Savarankiško darbo refleksija

Vilius Paliokas

2023/09/29

1 Lygtys

Lygtis: matematinis teiginys, teigiantis dviejų reiškinių lygybę.

Sprendinys: reikšmė (arba reikšmių rinkinys), dėl kurios lygtis yra teisinga, kai jos kintamasis (dažniausiai x) pakeičiamas ja (reikšme).

1.1 Lygties sprendimas

Pagrindiniai žingsniai:

1. **Supaprastinimas**: suprastinamos abi lygties pusės (panašių narių jungimas, perkėlimai, skliaustų atskleidimai ir kt.);

2. **Izoliuojamas kintamasis**: Naudojami aritmetiniai veiksmai ir atvirkštinės operacijos (jeigu lygybė, tai atimtis; jeigu kėlimas laipsniu, tai šaknies traukimas ir t.t.), kad kintamasis (dažniausiai x) būtų vienintelis kažkurioje tai lygties pusėje.

3. **Atsakymo pasitikrinimas**: gavus sprendinį, įdedamas vietoje kintamojo ir patikrinama, kad abi pusės lygios.

Pagrindiniai aspektai:

1. **Atvirkštinės operacijos**: naudojamos operacijos, kurios atšaukia viena kitą (pvz., sudėjimas ir atėmimas, daugyba ir padalijimas).

Operacija	Atvirkštinė operacija
Sudėtis $(+a)$	Atimtis $(-a)$
Atimtis $(-a)$	Sudėtis $(+a)$
Daugyba $(\times a)$	Dalyba $(\div a)$
Dalyba $(\div a)$	Daugyba $(\times a)$
Kėlimas kvadratu (x^2)	Kvadratinė šaknis $(\sqrt{x})$
Kėlimas kubu (x^3)	Kubinė šaknis $(\sqrt[3]{x})$
Kėlimas laipsniu (x^a)	Šaknis $(\sqrt[a]{x})$
Logaritmas pagrindu b $(\log_b x)$	Kėlimas, kai pagrindas konstanta b (b^x)

1 lentelė: operacijos ir jų atvirkštinės operacijos

2. **Panašieji nariai**: Atliekamos operacijos su panašiais nariais. Panašieji nariai - tai tie, kurie turi tą

patį kintamąjį ir pakelti tuo pačiu laipsniu (daugiau žiūrėti nelygybių temoje).

3. **Lygties balansas**: Kad ir ką darytumėte vienai lygties pusei, turite daryti su kita.

Lygybėms galioja veiksmų eiliškumas - taisyklių rinkinys, kuris nurodo, kokius veiksmus reikia atlikti pirmiausia, kad būtų tinkamai apskaičiuota matematinė išraiška. Žemiau pateikiama operacijų atlikimo tvarka:

1. Skliaustai;
2. Kėlimas laipsniu, šaknies traukimas, logaritmavimas;
3. Daugyba, dalyba (iš kairės į dešinę);
4. Atimtis, sudėtis (iš kairės į dešinę).

1.2 Kaip išspręsti $ax^2 + bx = 0$

1.2.1 Teorinis sprendimas

Žingsniai:

1. Turime nepilną kvadratinę lygtį.

   $ax^2 + bx = 0;$

2. Išskaidome dauginamaisiais - iškeliame x prieš skliaustus:

   $x(ax + b) = 0$

3. Iškėlus prieš skliaustus, jau turime vieną sprendinį (x), kitą dar reikia susirasti:

   $ax + b = 0 \quad \text{arba} \quad x = 0$

4. Susitvarkome lygtį taip, kad vienoje pusėje atsirastų nariai su x, o kitoje tik skaičiai. Tai padarysime atėmę iš abiejų pusių skaičių b:

   $ax + b = 0| - b$

5. $ax + b - b = 0 - b$
6. Reikia pasidaryti, kad kintamasis x būtų plikas - be dauginio a. Tai padarysime padalinę lygtį iš to dauginio a:

   $ax = -b| : a$

7. $\frac{ax}{a} = -\frac{b}{a}$
8. $x = -\frac{b}{a}$

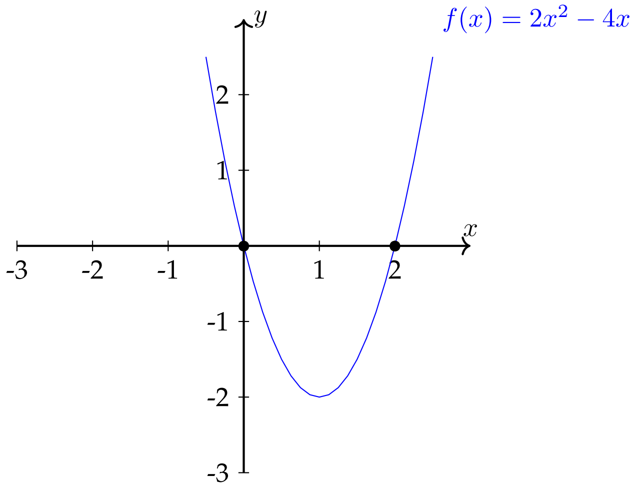
Po 9 žingsnio turime du lygties sprendinius $x = -\frac{b}{a}$ ir $x = 0$ (3 žingsnis).

1.2.2 Pavyzdys #1

Turime $2x^2 - 4x = 0$;

Pagal formulę $ax^2 + bx = 0$:

- $a = 2$;
- $b = -4$.



1 pav.: $f(x) = 2x^2 - 4x$ grafikas su sprendiniais $2x^2 - 4x = 0$

Žingsniai:

1. Išskaidome dauginamaisiais - iškeliame x prieš skliaustus:

   $x(2x - 4) = 0$;

2. Iškėlus prieš skliaustus, jau turime vieną sprendinį (x), kitą dar reikia susirasti:

   $2x - 4 = 0 \quad \text{arba} \quad \boldsymbol{x = 0}$;

3. Susitvarkome lygtį taip, kad vienoje pusėje atsirastų nariai su x, o kitoje tik skaičiai. Tai padarysime pridėję abiem pusėms skaičių 4:

   $2x - 4 = 0| + 4$;

4. $2 - 4 + 4 = 0 + 4$;

5. Reikia pasidaryti, kad kintamasis x būtų plikas - be dauginio 2. Tai padarysime padalinę lygtį iš to dauginio 2:

   $2x = 4| : 2$;

6. $\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$;

   $\frac{2x}{2} = x$;

$-\frac{4}{2} = 2$;

7. $x = 2$;

Po 7 žingsnio turime du lygties sprendinius $x = 2$ ir $x = 0$ (2 žingsnis).

1.2.3 Pavyzdys #2

Turime $2x^2 + 3x^2 - 5x = 4x$.

