# *Funkcijų transformacijos*

*Vilius Paliokas*

*2023-02-01*

Šioje mokomojoje medžiagoje funkcijų transformacijų teoriją ir pavyzdžius. Pagal bendrojo ugdymo 11 klasės matematikos bendrojo kurso programą mokiniai turi mokėti, kaip atliekamos $y = f(x) + a$, $y = f(x + a)$, $y = -f(x)$, $y = a \cdot f(x)$ formulėmis aprašomos transformacijos. Čia taip pat pateikiamos šių transformacijų pasireiškimai įvairaus konteksto situacijose. Funkcijų transformacijoms suprasti, pirmiausia plėtojama samprata apie funkcijas ir jų savybes.

## *Funkcijos samprata*

Dažnu atveju, funkcija yra asocijuojama su $f(x)$ žymėjimu, o šį mes skaitome *ef nuo iks*. Po $f(x)$ visada seka kažkoks tai reiškinys, dažniausiai tai būna tiesinis reiškinys $ax + b$ (pvz.: $f(x) = x + 1$) ar kvadratinis reiškinys $ax^2 + bx + c$ (pvz.: $f(x) = x^2$). O vėliau, mokyklos kurse sutiksime ir kitokio tipo funkcijas.

Toliau prisiminsime apie aibes ir pamatysime, kaip jos susijusios su funkcijomis.

### *Apie aibes*

Kadangi jau susipažinome su aibėmis, galime pasigilinti, kaip aibės susijusios su funkcijomis. Bet pirma prisiminsime keletą aibių teorijos[1] aspektų. **Aibė** - rinkinys objektų, kurie vadinasi aibės elementais. Aibės elementu gali būti bet kas (obuoliai, planetos, mašinos), o jie yra susieti viena (ar daugiau) bendra savybę. Matematikoje nagrinėjami matematiniai objektai, mokyklos matematikos programoje nagrinėjamos tik skaičių aibės. Jeigu elementas $x$ priklauso aibei $X$, tai užrašoma $x \in X$. Jeigu elementas $x$ nepriklauso aibei $X$, tai rašome $x \notin X$.

[1] Aibių teorija yra matematikos šaka, kurioje nagrinėjamos aibės - objektų rinkiniai

Priklausomai nuo elementų skaičiaus aibėje, aibės gali būti baigtinės arba begalinės. Baigtinės aibės atveju mes galime suskaičiuoti šios elementus, juos nesunkiai visus išvardinti. Pavyzdžiui turime aibę

$$A = \{0; 1; 4; 9; 16; 25\}$$

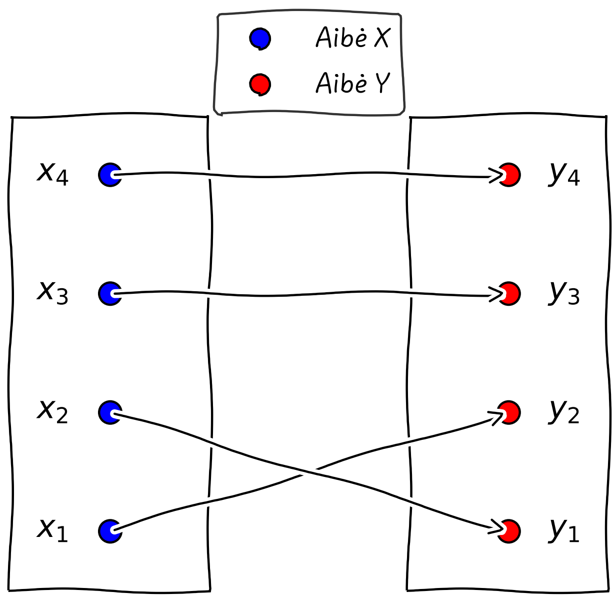
Ši aibė turi baigtinį kiekį elementų - ją sudaro 6 elementai. Natūraliųjų skaičių aibė $\mathbb{N}$ yra vienas iš begalinės aibės pavyzdžių, ši aibė turi be galo daug elementų $(1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 \ldots)$.

*Aibės ir funkcijos*

O dabar bandysime atsakyti į klausimą, kaip susijusios aibės ir funkcija. Tarkime turime dvi aibes $X$ ir $Y$ (paskui bus ir konkretūs pavyzdžiai). Paprastumo dėlei, šios aibės bus baigtinės abi sudarytos iš keturių elementų:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\};$$
$$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\};$$

Šių grafinis atvaizdavimas pažymėtas žemiau, 1 paveiksle. Kol kas pavaizduotas rodykles ignoruokime.




