Лабораторная работа №2

Карнаушко В. А. БПМ-19-2

20 ноября 2021 г.

Содержание

1 Моделирование механической системы масса-пружина

1.1 Дано

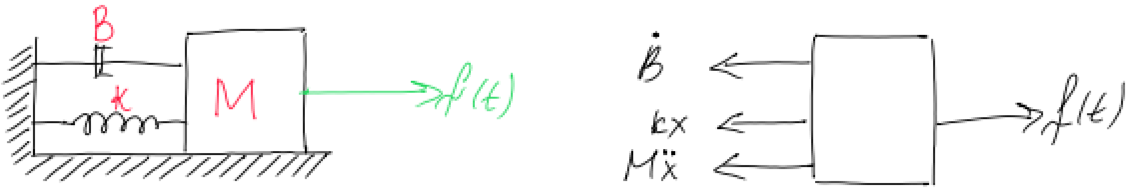

Рис. 1: Механическая система масса-пружина

Применяя второй закон Ньютона, получаем следующее уравнение движения:

$$Mx''(t) + Bx'(t) + kx(t) = f(t)$$

где M - масса бруска, B - коэффициент демпфирования, k - жесткость пружины, f(t) - внешняя сила, x(t) - перемещение массы

1.2 Преобразование Лапласа с нулевыми начальными условиями

$$Mx''(t) + Bx'(t) + kx(t) = f(t)$$
$$p^2Mx(t) + pBx(t) + kx(t) = f(t)$$
$$x(t)(p^2M + pB + k) = f(t)$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = W(p)|_{p=s} = \frac{1}{s^2M + sB + k}$$

1.3 Переход во вход - состояние - выход

$$Mx''(t) + Bx'(t) + kx(t) = f(t) <=> x''(t) + \frac{B}{M}x' + \frac{k}{M}x = \frac{1}{M}f(t)$$

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} \frac{-B}{M} & 1 \\ \frac{-k}{M} & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1' = -x_1\dfrac{B}{M} + x_2 \\ x_2' = -x_1\dfrac{k}{M} + u\dfrac{1}{M} \\ y = x_1 \end{cases}$$

1.4 Структурная схема моделирования

$$p^2xM + pxB + xk = f$$

$$x = \frac{1}{p^2}\frac{f}{M} - \frac{1}{p^2}\frac{kx}{M} - \frac{1}{p}\frac{xB}{M}$$

$$x = \frac{1}{p^2}(\frac{f-xk}{M}) - \frac{1}{p}\frac{xB}{M}$$

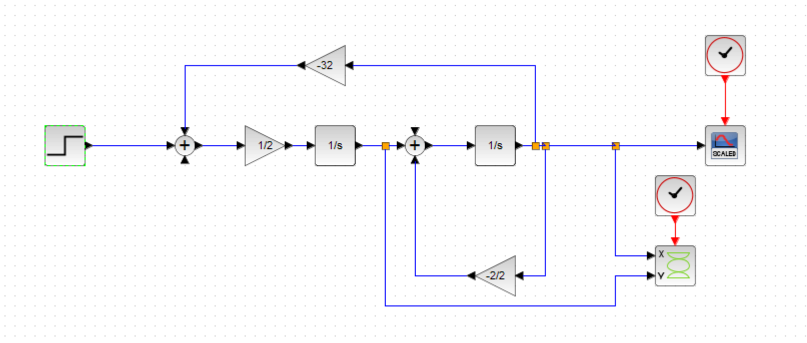

Рис. 2: Структурная схема моделирования системы масса - пружина

При подстановке начальных условий и коэффициента демпфирования B = 2, получаем следующие результаты:

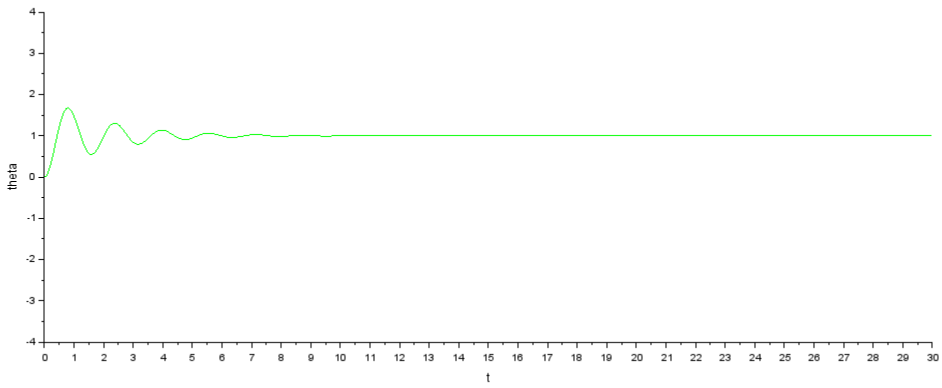

Рис. 3: График зависимости положения груза от времени системы масса - пружина

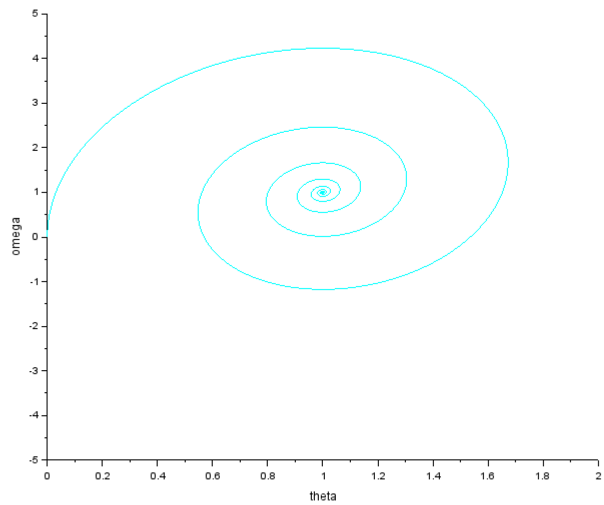

Рис. 4: График зависимости скорости от положения системы масса - пружина

2 Моделирование математического маятника

2.1 Дано

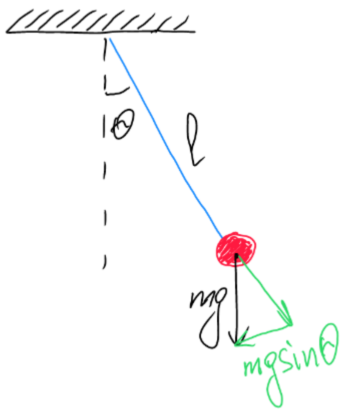

Рис. 5: Механическая система: математический маятник

$$\begin{cases} F_T = -mgsin\theta - Bl\theta' \\ F_T = ml\theta'' \end{cases} \quad => \theta'' + \frac{B}{m}\theta' + \frac{g}{l}sin\theta = 0$$

, где F_T - тангенциальные силы, θ - угол в радианах от положения равновесия, l - длина стержня (м), m - масса (кг), B - коэффициент демпфирования (кг-с/м)

2.2 Переход во вход - состояние - выход

Пусть $x_1' = x_2, x_2' = -\frac{g}{l}sinx_1 - \frac{B}{m}x_2$, тогда система в форме вход-состояние-выход примет вид:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\frac{g}{l}sinx_1 - \frac{B}{m}x_2 \\ y = x_1 \end{cases}$$