Šis reiškinys neatitinka $ax^2 + bx = 0$ formulės. Todėl pirmiausia reikia bandyti susitvarkyti.

1. Visus narius perkeliame į vieną pusę:

   $2x^2 + 3x^2 - 5x = 4x| - 4x$;

   $2x^2 + 3x^2 - 5x - 4x = 4x - 4x$;

   $2x^2 + 3x^2 - 5x - 4x = 0$;

2. Sutraukiame panašius narius:

   $2x^2 + 3x^2 - 5x - 4x = 0$;

   $5x^2 - 9x = 0$;

3. Dabar jau reiškinys atitinka $ax^2 + bx = 0$ formulę. Galima išskaidyti dauginamaisiais - iškeliame prieš skliaustus x:

   $x(5x - 9) = 0$;

4. Iš čia gauname vieną sprendinį:

   $5x - 9 = 0$ arba $\boldsymbol{x = 0}$;

5. Toliau sprendžiame pirmąją lygtį:

   $5x - 9 = 0| + 9$;

   $5x - 9 + 9 = 0 + 9$;

   $5x = 9$;

   $5x = 9| : 5$ arba $5x = 9| \cdot \frac{1}{5}$;

   $\frac{5x}{5} = \frac{9}{5}$ arba $5x \cdot \frac{1}{5} = 9 \cdot \frac{1}{5}$;

   abiejais atvejais $x = 1.8$.

Gauname, kad $2x^2+3x^2-5x = 4x$ lygties sprendiniai yra $x = 0$ ir $x = 1.8$ (galima dar rašyti $x \in \{0, 1.8\}$).

1.3 Kaip išspręsti $ax^2 + b = 0$

1.3.1 Teorinis sprendimas

Žingsniai:

1. Išskiriame ax^2 (paliekame kairėje pusėje be b):

   $ax^2 + b = 0| - b$;

   $ax^2 + b - b = 0 - b$;

   $ax^2 = -b$;

2. Kairėje pusėje reikia palikt x^2 - abi puses padaliname iš a:

   $ax^2 = -b| : a$;

   $\frac{ax^2}{a} = \frac{-b}{a}$;

   Kairėje pusėje galima suprastinti skaitiklyje ir vardiklyje esančius a:

   $x^2 = \frac{-b}{a}$;

3. Ištraukiame šaknį iš abiejų pusių:

   Visos kvadratinės lygtys turi du sprendinius (išskyrus, $x^2 = 0$), tai ištraukus šaknį:

   $\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-b}{a}}$;

   $x = \sqrt{\frac{-b}{a}}$;

   ir

   $\sqrt{x^2} = -\sqrt{\frac{-b}{a}}$;

   $x = -\sqrt{\frac{-b}{a}}$;

Šis sprendimas turi prasmę, kol $x \neq 0$ (dalijimas iš nulio neturi reikšmės) ir $\frac{-b}{a} \geq 0$ (traukiant šaknį iš neigiamo skaičiaus gaunamas kompleksinis skaičius - mokykloje to nesimokoma).

1.3.2 Pavyzdys #1

Turime $2x^2 + 8 = 0$. Ši atitinka $ax^2 + b = 0$ formą. Sprendžiame pagal aukščiau duotą teorinį sprendimą:

1. Išskiriame ax^2 (paliekame kairėje pusėje be b):

   $2x^2 + 8 = 0| - 8$;

   $2x^2 + 8 - 8 = 0 - 8$;

$2x^2 = -8;$

2. Kairėje pusėje reikia palikt x^2 - abi puses padaliname iš 2:

   $2x^2 = -8| : 2;$

   $\frac{2x^2}{2} = \frac{-8}{2};$

   Kairėje pusėje galima suprastinti skaitiklyje ir vardiklyje esančius a, o dešinėje padalinti skaičius:

   $x^2 = -4;$

3. Ištraukiame šaknį iš abiejų pusių:

   Visos kvadratinės lygtys turi du sprendinius (išskyrus, $x^2 = 0$), tai ištraukus šaknį:

   $\sqrt{x^2} = \sqrt{-4};$

   $x = \sqrt{-4};$

   ir

   $\sqrt{x^2} = -\sqrt{-4};$

   $x = -\sqrt{-4};$

Kadangi dešinėje pusėje esantis skaičius yra mažiau už nulį (-4<0), tai ši lygtis neturi realiųjų sprendinių.

1.3.3 Pavyzdys #2

Turime $6x^2 = 3x^2 + 12$. Ši lygtis neatitinka $ax^2 \pm b = 0$ formos. Todėl pirmiausia reikia bandyti susitvarkyti.

1. Persikeliame narius su x^2 į vieną pusę (pasirenkame kairę), tai galima padaryti atėmus abi puses iš $3x^2$:

   $6x^2 = 3x^2 + 12| - 3x^2;$

   $6x^2 - 3x^2 = 3x^2 + 12 - 3x^2;$

   $3x^2 = 12;$

2. Dabar reiškinys atitinka $ax^2 - b = 0$, nes tai yra tas pats kas $ax^2 = b$. Toliau sprendžiame pagal taisykles, reikia x^2 palikti be skaičiaus esančio priekyje, tai padarysime padaline iš skaičiaus esančio prieš x^2:

   $3x^2 = 12| : 3;$

   $\frac{3x^2}{3} = \frac{12}{3};$

   Kairėje pusėje galima padalinti 3 iš 3, o dešinėje 12 iš 3:

$x^2 = 4$;

3. Dabar galima iš abiejų pusių ištraukti šaknį:

   $\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$;

   $x = 2$;

   ir

   $\sqrt{x^2} = -\sqrt{4}$;

   $x = -2$;

Lygtis $6x^2 = 3x^2 + 12$ turi du sprendinius: $x = 2$ ir $x = -2$. Sprendinius visada galima pasitikrinti įdėjus atgal į lygtį.

1.3.4 Pavyzdys #3

Nevisada išeis ištraukti šaknį „gražiai" sprendžiant $ax^2 + b = 0$ lygtį. Pavyzdžiui turime paprastą lygtį $x^2 = 40$.

1. Iš karto galime ištraukti šaknį iš abiejų pusių:

   $\sqrt{x^2} = \sqrt{40}$;

   $x = \sqrt{40}$;

   arba

   $\sqrt{x^2} = -\sqrt{40}$;

   $x = -\sqrt{40}$;

2. Nors galėtume čia ir baigti spręsti, bet dar galime išskaidyti dauginamaisiai ir dalinai ištraukti šaknį:

   Šiam tikslui naudosime vieną iš šaknų savybių (žiūrėti bendrojo kurso brandos egzamino formulyną): $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

   $x = \sqrt{4 \cdot 10} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$, nes $40 = 4 \cdot 10$;

   arba

   $x = -\sqrt{4 \cdot 10} = -\sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = -2\sqrt{10}$;

Lygtis $x^2 = 40$ turi du sprendinius: $\pm 2\sqrt{10}$. Sprendinius visada galima pasitikrinti įdėjus atgal į lygtį.