1 pav.: Funkcija, kaip aibių elementų sąryšiai

O dabar svarbiausia dalis. Kiekvienam aibės $X$ elementui priskyrus elementą iš aibės $Y$ gauname tam tikrus ryšius tarp šių dviejų aibių. Tarkime, anksčiau paminėtiems elementams iš aibės $X$ priskirkime elementą iš aibės $Y$:

- $x_1 \to y_2$;
- $x_2 \to y_1$;
- $x_3 \to y_3$;
- $x_4 \to y_4$;

Šiuos ryšius tarp dviejų aibių elementų galime matyti 1 paveiksle, jie pavaizduoti rodyklėmis. Rodyklė $\rightarrow$ yra priskirimo veiksmas matematikoje. Jeigu visų aibės $X$ elementų priskyrimo aibės $Y$ elementams veiksmą pavadintume $f$, tai galėtume pažymėti:

$$f : X \rightarrow Y \quad \text{arba} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

Iki šio momento turėjote pamatyti pažįstamų dalykų: $f$, $x$, $y$. Jei kiekvienas aibės $X$ elementas yra susijęs su vienu ir tik vienu kitos aibės $Y$ elementu, tai toks priskyrimas (ryšys) vadinamas **funkcija**[2]. O tai užrašoma $y = f(x)$.

[2] Labai svarbi šio apibrėžimo dalis yra ta, kad vienas (ir tik vienas) elementas priskiriamas kitam aibės elementui, kitu atveju tai negali vadintis funkcija

### *Funkcijos sąvokos*

Kalbant apie funkcijas, būtina žinoti su funkcija susijusiąs sąvokas. Šios sąvokos ateina iš funkcijos apibrėžimo:

- $x$ - funkcijos nepriklausomas kintamasis arba funkcijos argumentas;
- $y$ - funkcijos priklausomas kintamasis arba funkcijos reikšmė;
- $X$ - visos galimos $x$ reikšmės arba funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritis. Ši sritis dažnai žymima $D(f)$;
- $Y$ - visos galimos $y$ reikšmės arba funkcijos $f(x)$ reikšmių sritis. Ši sritis dažnai žymima $E(f)$;
- $f$ - taisykė, pagal kurią $x$ reikšmėms priskiriamos $y$ reikšmės;

Šių sąvokų atikmenis galima pamatyti anksčiau pavaizduotame 1 paveiksle. Pavyzdžiui, paveiksle mėlyni rutuliukai $x_1, x_2, x_3, x_4$ yra funkcijų argumentai, o jų visuma (apibrėžta sritis) yra apibrėžimo sritis. Reikšmių sritis yra apibrėžta sritis su raudonai $y_1, y_2, y_3, y_4$ taškais. Visų rodyklių visuma yra taisyklė $f$, pagal kurią vieni aibės (apibrėžimo srities) elementai priskiriami kitiems aibės (reikšmių srities) elementams.

### *Funkcijos pavyzdys*

Turime dvi aibes:

$$X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$Y = \{0; 1; 4; 9; 16; 25\}$$

Dabar priskirkime aibės $X$ vienam ir tik vienam kitos aibės $Y$ elementą:

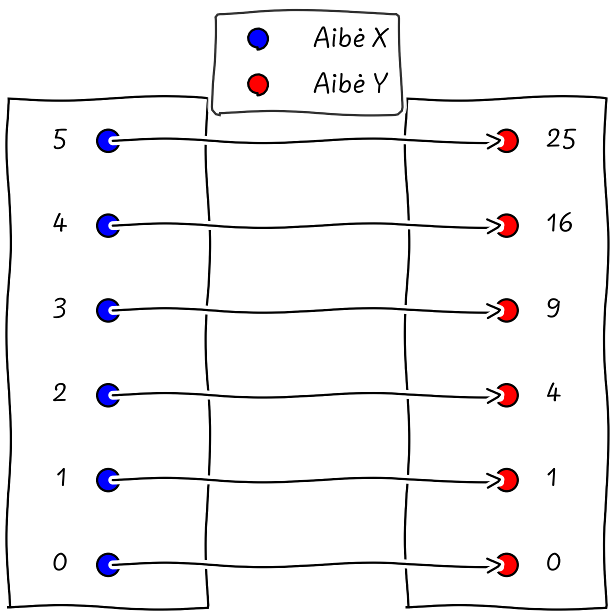
- $0 \rightarrow 0$;

- $1 \to 1$;
- $2 \to 4$;
- $3 \to 9$;
- $4 \to 16$;
- $5 \to 25$;

Šį priskyrimą pavadinkime $f$. Dabar, šių skaičių ryšį galima parašyti $y = f(x)$ arba $f(x) = y$ forma:

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- $f(2) = 4$;
- $f(3) = 9$;
- $f(4) = 16$;
- $f(5) = 25$;

Šiuos ryšius galima pavaizduoti ir grafiškai:




2 pav.: Aibės $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ elementų priskyrimas aibės $Y = \{0; 1; 4; 9; 16; 25\}$ elementams

