

# Controladores por Modo Deslizante para a Umidade do Solo Modelado por Equação Diferencial Parcial Parabólica Não-Linear \*

Jose Luis Huayanay Villar \*, José Paulo Vilela Soares da Cunha \*

\* Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica,  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro, (e-mail:  
villar.jose@posgraduacao.uerj.br, jpaolo@ieee.org)

**Abstract:** Sliding mode control (SMC) is applied to regulate the water content in the soil for precision irrigation. The dynamics of the water infiltration into porous media (soil) is modeled by the Richards equation, which is a nonlinear parabolic partial differential equation (PDE). Two control objectives are considered: control of the average moisture and control of the soil water content at a specified depth. SMC strategies are proposed, the use of a controller with proportional and integral actions connected in cascade for the case of non-collocated sensor and actuator is highlighted. Simulation results indicate the excellent performance of these control systems and the rejection of external disturbances such as water evaporation or rain.

**Resumo:** O controle por modo deslizante (SMC) é aplicado para regular o conteúdo da água no solo tendo-se em vista a irrigação de precisão. A dinâmica da infiltração da água em meio poroso (solo) é modelada pela equação de Richards, que é uma equação diferencial parcial (EDP) parabólica não-linear. Dois objetivos de controle são considerados: o controle da umidade média e o controle do conteúdo de água em uma profundidade especificada no solo. Para isto, são propostas estratégias SMC, destacando-se o uso de um controlador com ações proporcional e integral conectado em cascata para o caso de sensor e atuador não colocados. Os resultados de simulações indicam o excelente desempenho desses sistemas de controle e a rejeição de perturbações externas causadas pela evaporação da água ou chuva.

**Keywords:** Sliding mode control; Partial differential equation; Richards equation; Nonlinear dynamics; Cascade control; Non-collocated control; Irrigation control.

**Palavras-chaves:** Controle por modo deslizante; Equação diferencial parcial; Equação de Richards; Dinâmica não-linear; Controle em cascata; Controle não colocado; Controle de irrigação.

## 1. INTRODUÇÃO

Os métodos de irrigação são amplamente utilizados nas diversas culturas na América Latina e no combate à desertificação da terra. Há um exemplo disso na cidade antiga de Machu Picchu — 1450, onde os Incas alcançaram um conhecimento avançado de planejamento hidráulico, drenagem e construção de irrigação durável (Ribeiro, 2013).

A previsão e o controle do movimento da água em solos são problemas importantes em alguns ramos da ciência e da engenharia, tais como hidrologia, mecânica dos solos e agronomia. Esses meios podem ser *saturados*, quando o conteúdo de água é o máximo, ou *não saturados*. Em todos os estudos da zona não saturada, presume-se que o movimento da água obedece a clássica equação de Richards (1931), porquanto neste trabalho são usadas essas *equações diferenciais parciais* (EDPs) *não-lineares* (Hillel, 1998).

Gardner (1922) descobriu que o potencial de Buckingham estava intimamente relacionado à pressão em camadas

de água. Ele também mostrou que um aparato de argila porosa poderia ser usado para a medição exata do *conteúdo de água* ( $\theta$ ) ou fluxo em um meio sólido poroso. Pela mesma razão, Richards (1931) mostrou que se um meio poroso for umedecido por um líquido e se o meio não estiver saturado, então a pressão nos filmes (camadas finas) líquidos é menor do que a pressão atmosférica e depende da quantidade de líquido presente no meio (fenômeno capilar). Além dos problemas citados anteriormente, a *disusividade hidráulica* ( $D$ ) e a *condutividade hidráulica* ( $K$ ) no processo são fatores importantes a serem considerados. Existem métodos epíricos para computar  $K$  e  $D$ , tais como os modelos não-lineares de Van Genuchten (1980) e a generalização de Hayek (2016).

