Funkcijų transformacijos

Vilius Paliokas

2023-02-01

Šioje mokomojoje medžiagoje funkcijų transformacijų teoriją ir pavyzdžius. Pagal bendrojo ugdymo 11 klasės matematikos bendrojo kurso programą mokiniai turi mokėti, kaip atliekamos $y = f(x) + a$, $y = f(x+a)$, $y = -f(x)$, $y = a \cdot f(x)$ formulėmis aprašomos transformacijos. Čia taip pat pateikiamos šių transformacijų pasireiškimai įvairaus konteksto situacijose. Funkcijų transformacijoms suprasti, pirmiausia plėtojama samprata apie funkcijas ir jų savybes.

Funkcijos samprata

Dažnu atveju, funkcija yra asocijuojama su $f(x)$ žymėjimu, o šį mes skaitome *ef nuo iks*. Po $f(x)$ visada seka kažkoks tai reiškinys, dažniausiai tai būna tiesinis reiškinys $ax + b$ (pvz.: $f(x) = x + 1$) ar kvadratinis reiškinys $ax^2 + bx + c$ (pvz.: $f(x) = x^2$). O vėliau, mokyklos kurse sutiksime ir kitokio tipo funkcijas.

Toliau prisiminsime apie aibes ir pamatysime, kaip jos susijusios su funkcijomis.

Apie aibes

Kadangi jau susipažinome su aibėmis, galime pasigilinti, kaip aibės susijusios su funkcijomis. Bet pirma prisiminsime keletą aibių teorijos[1] aspektų. **Aibė** - rinkinys objektų, kurie vadinasi aibės elementais. Aibės elementu gali būti bet kas (obuoliai, planetos, mašinos), o jie yra susieti viena (ar daugiau) bendra savybę. Matematikoje nagrinėjami matematiniai objektai, mokyklos matematikos programoje nagrinėjamos tik skaičių aibės. Jeigu elementas x priklauso aibei X, tai užrašoma $x \in X$. Jeigu elementas x nepriklauso aibei X, tai rašome $x \notin X$.

[1] Aibių teorija yra matematikos šaka, kurioje nagrinėjamos aibės - objektų rinkiniai

Priklausomai nuo elementų skaičiaus aibėje, aibės gali būti baigtinės arba begalinės. Baigtinės aibės atveju mes galime suskaičiuoti šios elementus, juos nesunkiai visus išvardinti. Pavyzdžiui turime aibę

$$A = \{0; 1; 4; 9; 16; 25\}$$

Ši aibė turi baigtinį kiekį elementų - ją sudaro 6 elementai. Natūraliųjų skaičių aibė $\mathbb{N}$ yra vienas iš begalinės aibės pavyzdžių, ši aibė turi be galo daug elementų $(1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 \ldots)$.

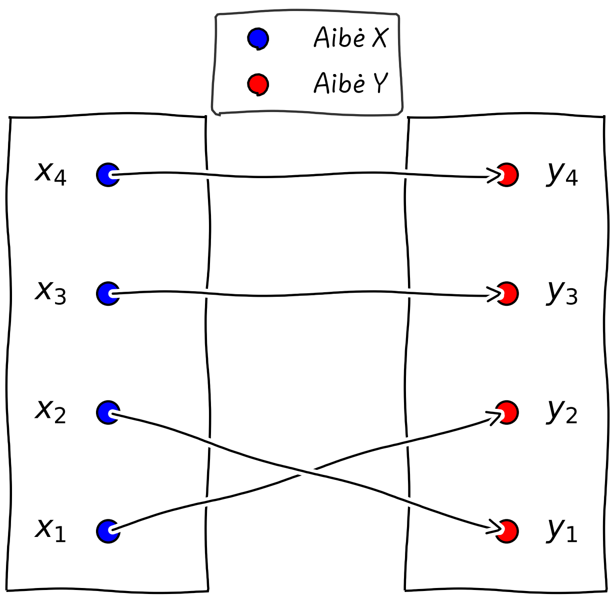
Aibės ir funkcijos

O dabar bandysime atsakyti į klausimą, kaip susijusios aibės ir funkcija. Tarkime turime dvi aibes X ir Y (paskui bus ir konkretūs pavyzdžiai). Paprastumo dėlei, šios aibės bus baigtinės abi sudarytos iš keturių elementų:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\};$$

$$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\};$$

Šių grafinis atvaizdavimas pažymėtas žemiau, 1 paveiksle. Kol kas pavaizduotas rodykles ignoruokime.