2 Nelygybės

Nelygybės išreiškia ryšį tarp dviejų dydžių, kurie nėra lygūs. Jose naudojami kintamieji ir konstantos, o nelygybės simboliais parodoma, kad viena teiginio pusė yra didesnė arba mažesnė už kitą.

Naudojami simboliai:

1. Daugiau už ($>$), pavyzdžiui: $x > 3$ (skaitoma x daugiau už 3);

2. Mažiau už ($<$), pavyzdžiui: $x < 5$, (skaitoma x mažiau už 5);

3. Daugiau už arba lygu ($\geq$), pavyzdžiui: $x \geq 4$ (skaitoma x daugiau arba lygu už 4);

   Vietoje „daugiau už arba lygu“ galima vartoti „ne mažiau“.

4. Mažiau už arba lygu ($\leq$), pavyzdžiui: $x \leq 6$ (skaitoma x mažiau arba lygu už 4).

   Vietoje „mažiau už arba lygu“ galima vartoti „ne daugiau“.

2.1 Pagrindiniai principai sprendžiant nelygybes

Sprendžiant nelygybes, pritaikomi tokie pat principai, kaip ir lygtyse (ir atvirkščiai). Prisideda tik nelygybės apvertimas dauginant ar dalinant iš negiamo skaičiaus.

1. Kad ir ką darytumėte vienai nelygybės pusei, turite padaryti kitai, kad išlaikytumėte nelygybę;

   $x + 3 > 5$ tampa $x > 2$ atėmus 3 iš abiejų pusių.

2. Nelygybės apvertimas:

   2.1. Kai padauginate arba padalijate abi nelygybės puses iš neigiamo skaičiaus, nelygybės ženklas turi būti apverstas.

   $-2x > 6$ tampa $x < -3x$ padalinus nelygybę iš -2 ($>\to<$).

   2.2. Jeigu yra perkeliamas narys iš vienos nelygybės pusės į kitą, tai reiktų laikyti tai, kaip to nario pridėjimą ar atėmimą iš abiejų pusių. Būtina atkreipti dėmesį į ženklą:

   $3{\color{red}>}x$ tampa $x{\color{blue}<}3$ (atkreipkite dėmesį į ženklą), nes

   $3{\color{red}>}x| - 3 \Rightarrow$

   $\Rightarrow 0{\color{red}>}x - 3| - x \Rightarrow$

   $\Rightarrow -x{\color{red}>} - 3| \cdot -1 \Rightarrow$

   $\Rightarrow x{\color{blue}<}3.$

3. Panašių narių tvarkymas.

   Panašūs nariai turi tuos pačius kintamuosius (x, y, z ir kt.), kuriuo pakelti tais pačiais laipsniais. Iš esmės jie atrodo taip pat, išskyrus koeficientą prie jo (skaičius prieš kintamąjį).

Pavyzdžiai:

- $5x$ ir $3x$ yra panašūs nariai, nes abu turi kintamąjį x ir jie pakilti pirmuoju $(x^1 = x)$, nors ir koeficientai (5 ir 3) prie šių kintamųjų skirtingi.
- $7y^2$ ir $-y^2$ yra panašūs nariai, nes abu turi kintamąjį y ir jie pakilti antruoju laipsniu, nors ir koeficientai (5 ir -1) prie šių kintamųjų skirtingi.
- $-4ab$ ir $5ab$ yra panašūs nariai, nes abu turi kintamuosius a ir b, bei jie pakilti pirmuoju laipsniu.

Atvirkštiniai pavyzdžiai:

- $3x$ ir $3y$ nėra panašūs nariai, nes abu turi skirtingus kintamuosius x ir y.
- x^2 ir x nėra panašūs nariai, nes abu kintamieji pakelti skirtingais laipsniais (2 ir 1);
- $4xy$ ir $4xy^2$ nėra panašūs nariai, antrojo nario kintamasis y pakeltas kvadratu. laipsniu.

3.1. Konstantos ir kintamieji turi būti suprastinti, jeigu tai įmanoma:

$2x + 5 > x + 8$ tampa $x > 3$ atėmus abiu puses iš x ir 5.

3.2. Panašūs nariai gali būti sudėti arba atimti:

$3x + 2x > 10$ tampa $5x > 10$, o po to ir $x > 2$.

2.2 Atsakymo pasitikrinimas

Visada galima pasitikrinti nelygybės atsakymą. Pavyzdžiui turime nelygybę $2x + 3 < 11$:

1. Atimame abi pusęs iš 3

   $2x + 3 - 3 < 11 - 3$;

   $2x < 8$;

2. Padaliname abi pusęs iš 2

   $\frac{2x}{2} < \frac{8}{2}$;

   $x < 4$;

Radome, kad nelygybės sprendinys yra $x < 4$ arba $x \in (-\infty; 4)$. Galime pasitikrinti šį sprendinį įstatydami skaičių mažesnį negu 4, pavyzdžiui 3. Įstačius į pradinę nelygybę gauname, kad $2 \cdot 3 + 3 < 11$. Atlikus aritmetinius veiksmus gauname, kad $9 < 11$, kas yra tiesa ir tai reiškia, kad sprendinys yra teisingas.

2.3 Kaip spręsti $ax - b < 0$ nelygybę?

2.3.1 Teorinis sprendimas

Žingsniai, kad išspręstume $ax - b < 0$ nelygybę:

1. Prie abiejų pusių pridedame b:

   $ax - b + b < 0 + b$;

   $ax < b$;

2. Padaliname iš a, kad paliktumę kintąmjį x be koeficiento (daugiklio):

   $\frac{ax}{a} < \frac{b}{a}$;

   $x < \frac{b}{a}$;

3. Neužmirškite, jeigu skaičius a yra neigiamas, reikia apversti nelygybės ženklą:

   $x > -\frac{b}{a}$;

2.3.2 Pavyzdys #1

Turime $3x - 5 < 0$. Sprendimas:

1. Prie abiejų pusių pridedame 5:

   $3x - 5 + 5 < 0 + 5$;

   $3x < 5$;

2. Padaliname abi puses iš 3, kad paliktumę kintąmjį x be koeficiento (daugiklio):

   $\frac{3x}{3} < \frac{5}{3}$;

   $x < \frac{5}{3}$;

Nelygybės sprendinys: $x \in (-\infty; \frac{5}{3})$.