Villar et al. (2020) utilizaram simples temporizadores e comutadores para comandar um sistema de irrigação hidropônico e de solo, o que é uma estratégia usual. Apesar da simplicidade desses sistemas, as irregularidades da aplicação, a variabilidade espacial das propriedades do solo e as condições climáticas fazem com que o armazenamento de água no solo apresente grandes variações no espaço. Isso motiva a abordagem do problema de síntese de controlado-

\* Este trabalho foi parcialmente financiado pela FAPERJ e CAPES  
— Código de Financiamento 001.

res para EDPs (Krstic and Smyshlyaev, 2008; Coron, 2007) com base em modelos não-lineares que descrevem realistamente o comportamento dinâmico da água no solo a ser controlado. Por outro lado, o controle a estrutura variável (*variable structure control* — VSC) ou controle por modo deslizante (*sliding mode control* — SMC) (Utkin, 1978), que pode ser aplicado a EDPs (Wadoo, 2012; Molina and Cunha, 2019), assegura desempenho superior para rejeitar os efeitos de incertezas e perturbações, além de garantir propriedades de convergência e estabilidade. Molina and Cunha (2019) desenvolveram o SMC para um modelo de Richards linear. Este artigo apresenta uma abordagem sistemática para desenvolver o controle automático da umidade no solo seguindo-se as etapas:

- Primeiramente, o movimento da água no solo é modelado pela EDP de Richards na Seção 2, destacando-se a sua dinâmica não-linear e a nova condição de contorno na superfície, onde a água é aspergida.
- Em seguida, o SMC para regular o conteúdo médio da água numa camada superficial de solo é analisado na Seção 3 para a equação de Richards não-linear.
- Para tratar o controle em que o sensor e o atuador são não-colocados, ou seja, onde o sensor de umidade é enterrado longe da superfície na qual a água é aspergida, propõe-se na Seção 4 um controlador com ações proporcional e integral (PI) conectado em cascata com o SMC para a umidade média, a fim de se obter o bom desempenho da irrigação automática.

## 2. INFILTRAÇÃO DA ÁGUA NO SOLO

Esta seção apresenta o modelo dinâmico da propagação da água no solo fundamentado em EDPs. Esta dinâmica é não-linear em consequência da dependência da condutividade  $K(\Psi)$  e difusividade  $D(\Psi)$  hidráulicas com respeito à coluna de água do potencial mátrico  $\Psi$ . A *lei de Darcy* pode ser expressa pela equação (Richards, 1931, eq. (9)):

$$q = -K(\Psi)\nabla\Phi, \quad (1)$$

na qual  $q$  é o fluxo instantâneo (m/s) ou densidade de fluxo de água nas direções dos eixos  $x$ ,  $y$  (eixos horizontais) e  $z$  (eixo vertical orientado para baixo a partir da superfície do solo),  $-\nabla\Phi$  é o campo total que produz o movimento da água e

$$\nabla := \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k, \quad (2)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\nabla \cdot q, \quad (3)$$

na qual  $\theta \in [0, 1]$  é o conteúdo de umidade no solo ( $m^3/m^3$ ),  $\partial\theta/\partial t$  é a sua taxa de variação em relação ao tempo e  $\nabla \cdot q$  é o divergente do movimento da água. A partir das equações (1) a (3) obtém-se equação de Richards:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ K(\Psi(\theta)) \frac{\partial\Psi(\theta)}{\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ K(\Psi(\theta)) \frac{\partial\Psi(\theta)}{\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial y} \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\Psi(\theta)) \left( \frac{\partial\Psi(\theta)}{\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} - 1 \right) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

Uma vez que a difusividade hidráulica do conteúdo de água pode ser representada na forma

$$D(\theta) = K(\Psi(\theta)) \frac{\partial\Psi(\theta)}{\partial\theta}, \quad (5)$$

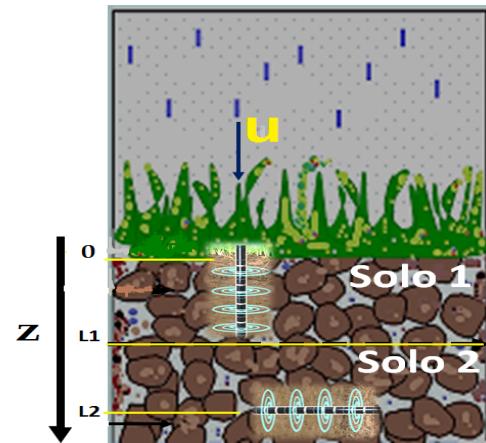


Figura 1. Corte vertical do solo e localizações dos sensores de umidade.

a nova equação de Richards que depende apenas da umidade (Hillel, 1998) e (Tarquino, 2018, eq. (2.1)) resulta

