BC.BM}{4}$.
От двете формули за лице директно получаваме търсеното.
Оценяване. (6 точки) 1т. за построение на A_1. 1т. за $AA_1 = AM = A_1M = BM$. 2т. за $\angle ACM = 30$. По 1т. за всяка от двете формули за лице на $\triangle ACM$.

Задача 9.3 Наричаме n прави в равнината *трипосочни*, ако могат да бъдат разделени в три непразни множества, X, Y, Z. Всеки две прави от едно и също множество са успоредни помежду си, никои две прави от различни множества не са успоредни помежду си и никои три прави не се пресичат в една точка.
С S_n бележим максималният брой области, на които n трипосочни прави могат да разделят равнината. Като за област считаме свързана част от равнината, не задължително крайна, чиито граници са определени от трипосочните прави.

Кое е най-голямото n за което $S_n < 128$?

Решение. Ще изведем обща формула за броят на областите. Нека трите множества имат брой на елементите съответно $|X| = x$, $|Y| = y$ и $|Z| = z$. Първите две разделят равнината на общо $(x+1)(y+1)$ области. Всяка права от третото множество се пресича от останалите в $x+y$ точки и се разделя на $x+y+1$ части. Всяка от тях разделя една от получените вече области на две. Така получаваме обща формула:

$$S_{x,y,z} = (x+1)(y+1) + z(x+y+1) = x+y+z+xy+xz+yz+1.$$

Отбелязваме, че $n = x+y+z$. Освен това, имаме че $3(xy+yz+zx) \leq (x+y+z)^2 = n^2$ (еквивалентно на $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$). Значи $S_{x,y,z} \leq n^2/3 + n + 1$, което е по-малко от 128 за $n = 18$ (всъщност, $S_{6,6,6} = 127$, т.е. $S_{18} = 127$). Също, $S_{6,6,7} = 140$, значи $S_n > 128$ за $n \geq 19$. Следователно отговорът е 18.
Оценяване. (7 точки) 3т. за извеждане на формулата за броят области. 3т. за ограничението отгоре с функция на n. 1т за довършване.

Задача 9.4. За нечетно естествено число $n > 1$ дефинираме множеството от различните остатъци на степени на двойката при деление на n:

$$S_n = \{a \mid a < n, \exists k \in \mathbb{N} : 2^k \equiv a \pmod{n}\}.$$

Съществуват ли различни нечетни числа m и r такива, че $S_m = S_r$?

Решение. Не! Съществува естествено число s, такова че $2^s \equiv 1 \pmod{n}$ (например $s = \varphi(n)$ от теоремата на Ойлер или понеже редицата от степените на 2 по модул n е периодична). Имаме $2^{s-1} \equiv \frac{n+1}{2} \pmod{n}$ и значи $x = \frac{n+1}{2} \in S_n$, но $2x = n+1 > n$ не е в S_n. Също, ако $t \leq \frac{n-1}{2}$ е от S_n, то $2t < n$ също е. Следователно най-малкото естествено число t, такова че $t \in S_n$ и $2t \notin S_n$, е $\frac{n+1}{2}$. Понеже това число е различно за различни n, получаваме исканото.
Оценяване. (7 точки) 3 т. за обосновка, че $x \in S_n$, $2x \notin S_n$, е вярно за $x = \frac{n+1}{2}$; 3 т. за обосновка, че $x \leq \frac{n-1}{2}$ не изпълняват това свойство; 1 т. за довършване.