Šią funkcinę priklausomybę galima ir apibūdinti:

- Funkcijos apibrėžimo sritis yra $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$;

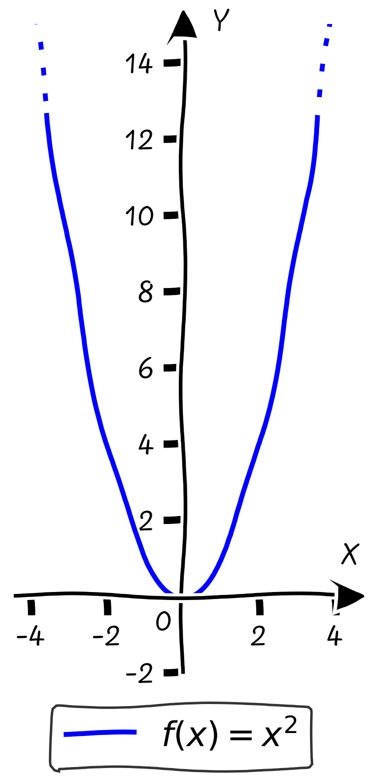
- Funkcijos reikšmių sritis yra $\{0; 1; 4; 9; 16; 25\}$;
- Mažiausia reikšmė ($y$) yra 0, kai argumentas ($x$) yra lygus 0;
- Didžiausia reikšmė ($y$) yra 25, kai argumentas ($x$) yra lygus 5;

### *Funkcijos reiškinys*

Funkciją galima aprašyti reiškiniu. Ta daroma, nes neįmanoma išrašyti visų begalinių ryšių tarp dviejų begalinių aibių. Šiuos reiškinius jau analizavote ir ankstesnėse klasėse. Anksčiau pateiktame pavyzdyje, galima įžvelgti tam tikrą dėsningumą. Funkcijos reikšmės buvo gautos argumentus pakėlus kvadratu. Tokią bendrą taisyklę visiems skaičiams ($x \in \mathbb{R}$) galima užrašyti taip:

$$f(x) = x^2$$

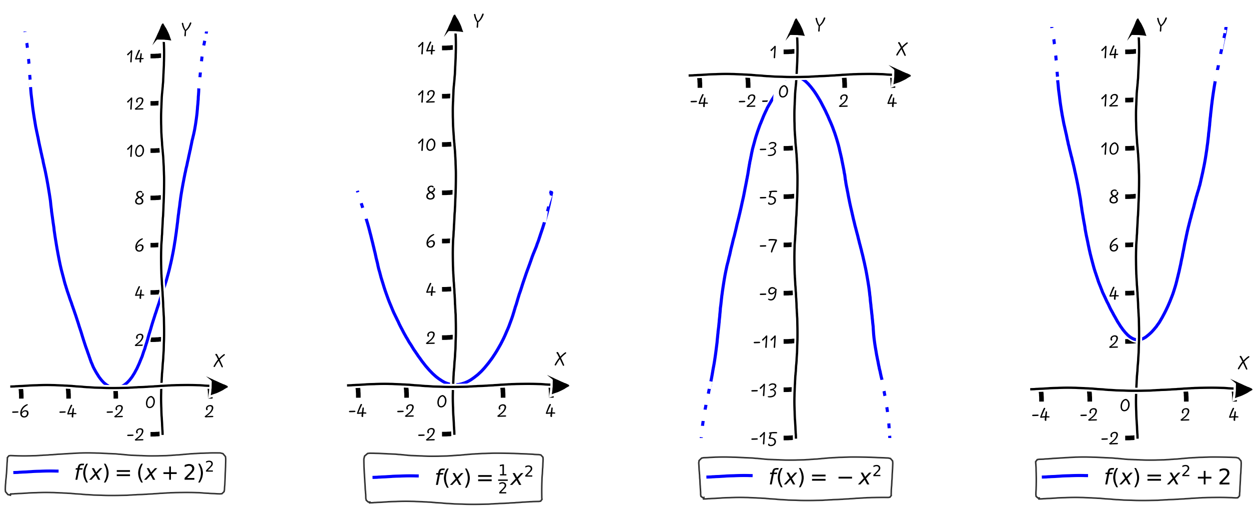
Tai reiškia, kad kiekviena funkcijos reikšmė gaunama argumentą, iš apibrėžimo srities, pakėlus kvadratu. Tokiu būdu gaunama begalė argumentų $x$ ir reikšmių $y$ skaičių porų $(x; y)$. Šiuos taškus atvaizdavus koordinačių plokštumoje $OXY$ gaunamas funkcijos grafikas (paveikslas 3).