2.3.3 Pavyzdys #2

Turime $-3x + 2 \geq 5x - 8$. Sprendimas:

1. Visus narius su x kintamuoju perkeliame į vieną pusę. Aš pasirenku kelti į dešinę:

   $-3x + 2 \geq 5x - 8| - 5x$;

   $-3x + 2 - 5x \geq 5x - 8 - 5x$;

   $-8x + 2 \geq -8$.

2. Visus skaičius be kintamųjų (konstantas) perkeliame į kitą pusę. Šiuo atveju į kairę:

   $-8x + 2 \geq -8| - 2$;

   $-8x + 2 - 2 \geq -8 - 2$;

$-8x \geq -10;$

3. Panaikiname skaičių prie x padalindami abi puses iš jo:

   $-8x \geq -10| : (-8);$

   $\frac{-8x}{-8} \leq \frac{-10}{-8}$ (atkreipkite dėmesį į ženklo pasikeitimą);

   $x \leq \frac{5}{4};$

Nelygybės sprendinys: $x \in (\infty; \frac{5}{4}]$.

3 Aibės

Aibė yra skirtingų elementų rinkinys. Jeigu elementas a yra aibės A elementas, tai rašoma, kad $a \in A$. Jeigu elementas b nėra aibės A elementas, tai rašoma, kad $b \notin A$. Aibės žymimos didžiąją raide, o jos elementai mažosiomis. Matematikos šaka nagrinėjanti aibes vadinama aibių teorija.

Aibės pavyzdžiai:

- mokyklos mokinių aibė;
- saulės sistemos planetų aibė;
- visų natūraliųjų skaičių aibė;
- lygties sprendinių aibė;
- ...

3.1 Būdai užrašyti aibę

Pagal elementų skaičių, yra dviejų tipų aibės: baigtinės ir begalinės. Baigtines aibes galima lengvai išrašyti. Tokiam būdui naudojami figūriniai skliaustai {...}. Pavyzdžiui:

$$A = \{1; 5; 6; 7; 8; 10; 30\}; \quad B = \{c; b; e\};$$

Dvi aibės yra vienodos, jeigu šių elementai nesiskiria, nors ir skiriasi jų išdėstymo tvarka. Pavyzdžiui, $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$. Bet matematikoje sutarta, jeigu aibės elementai yra skaičiai, tai jie užrašomi didėjimo tvarka.

Taip pat baigtines ir begalines aibes galima užrašyti tam tikromis taisyklėmis:

- taisyklėmis.

  $B = \{x | x$ yra pirminis skaičius mažesnis už $10\}$ - toks užrašymas reikštų, kad aibę B sudaro pirminiai skaičiai mažesni už 10. Tokią aibę dar būtų galima užrašyti šitaip $B = \{2; 3; 5; 7\}$.

- žodiniu apibūdinimu.

Tegul, aibė C yra sudaryta iš visų sveikųjų skaičių mažesnių už 100.

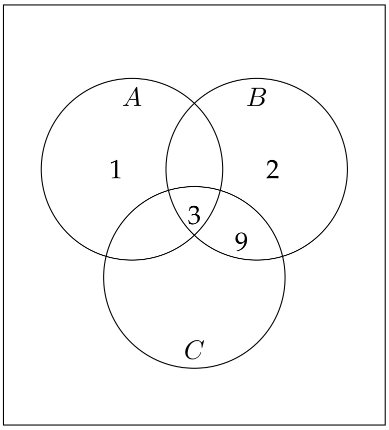
- intervalu.

  $D = (2; 5)$ - tokia aibė yra sudaryta iš visų realių skaičių nuo 2 neįskaitant iki 5 neįskaitant.

  $E = [2; 5]$ - tokia aibė yra sudaryta iš visų realių skaičių nuo 2 įskaitant iki 5 įskaitant.

- Veno diagramomis.

  Nors tai nėra tekstinis aibės apibrėžimo būdas, Veno diagrama vizualiai vaizduoja aibes ir jų ryšius (įprastai apskritimais).



3.2 Realiųjų skaičių aibė

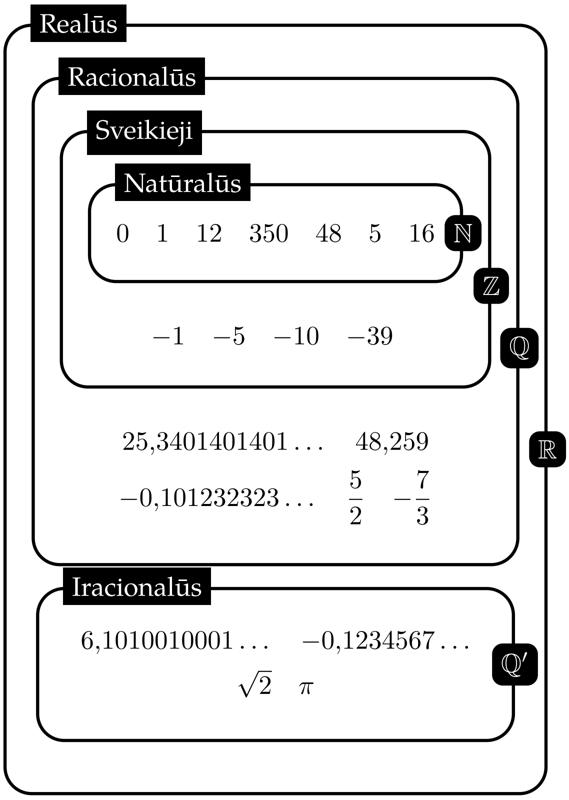
Matematikoje, yra skaičių rinkiniai, kurie naudojami taip dažnai, kad jie turi specialius pavadinimus ir simbolius:

1. Natūralūs ($\mathbb{N}$);
2. Sveikieji ($\mathbb{Z}$);
3. Racionalieji ($\mathbb{Q}$);
4. Iracionalieji ($\mathbb{I}$);
5. Realūs ($\mathbb{R}$);
6. ir kt.

Mokyliniame kurse yra mokomi tik 5 pagrindinės skaičių aibės. Bet reiktų žinoti, kad jų yra ir daugiau, pavyzdžiui menamasis vienetas ir kompleksniai skaičiai. Toliau apibūdinama realiųjų skaičių aibė ir jos poaibiai.

3.2.1 Natūralūs skaičiai

- **Apibrėžimas**: skaičiai naudojami skaičiuoti, nuo 1 iki begalybės (kartais įtraukiamas ir 0).



2 pav.: realių skaičių aibė ir jos poaibiai

- **Simbolis**: $\mathbb{N}$.
- **Pavyzdys**: $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; \ldots\}$.