1 pav.: Funkcija, kaip aibių elementų sąryšiai

O dabar svarbiausia dalis. Kiekvienam aibės X elementui priskyrus elementą iš aibės Y gauname tam tikrus ryšius tarp šių dviejų aibių. Tarkime, anksčiau paminėtiems elementams iš aibės X priskirkime elementą iš aibės Y:

- $x_1 \to y_2$;
- $x_2 \to y_1$;
- $x_3 \to y_3$;
- $x_4 \to y_4$;

Šiuos ryšius tarp dviejų aibių elementų galime matyti 1 paveiksle, jie pavaizduoti rodyklėmis. Rodyklė $\rightarrow$ yra priskirimo veiksmas matematikoje. Jeigu visų aibės X elementų priskyrimo aibės Y elementams veiksmą pavadintume f, tai galėtume pažymėti:

$$f : X \rightarrow Y \quad \text{arba} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

Iki šio momento turėjote pamatyti pažįstamų dalykų: f, x, y. Jei kiekvienas aibės X elementas yra susijęs su vienu ir tik vienu kitos aibės Y elementu, tai toks priskyrimas (ryšys) vadinamas **funkcija**[2]. O tai užrašoma $y = f(x)$.

[2] Labai svarbi šio apibrėžimo dalis yra ta, kad vienas (ir tik vienas) elementas priskiriamas kitam aibės elementui, kitu atveju tai negali vadintis funkcija

Funkcijos sąvokos

Kalbant apie funkcijas, būtina žinoti su funkcija susijusiąs sąvokas. Šios sąvokos ateina iš funkcijos apibrėžimo:

- x - funkcijos nepriklausomas kintamasis arba funkcijos argumentas;
- y - funkcijos priklausomas kintamasis arba funkcijos reikšmė;
- X - visos galimos x reikšmės arba funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritis. Ši sritis dažnai žymima $D(f)$;
- Y - visos galimos y reikšmės arba funkcijos $f(x)$ reikšmių sritis. Ši sritis dažnai žymima $E(f)$;
- f - taisykė, pagal kurią x reikšmėms priskiriamos y reikšmės;

Šių sąvokų atikmenis galima pamatyti anksčiau pavaizduotame 1 paveiksle. Pavyzdžiui, paveiksle mėlyni rutuliukai x_1, x_2, x_3, x_4 yra funkcijų argumentai, o jų visuma (apibrėžta sritis) yra apibrėžimo sritis. Reikšmių sritis yra apibrėžta sritis su raudonai y_1, y_2, y_3, y_4 taškais. Visų rodyklių visuma yra taisyklė f, pagal kurią vieni aibės (apibrėžimo srities) elementai priskiriami kitiems aibės (reikšmių srities) elementams.

Funkcijos pavyzdys

Turime dvi aibes:

$$X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$Y = \{0; 1; 4; 9; 16; 25\}$$

Dabar priskirkime aibės X vienam ir tik vienam kitos aibės Y elementą:

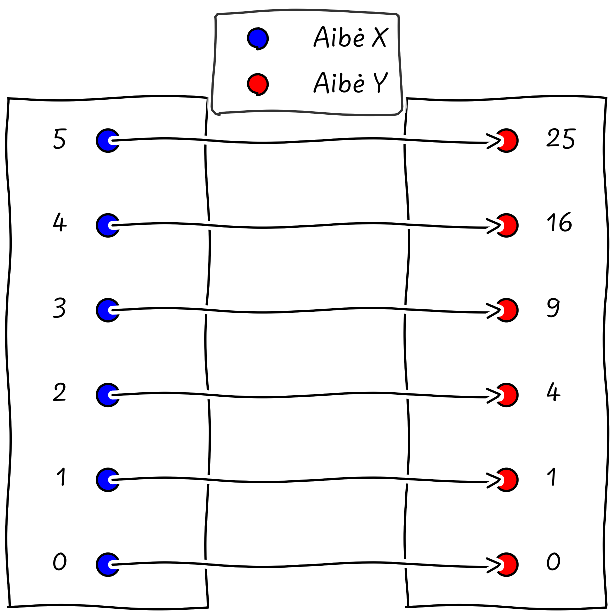
- $0 \rightarrow 0$;

- $1 \to 1$;
- $2 \to 4$;
- $3 \to 9$;
- $4 \to 16$;
- $5 \to 25$;

Šį priskyrimą pavadinkime f. Dabar, šių skaičių ryšį galima parašyti $y = f(x)$ arba $f(x) = y$ forma:

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- $f(2) = 4$;
- $f(3) = 9$;
- $f(4) = 16$;
- $f(5) = 25$;

Šiuos ryšius galima pavaizduoti ir grafiškai:



2 pav.: Aibės $X = \{0;1;2;3;4;5\}$ elementų priskyrimas aibės $Y = \{0;1;4;9;16;25\}$ elementams

Šią funkcinę priklausomybę galima ir apibūdinti:

- Funkcijos apibrėžimo sritis yra $\{0;1;2;3;4;5\}$;

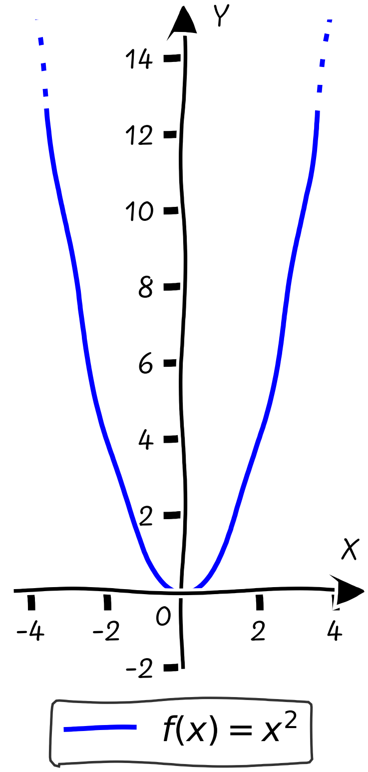
- Funkcijos reikšmių sritis yra $\{0; 1; 4; 9; 16; 25\}$;
- Mažiausia reikšmė (y) yra 0, kai argumentas (x) yra lygus 0;
- Didžiausia reikšmė (y) yra 25, kai argumentas (x) yra lygus 5;

Funkcijos reiškinys

Funkciją galima aprašyti reiškiniu. Ta daroma, nes neįmanoma išrašyti visų begalinių ryšių tarp dviejų begalinių aibių. Šiuos reiškinius jau analizavote ir ankstesnėse klasėse. Anksčiau pateiktame pavyzdyje, galima įžvelgti tam tikrą dėsningumą. Funkcijos reikšmės buvo gautos argumentus pakėlus kvadratu. Tokią bendrą taisyklę visiems skaičiams ($x \in \mathbb{R}$) galima užrašyti taip:

$$f(x) = x^2$$

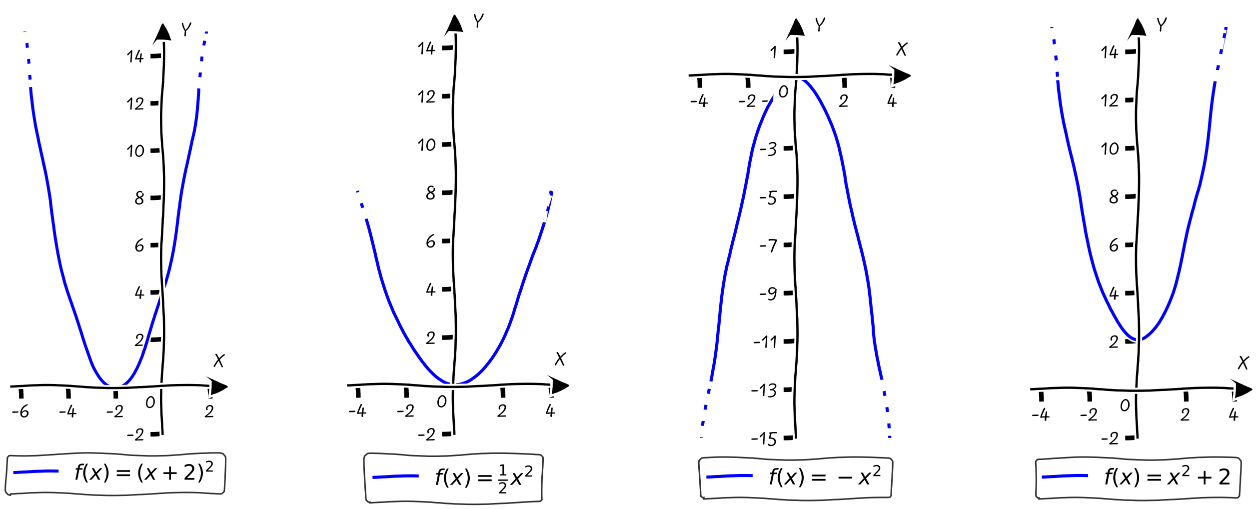
Tai reiškia, kad kiekviena funkcijos reikšmė gaunama argumentą, iš apibrėžimo srities, pakėlus kvadratu. Tokiu būdu gaunama begalė argumentų x ir reikšmių y skaičių porų $(x; y)$. Šiuos taškus atvaizdavus koordinačių plokštumoje OXY gaunamas funkcijos grafikas (paveikslas 3).



3 pav.: $f(x) = x^2$ grafikas OXY koordinačių plokštumoje

Grafikų transformacija

Tarkime turime žinome, kaip atrodo funkcijos grafikas, jį modifikuojame taip, kad sukurtume panašus, bet kitoks to grafikos variantas. Toks procesas vadinamas funkcijos grafiko transformacija. Matematikos bendrajame kurse reikia žinoti 4 tipų transformacijas. Šių transformacijų pavyzdžiai matomi žemiau:



4 pav.: $f(x) = x^2$ grafiko transformacijos: $y = f(x-2)$, $y = \frac{1}{2}f(x)$, $y = 2f(x)$, $y = f(x) + 2$

Šie visi grafikai atrodo panašiai, bet skiriasi nuo pradinės funkcijos $f(x) = x^2$ grafiko, nes atlitkos tam tikros transformacijos:

- Postūmis OX ašimi $y = f(x+a)$, čia $a \in \mathbb{R}$;
- Postūmis OY ašimi $y = f(x) + b$, čia $b \in \mathbb{R}$;
- Ištempimas, sutraukimas $y = c \cdot\ f(x)$, čia $c \in \mathbb{R}$;
- Apvertimas OX ašies atžvilgiu $y = -f(x)$;

Toliau giliau analizuosime šių transformacijų poveikį grafikams, jų taškams. Įsivaizduokime turime funkcijos $f(x)$ tašką (a, b), tai tokiu atveju $f(a) = b$. 2 lentelėje pavaizduota, kaip keičiasi funkcijos taškai (a, b) ir grafikas, modifikuojant funkcijos $f(x)$ reikšmę.

