Savarankiško darbo refleksija

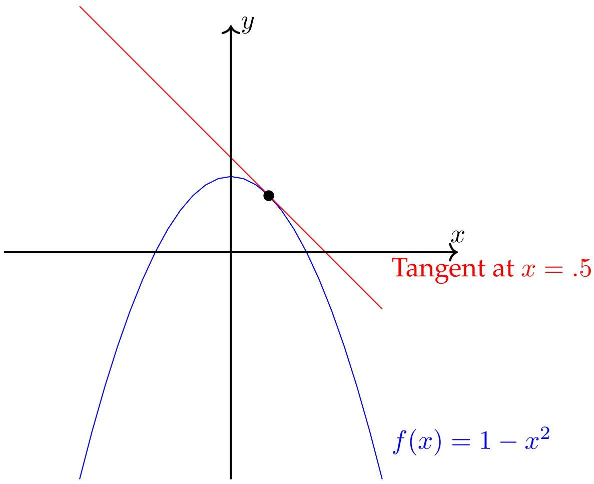
Vilius Paliokas

2023/09/29

1 Lygtys

Differentiation is a concept of Mathematics studied in Calculus. There is an ongoing discussion as to who was the first to define differentiation: Leibniz or Newton [1].

Differentiation allows for the calculation of the slope of the tangent of a curve at any given point as shown in Figure 1.



1 pav.: The plot of $f(x) = 1 - x^2$ with a tangent at $x = .5$.

1.1 Kaip išspręsti $ax^2 + bx = 0$

1.1.1 Teorinis sprendimas

Žingsniai:

1. Turime nepilną kvadratinę lygtį.

   $ax^2 + bx = 0;$

2. Išskaidome dauginamaisiais - iškeliame x prieš skliaustus:

   $x(ax + b) = 0$

3. Iškėlus prieš skliaustus, jau turime vieną sprendinį (x), kitą dar reikia susirasti:

   $ax + b = 0 \quad$ arba $\quad x = 0$

4. Susitvarkome lygtį taip, kad vienoje pusėje atsirastų nariai su x, o kitoje tik skaičiai. Tai padarysime atėmę iš abiejų pusių skaičių b:

   $ax + b = 0| - b$

5. $ax + b - b = 0 - b$
6. Reikia pasidaryti, kad kintamasis x būtų plikas - be dauginio a. Tai padarysime padalinę lygtį iš to dauginio a:

   $ax = -b| : a$
7. $\frac{ax}{a} = -\frac{b}{a}$
8. $x = -\frac{b}{a}$

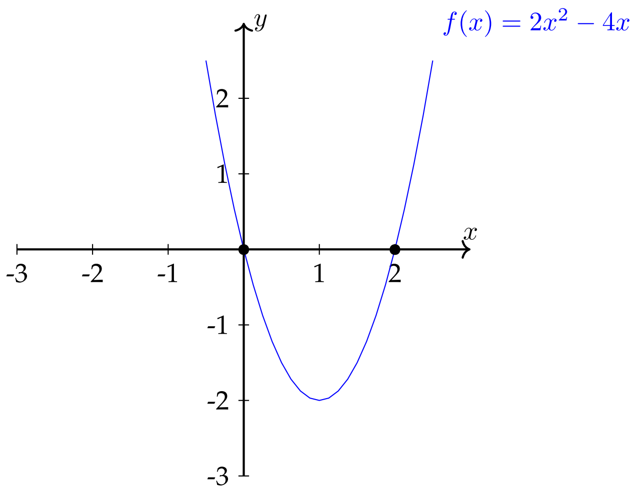
Po 9 žingsnio turime du lygties sprendinius $x = -\frac{b}{a}$ ir $x = 0$ (3 žingsnis).

1.1.2 Pavyzdys #1

Turime $2x^2 - 4x = 0$;

Pagal formulę $ax^2 + bx = 0$:

- $a = 2$;
- $b = -4$.



