Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Пролетно математическо състезание "проф. Дочо Дочев"

Русе, 30 март 2024 г.

Русе, 2024 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. Намерете всички двойки (x, y) от реални числа, за които

$$4y^4 + x^4 + 12y^3 + 5x^2(y^2 + 1) + y^2 + 4 = 12y.$$

Отговор. $(0, -2)$ и $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Решение. (Първи начин) Полагаме $t = x^2 \geq 0$ и разглеждаме даденото като квадратно уравнение относно t. Дискриминантата на $t^2 + 5t(y^2 + 1)t + 4y^4 + 12y^3 + y^2 - 12y + 4 = 0$ е

$$\begin{aligned} D &= 25(y^2 + 1)^2 - 16y^4 - 48y^3 - 4y^2 + 48y - 16 \\ &= 9y^4 - 48y^3 + 46y^2 + 48y + 9 \\ &= 9y^4 - 18y^2 + 9 - 48y(y^2 - 1) + 64y^2 \\ &= (3y^2 - 3)^2 - 2 \cdot 8y(3y^2 - 3) + (8y)^2 \\ &= (3y^2 - 8y - 3)^2, \end{aligned}$$

откъдето корените са $t_1 = \frac{1}{2}(-5y^2 - 5 + 3y^2 - 3 - 8y) = -y^2 - 4y - 4 = -(y + 2)^2 \leq 0$, $t_2 = \frac{1}{2}(-5y^2 - 5 - 3y^2 + 3 + 8y) = -4y^2 + 4y - 1 = -(2y - 1)^2 \leq 0$. Следователно $t = 0$, $x = 0$ и за (x, y) получаваме решенията $(0, -2)$ и $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

(Втори начин) Имаме неравенствата $x^4 \geq 0$, $5x^2(y^2 + 1) \geq 0$ и $4y^4 + 12y^3 + y^2 - 12y + 4 = (2y - 1)^2(y + 2)^2 \geq 0$. Сборът на левите страни е 0 тогава и само тогава, когато всяка от тях е равна на 0. Първите две водят до $x = 0$, а третата – до $y = -2$ или $y = \frac{1}{2}$.

Оценяване. (6 точки) При първото решение: 1 т. за полагане $t = x^2 \geq 0$; 2 т. за $D = (3y^2 - 8y - 3)^2$; 1 т. за корена $-(y + 2)^2 \leq 0$; 1 т. за корена $-(2y - 1)^2 \leq 0$; 1 т. за завършване. При второто решение: Общо 1 т. за $x^4 \geq 0$ и $5x^2(y^2 + 1) \geq 0$; 3 т. за $4y^4 + 12y^3 + y^2 - 12y + 4 = (2y - 1)^2(y + 2)^2 \geq 0$; 1 т. за аргумента, че сбор на неотрицателни събираеми е 0 само ако всяко от тях е 0; 1 т. за завършване.

Задача 8.2. Точките A, B, Y и C лежат в този ред на окръжност k с център O, като $BC = 2$ см, $\angle BAY = 42^\circ$ и $\angle CAY = 78^\circ$. Известно е, че окръжността ω през точките A, O и B се допира до правата BY. Окръжността през точките A и C, допираща се до правата CY, пресича ω за втори път в точката N. Да се намери:

а) дължината на отсечката BO;   б) големината на ъгъла $\angle YAN$.

Отговор. а) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см   б) 36°.

Решение. а) Явно $\angle BAC = \angle BAY + \angle CAY = 120^\circ$, съответно $\angle BOC = 360^\circ - 2\angle BAC = 120^\circ$. Така ако M е средата на BC, то $OM \perp BC$ (поради $BO = OC$), $\angle BOM = 60^\circ$ и $BM = \frac{BC}{2} = 1$. Сега при $BO = x$ от триъгълника BOM имаме $OM = \frac{x}{2}$ от $\angle OBM = 30^\circ$ и $x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1^2$ от Питагоровата теорема, съответно $x^2 = \frac{4}{3}$ и $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

б) От k и допирането имаме $\angle ANB = \angle AOB = 180^\circ - 2\angle BAO = 180^\circ - 2\angle OBY = 180^\circ - 2(90^\circ - \angle YCB) = 2\angle YCB$. Оттук $\angle ABY = \angle ABO + \angle OBY = 2\angle OAB = 180^\circ - \angle AOB =$

$180° - 2\angle YCB$ и сега от другата окръжност пресмятаме $\angle ANC = 180° - \angle ACY = \angle ABY = 180° - 2\angle YCB$. Следователно $\angle ANB + \angle ANC = 180°$, т.е. N лежи на BC. Остава да съобразим, че $\angle NAC = \angle BCY = \angle BAY$ от допирането и $\angle YAN = \angle CAY - \angle CAN = \angle CAY - \angle BAY = 36°$.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за а), от които общо 1 т. за $\angle BOC = 120°$ и въвеждането на M и 1 т. за получаване на дължината на BO; 4 т. за б), от които 1 т. за намиране на $\angle ANB$, 1 т. за намиране на $\angle ANC$, 1 т. за извод, че N лежи на BC и 1 т. за намиране на $\angle YAN$.