Transformacija	Kaip pasikeičia $f(x)$ grafiko taškai	Grafiko vizualinis pokytis
$f(x) + d,\ d > 0$	$(a,b) \mapsto (a, b+d)$	Kyla viršun per d
$f(x) - d,\ d > 0$	$(a,b) \mapsto (a, b-d)$	Leidžiasi žemyn per d
$c \cdot f(x),\ c > 0$	$(a,b) \mapsto (a, c \cdot b)$	Išsitempia vertikaliai per c
$\frac{1}{c} \cdot f(x),\ c > 0$	$(a,b) \mapsto (a, \frac{1}{c} \cdot b)$	Susitraukia vertikaliai per c
$-f(x)$	$(a,b) \mapsto (a, -b)$	Apsiverčia OX ašies atžvilgiu

1 lentelė: Funkcijų transformacijos, modifikuojant jos reikšmę

Pavyzdys

Pavaizduosime konkrečius pavyzdžius aprašytoms transformacijoms 2 lentelėje. Tam naudosime jau anksčiau naudotą $f(x) = x^2$ funkciją. Pažiūrėsime, koks pokytis, kai nubrėžus $f(x) + 2$, $f(x) - 2$, $2f(x)$,$\frac{1}{2}f(x)$,$-f(x)$. Šiuos brėžinius rasite 7 puslapyje.

Matome, kad padvigubinus funkcijos $f(x)$ reikšmę ($2 \cdot f(x)$), ji išsitempia, o taškų y koordinatės reikšmės padvigubėja, pavyzdžiui taškas $(2; 4)$ tapo $(2; 4 \cdot 2) = (2; 8)$

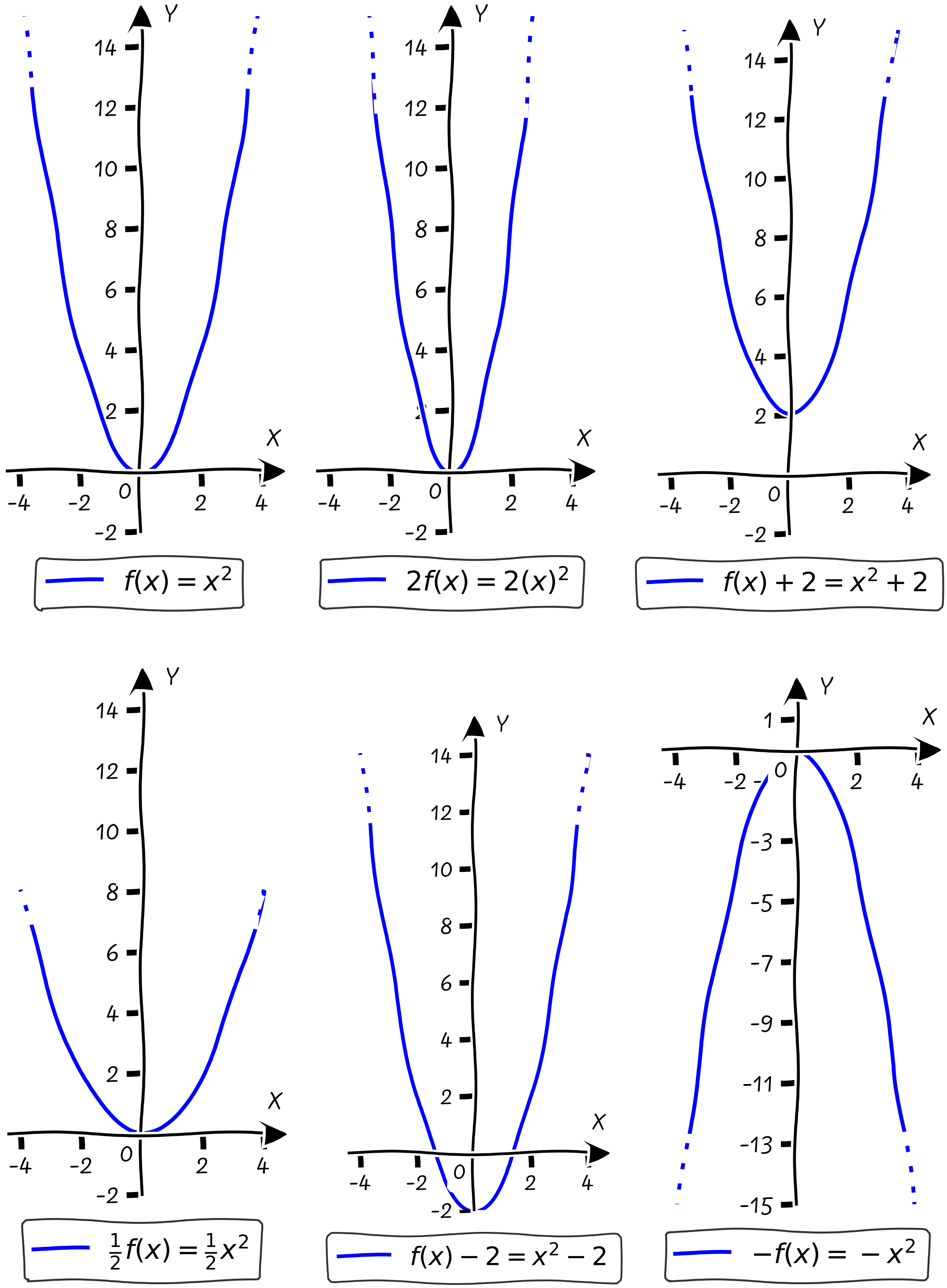
Pridėjus prie $f(x)$ reikšmių 2, gauname paslinkta grafiką per du vienetus aukštyn. Visų taškų y reikšmė padidėja per du vienetus. Pavyzdžiui taškas $(2; 4)$ tapo $(2; 4 + 2) = (2; 6)$