2 pav.: $f(x) = 2x^2 - 4x$ grafikas su sprendiniais $2x^2 - 4x = 0$

Žingsniai:

1. Išskaidome dauginamaisiais - iškeliame x prieš skliaustus:

   $x(2x - 4) = 0$;
2. Iškėlus prieš skliaustus, jau turime vieną sprendinį (x), kitą dar reikia susirasti:

   $2x - 4 = 0 \quad$ arba $\quad \boldsymbol{x = 0}$;
3. Susitvarkome lygtį taip, kad vienoje pusėje atsirastų nariai su x, o kitoje tik skaičiai. Tai padarysime pridėję abiem pusėms skaičių 4:

   $2x - 4 = 0| + 4$;
4. $2 - 4 + 4 = 0 + 4$;
5. Reikia pasidaryti, kad kintamasis x būtų plikas - be dauginio 2. Tai padarysime padalinę lygtį iš to dauginio 2:

   $2x = 4| : 2$;

6. $\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$;

   $\frac{2x}{2} = x$;

   $-\frac{4}{2} = 2$;

7. $x = 2$;

Po 7 žingsnio turime du lygties sprendinius $x = 2$ ir $x = 0$ (2 žingsnis).

1.1.3 Pavyzdys #2

Turime $2x^2 + 3x^2 - 5x = 4x$.

Šis reiškinys neatitinka $ax^2 + bx = 0$ formulės. Todėl pirmiausia reikia bandyti susitvarkyti.

1. Visus narius perkeliame į vieną pusę:

   $2x^2 + 3x^2 - 5x = 4x| - 4x$;

   $2x^2 + 3x^2 - 5x - 4x = 4x - 4x$;

   $2x^2 + 3x^2 - 5x - 4x = 0$;

2. Sutraukiame panašius narius:

   $2x^2 + 3x^2 - 5x - 4x = 0$;

   $5x^2 - 9x = 0$;

3. Dabar jau reiškinys atitinka $ax^2 + bx = 0$ formulę. Galima išskaidyti dauginamaisiais - iškeliame prieš skliaustus x:

   $x(5x - 9) = 0$;

4. Iš čia gauname vieną sprendinį:

   $5x - 9 = 0$ arba $\boldsymbol{x = 0}$;

5. Toliau sprendžiame pirmąją lygtį:

   $5x - 9 = 0| + 9$;

   $5x - 9 + 9 = 0 + 9$;

   $5x = 9$;

   $5x = 9| : 5$ arba $5x = 9| \cdot \frac{1}{5}$;

   $\frac{5x}{5} = \frac{9}{5}$ arba $5x \cdot \frac{1}{5} = 9 \cdot \frac{1}{5}$;

   abiejais atvejais $x = 1.8$.

Gauname, kad $2x^2+3x^2-5x = 4x$ lygties sprendiniai yra $x = 0$ ir $x = 1.8$ (galima dar rašyti $x \in \{0, 1.8\}$).

1.2 Kaip išspręsti $ax^2 + b = 0$

1.2.1 Teorinis sprendimas

Žingsniai:

1. Išskiriame ax^2 (paliekame kairėje pusėje be b):

   $ax^2 + b = 0| - b$;

   $ax^2 + b - b = 0 - b$;

   $ax^2 = -b$;

2. Kairėje pusėje reikia palikt x^2 - abi puses padaliname iš a:

   $ax^2 = -b| : a;$

   $\frac{ax^2}{a} = \frac{-b}{a};$

   Kairėje pusėje galima suprastinti skaitiklyje ir vardiklyje esančius a:

   $x^2 = \frac{-b}{a};$

3. Ištraukiame šaknį iš abiejų pusių:

   Visos kvadratinės lygtys turi du sprendinius (išskyrus, $x^2 = 0$), tai ištraukus šaknį:

   $\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-b}{a}};$

   $x = \sqrt{\frac{-b}{a}};$

   ir

   $\sqrt{x^2} = -\sqrt{\frac{-b}{a}};$

   $x = -\sqrt{\frac{-b}{a}};$

Šis sprendimas turi prasmę, kol $x \neq 0$ (dalijimas iš nulio neturi reikšmės) ir $\frac{-b}{a} \geq 0$ (traukiant šaknį iš neigiamo skaičiaus gaunamas kompleksinis skaičius - mokykloje to nesimokoma).

