Savarankiško darbo refleksija

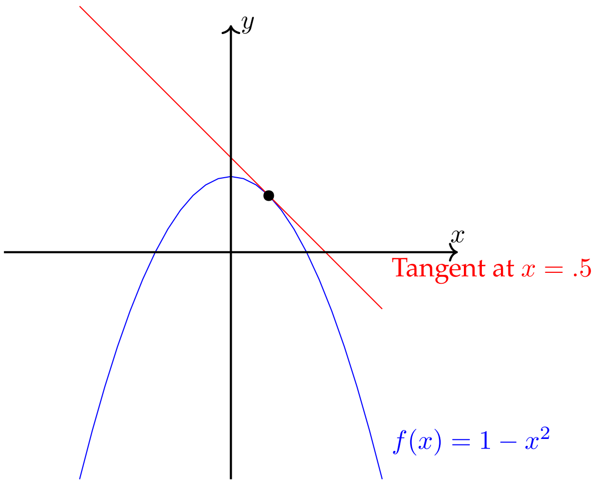
Vilius Paliokas

2023/09/29

1 Lygtys

Differentiation is a concept of Mathematics studied in Calculus. There is an ongoing discussion as to who was the first to define differentiation: Leibniz or Newton [1].

Differentiation allows for the calculation of the slope of the tangent of a curve at any given point as shown in Figure 2.



1 pav.: The plot of $f(x) = 1 - x^2$ with a tangent at $x = .5$.

1.1 Kaip išspręsti $ax^2 + bx = 0$

1.1.1 Teorinis sprendimas

Žingsniai:

1. Turime nepilną kvadratinę lygtį.

   $ax^2 + bx = 0;$

2. Išskaidome dauginamaisiais - iškeliame x prieš skliaustus:

   $x(ax + b) = 0$

3. Iškėlus prieš skliaustus, jau turime vieną sprendinį (x), kitą dar reikia susirasti:

   $ax + b = 0 \quad$ arba $\quad x = 0$

4. Susitvarkome lygtį taip, kad vienoje pusėje atsirastų nariai su x, o kitoje tik skaičiai. Tai padarysime atėmę iš abiejų pusių skaičių b:

   $ax + b = 0| - b$

5. $ax + b - b = 0 - b$
6. Reikia pasidaryti, kad kintamasis x būtų plikas - be daugino a. Tai padarysime padalinę lygtį iš to daugino a:

   $ax = -b| : a$
7. $\frac{ax}{a} = -\frac{b}{a}$
8. $x = -\frac{b}{a}$

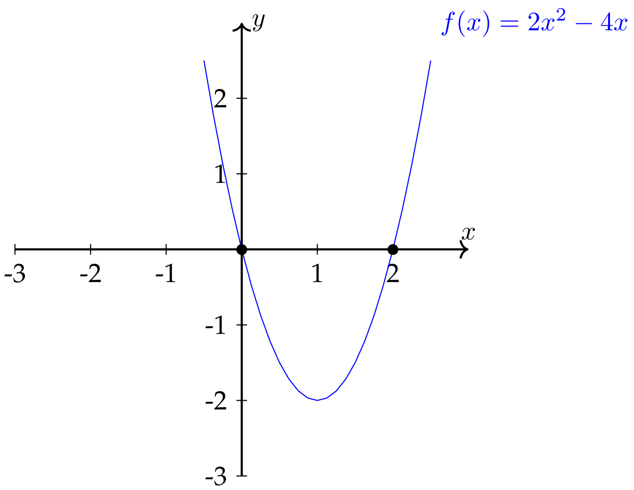
Po 9 žingsnio turime du lygties sprendinius $x = -\frac{b}{a}$ ir $x = 0$ (3 žingsnis).

1.1.2 Pavyzdys #1

Turime $2x^2 - 4x = 0$;

Pagal formulę $ax^2 + bx = 0$:

- $a = 2$;
- $b = -4$.



2 pav.: $f(x) = 2x^2 - 4x$ grafikas su sprendiniais $2x^2 - 4x = 0$

Žingsniai:

1. Išskaidome dauginamaisiais - iškeliame x prieš skliaustus:

   $x(2x - 4) = 0$;
2. Iškėlus prieš skliaustus, jau turime vieną sprendinį (x), kitą dar reikia susirasti:

   $2x - 4 = 0 \quad$ arba $\quad \boldsymbol{x = 0}$;
3. Susitvarkome lygtį taip, kad vienoje pusėje atsirastų nariai su x, o kitoje tik skaičiai. Tai padarysime pridėję abiem pusėms skaičių 4:

   $2x - 4 = 0| + 4$;
4. $2 - 4 + 4 = 0 + 4$;
5. Reikia pasidaryti, kad kintamasis x būtų plikas - be daugino 2. Tai padarysime padalinę lygtį iš to daugino 2:

   $2x = 4| : 2$;

6. $\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$;

   $\frac{2x}{2} = x$;

   $-\frac{4}{2} = 2$;

7. $x = 2$;

Po 7 žingsnio turime du lygties sprendinius $x = 2$ ir $x = 0$ (2 žingsnis).

1.1.3 Pavyzdys #2

Turime $2x^2 + 3x^2 - 5x = 4x$.

Šis reiškinys neatitinka $ax^2 + bx = 0$ formulės. Todėl pirmiausia reikia bandyti susitvarkyti.