3 pav.: $f(x) = x^2$ grafikas $OXY$ koordinačių plokštumoje

### *Grafikų transformacija*

Tarkime turime žinome, kaip atrodo funkcijos grafikas, jį modifikuojame taip, kad sukurtume panašus, bet kitoks to grafikos variantas. Toks procesas vadinamas funkcijos grafiko transformacija. Matematikos bendrajame kurse reikia žinoti 4 tipų transformacijas. Šių transformacijų pavyzdžiai matomi žemiau:




4 pav.: $f(x) = x^2$ grafiko transformacijos: $y = f(x-2)$, $y = \frac{1}{2}f(x)$, $y = 2f(x)$, $y = f(x) + 2$

Šie visi grafikai atrodo panašiai, bet skiriasi nuo pradinės funkcijos $f(x) = x^2$ grafiko, nes atlitkos tam tikros transformacijos:

- Postūmis OX ašimi $y = f(x + a)$, čia $a \in \mathbb{R}$;
- Postūmis OY ašimi $y = f(x) + b$, čia $b \in \mathbb{R}$;
- Ištempimas, sutraukimas $y = c \cdot\ f(x)$, čia $c \in \mathbb{R}$;
- Apvertimas OX ašies atžvilgiu $y = -f(x)$;

Toliau giliau analizuosime šių transformacijų poveikį grafikams, jų taškams. Įsivaizduokime turime funkcijos $f(x)$ tašką $(a, b)$, tai tokiu atveju $f(a) = b$. 2 lentelėje pavaizduota, kaip keičiasi funkcijos taškai $(a, b)$ ir grafikas, modifikuojant funkcijos $f(x)$ reikšmę.

| Transformacija | Kaip pasikeičia $f(x)$ grafiko taškai | Grafiko vizualinis pokytis |
|---|---|---|
| $f(x) + d,\ d > 0$ | $(a, b) \mapsto (a, b + d)$ | Kyla viršun per $d$ |
| $f(x) - d,\ d > 0$ | $(a, b) \mapsto (a, b - d)$ | Leidžiasi žemyn per $d$ |
| $c \cdot f(x),\ c > 0$ | $(a, b) \mapsto (a, c \cdot b)$ | Išsitempia vertikaliai per $c$ |
| $\frac{1}{c} \cdot f(x),\ c > 0$ | $(a, b) \mapsto (a, \frac{1}{c} \cdot b)$ | Susitraukia vertikaliai per $c$ |
| $-f(x)$ | $(a, b) \mapsto (a, -b)$ | Apsiverčia $OX$ ašies atžvilgiu |

1 lentelė: Funkcijų transformacijos, modifikuojant jos reikšmę

*Pavyzdys*

Pavaizduosime konkrečius pavyzdžius aprašytoms transformacijoms 2 lentelėje. Tam naudosime jau anksčiau naudotą $f(x) = x^2$ funkciją. Pažiūrėsime, koks pokytis, kai nubrėžus $f(x) + 2$, $f(x) - 2$, $2f(x)$,$\frac{1}{2}f(x)$,$-f(x)$. Šiuos brėžinius rasite 7 puslapyje.

Matome, kad padvigubinus funkcijos $f(x)$ reikšmę ($2 \cdot f(x)$), ji išsitempia, o taškų $y$ koordinatės reikšmės padvigubėja, pavyzdžiui taškas $(2; 4)$ tapo $(2; 4 \cdot 2) = (2; 8)$

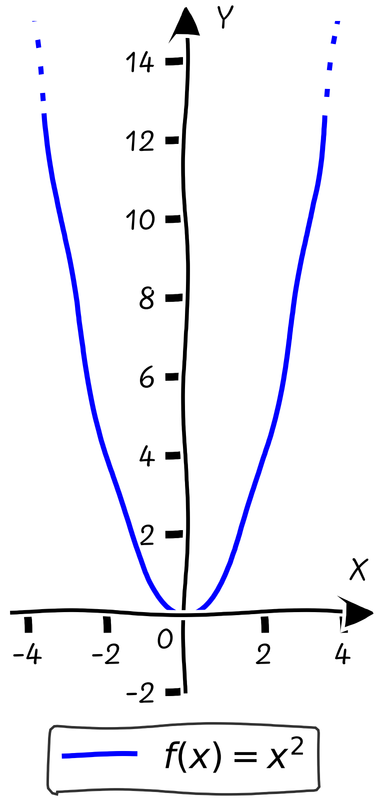
Pridėjus prie $f(x)$ reikšmių 2, gauname paslinkta grafiką per du vienetus aukštyn. Visų taškų $y$ reikšmė padidėja per du vienetus. Pavyzdžiui taškas $(2; 4)$ tapo $(2; 4 + 2) = (2; 6)$