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ D \frac{\partial\theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ D \frac{\partial\theta}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ D \frac{\partial\theta}{\partial z} - K \right], \quad (6)$$

que pode ser expressa como

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \nabla \cdot [D(\theta) \nabla\theta] - \frac{dK(\theta)}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z}. \quad (7)$$

O modelo deste sistema de irrigação pode ser reduzido a uma EDP unidimensional com fluxo de água vertical unidimensional num *solo semi-infinito* ( $z \in \mathbb{R}^+$ ). Para isto, assume-se que a água seja aspergida uniformemente sobre a superfície plana do solo, por conseguinte (7) poderá ser restrita ao espaço unidimensional vertical (Molina and Cunha, 2019),

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ D(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial z} \right] - \frac{dK(\theta)}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z}, \quad (8)$$

que resulta

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = D(\theta) \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} + \left[ \frac{\partial D(\theta)}{\partial z} - \frac{dK(\theta)}{d\theta} \right] \frac{\partial\theta}{\partial z}. \quad (9)$$

Esta pode ser também representada com outra nomenclatura mais compacta para seu uso mais adiante, destacando-se o seu comportamento não-linear:

$$\theta_t = D(\theta)\theta_{zz} + [D_z(\theta) - K'(\theta)]\theta_z. \quad (10)$$

A Figura 1 ilustra a chuva ou irrigação por aspersão que umedecem o solo uniformemente. Essa figura também exibe dois sensores usados para o controle automático da umidade: o superior mede a umidade média do solo entre a superfície  $z = 0$  m e a profundidade  $L_1 \in \mathbb{R}^+$ , o outro mede a umidade na profundidade  $L_2 \in \mathbb{R}^+$ .

### 2.1 Difusividade e Condutividade Hidráulica

Os modelos para a difusividade e condutividade hidráulica são aqui descritos como funções do conteúdo de água adimensional dado por (Van Genuchten, 1980, eqs. (2–3)), (Hayek, 2016, eq. (5)):

$$\Theta := \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left[ \frac{1}{1 + (\alpha h)^p} \right]^m, \quad (11)$$

no qual  $\theta_r \in \mathbb{R}^+$  é a umidade residual ( $m^3/m^3$ ),  $\theta_s \in \mathbb{R}^+$  é a umidade de saturação ( $m^3/m^3$ ),  $p \in \mathbb{R}^+$  é um parâmetro

que depende do meio,  $m \in \mathbb{R}^+$  descreve a retenção de água no solo e  $h \in \mathbb{R}$  é a cabeça de água. Deve-se notar que  $0 \leq \theta_r \leq \theta \leq \theta_s < 1$ . Por outro lado,  $\theta$  pode ser expresso em função de  $\Theta$  como

$$\theta = \Theta(\theta_s - \theta_r) + \theta_r. \quad (12)$$

Para reduzir a complexidade e facilitar a simulação, pode-se usar a condutividade e a difusividade hidráulica do solo calculadas por (Hayek, 2016, eq. (11)):

$$K(\Theta) = \frac{K_s}{\theta_s - \theta_r} \Theta^n, \quad D(\Theta) = \frac{nK_s}{a(\theta_s - \theta_r)} \Theta^{n-1}, \quad (13)$$

válidas para  $\Theta \in (0, 1]$ , nas quais  $a \in \mathbb{R}^+$  é o grau de saturação,  $n \in \mathbb{R}^+$  é um parâmetro relacionado ao tamanho dos poros e  $K_s$  é a condutividade hidráulica saturada (m/s).

Recomenda-se usar os experimentos de (Mualem, 1978) e (Hayek, 2016) para validação. Mualem (1978) usou dados experimentais de 50 solos, para os quais descobriu que  $n$  varia entre 2,5 e 24, tanto para *solos granulares* (areia ou cascalho), quanto para *solos de textura fina* (lodo e argila).

Hayek (2016) desenvolveu uma solução exata para a equação de Richards unidimensional (8), que é válida para qualquer  $n > 1$  e é uma ferramenta eficiente para a predição da difusividade e condutividade hidráulica dos solos.

## 2.2 Condições de Contorno para a Irrigação

Uma vez que é usado um modelo de solo semi-infinito, é necessário estabelecer as condições de contorno em sua superfície de interface com a atmosfera (Assouline, 2013).

