Пролетни математически състезания, 2024 г.

Тема за 6. клас

Задача 1. Сравнете числата

$$A = 8\,.\,7 - 8\,.\,7^2 + 8\,.\,7^3 - 8\,.\,7^4 + \cdots - 8\,.\,7^{98} + 8\,.\,7^{99} \quad \text{и}$$

$$B = 3\,.\,4 + 3\,.\,4^2 + 3\,.\,4^3 + \cdots + 3\,.\,4^{124}.$$

Решение. Представяме всяка осмица в A като $7 + 1$ и разкриваме скобите:

$$A = 8.7 - 8.7^2 + 8.7^3 - 8.7^4 + \cdots - 8.7^{98} + 8.7^{99} =$$

$$= (7+1).7 - (7+1).7^2 + (7+1).7^3 - (7+1).7^4 \cdots - (7+1).7^{98} + (7+1).7^{99} =$$

$$= 7^2 + 7 - 7^3 - 7^2 + 7^4 + 7^3 - 7^5 - 7^4 \cdots - 7^{99} - 7^{98} + 7^{100} + 7^{99}.$$

Получаваме $A = 7 + 7^{100}$.

2 точки

Представяме всяка тройка като $4 - 1$ и разкриваме скобите:

$$B = (4-1)\,.4 + (4-1)\,.4^2 + (4-1)\,.4^3 + \cdots + (4-1)\,.4^{124} =$$

$$= 4^2 - 4 + 4^3 - 4^2 + 4^4 - 4^3 + \cdots + 4^{125} - 4^{124}.$$

Получаваме $B = 4^{125} - 4 = 2^{250} - 4$.

2 точки

От $7^2 > 2^5$ следва, че $7^{100} > 2^{250}$. Следователно

$$A = 7 + 7^{100} > 7 + 2^{250} > 2^{250} - 4 = B,$$

т.е. $A > B$.

2 точки

Второ решение. Изнасяме пред скоби 8.7 и получаваме

$$A = 8.7(1 - 7 + 7^2 - 7^3 + \cdots - 7^{97} + 7^{98}).$$

Да означим израза в скобите с x. Тогава

$7x = 7 - 7^2 + 7^3 + \cdots - 7^{98} + 7^{99}$ и като съберем с

$x = 1 - 7 + 7^2 - 7^3 + \cdots - 7^{97} + 7^{98}$, получаваме

$8x = 1 + 7^{99}$.
Следователно $A = 8.7x = 7(1 + 7^{99}) = 7 + 7^{100}$.

За да пресметнем B, изнасяме пред скоби 3:

$$B = 3(4 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^{124}).$$

Да означим сбора в скобите с y. Тогава

$4y = 4^2 + 4^3 + 4^4 \cdots + 4^{125}$ и като извадим

$y = 4 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^{124}$, получаваме

$3y = 4^{125} - 4$.
Следователно $B = 3y = 4^{125} - 4$.
Нататък разсъждението продължава както в първото решение.

Задача 2. Пипи пазарувала в магазина за бонбони. Оказало се, че:

- В магазина има само шоколадови, ментови и ягодови бонбони, като броят на ментовите е с 25% повече от броя на шоколадовите.
- Ако Пипи, без да гледа, вземе един от бонбоните в магазина, с вероятност 25% този бонбон ще е шоколадов.
- Бонбон от всеки вид струва цяло число стотинки. Цената на 30% от ментовите бонбони в магазина се отнася към цената на 25% от шоколадовите бонбони както 2 : 3.

а) Определете отношението на цените на един шоколадов бонбон и на един ментов бонбон.

б) Пипи купила всички бонбони в магазина и платила 20,72 лв. Ако един ягодов бонбон струва 13 ст., то общо колко бонбони е купила Пипи?

Решение. Нека броят на шоколадови бонбони е x, където x е естествено число. Ментовите бонбони са $125\%x = \dfrac{5}{4}x$ и броят им също е естествено число; следователно x се дели на 4. Нека $x = 4y$, където y е естествено число. Тогава ментовите бонбони са $125\%.4y = 5y$.

Тъй като вероятността да се избере шоколадов бонбон е 25%, то броят на шоколадовите бонбони е 25% от броя на всички бонбони. Следователно всички бонбони са $4.4y = 16y$. Ягодовите са $16y - (4y + 5y) = 7y$.