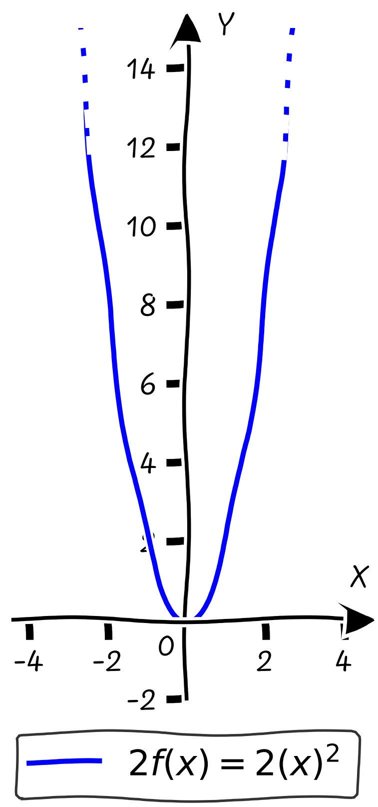
Grafiką galime sutraukti, jis tampa plokštesnis. Tai padarėme funkciją $f(x)$ padauginus iš $\frac{1}{2}$. Visos taškų $y$ reikšmės sumažėjo perpus. Taškas $(2; 4)$ tapo $(2; 4 \cdot \frac{1}{2}) = (2; 2)$

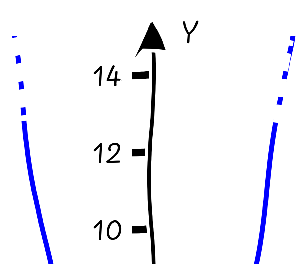
Kaip paslinkome grafiką aukštyn, taip galima ir paslinkti žemyn. Tą padarome atimdami (arba pridėdami neigiamą reikšmę) iš funkcijos $f(x)$. Pavyzdyje funkcijos $f(x) - 2$ grafikas skiriasi tuo, kad jis pasislinkęs žemyn per du vienetus - visi taškų oordinatės[3] reikšmė sumažinta per du vienetus.

Paprasčiausia transformacija - apvertimas $OX$ ašies atžvilgiu. Šios principus palieku išsiaiškinti savarankiškai.

[3] Plokštumos taškai $(x; y)$ matematikoje dar vadinami abcise ir ordinate: $(\overbrace{x}^{\text{abscisė}}; \overbrace{y}^{\text{ordinatė}})$


Y
14
12
10
8
6
4
2
X
-4
-2
0
2
4
-2
$f(x) = x^2$


Y
14
12
10
8
6
4
X
-4
-2
0
2
4
-2
$2f(x) = 2(x)^2$


Y
14
12
10

### *Postūmiai OX ašimi*

Liko išsiaiškinti dar du postūmių tipus: grafiko slinkimą kairėn ir dešinėn OX ašimi.

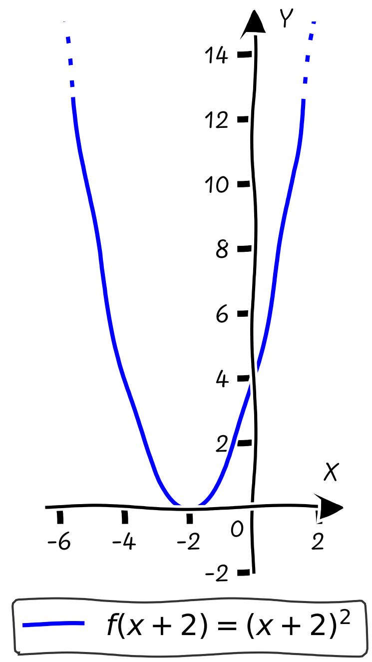
2 lentelė: Funkcijų transformacijos, modifikuojant jos argumentą $x$

| Transformacija | Kaip pasikeičia $f(x)$ grafiko taškai | Grafiko vizualinis pokytis |
|---|---|---|
| $f(x+d), d>0$ | $(a,b) \mapsto (a-d,b)$ | Pasislenka į kairę per $d$ |
| $f(x-d), d>0$ | $(a,b) \mapsto (a+d,b)$ | Pasislenka į dešinę per $d$ |

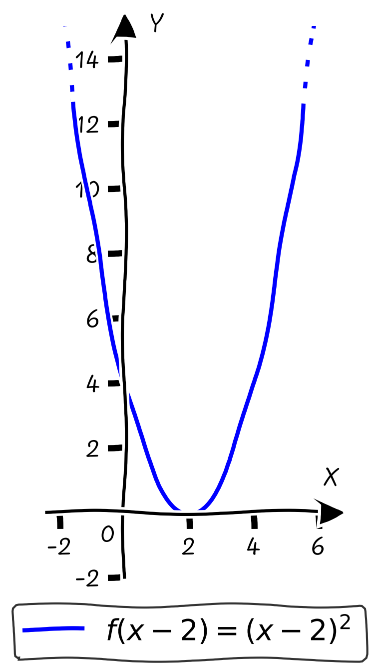
Vėl paanalizuosime funkciją $f(x)$ ir poslinkis, kai pridedame skaičių prie argumento arba atimame skaičių prie argumento. Dvi skirtingas transformacijas - poslinkius $OX$ ašies kryptimi rasite dešinėje pusėje, paveiksle 5 ir paveiksle 6. Pažvelgus į grafikus, turėtų atrodyti neintuityviai, prieštaringai, kad padidinus argumentą $x$ dviem, grafikas pasislinko į kairę pusę per dvi vietas. Šiuo atveju kiekvienas taškas $(a;b)$ tapo $(a-2;b)$. Tokia pat situacija su kita transformacija. Atėmus 2 prie argumento $x$, grafikas pasislinko į dešinę pusę.