3.2.2 Sveikieji skaičiai

- **Apibrėžimas**: 0, visi natūralieji skaičiai ir jiems atvirkštiniai skaičiai (natūralieji skaičiai su minuso ženklu).
- **Simbolis**: $\mathbb{Z}$.
- **Pavyzdys**:

  $\mathbb{Z} = \{\ldots; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; \ldots\}$.

3.2.3 Racionalieji skaičiai

- **Apibrėžimas**: Skaičiai, kurie gali būti užrašyti trupmena $\frac{a}{b}$, kur a ir b sveikieji skaičiai, o $b \neq 0$.
- **Simbolis**: $\mathbb{Q}$.
- **Pavyzdys**: $\mathbb{Q} = \{\ldots; -\frac{8}{6}, -\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{22}{7} \ldots\}$.

  Ankščiau aprašytą sveikųjų skaičių aibę $\mathbb{Z}$, taip pat galima išreikšti per racionaliųjų skaičių aibę: sveikieji skaičiai yra tie, racionalieji skaičiai $\frac{a}{b}$, kurių vardiklis b yra lygus 1.

3.2.4 Iracionalieji skaičiai

- **Apibrėžimas**: Skaičiai, kurių negalima išreikšti trupmena $\frac{a}{b}$, kur a ir b sveikieji skaičiai. Šių skaičių dešimtainė dalis yra nesikartojanti ir nesibaigianti.

- **Simbolis**: $\mathbb{Q}'$ arba $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (realiųjų skaičių ir racionaliųjų skaičių aibės skirtumas).

- **Pavyzdys**: $\sqrt{2}$, π, e.

3.2.5 Realių skaičių aibės ir poaibių hierachija

Visos aukščiau nurodytos aibės yra kažkokios tai kitos aibės poaibis. Šį ryšį galima pamatyti veno diagramose 2 paveiksle.

- $\mathbb{N}$ yra sveikųjų skaičių aibės $\mathbb{Z}$ poaibis.

- $\mathbb{Z}$ yra racionaliųjų skaičių aibės $\mathbb{Q}$ poaibis.

- $\mathbb{Q}$ yra realiųjų skaičių aibės $\mathbb{R}$ poaibis.

- Iracionalieji skaičiai taip pat yra realiųjų skaičių aibės $\mathbb{R}$ poaibis.

Šiuos ryšius galima taip pat pavaizduoti su simboliais:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R};$$

3.3 Veiksmai su aibėmis

Kaip ir su skaičiais, taip ir su aibėmis galima atlikti tam tikras veiksmus. Mokykliniame kurse reikia žinoti keturias operacijas: **sąjunga**, **sankirta**, **skirtumas**, **poaibis**. Jų yra ir daugiau, bet sužinosite vėliau, jeigu mokysitės matematikos giliau.

3.3.1 Sąjunga

Dviejų aibių, A ir B, sąjunga žymima $A \cup B$. Šio veiksmo rezultatas yra aibė sudaryta iš elementų, kurie yra arba aibėje A, arba aibėje B.

Pavyzdžiui, turime aibes $A = \{1; 2; 3\}$ ir $B = \{3; 4; 5\}$, tada $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Aibė A sudaryta iš elementų 1, 2, 3, o aibė B - 3, 4, 5. Tai šių aibių sąjunga yra nauja aibė, kuri sudaryta iš 1, 2, 3, 4, 5, 6. Kadangi abi A ir B aibės turi tą patį elementą 3, jo du kart neįtraukiame, nes aibė turi būti sudaryta tik iš skirtingų elementų.

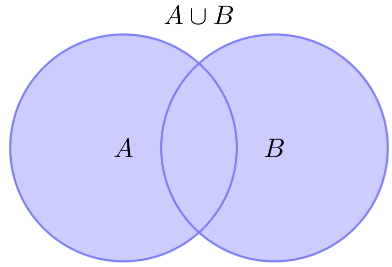
Šių aibių sąryšį galima atvaizduoti ir Veno diagramomis (3 pav.):

Taip pat, žinome, kad aibes galima nurodyti intervalais. Tarkime turime aibes $C = [-3; 2)$ ir $D = (1; 5]$. Prisiminkime, kad intervalai gali būti:

- atviri: $(a; b)$ aibė sudaryta iš visų realių skaičių tarp a ir b, bet neįskaitant pačių a ir b.

- uždari: $[a; b]$ aibė sudaryta iš visų realių skaičių tarp a ir b, įskaitant pačius a ir b.

- pusiau-atviri: $[a; b)$ arba $(a; b]$ aibė sudaryta iš visų realių skaičių tarp a ir b, bet tik vienas iš skaičių a arba b įtrauktas į aibę.



3 pav.: aibių sąjunga

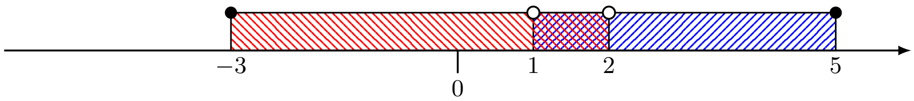
Ieškosime aibių C ir D sąjungos. Aibė C yra sudaryta iš skaičių nuo -3 (įskaitant) iki 2 (neįskaitant), o aibė D yra sudaryta iš skaičių nuo 1 (neįskaitant) iki 5 įskaitant. Šių aibių sąjunga bus visi skaičiai, kurie yra aibėje C arba aibėje D (arba abiejose). Šitai galima užrašyti:

$$C \cup D = [-3; 2) \cup (1; 5]$$

Tokią aibę galima išreikšti dar paprasčiau. Kai imame dviejų aibių sąjungą, galutinis intervalas prasideda nuo mažiausios intervalų reikšmės (žiūrėti aibę C), kuri, šiuo atveju, lygi -3, ir tęsiasi iki didžiausios reikšmės, kuri yra 5 (žiūrėti aibę D). Aibių sąjungos intervalą sudaro visi skaičiai tarp šių dviejų taškų (mažiausio ir didžiausio - -3 ir 5). Taip pat galima pamatyti, kad intervalai nuo 1 (neįskaitant) iki 2 (neįskaitant) persidengia - priklauso abiems intervalams. Tokiu atveju galutinis rezultatas:

$$C \cup D = [-3; 2) \cup (1; 5] = [-3; 5]$$

Intervalus patogu atvaizduoti skaičių tiesėmis, tai sprendimą pavaizduosime tokiu būdu (4 pav.):



4 pav.: C ir D aibių sąjunga

Raudona spalva pavaizduota $C = [-3; 2)$, o mėlyna $D = (1; 5]$. Atkreipkite dėmesį į intervalo pradžios ir galo taškus. Pilnaviduriais rutuliukais pažymėti taškai reiškia, kad šis skaičius įeina į intervalą, o tuščiaviduriu - neįeina į intervalą. Iš skaičių tiesės galima matyti rezultatą - tai tas plotas, kur skaičių tiesė pažymėta raudonai arba mėlynai (arba abiem spalvomis).