2 точки

а) Нека цената на ментов бонбон е a ст., а цената на шоколадов бонбон е b ст. Тогава

$$(30\% \cdot (5y \cdot a)) : (25\% \cdot (4y \cdot b)) = 2 : 3,$$

откъдето получаваме, че

$$\frac{1{,}5a}{b} = \frac{2}{3} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{9}.$$

Цената на шоколадов бонбон се отнася към цената на ментов бонбон, както $b : a = 9 : 4$. Следователно $a = 4n$, $b = 9n$, където n е естествено число.

2 точки

б) Цената на всички бонбони в стотинки е

$$5y \cdot 4n + 4y \cdot 9n + 7y \cdot 13 = 2072.$$

Стигаме до равенството $56yn + 7 \cdot 13y = 2072$. Като разделим на 7, получаваме

$$(8n + 13)y = 296.$$

Тук $8n + 13$ е нечетен делител на $296 = 2^3 \cdot 37$ и $8n + 13$ е не по-малко от 21. Следователно $8n + 13 = 37$, т.е. $n = 3$, а $y = 8$.

Пипи е купила $16 \cdot y = 16 \cdot 8 = 128$ бонбони. **2 точки**

Задача 3. В четириъгълника $ABCD$ диагоналите AC и BD се пресичат в точка O. Точка M е от отсечката AO, а N е от отсечката BO и

$$S_{ADM} : S_{ANM} = S_{BNM} : S_{BNC}.$$

а) Докажете, че триъгълниците DMN и DMC имат равни лица и правите DM и CN са успоредни.

б) Ако $S_{ABCD} = 2024 \text{ cm}^2$, $S_{DOC} = 44 \text{ cm}^2$ и

$$S_{MOD} : S_{BCN} : S_{ONC} = 1 : 2 : 4,$$

намерете отношението на лицата на триъгълниците AMD и MBN.

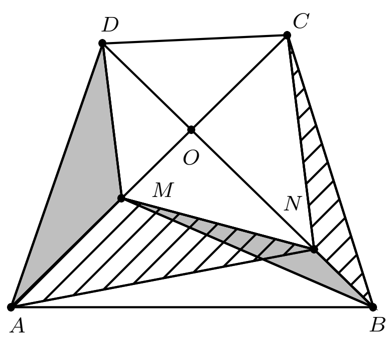
Решение. а) Ще използваме, че лицата на триъгълници с общи височини се отнасят както съответните страни:

$$S_{AMD} : S_{MOD} = AM : MO = S_{AMN} : S_{MON}.$$

Следователно $S_{AMD} : S_{AMN} = S_{MOD} : S_{MON}$.

Аналогично $S_{MBN} : S_{BNC} = S_{MON} : S_{CON}$. От условието следва, че

$$S_{MOD} : S_{MON} = S_{MON} : S_{CON}. \qquad \textbf{(1 точка)}$$



Разглеждаме четириъгълника $MNCD$. В него O е пресечна точка на диагоналите и $S_{MOD} : S_{MON} = OD : ON = S_{DOC} : S_{CON}$ (триъгълници с общи височини към OD и ON съответно.) Следователно

$$S_{MOD} : S_{MON} = S_{MON} : S_{CON} = S_{DOC} : S_{CON},$$

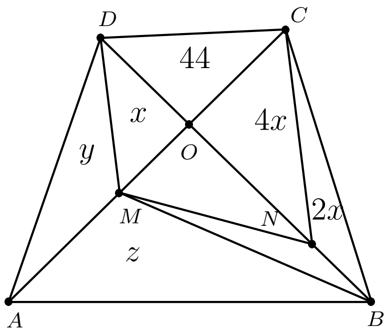
т.е. $S_{MON} = S_{DOC}$. (**1 точка**)

Следователно

$$S_{DMN} = S_{DMO} + S_{MON} = S_{DMO} + S_{DOC} = S_{DMC}.$$

Но $\triangle DMN$ и $\triangle DMC$ имат обща страна DM и равни лица. Следователно височините към страната DM са равни. А това означава, че върховете N и C лежат на права, която е успоредна на DM. (**1 точка**)

б) Нека $S_{MOD} = x$, съответно $S_{BCN} = 2x$, $S_{ONC} = 4x$. От доказателството на а) следва, че $S_{MON} = S_{DOC} = 44 \text{ cm}^2$. (**0,5 точки**)