Задача 8.3. На дъската отначало е записано трицифрено естествено число n. Двама играчи, А и Б, извършват ходове, редувайки се, като А е пръв. Който е на ход, намалява числото на дъската с някой негов собствен делител (т.е. различен от 1 и от самото число). Например ако в някакъв момент числото на дъската е 6, то може да се намали с 2, след което числото на дъската вече ще е 4. Който не може да направи ход, губи, а другият побеждава. Известно е, че играчът А има начин да победи, както и да играе Б. Колко са всички възможни n?

Отговор. 448

Решение. Ако на дъската има просто число, играчът губи по дефиниция. Ако на дъската има четно число, което не е степен на 2, то играчът винаги може да го намали с негов нечетен делител, оставяйки на дъската нечетно число. Ако числото на дъската е нечетно и бъде намалено с негов (нечетен) делител a, т.е. число от вида ab е заменено с $a(b-1)$, то полученото число е четно и не е степен на двойката. Следователно ако началното число е четно и не е степен на двойката, играчът винаги може да извърши ход, гарантиращ му, че за следващия си ход ще получи отново естествено число от същия вид. Така четно число, което не е степен на двойката, е печеливша позиция, а нечетно число е губеща позиция.
Остава да анализираме случаите, когато числото на дъската е 2^m за естествено m. В този случай умалителят трябва да е 2^k за естествено $k < m$. Ако $k < m - 1$, то получената позиция $2^k(2^{m-k} - 1)$ е четна и не е степен на двойката, така че би била печеливша за противника и следователно неприемлив ход. И така, трябва $k = m - 1$. Играейки по този начин, единият играч ще получава на дъската четните степени на 2, а другият – нечетните. Отчитайки, че 2 е губеща позиция, заключаваме, че четните степени на 2 са печеливши позиции, а нечетните степени на 2 – губещи.
Окончателно подходящите n са четните числа, които не са нечетни степени на двойката. Сред дадените има $900 : 2 - 2 = 448$ такива (изключихме $128 = 2^7$ и $512 = 2^9$).

Оценяване. (7 точки) 2 т. за доказване, че четна позиция със собствен нечетен делител е печеливша, а нечетна – губеща; 1 т. за доказване, че 2^k за $k < m - 1$ е неприемлив ход при 2^m; 2 т. за доказване, че 2^m печеливша за четно m и губеща при нечетно; 2 т. за завършване.

Задача 8.4. Неотрицателните реални числа x, y, z са такива, че $(x + y)(y + z)(z + x) = 1$. Означаваме с m и M съответно най-малката и най-голямата възможна стойности на израза $A = (xy + yz + zx)(x + y + z)$.

а) Да се намерят m и M.

б) Съществува ли тройка от неотрицателни рационални числа (x, y, z), изпълняващи даденото равенство, за която $A = m$?

Отговор. а) 1 и $\frac{9}{8}$ б) не.

Решение. а) Неравенството $(xy+yz+zx)(x+y+z) \geq 1 = (x+y)(y+z)(z+x)$ е еквивалентно на $xyz \geq 0$. Равенство се достига само когато една от променливите, да речем x, е 0, а другите две (в случая y и z) са какви да е с $yz(y+z) = 1$; една възможност е $y = 1$ и $z = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Неравенството $(xy+yz+zx)(x+y+z) \leq \frac{9}{8}$ е еквивалентно на $9(x+y)(y+z)(z+x) - 8(xy+yz+zx)(x+y+z) \geq 0$, т.е. на $x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + x^2z + xz^2 \geq 6xyz$. Последното е вярно от неравенството между средноаритметично и средногеометрично, приложено за шестте събираеми вляво, с равенство само при $x = y = z$ и $8x^3 = 1$, т.е. $x = y = z = \frac{1}{2}$.

б) Предвид разсъжденията в а), достатъчно е да докажем, че уравнението $yz(y+z) = 1$ няма решение в (положителни) рационални числа. Да допуснем противното и нека $y = \frac{p}{r}$, $z = \frac{q}{r}$ е решение (с естествени p, q, r), в което сме привели дробите под общ знаменател. Тогава $pq(p+q) = r^3$, като след съкращаване на общ делител на p, q, r, ако е необходимо, можем да считаме, че НОД$(p, q, r) = 1$. Всъщност, тук вече НОД$(p, q) = 1$, тъй като в противен случай техен общ прост делител би бил такъв и на r, противоречие с НОД$(p, q, r) = 1$. Така числата p, q и $p+q$ са две по две взаимнопрости и понеже произведението им е точен куб, то непременно $p = a^3$, $q = b^3$ и $p + q = c^3$ за някакви естествени числа a, b, c. Така получихме $a^3 + b^3 = c^3$ за някакви естествени a, b, c, което е невъзможно (частен случай на т.нар. Велика теорема на Ферма).

Оценяване. (7 точки) 4 т. за а), от които по 1 т. за доказване на $A \geq 1$, доказване на $A \leq \frac{9}{8}$, пример с $A = 1$ и пример с $A = \frac{9}{8}$; 3 т. за б), от които 1 т. за свеждане до $pq(p+q) = r^3$ с НОД$(p, q, r) = 1$; 1 т. за пълна обосновка, че всеки от трите множителя е точен куб, 1 т. за завършване. Не се отнемат точки при липсата на ясно цитиране на факта, че $a^3 + b^3 = c^3$ няма решение в естествени числа. Точки само за верни отговори не се присъждат.