3.3.2 Sankirta

Dviejų aibių, A ir B, sankirta žymima $A \cap B$. Aibių sankirta yra aibė sudaryta iš elementų, kurie yra **bendri** aibei A ir aibei B.

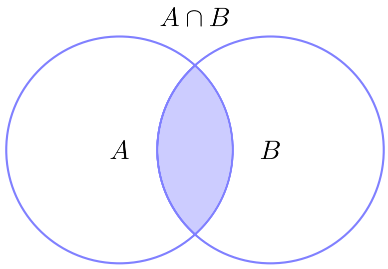
Pavyzdžiui, turime vėl tas pačias aibes $A = \{1; 2; 3\}$ ir $B = \{3; 4; 5\}$, tada $A \cap B = \{3\}$. Kadangi aibė A ir B bendrą elementą 3.

Šių aibių sąryšį galima atvaizduoti ir Veno diagramomis (5 pav.).

Diagromeje matome akivaizdų bendrą plotą - sankirtą. Šis pažymėtas plotas vaizduoja $A \cap B$.

Sankirta galima ir intervalams. Turime turime aibes $C = [-3; 2)$ ir $D = (1; 5]$. Apie šiuos intervalus plačiau galite paskaityti skyriuje apie sąjunga. Ieškant sankirtos, ieškosime, kuriose vietose intervalai turi tuos pačius elementus.

Mažiausias skaičius, kuris yra abiejuose intervaluose - **šiek tiek daugiau nei** 1. Šis skaičius (1) priklauso aibei C, nes $1 \in [-3; 2)$, bet nepriklauso aibei D, nes prie intervalo nurodytas „(“ skliaustelis. Todėl ir bendras mažiausias skaičius yra **šiek tiek daugiau nei** $1 (1.00 \ldots 1)$.



5 pav.: aibių sankirta

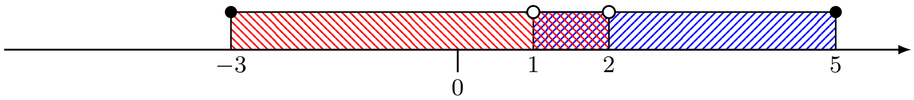
Didžiausias skaičius priklausantis abiems intervalams yra **šiek tiek mažiau nei** $2 (1.99\ldots)$. Nors ir 2 priklauso aibei D, bet nepriklauso aibe C, nes 2 neįtrauktas į intervalą - „)“ prie skaičiaus.

Tokiu atveju mūsų aibių sankirta galima užrašyti:

$$C \cap D = \text{skliaustas mažiausas bendras elementas; didžiausias bendras elementas skliaustas}$$

$$C \cap D = (1; 2)$$

Mūsų sankirta taip pat galime pamatyti, atvaizduojant intervalus skaičių tiesėje:



6 pav.: C ir D aibių sankirta

Skaičių tiesėje aibių sankirta yra ta vieta, kur intervalai persikloja. Šiuo atveju ten kur raudona ir mėlyna spalvos kartu - nuo 1 (neįskaitant) iki 2 (neįskaitant).

Bendru atveju, jeigu intervalai neturi sankirtos, tai tokia aibė yra tuščia ir žymima $\{\}$ (aibė be nurodytų elementų) arba $\varnothing$.

3.3.3 Skirtumas

Dviejų aibių, A ir B, sankirta žymima $A \setminus B$. Šių aibių sankirta yra aibė sudaryta iš elementų, kurie priklauso A, bet nepriklauso B. Iki šiol aprašytos operacijos (sąjunga ir sankirta) yra simetriškos operacijos. Tai reiškia, kad apsukus narius (operandus) niekas nepasikeis.

Pavyzdžiui, turime vėl tas pačias aibes $A = \{1; 2; 3\}$ ir $B = \{3; 4; 5\}$, tada $A \cap B = \{3\}$, o $B \cap A = \{3\}$, tai reiškia, kad $A \cap B = B \cap A$.

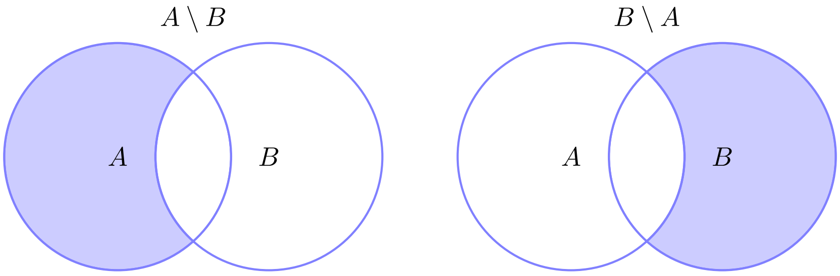
Taip pat ir su sąjunga: $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B \cup A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, tai reiškia, kad $A \cup B = B \cup A$.

Nagrinėjamu atveju, aibės A ir aibės B skirtumas yra lygus $\{1; 2\}$. Šią aibę sudaro visi elementai iš aibės A, išskyrus tuos, kurie yra ir aibėje B. Šiuo atveju aibė A ir aibėjė B turi bendrą elementą 3, kurio ir neįrašome rezultate.

Dabar apkeisime vietomis narius ir pažiūrėsime, kam lygus aibės B ir A skirtumas. Tokią aibę sudarys visi aibės B elementai, išskyrus bendrus elementus su aibe A. Vėl aibė A ir aibėjė B turi bendrą elementą 3, todėl jo neįtrauksime rezultatą. Tai $B \setminus A = \{4; 5\}$

Aibių skirtumas nėra simetriška operacija, $A \setminus B \neq B \setminus A$, todėl svarbu kokia tvarka rašomos aibės.

Šių aibių sąryšį galima atvaizduoti ir Veno diagramomis (7 pav.), mėlyni plotai žymi aibių skirtumus.



(a) aibių A ir B sankirta

(b) aibių B ir A sankirta

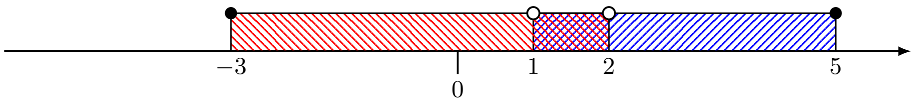
7 pav.: Aibių sankirta

Aibių skirtumas galimas ir intervalams. Turime turime aibes $C = [-3; 2)$ ir $D = (1; 5]$. Apie šiuos intervalus plačiau galite paskaityti skyriuje apie sąjunga. Ieškant skirtumo, ieškosime, intervalo (-ų), kurių skaičiai priklauso pirmai aibei, bet nepriklauso antrąjai.