Tad šitą principą reiktų įsiminti:

**Prie argumento pridedant, graifkas juda į kairę,**
**atimant iš argumento, grafikas juda į dešinę**.




5 pav.: $f(x) = x^2$ funkcijos transformacija $f(x+2) = (x+2)^2$




6 pav.: $f(x) = x^2$ funkcijos transformacija $f(x-2) = (x-2)^2$

Grafikų transformacijas galima jungti tarpusavyje: apversti, paslinkti į dešinę per $n$, nuleisti žemyn per $m$, ištempti. Pavyzdžiui turime tiesinę funkciją

$$f(x) = x$$

tai šią galima paslinkti į kairę per 2, pakelti per 5, apversti ir ištempti 3 vienetais. Tokia transformacija užsirašys šitaip:

$$-3f(x+3)+5 = -3(x-3)+5$$

Tokius atvejus pasižiūrėsime toliau, uždaviniuose.

### *Uždaviniai*

1. Funkcija $f(x)$ paslinkta per 3 vienetus į kairę ir 4 vienetus aukštyn. Parašykite naujosios funkcijos reiškinį.

2. Turime pradinę funkciją $f(x) = -3x - 6$, šiai funkcijai buvo atlikta kombinacija transformacijų ir gauta $g(x) = x + 2$. Nurodykite kokios transformacijos buvo atliktos funkcijai $f(x)$.

3. (*Iš išplėstinio kurso knygos, 361 užduotis*) Parašykite funkcijos $y = g(x)$ reiškinį $g(x)$:

a) $g(x) = f(x) - 2$, $f(x) = 7x^2$;

b) $g(x) = f(x-3)$, $f(x) = \frac{9}{x}$;

c) $g(x) = f(x-2) + 1$, $f(x) = -\frac{2}{x}$;

d) $g(x) = f(x+2) - 3$, $f(x) = \frac{1}{3}x^2$;

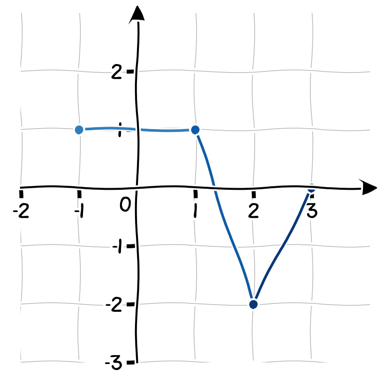
4. (*Iš išplėstinio kurso knygos, 356 užduotis, modifikuota*) Pavaizduotas (paveikslas 7) funkcijos $y = f(x)$ grafikas. Nubraižykite funkcijos $y = g(x)$ grafiką, kai:

   a) $g(x) = f(x-1) - 3$;

   b) $g(x) = f(x+1) - 2$;

   c) $g(x) = -3f(x-2) + 1$;

   d) $g(x) = \frac{1}{2}f(x+2) - 3$;



7 pav.: 4 užduoties funkcijos $y = f(x)$ grafikas

5. Pagal 4 užduoties brėžinius, nurodykite funkcijos apibrėžimo sritį, reikšmių sritį, mažiausią ir didžiausią reikšmes.

   a) $f(x)$;

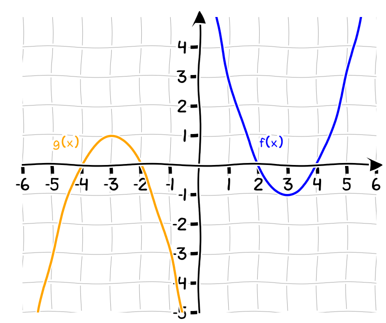
   b) $g(x) = f(x-1) - 3$;

   c) $g(x) = f(x+1) - 2$;

   d) $g(x) = -3f(x-2) + 1$;

   e) $g(x) = \frac{1}{2}f(x+2) - 3$;

6. Parašykite funkciją, atitinkančią $g(x)$ grafiką, kuris transformavosi iš $f(x)$ grafiko taikant funkcijų transformavimo taisykles (paveikslas 8).




8 pav.: 6 užduoties funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikai

7. Pagal 6 užduotį, nurodykite funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ apibrėžimo sritis, reikšmių sritis, mažiausias ir didžiausias reikšmes.