Grafiką galime sutraukti, jis tampa plokštesnis. Tai padarėme funkciją $f(x)$ padauginus iš $\frac{1}{2}$. Visos taškų y reikšmės sumažėjo perpus. Taškas $(2; 4)$ tapo $(2; 4 \cdot \frac{1}{2}) = (2; 2)$

Kaip paslinkome grafiką aukštyn, taip galima ir paslinkti žemyn. Tą padarome atimdami (arba pridėdami neigiamą reikšmę) iš funkcijos $f(x)$. Pavyzdyje funkcijos $f(x) - 2$ grafikas skiriasi tuo, kad jis pasislinkęs žemyn per du vienetus - visi taškų oordinatės[3] reikšmė sumažinta per du vienetus.

Paprasčiausia transformacija - apvertimas OX ašies atžvilgiu. Šios principus palieku išsiaiškinti savarankiškai.

[3] Plokštumos taškai $(x; y)$ matematikoje dar vadinami abcise ir ordinate: $(\overbrace{x}^{\text{abcisė}}; \overbrace{y}^{\text{ordinatė}})$


Y
X
$f(x) = x^2$
$2f(x) = 2(x)^2$
$f(x) + 2 = x^2 + 2$
$\frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2}x^2$
$f(x) - 2 = x^2 - 2$
$-f(x) = -x^2$

Postūmiai OX ašimi

Liko išsiaiškinti dar du postūmių tipus: grafiko slinkimą kairėn ir dešinėn OX ašimi.

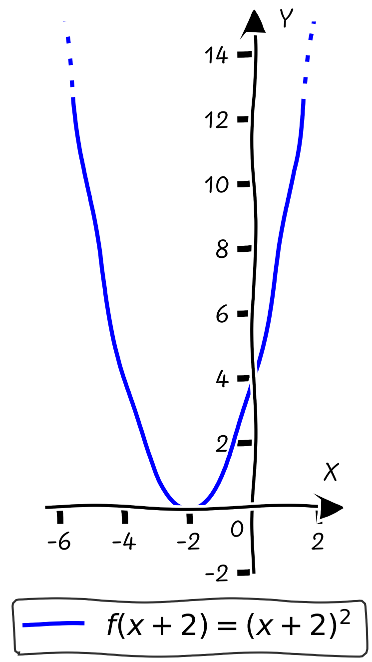
2 lentelė: Funkcijų transformacijos, modifikuojant jos argumentą x