Ieškosime $C \setminus D$. Pirmiausia suraskime, kurie skaičiai yra intervale C, bet nėra intevale D. Tokie skaičiai yra nuo -3 (įskaitant, dėl skliaustelio prie skaičiaus) iki 1 (įskaitant, nes šis skaičius nepriklauso aibei D, dėl skliaustelio, bet priklauso aibei C). Todėl galime užrašyti, kad aibių skirtumas $C \setminus D = [-3; 1]$.

Apkeiskime vietomis narius ir ieškokime $D \setminus C$. Pirmiausia suraskime, kurie skaičiai yra intervale D, bet nėra intevale C. Tokie skaičiai yra nuo 2, įskaitant. Skaičiai nuo 1 (1,1; 1,2; 1,5, 1,99 ir t.t.) priklauso aibei C ir aibei D. Todėl ir skirtumo intervalas, šiuo atveju, prasideda nuo 2, įskaitant. Galinis intervalo skaičius yra 5, įskaitant. Tai $D \setminus C = [2; 5]$

Skirtumus taip pat galime pamatyti, atvaizduojant intervalus skaičių tiesėje (8 pav.):



8 pav.: C ir D intervalai

Intervalas C pažymėtas raudonai, intervalas D pažymėtas mėlynai. $C \setminus D$ yra skaičiai priklausantys aibei C, bet nepriklausantys aibei D, tai skaičių tiesėje šita vieta yra pažymėta tik raudona spalva (mėlyna ir persiklojusios raudona ir mėlyna netinka).

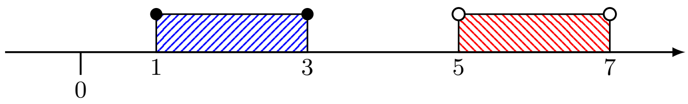
$D \setminus C$ yra skaičiai priklausantys aibei D, bet nepriklausantys aibei C, tai skaičių tiesėje šita vieta yra pažymėta tik mėlyna spalva (raudona ir persiklojusios raudona ir mėlyna netinka).

Bendru atveju, jeigu intervalai neturi skirtumo, tai tokia aibė yra tuščia ir žymima $\{\}$ (aibė be nurodytų elementų) arba $\varnothing$.

Paanalizuokime kitą situaciją, kai intervalai nepersikloja (skaičių tiesėje nėra plotų su abiem spalvomis arba nėra brukšnelių iš apačios ir viršaus). Turime aibes $F = [1; 3]$ ir $E = (5; 7)$. Pavaizduokime šias aibes skaičių tiesėje (9 pav.):

$F \setminus E$ yra aibės F visu elementai, išskyrus bendrus elementus su aibe E. Tarp aibių bendrų elementų nėra, nes skaičių tiesėje nematome persiklojusių plotų. Tai todėl

$$F \setminus E = F = [1; 3];$$

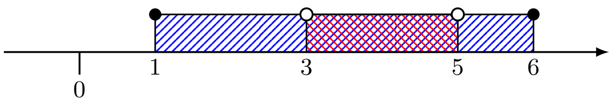


9 pav.: F ir E intervalai

Apkeitus narius vietomis - situacija ta pati, todėl

$$E \setminus F = E = (5; 7);$$

Paanalizuokime dar vieną išskirtinę situaciją, kai vienas intervalas yra viduje kito - viena aibė yra kitos aibės poaibis. Turime aibes $G = [1; 6]$ ir $H = (3; 5)$. Čia aibė H yra aibės G poaibis. Kad surastumėme aibių skirtumą $G \setminus H$, reikia visų skaičių iš G, bet ne iš H. Atvaizdavus intervalus skaičių tiesėje (10 pav.), matome, kad vienas intervalas yra „po“ kitu intervalu.



10 pav.: G ir H intervalai

Tokiu atveju skaičiai, kurie priklauso **tik** aibei G yra nuo 1, įskaitant, iki 3 (įskaitant, nes priklauso tik aibei G, bet nepriklauso H, nes „(“ skliaustelis). Bet matome, kad yra dar viena sritis dešinėje, kuri irgi priklauso tik aibei G. Tai dar turime sujungti kitą skaičių intervalą, kuris yra nuo 5, įskaitant (ta pati situacija, kaip ir su 3), iki 6, įskaitant. Tai šį skirtumą galima užrašyti taip

$$G \setminus H = [1; 3] \cup [5; 6];$$

Patikrinkime, kas gausis apsukus narius - $H \setminus G$. Turime parašyti intervalą (-us), kurie priklauso tik aibei H, bet nepriklauso G. Pasižiūrėjus į skaičių tiesę (10 pav.), matome, kad tokių sričių nėra. Tai aibių skirtumą galime užrašyti:

$$H \setminus G = \varnothing = \{\}$$

Bendru atveju, Kai viena aibė yra kitos aibės poaibis, aibių skirtumas paprastai gaunamas didesnės aibės intervalas (arba nesujungti intervalai), į kurį neįeina mažesnė aibė. Tikslūs intervalai priklausys nuo konkrečių susijusių aibių galinių taškų ir nuo to, ar jie įtraukti, ar neįtraukti.

Taip pat, kai viena aibė yra kitos aibės poaibis, aibių skirtumas tarp mažesnės ir didesnės aibės visada bus tuščia aibė, nes mažesnėje aibėje nėra elementų, kurių nebūtų ir didesnėje aibėje.

3.3.4 Poaibiai

Poaibis yra sąvoka apibūdinti tam tikrą santykį tarp aibių.

Pastebėjimas: mokyklos kurse mokomosi poaibių, bet yra naudojamas tikrinio poaibio ženklas (vietoje $\subset$, turėtų būti naudojamas $\subseteq$), nors apibrėžimas yra (paprasto) poaibio.

Apibrėžimas - kai aibė E yra sudaryta iš aibės kurių nors aibės A elementū, vadinama aibės A poaibiu. Rašoma, kad $E \subset A$.

Dar galima ir kitaip apibrėžti poaibį: aibė A yra aibės B poaibis, jei kiekvienas A elementas yra ir B elementas.