8. Duotas funkcijos $y = f(x)$ grafikas (). Naudojantis transformacijomis žemiau pavaizduotų grafikų funkcijas.

## Page Layout

### Headings

This style provides A- and B-heads (that is, `\section` and `\subsection`), demonstrated above.

The Tufte-LaTeX classes will emit an error if you try to use `\subsubsection` and smaller headings.

IN HIS LATER BOOKS,[4] Tufte starts each section with a bit of vertical space, a non-indented paragraph, and sets the first few words of the sentence in SMALL CAPS. To accomplish this using this style, use the `\newthought` command:

[4] Edward R. Tufte. *Beautiful Evidence*. Graphics Press, LLC, first edition, May 2006. ISBN 0-9613921-7-7

```
\newthought{In his later books}, Tufte starts...
```

### Sidenotes

One of the most prominent and distinctive features of this style is the extensive use of sidenotes. There is a wide margin to provide ample room for sidenotes and small figures. Any `\footnote`s will automatically be converted to sidenotes.[5] If you'd like to place ancillary information in the margin without the sidenote mark (the superscript number), you can use the `\marginnote` command.

[5] This is a sidenote that was entered using the `\footnote` command.

This is a margin note. Notice that there isn't a number preceding the note, and there is no number in the main text where this note was written.

The specification of the `\sidenote` command is:

`\sidenote[`⟨*number*⟩`][`⟨*offset*⟩`]{`*Sidenote text.*`}`

Both the ⟨*number*⟩ and ⟨*offset*⟩ arguments are optional. If you provide a ⟨*number*⟩ argument, then that number will be used as the sidenote number. It will change of the number of the current sidenote only and will not affect the numbering sequence of subsequent sidenotes.

Sometimes a sidenote may run over the top of other text or graphics in the margin space. If this happens, you can adjust the vertical position of the sidenote by providing a dimension in the ⟨*offset*⟩ argument. Some examples of valid dimensions are:

```
1.0in    2.54cm    254mm    6\baselineskip
```

If the dimension is positive it will push the sidenote down the page; if the dimension is negative, it will move the sidenote up the page.

While both the ⟨*number*⟩ and ⟨*offset*⟩ arguments are optional, they must be provided in order. To adjust the vertical position of the sidenote while leaving the sidenote number alone, use the following syntax:

`\sidenote[][`⟨*offset*⟩`]{`*Sidenote text.*`}`

The empty brackets tell the `\sidenote` command to use the default sidenote number.

If you *only* want to change the sidenote number, however, you may completely omit the ⟨*offset*⟩ argument:

`\sidenote[`⟨*number*⟩`]{`*Sidenote text.*`}`

The `\marginnote` command has a similar *offset* argument:

`\marginnote[`⟨*offset*⟩`]{`*Margin note text.*`}`

### *References*

References are placed alongside their citations as sidenotes, as well. This can be accomplished using the normal `\cite` command.[6]

[6] The first paragraph of this document includes a citation.

The complete list of references may also be printed automatically by using the `\bibliography` command. (See the end of this document for an example.) If you do not want to print a bibliography at the end of your document, use the `\nobibliography` command in its place.

To enter multiple citations at one location,[7] you can provide a list of keys separated by commas and the same optional vertical offset argument: `\cite{Tufte2006,Tufte1990}`.

[7] Edward R. Tufte. *Beautiful Evidence*. Graphics Press, LLC, first edition, May 2006. ISBN 0-9613921-7-7; and Edward R. Tufte. *Envisioning Information*. Graphics Press, Cheshire, Connecticut, 1990. ISBN 0-9613921-1-8

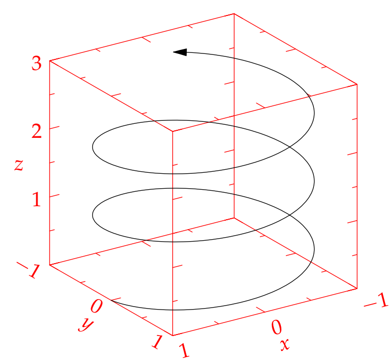
`\cite[`⟨*offset*⟩`]{`*bibkey1,bibkey2,...*`}`

## *Figures and Tables*

Images and graphics play an integral role in Tufte's work. In addition to the standard figure and tabular environments, this style provides special figure and table environments for full-width floats.