1.2.2 Pavyzdys #1

Turime $2x^2 + 8 = 0$. Ši atitinka $ax^2 + b = 0$ formą. Sprendžiame pagal aukščiau duotą teorinį sprendimą:

1. Išskiriame ax^2 (paliekame kairėje pusėje be b):

   $2x^2 + 8 = 0| - 8;$

   $2x^2 + 8 - 8 = 0 - 8;$

   $2x^2 = -8;$

2. Kairėje pusėje reikia palikt x^2 - abi puses padaliname iš 2:

   $2x^2 = -8| : 2;$

   $\frac{2x^2}{2} = \frac{-8}{2};$

   Kairėje pusėje galima suprastinti skaitiklyje ir vardiklyje esančius a, o dešinėje padalinti skaičius:

   $x^2 = -4;$

3. Ištraukiame šaknį iš abiejų pusių:

   Visos kvadratinės lygtys turi du sprendinius (išskyrus, $x^2 = 0$), tai ištraukus šaknį:

   $\sqrt{x^2} = \sqrt{-4};$

   $x = \sqrt{-4};$

   ir

   $\sqrt{x^2} = -\sqrt{-4};$

   $x = -\sqrt{-4};$

Kadangi dešinėje pusėje esantis skaičius yra mažiau už nulį (-4<0), tai ši lygtis neturi realiųjų sprendinių.

1.2.3 Pavyzdys #2

Turime $6x^2 = 3x^2 + 12$. Ši lygtis neatitinka $ax^2 \pm b = 0$ formos. Todėl pirmiausia reikia bandyti susitvarkyti.

1. Persikeliame narius su x^2 į vieną pusę (pasirenkame kairę), tai galima padaryti atėmus abi puses iš $3x^2$:

   $6x^2 = 3x^2 + 12| - 3x^2;$

   $6x^2 - 3x^2 = 3x^2 + 12 - 3x^2;$

   $3x^2 = 12;$

2. Dabar reiškinys atitinka $ax^2 - b = 0$, nes tai yra tas pats kas $ax^2 = b$. Toliau sprendžiame pagal taisykles, reikia x^2 palikti be skaičiaus esančio priekyje, tai padarysime padaline iš skaičiaus esančio prieš x^2:

   $3x^2 = 12| : 3;$

   $\frac{3x^2}{3} = \frac{12}{3};$

   Kairėje pusėje galima padalinti 3 iš 3, o dešinėje 12 iš 3:

   $x^2 = 4;$

3. Dabar galima iš abiejų pusių ištraukti šaknį:

   $\sqrt{x^2} = \sqrt{4};$

   $x = 2;$

   ir

   $\sqrt{x^2} = -\sqrt{4};$

   $x = -2;$

Lygtis $6x^2 = 3x^2 + 12$ turi du sprendinius: $x = 2$ ir $x = -2$. Sprendinius visada galima pasitikrinti įdėjus atgal į lygtį.

1.2.4 Pavyzdys #3

Nevisada išeis ištraukti šaknį „gražiai“ sprendžiant $ax^2 + b = 0$ lygtį. Pavyzdžiui turime paprastą lygtį $x^2 = 40$.

1. Iš karto galime ištraukti šaknį iš abiejų pusių:

   $\sqrt{x^2} = \sqrt{40};$

   $x = \sqrt{40};$

   arba

   $\sqrt{x^2} = -\sqrt{40};$

   $x = -\sqrt{40};$

2. Nors galėtume čia ir baigti spręsti, bet dar galime išskaidyti dauginamaisiai ir dalinai ištraukti šaknį:

   Šiam tikslui naudosime vieną iš šaknų savybių (žiūrėti bendrojo kurso brandos egzamino formulyną): $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

   $x = \sqrt{4 \cdot 10} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$, nes $40 = 4 \cdot 10;$

   arba

   $x = -\sqrt{4 \cdot 10} = -\sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = -2\sqrt{10};$

Lygtis $x^2 = 40$ turi du sprendinius: $\pm 2\sqrt{10}$. Sprendinius visada galima pasitikrinti įdėjus atgal į lygtį.