Para o caso do fluxo em solos não saturados, considera-se (Richards, 1931, eq. (12)):

$$q(z, t) = -K(\theta(z, t)) \nabla [\Psi(\theta(z, t)) + \phi(z)], \quad \phi(z) = gz, \quad (14)$$

na qual a força da gravidade  $F = -\nabla \phi = -g$  é representada pelo gradiente negativo do potencial  $\phi$ ,  $z \in \mathbb{R}^+$  é a profundidade de interesse e  $g$  é a aceleração da gravidade.

O controle da umidade do solo é feito pela aspersão de água em sua superfície, dado pelo fluxo  $u \in \mathbb{R}^+$ . Nesta também há perturbações ambientais, tais como chuva e evaporação de água, que resultam no fluxo  $d_0 \in \mathbb{R}$ . A resultante desses fluxos de umidade é a *densidade de fluxo de água na superfície do solo* (m/s):

$$q(0, t) = u(t) + d_0(t). \quad (15)$$

Neste caso a partir de (14) (Hayek, 2016) obtém-se a condição de contorno tipo Neumann na superfície do solo, que pode ser escrita como

$$K(\theta(0, t)) - D(\theta(0, t)) \left. \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = q(0, t). \quad (16)$$

## 2.3 Simulação da Infiltração da Água no Solo

A Figura 2 apresenta simulações da equação de Richards para ilustrar seu comportamento dinâmico não-linear. Foram utilizados os parâmetros de um solo real na Tabela 1.

A profundidade total do solo é 1 m. Nessa profundidade foi imposta a condição de contorno Dirichlet para o conteúdo

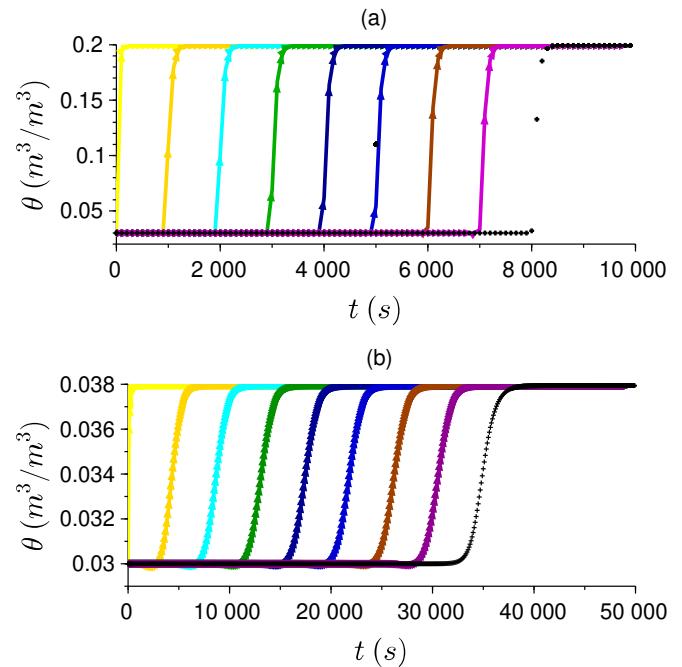


Figura 2. Simulações das evoluções dos conteúdos de água em diversas profundidades do solo para os seguintes fluxos de água na superfície: (a)  $q(0, t) \equiv 3 \times 10^{-5} \text{ m/s}$  e (b)  $q(0, t) \equiv 3 \times 10^{-7} \text{ m/s}$ . Cada traço colorido representa o conteúdo de água numa profundidade, afastadas entre si de 0,1 m.

Tabela 1. Propriedades físicas do solo do tipo areia usado nas simulações (Hayek, 2016).

| $\theta_s (\text{m}^3/\text{m}^3)$ | $\theta_r (\text{m}^3/\text{m}^3)$ | $K_s (\text{m/s})$ | $\alpha (\text{m}^{-1})$ | $n$       |
|------------------------------------|------------------------------------|--------------------|--------------------------|-----------|
| 0,417                              | 0,02                               | 0,0000583          | 13,8                     | 1,5 a 2,5 |

da água  $\theta(1, t) = 0,03 \text{ m}^3/\text{m}^3, \forall t \geq 0 \text{ s}$ , que é igual à condição inicial  $\theta(z, 0) = 0,03 \text{ m}^3/\text{m}^3, \forall z \in (0, 1) \text{ m}$ .