Transformacija	Kaip pasikeičia $f(x)$ grafiko taškai	Grafiko vizualinis pokytis
$f(x+d), d>0$	$(a,b) \mapsto (a-d,b)$	Pasislenka į kairę per d
$f(x-d), d>0$	$(a,b) \mapsto (a+d,b)$	Pasislenka į dešinę per d

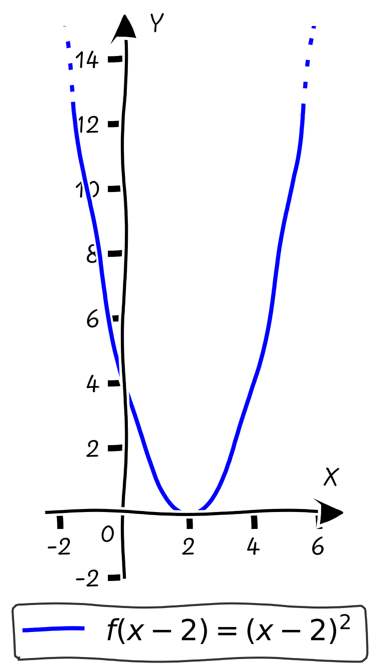
Vėl paanalizuosime funkciją $f(x)$ ir poslinkis, kai pridedame skaičių prie argumento arba atimame skaičių prie argumento. Dvi skirtingas transformacijas - poslinkius OX ašies kryptimi rasite dešinėje pusėje, paveiksle 5 ir paveiksle 6. Pažvelgus į grafikus, turėtų atrodyti neintuityviai, prieštaringai, kad padidinus argumentą x dviem, grafikas pasislinko į kairę pusę per dvi vietas. Šiuo atveju kiekvienas taškas $(a;b)$ tapo $(a-2;b)$. Tokia pat situacija su kita transformacija. Atėmus 2 prie argumento x, grafikas pasislinko į dešinę pusę.

Tad šitą principą reiktų įsiminti:

Prie argumento pridedant, graifkas juda į kairę,
atimant iš argumento, grafikas juda į dešinę.



5 pav.: $f(x) = x^2$ funkcijos transformacija $f(x+2) = (x+2)^2$



6 pav.: $f(x) = x^2$ funkcijos transformacija $f(x-2) = (x-2)^2$

Grafikų transformacijas galima jungti tarpusavyje: apversti, paslinkti į dešinę per n, nuleisti žemyn per m, ištempti. Pavyzdžiui turime tiesinę funkciją

$$f(x) = x$$

tai šią galima paslinkti į kairę per 2, pakelti per 5, apversti ir ištempti 3 vienetais. Tokia transformacija užsirašys šitaip:

$$-3f(x+3)+5 = -3(x-3)+5$$

Tokius atvejus pasižiūrėsime toliau, uždaviniuose.

Uždaviniai

1. Funkcija $f(x)$ paslinkta per 3 vienetus į kairę ir 4 vienetus aukštyn. Parašykite naujosios funkcijos reiškinį.

2. Turime pradinę funkciją $f(x) = -3x - 6$, šiai funkcijai buvo atlikta kombinacija transformacijų ir gauta $g(x) = x + 2$. Nurodykite kokios transformacijos buvo atliktos funkcijai $f(x)$.