2 Nelygybės

Nelygybės išreiškia ryšį tarp dviejų dydžių, kurie nėra lygūs. Jose naudojami kintamieji ir konstantos, o nelygybės simboliais parodoma, kad viena teiginio pusė yra didesnė arba mažesnė už kitą.

Naudojami simboliai:

1. Daugiau už ($>$), pavyzdžiui: $x > 3$ (skaitoma x daugiau už 3);
2. Mažiau už ($<$), pavyzdžiui: $x < 5$, (skaitoma x mažiau už 5);
3. Daugiau už arba lygu ($\geq$), pavyzdžiui: $x \geq 4$ (skaitoma x daugiau arba lygu už 4);

   Vietoje „daugiau už arba lygu“ galima vartoti „ne mažiau“.
4. Mažiau už arba lygu ($\leq$), pavyzdžiui: $x \leq 6$ (skaitoma x mažiau arba lygu už 4).

   Vietoje „mažiau už arba lygu“ galima vartoti „ne daugiau“.

Pagrindiniai principai sprendžiant nelygybes:

1. Kad ir ką darytumėte vienai nelygybės pusei, turite padaryti kitai, kad išlaikytumėte nelygybę;

   $x + 3 > 5$ tampa $x > 2$ atėmus 3 iš abiejų pusių.
2. Nelygybės apvertimas:

   2.1. Kai padauginate arba padalijate abi nelygybės puses iš neigiamo skaičiaus, nelygybės ženklas turi būti apverstas.

   $-2x > 6$ tampa $x < -3x$ padalinus nelygybę iš -2 ($>\to<$).

   2.2. Jeigu yra perkeliamas narys iš vienos nelygybės pusės į kitą, tai reiktų laikyti tai, kaip to nario pridėjimą ar atėmimą iš abiejų pusių. Būtina atkreipti dėmesį į ženklą:

   $3>x$ tampa $x<3$ (atkreipkite dėmesį į ženklą), nes

   $3>x| - 3 \Rightarrow$

   $\Rightarrow 0>x - 3| - x \Rightarrow$

   $\Rightarrow -x> - 3| \cdot -1 \Rightarrow$

   $\Rightarrow x<3$.
3. Panašių narių tvarkymas.

   Panašūs nariai turi tuos pačius kintamuosius (x, y, z, skaičius ir kt.), kuriuo pakelti tais pačiais laipsniais. Iš esmės jie atrodo taip pat, išskyrus koeficientą prie jo (skaičius prieš kintamąjį).

   Pavyzdžiai:

   - $5x$ ir $3x$ yra panašūs nariai, nes abu turi kintamąjį x ir jie pakilti pirmuoju ($x^1 = x$), nors ir koeficientai (5 ir 3) prie šių kintamųjų skirtingi.
   - $7y^2$ ir $-y^2$ yra panašūs nariai, nes abu turi kintamąjį y ir jie pakilti antruoju laipsniu, nors ir koeficientai (5 ir -1) prie šių kintamųjų skirtingi.
   - $-4ab$ ir $5ab$ yra panašūs nariai, nes abu turi kintamuosius a ir b, bei jie pakilti pirmuoju laipsniu.

   Atvirkštiniai pavyzdžiai:

   - $3x$ ir $3y$ nėra panašūs nariai, nes abu turi skirtingus kintamuosius x ir y.
   - x^2 ir x nėra panašūs nariai, nes abu kintamieji pakelti skirtingais laipsniais (2 ir 1);

- $4xy$ ir $4xy^2$ nėra panašūs nariai, antrojo nario kintamasis y pakeltas kvadratu. laipsniu.

Literatūra

[1] Jason Socrates Bardi. The calculus wars: Newton. *Leibniz, and the Greatest Mathematical Clash of All Time* (*Thunder Mouth, New York, 2006*), 2006.