2.3 Структурная схема моделирования

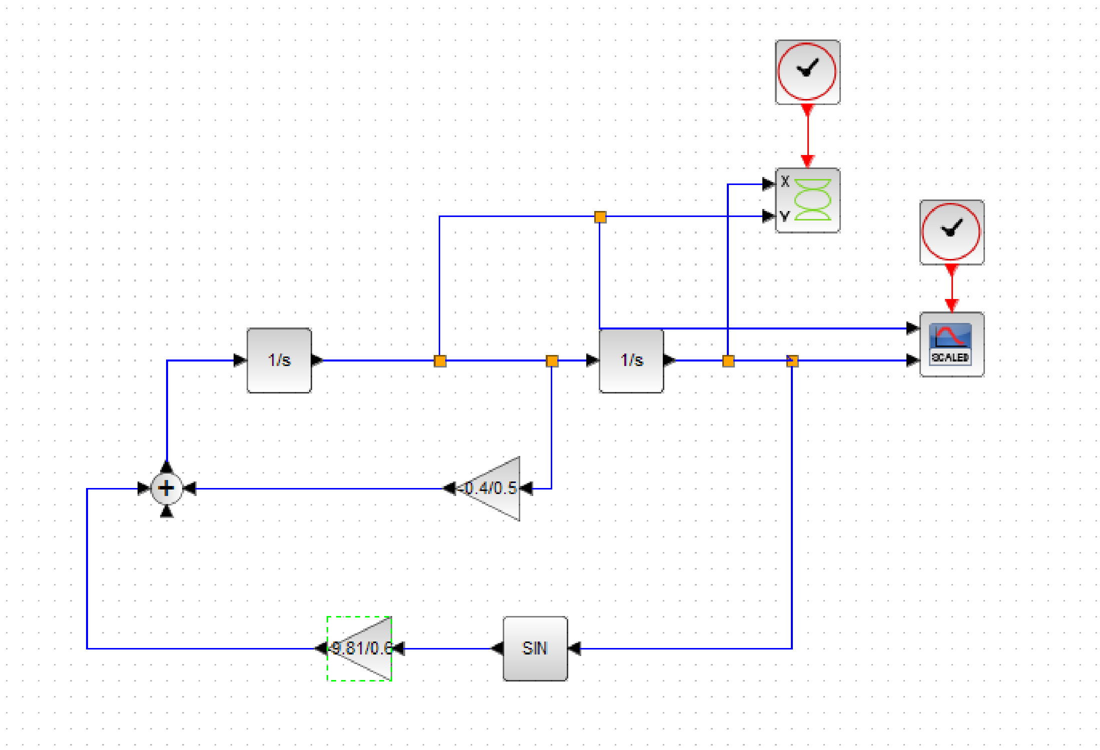

Рис. 6: Структурная схема моделирования системы математический маятник

Моделирование при $B = 0.05$кг-с/м:

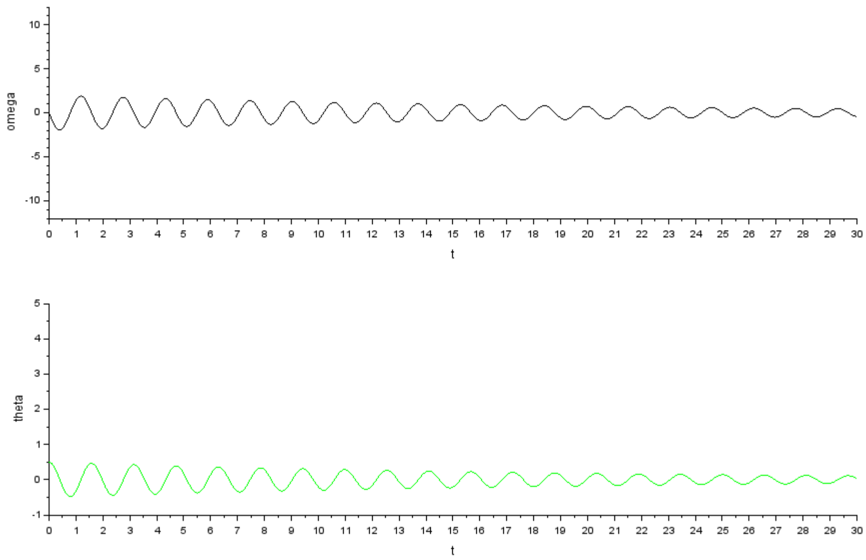

Рис. 7: Графики зависимостей скорости и угла смещения от времени; B = 0.05

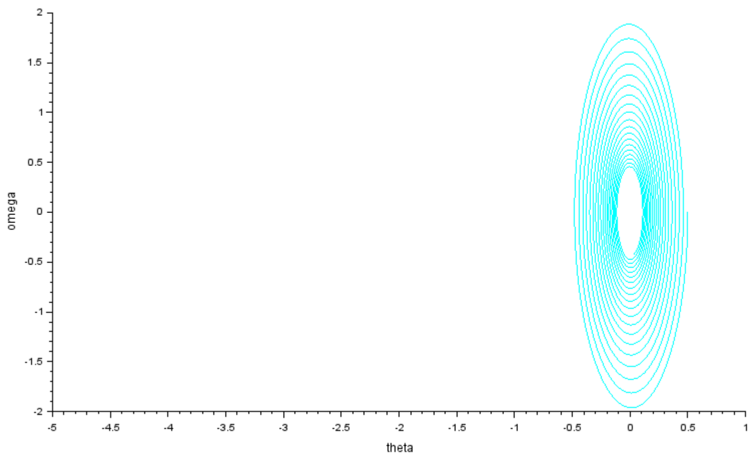

Рис. 8: График зависимости скорости от положения системы; B = 0.05

Моделирование при $B = 0.4$кг-с/м:

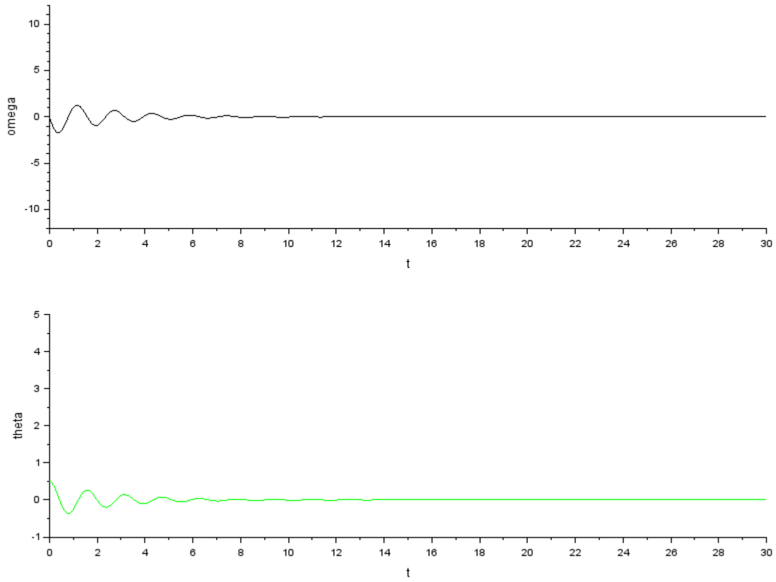

Рис. 9: Графики зависимостей скорости и угла смещения от времени; B = 0.4

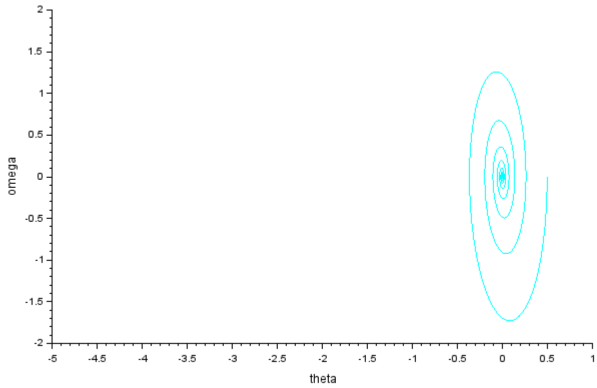

Рис. 10: График зависимости скорости от положения системы; B = 0.4

3 Вывод

Вывод: в ходе работы я выполнил моделирование механических систем «масса-пружина» и «математический маятник».