1. Visus narius perkeliame į vieną pusę:

   $2x^2 + 3x^2 - 5x = 4x| - 4x$;

   $2x^2 + 3x^2 - 5x - 4x = 4x - 4x$;

   $2x^2 + 3x^2 - 5x - 4x = 0$;

2. Sutraukiame panašius narius:

   $2x^2 + 3x^2 - 5x - 4x = 0$;

   $5x^2 - 9x = 0$;

3. Dabar jau reiškinys atitinka $ax^2 + bx = 0$ formulę. Galima išskaidyti dauginamaisiais - iškeliame prieš skliaustus x:

   $x(5x - 9) = 0$;

4. Iš čia gauname vieną sprendinį:

   $5x - 9 = 0 \quad$ arba $\quad \boldsymbol{x = 0}$;

5. Toliau sprendžiame pirmąją lygtį:

   $5x - 9 = 0| + 9$;

   $5x - 9 + 9 = 0 + 9$;

   $5x = 9$;

   $5x = 9| : 5$ arba $5x = 9| \cdot \frac{1}{5}$;

   $\frac{5x}{5} = \frac{9}{5}$ arba $5x \cdot \frac{1}{5} = 9 \cdot \frac{1}{5}$;

   abiejais atvejais $x = 1.8$.

Gauname, kad $2x^2+3x^2-5x = 4x$ lygties sprendiniai yra $x = 0$ ir $x = 1.8$ (galima dar rašyti $x \in \{0, 1.8\}$).

1.2 Kaip išspręsti $ax^2 + b = 0$

1.2.1 Teorinis sprendimas

Žingsniai:

1. Išskiriame ax^2 (paliekame kairėje pusėje be b):

   $ax^2 + b = 0| - b$;

   $ax^2 + b - b = 0 - b$;

   $ax^2 = -b$;

2. Kairėje pusėje reikia palikt x^2 - abi puses padaliname iš a:

   $ax^2 = -b| : a$;

   $\frac{ax^2}{a} = \frac{-b}{a}$;

   Kairėje pusėje galima suprastinti skaitiklyje ir vardiklyje esančius a:

   $x^2 = \frac{-b}{a}$;

3. Ištraukiame šaknį iš abiejų pusių:

   Visos kvadratinės lygtys turi du sprendinius (išskyrus, $x^2 = 0$), tai ištraukus šaknį:

   $\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-b}{a}}$;

   $x = \sqrt{\frac{-b}{a}}$;

   ir

   $\sqrt{x^2} = -\sqrt{\frac{-b}{a}}$;

   $x = -\sqrt{\frac{-b}{a}}$;

Šis sprendimas turi prasmę, kol $x \neq 0$ (dalijimas iš nulio neturi reikšmės) ir $\frac{-b}{a} \geq 0$ (traukiant šaknį iš neigiamo skaičiaus gaunamas kompleksinis skaičius - mokykloje to nesimokoma).

1.2.2 Pavyzdys #1

Turime $2x^2 + 8 = 0$. Ši atitinka $ax^2 + b = 0$ formą. Sprendžiame pagal aukščiau duotą teorinį sprendimą:

1. Išskiriame ax^2 (paliekame kairėje pusėje be b):

   $2x^2 + 8 = 0| - 8$;

   $2x^2 + 8 - 8 = 0 - 8$;

   $2x^2 = -8$;

2. Kairėje pusėje reikia palikt x^2 - abi puses padaliname iš 2:

   $2x^2 = -8| : 2$;

   $\frac{2x^2}{2} = \frac{-8}{2}$;

   Kairėje pusėje galima suprastinti skaitiklyje ir vardiklyje esančius a, o dešinėje padalinti skaičius:

   $x^2 = -4$;

3. Ištraukiame šaknį iš abiejų pusių:

   Visos kvadratinės lygtys turi du sprendinius (išskyrus, $x^2 = 0$), tai ištraukus šaknį:

   $\sqrt{x^2} = \sqrt{-4}$;

   $x = \sqrt{-4}$;

   ir

   $\sqrt{x^2} = -\sqrt{-4}$;

   $x = -\sqrt{-4}$;

Kadangi dešinėje pusėje esantis skaičius yra mažiau už nulį (-4<0), tai ši lygtis neturi realiųjų sprendinių.

1.2.3 Pavyzdys #2

Turime $6x^2 = 3x^2 + 12$. Ši lygtis neatitinka $ax^2 \pm b = 0$ formos. Todėl pirmiausia reikia bandyti susitvarkyti.

1. Persikeliame narius su x^2 į vieną pusę (pasirenkame kairę), tai galima padaryti atėmus abi puses iš $3x^2$:

   $6x^2 = 3x^2 + 12| - 3x^2;$

   $6x^2 - 3x^2 = 3x^2 + 12 - 3x^2;$

   $3x^2 = 12;$

2. Dabar reiškinys atitinka $ax^2 - b = 0$, nes tai yra tas pats kas $ax^2 = b$. Toliau sprendžiame pagal taisykles, reikia x^2 palikti be skaičiaus esančio priekyje, tai padarysime padaline iš skaičiaus esančio prieš x^2:

   $3x^2 = 12| : 3;$

   $\frac{3x^2}{3} = \frac{12}{3};$

   Kairėje pusėje galima padalinti 3 iš 3, o dešinėje 12 iš 3:

   $x^2 = 4;$

3. Dabar galima iš abiejų pusių ištraukti šaknį:

   $\sqrt{x^2} = \sqrt{4};$

   $x = 2;$

   ir

   $\sqrt{x^2} = -\sqrt{4};$

   $x = -2;$

Lygtis $6x^2 = 3x^2 + 12$ turi du sprendinius: $x = 2$ ir $x = -2$. Sprendinius visada galima pasitikrinti įdėjus atgal į lygtį.

Literatūra

[1] Jason Socrates Bardi. The calculus wars: Newton. *Leibniz, and the Greatest Mathematical Clash of All Time* (*Thunder Mouth, New York, 2006*), 2006.