Full page–width figures and tables may be placed in figure* or table* environments. To place figures or tables in the margin, use the marginfigure or margintable environments as follows (see figure 9):

```
\begin{marginfigure}
  \includegraphics{helix}
  \caption{This is a margin figure.}
\end{marginfigure}
```



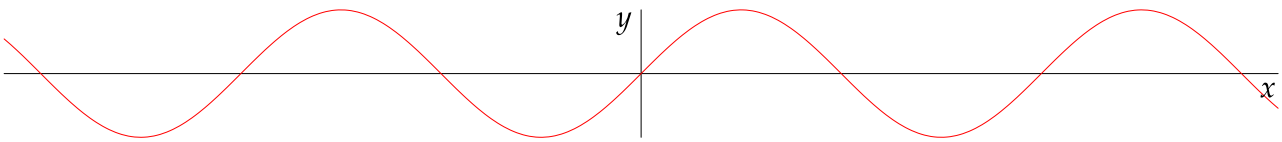

9 pav.: This is a margin figure. The helix is defined by $x = \cos(2\pi z)$, $y = \sin(2\pi z)$, and $z = [0, 2.7]$. The figure was drawn using Asymptote (`http://asymptote.sf.net/`).

The marginfigure and margintable environments accept an optional parameter ⟨*offset*⟩ that adjusts the vertical position of the figure or table. See the "Sidenotes" section above for examples. The specifications are:

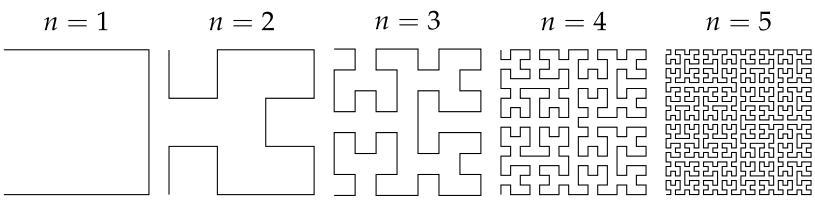
```
\begin{marginfigure}[⟨offset⟩]
   ...
\end{marginfigure}
```

```
\begin{margintable}[⟨offset⟩]
    ...
\end{margintable}
```

Figure 10 is an example of the `figure*` environment and figure 11 is an example of the normal `figure` environment.




10 pav.: This graph shows $y = \sin x$ from about $x = [-10, 10]$. *Notice that this figure takes up the full page width.*




11 pav.: Hilbert curves of various degrees $n$. *Notice that this figure only takes up the main textblock width.*

Table 3 shows table created with the `booktabs` package. Notice the lack of vertical rules—they serve only to clutter the table's data.

| Margin | Length |
|---|---|
| Paper width | 8½ inches |
| Paper height | 11 inches |
| Textblock width | 6½ inches |
| Textblock/sidenote gutter | 3/8 inches |
| Sidenote width | 2 inches |

3 lentelė: Here are the dimensions of the various margins used in the Tufte-handout class.

## *Full-width text blocks*

In addition to the new float types, there is a fullwidth environment that stretches across the main text block and the sidenotes area.

```
\begin{fullwidth}
  Lorem ipsum dolor sit amet...
\end{fullwidth}
```

*Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.*

## Typography

### Typefaces

If the Palatino, Helvetica, and `Bera Mono` typefaces are installed, this style will use them automatically. Otherwise, we'll fall back on the Computer Modern typefaces.

### Letterspacing

This document class includes two new commands and some improvements on existing commands for letterspacing.

When setting strings of ALL CAPS or SMALL CAPS, the letterspacing—that is, the spacing between the letters—should be increased slightly.[8] The `\allcaps` command has proper letterspacing for strings of FULL CAPITAL LETTERS, and the `\smallcaps` command has letterspacing for SMALL CAPITAL LETTERS. These commands will also automatically convert the case of the text to upper- or lowercase, respectively.

The `\textsc` command has also been redefined to include letterspacing. The case of the `\textsc` argument is left as is, however. This allows one to use both uppercase and lowercase letters: The Initial Letters Of The Words In This Sentence Are Capitalized.

[8] Robert Bringhurst. *The Elements of Typography*. Hartley & Marks, 3.1 edition, 2005. ISBN 0-88179-205-5

## Installation

To install the Tufte-LaTeX classes, simply drop the following files into the same directory as your `.tex` file:

```
tufte-book.cls
tufte-common.def
tufte-handout.cls
tufte.bst
```

## More Documentation

For more documentation on the Tufte-LaTeX document classes (including commands not mentioned in this handout), please see the sample book.

## Support

The website for the Tufte-LaTeX packages is located at `https://github.com/Tufte-LaTeX/tufte-latex`. On our website, you'll find links to our SVN repository, mailing lists, bug tracker, and documentation.

## *Literatūra*

Robert Bringhurst. *The Elements of Typography*. Hartley & Marks, 3.1 edition, 2005. ISBN 0-88179-205-5.

Edward R. Tufte. *Envisioning Information*. Graphics Press, Cheshire, Connecticut, 1990. ISBN 0-9613921-1-8.

Edward R. Tufte. *Beautiful Evidence*. Graphics Press, LLC, first edition, May 2006. ISBN 0-9613921-7-7.