Pagrindiniai poaibų aspektai:

- Kiekviena aibė yra poaibis sau pačiai. ($A \subset A$, $B \subset B$ ir t.t.);

- Tuščia aibė yra kiekvienos aibės poaibis. ($\varnothing \subset A$, $\varnothing \subset B$ ir t.t.);

Pasižiūrėkime, kaip sudaromi poaibiai turimos aibės. Tarkime, turime aibę $A = \{15; 20; 60\}$. Tai šios aibės visi galimi poaibiai:

1. A arba $\{15; 20; 60\}$ (žiūrėti pagrindinius aspektus aukščiau);

2. $\varnothing$ (žiūrėti pagrindinius aspektus aukščiau);

3. $\{15\}$ (tik pirmas aibės elementas);

4. $\{20\}$ (tik antras aibės elementas);

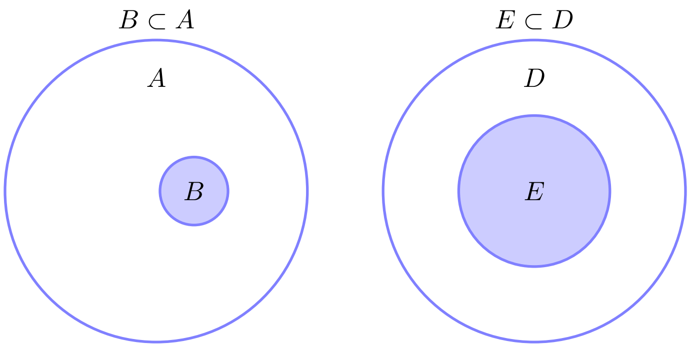
5. $\{60\}$ (tik antras aibės elementas);

6. $\{15; 20\}$ (pirmas ir antras aibės elementai);

7. $\{20; 60\}$ (antras ir trečias aibės elementai);

8. $\{15; 60\}$ (pirmas ir trečias aibės elementai);

Taip pat aibę galima atvaizduoti ir veno diagramomis (11 pav.):



(a) aibės A poaibis B (b) aibės D poaibis E

11 pav.: Aibių ir poaibiai

Poabiai galimi, kai aibės nurodytos intervalais. Tarkime turime aibe $Z = [-500; 2023)$. Tokia aibė turi begalę poaibių, nes pati aibė yra begalinė. Sudarykime keleta šios aibės poaibių:

1. pati aibė (žiūrėti pagrindinius aspektus aukščiau)

   $Z \subset Z$ arba $[-500; 2023) \subset Z$;

2. tuščia aibė (žiūrėti pagrindinius aspektus aukščiau)

   $\varnothing \subset Z$ arba $\{\} \subset Z$;

3. Aibė su vienu elementu, kuris priklauso intervalui

   $\{1998\} \subset Z$;

4. Aibė su su dviem elementais, kurie priklauso intervalui

   $\{1009; 1410\} \subset Z$;

5. Aibė su su trimis elementais, kurie priklauso intervalui

   $\{3; 11; 1990\} \subset Z$;

6. Aibė su *n* elementų, kurie priklauso intervalui;

7. Kitas intervalas, kuris yra aibės intervalo ribose

   $[0; 2023] \subset Z$;

8. Aibių sąjunga, kurių nariai yra aibės intervalo ribose

   $[0; 1010) \cup (1010; 1990] \subset Z$;

9. ir taip iki begalybės…

3.4 Lygtys, nelygybės ir skaičių aibės

Sprendžiant matematikos užduotis mokykloje aibių tema, dažnai galime sutikti prašant išskirti specifinę sprendinių aibę. Pavyzdžiui:

- „Raskite lygties sveikųjų sprendinių aibę“;
- „Raskite lygties natūraliųjų sprendinių aibę“;
- „Raskite nelygybės natūraliuosius sprendinius“;
- „Raskite nelygybės neigiamus sveikuosius sprendinius“;
- ir t.t.

Tokiems uždaviniams išspręsti reikalingas supratimas apie **lygtis**, **nelygybes**, **skaičių aibes**.

3.5 Pavyzdys #1

Turime užduotį: raskite $x^2 = 16$ lygties natūraliuosius sprendinius. Tokio tipo lygčių sprendimą galite rasti 1.3 skyriuje. Tokios lygties sprendiniai yra

$$x = \{-4; 4\};$$

Užduotis prašom natūraliųjų sprendinių, o -4 nėra natūralusis ($-4 \notin \mathbb{N}$), tai atsakymas:

Ats.:$\{4\}$;

3.6 Pavyzdys #2

Turime užduotį: raskite $-5 \leq 2x + 3$ nelygybės **neigiamus** sveikuosius sprendinius. Tokio tipo lygčių sprendimą galite rasti 2.3 skyriuje. Išsprendus gauname, kad

$$x \geq -4$$

arba

$$x = [-4; +\infty)$$

Į pradinę nelygybę įdėjus skaičius (pagal gautą rezultatą) -4; -3; -2,5; 0; 10,1; 100 ir t.t. (bet kokius skaičius didesnius arba lygius -4), gauname, kad gautas nelygybės rezultatas geras. Pagal užduotį šis atsakymas netinkamas, nes prašoma neigiamų sveikųjų skaičių. Pagal intervalą, galime lengvai išrašyti neigiamus sveikuosius skaičius: -4 (nes laužtinis skliaustas); -3; -2; -1. Tai atsakymas yra

$$\text{Ats.:}\{-4; -3; -2; -1\};$$

Sprendžiant tokį užduotį svarbu atsakyme neparašyti intervalo nuo -4, įskaitant, iki 0, neįskaitant: $[-4; 0)$. Kadangi skaičiai į tokį intervalą įeina ir skaičiai $-3, 6; 2, 55; -\sqrt{2}$ ir t.t., kurie nėra sveikieji.

Įmanoma atsakymą pateikti ir kitaip. Žinant aibių aprašymo taisykles, galima užrašyti ir jomis:

$$\{x \in \mathbb{Z}, -4 \leq x < 0\}; \tag{1}$$

arba

$$\{x \in \mathbb{Z}, -4 \leq x < \infty, x < 0\}; \tag{2}$$

Toks užrašymas (1 formulė) reiškia, kad aibė sudaryta iš x, kurie priklauso sveikųjų skaičių aibei ir yra tarp -4, įskaitant, ir 0, neįskaitant. Antru aveju (2 formulė), reiškia, kad aibė sudaryta iš elementų x, kurie priklauso sveikųjų skaičių aibei, yra didesni arba lygūs -4 ir neigiami. Tokį užrašymą, pagal matematikos programą, žinoti reiktų.

4 Iracionalumo pašalinimas vardiklyje

Pagal atnaujintas matematikos programas, jums reikia žinoiti, kaip trupmenos vardiklyje panaikinti iracionalumą, kai vardiklyje yra iracionalieji skaičiai: $\sqrt{a}$, $\sqrt{a} + b$, $\sqrt{a} - b$.

4.1 Paprastas atvejis: šaknis vardiklyje

Literatūra