3. (*Iš išplėstinio kurso knygos, 361 užduotis*) Parašykite funkcijos $y = g(x)$ reiškinį $g(x)$:

a) $g(x) = f(x) - 2$, $f(x) = 7x^2$;

b) $g(x) = f(x-3)$, $f(x) = \frac{9}{x}$;

c) $g(x) = f(x-2) + 1$, $f(x) = -\frac{2}{x}$;

d) $g(x) = f(x+2) - 3$, $f(x) = \frac{1}{3}x^2$;

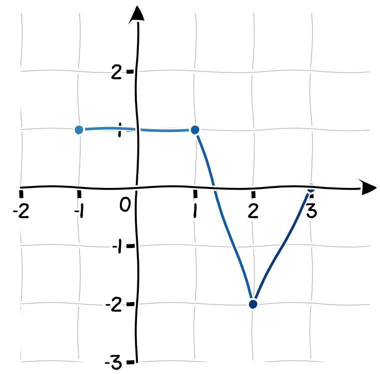
4. (*Iš išplėstinio kurso knygos, 356 užduotis, modifikuota*) Pavaizduotas (paveikslas 7) funkcijos $y = f(x)$ grafikas. Nubraižykite funkcijos $y = g(x)$ grafiką, kai:

   a) $g(x) = f(x-1) - 3$;

   b) $g(x) = f(x+1) - 2$;

   c) $g(x) = -3f(x-2) + 1$;

   d) $g(x) = \frac{1}{2}f(x+2) - 3$;



7 pav.: 4 užduoties funkcijos $y = f(x)$ grafikas

5. Pagal 4 užduotį, nurodykite funkcijos apibrėžimo sritį, reikšmių sritį, mažiausią ir didžiausią reikšmes.

   a) $f(x)$;

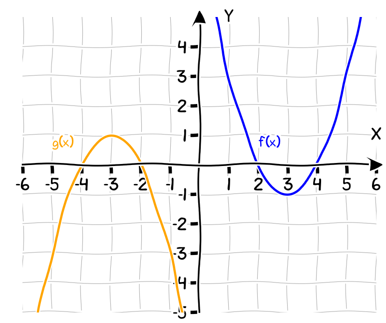
   b) $g(x) = f(x-1) - 3$;

   c) $g(x) = f(x+1) - 2$;

   d) $g(x) = -3f(x-2) + 1$;

   e) $g(x) = \frac{1}{2}f(x+2) - 3$;

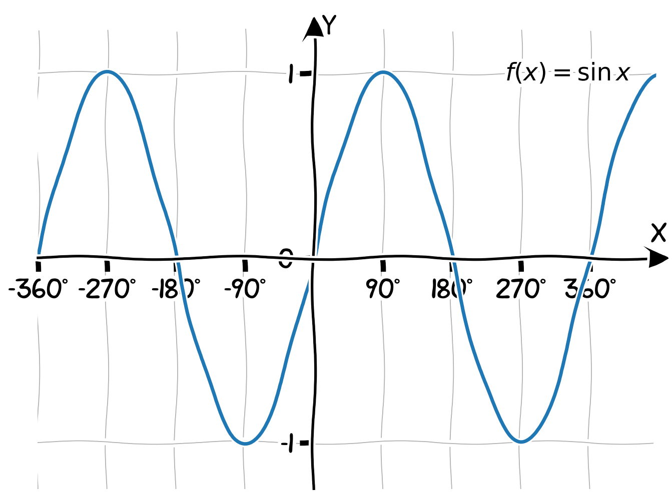
6. Parašykite funkciją, atitinkančią $g(x)$ grafiką, kuris transformavosi iš $f(x)$ grafiko taikant funkcijų transformavimo taisykles (paveikslas 8).



8 pav.: 6 užduoties funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikai

7. Pagal 6 užduotį, nurodykite funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ apibrėžimo sritis, reikšmių sritis, mažiausias ir didžiausias reikšmes.

8. (*Iš matematikos bendrojo kurso pirmojo tarpinio patikrinimo užduoties pavyzdžio*). Paveiksle 9 pavaizduotas funkcijos $f(x) = \sin x$ grafiko eskizas. Nustatykite funkcijos $g(x) = 5 - \sin x$ didžiausią ir mažiausią reikšmę.



9 pav.: Funkcijos $f(x) = \sin x$ grafiko eskizas