От $S_{MOD} : S_{MON} = S_{DOC} : S_{CON}$ следва, че $x : 44 = 44 : 4x$, откъдето $x = 22 \text{ cm}^2$, т.е. $S_{MOD} = 22 \text{ cm}^2$, съответно $S_{BCN} = 44 \text{ cm}^2$, $S_{ONC} = 88 \text{ cm}^2$. (**1 точка**)

$$\text{От} \quad ON : NB = S_{MON} : S_{MNB} = S_{CON} : S_{CNB} = 4 : 2 = 2 : 1$$

намираме $S_{MNB} = 22 \text{ cm}^2$. (**0,5 точки**)

Нека $S_{AMD} = y$, а $S_{AMB} = z$. От

$$AM : MC = S_{AMD} : S_{MDC} = S_{AMB} : S_{MBC},$$

намираме $y : (22 + 44) = z : (22 + 44 + 44 + 88)$, т.е. $z = 3y$. (**1 точка**)

От

$$S_{ABCD} = S_{AMD} + S_{MDC} + S_{AMB} + S_{MBC} = 4y + 66 + 198 = 4y + 264 = 2024$$

получаваме, че $y = 440 \text{ cm}^2$.

Търсеното отношение е $S_{AMD} : S_{MBN} = 440 : 22 = 20 : 1$. (**1 точка**)

Задача 4. Най-малкото общо кратно на естествените числа a и b е 2024. Ако a се увеличи с 25% и b се намали с 50%, се получават две взаимнопрости естествени числа.

а) С колко процента се увеличава най-малкото общо кратно на числата след тази промяна?

б) Намерете a и b, ако е известно, че тяхната разлика се дели на 7.

Решение. а) (**общо 4 точки**) След увеличение на a с 25% се получава $\dfrac{5}{4}a$, което трябва да е естествено число, т.е. a се дели на 4. Нека $a = 4m$, където m е естествено число. След промяната получаваме $\dfrac{5}{4} \cdot 4m = 5m$.

След намаление на b с 50% се получава $\dfrac{1}{2}b$, което трябва да е естествено число, т.е. b се дели на 2. Нека $b = 2n$, където n е естествено число. След промяната получаваме n.

Имаме, че

$$\text{НОК}(4m, 2n) = 2024 = 2.2.2.11.23 \text{ и } \text{НОД}(5m, n) = 1.$$

От условието НОД$(5m, n) = 1$ следва, че m и n са взаимнопрости и 5 не дели n.

От НОК$(4m, 2n) = 2024 = 2.2.2.11.23$ следва, че

$$\text{НОК}(2m, n) = 2.2.11.23.$$

Тъй като m и n са взаимнопрости, възможни са следните два случая.

Първи случай. $m = 2k$, като n и k са нечетни взаимнопрости числа. Тогава

$$\text{НОК}(5m, n) = \text{НОК}(10k, n) = 10kn.$$

Освен това,

$$\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(8k, 2n) = 8kn.$$

Тогава НОК се увеличава с $\dfrac{10kn - 8kn}{8kn} = \dfrac{2kn}{8kn} = \dfrac{1}{4} = 25\%$.

Втори случай. $n = 4p$, като p и m са нечетни взаимнопрости числа. Тогава

$$\text{НОК}(5m, n) = \text{НОК}(5m, 4p) = 20mp.$$

Освен това,

$$\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(4m, 8p) = 8mp.$$

Тогава НОК се увеличава с $\dfrac{20mp-8mp}{8mp}=\dfrac{12mp}{8mp}=\dfrac{3}{2}=150\%$.

б) (**общо 3 точки**) Ще разгледаме двата случая от а).

Първи случай. $a=8k$, $b=2n$. Получихме, че НОК$(a,b)=8kn=2024$, следователно $kn=11.23$.

	k	n	$a=8k$	$b=2n$	$\lvert a-b\rvert$
1.	1	253	8	506	498
2.	11	23	88	46	42
3.	23	11	184	22	162
4.	253	1	2024	2	2022

Разликата на a и b се дели на 7 само при $a=88$, $b=46$.

Втори случай. $a=4m$, $b=8p$. Получихме, че НОК$(a,b)=8mp=2024$, следователно $mp=11.23$.

	m	p	$a=4m$	$b=8p$	$\lvert a-b\rvert$
1.	1	253	4	2024	2020
2.	11	23	44	184	140
3.	23	11	92	88	4
4.	253	1	1012	8	1004

Разликата на a и b се дели на 7 само при $a=44$, $b=184$.

Получихме два отговора: $a=88$, $b=46$ и $a=44$, $b=184$.