Foram realizadas duas simulações com condições de contorno tipo Neumann (16) e vazões de água distintas na superfície do solo:  $q(0, t) \equiv 3 \times 10^{-5} \text{ m/s}$  na Figura 2.a e  $q(0, t) \equiv 3 \times 10^{-7} \text{ m/s}$  na Figura 2.b. Observa-se que a água demora se propagar aproximadamente  $1 \times 10^3 \text{ s}$  na Figura 2.a e  $3 \times 10^3 \text{ s}$  na Figura 2.b entre cada camada. Isso indica que a propagação depende da vazão de água devido às não-linearidades dos coeficientes (13) da equação de Richards. Nota-se ainda que o atraso dessa infiltração é reduzido e o valor da umidade em regime permanente é aumentado quando a vazão de água é maior, o que parece coerente com o comportamento físico esperado.

Nas simulações deste artigo usou-se o *tamanho do poro distribuído no solo*  $n = 2$  para areia. Por conseguinte  $D(\Theta) = 2,1 \times 10^{-5} \Theta \text{ m}^2/\text{s}$  e  $K(\Theta) = 1,4 \times 10^{-4} \Theta^2 \text{ m/s}$ , que são obtidos de (13) com os parâmetros na Tabela 1.

## 3. CONTROLE POR MODO DESLIZANTE DA UMIDADE MÉDIA

Nesta seção, o objetivo é controlar a umidade média do solo  $\bar{\theta}$  na faixa de profundidade  $z \in [0, L_1]$ , próxima da superfície como na Figura 1. Para realizar o controle em malha fechada, o sensor deverá medir a umidade média

$$\bar{\theta}(t) = \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} \theta(z, t) dz. \quad (17)$$

Para regulá-la, define-se a superfície de deslizamento  $\sigma(t)=0$  estabelecida pelo sinal de erro

$$\sigma(t) = \bar{\theta}_{ref}(t) - \bar{\theta}(t), \quad (18)$$

no qual  $\bar{\theta}_{ref}$  é a umidade média desejada.

O controlador deve atuar no sistema descrito pela EDP não linear (10), com a condição de contorno (16) por meio do sinal de controle em (15). Tal qual (Molina and Cunha, 2019), escolheu-se a lei de controle por estrutura variável

$$u(t) = \begin{cases} u^+(t), & \text{se } \sigma > 0, \\ u^-(t), & \text{se } \sigma < 0, \end{cases} \quad (19)$$

na qual

$$u^+(t) = \bar{d}(t) + \delta \quad (20)$$

é um sinal de modulação do controle, possivelmente extremo tal como a *aspersão de água ligada* (Edwards et al., 2006),

$$u^-(t) = \underline{d}(t) - \delta \quad (21)$$

é outro sinal de modulação do controle, possivelmente extremo tal como a *aspersão de água desligada*, e  $\delta > 0$  é uma constante arbitrária. O limite superior  $\bar{d}(t) \in \mathbb{R}$  e o limite inferior  $\underline{d}(t) \in \mathbb{R}$  são sinais contínuos por partes conhecidos que satisfazem a desigualdade (Molina and Cunha, 2019, eq. (16)):

$$\underline{d}(t) \leq d(t) \leq \bar{d}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (22)$$

na qual  $d(t) \in \mathbb{R}$  é o sinal de perturbação a ser rejeitado pelo controlador, vide (31).

O Teorema 1 enuncia a existência do modo deslizante na superfície  $\sigma = 0$  e garante que a umidade média  $\bar{\theta}$  convergirá em tempo finito para a referência  $\bar{\theta}_{ref}$ , conforme desejado. Este estende (Molina and Cunha, 2019, Teorema 1), válido para uma EDP linear, para o controle da equação de Richards não-linear e também corrige condições de contorno equivocadas, que não consideraram a condutividade  $K(\theta(0, t))$  em (16) e  $K(\theta(L_1, t))$  em (28).

**Teorema 1.** Considere a EDP não-linear (10), a condição de contorno (15)–(16), a lei de controle (19)–(21), a umidade média (17) e o sinal  $\sigma(t)$  dado pela equação (18). Se a perturbação verificar a desigualdade (22), então a superfície de deslizamento  $\sigma = 0$  será alcançada em tempo finito.

**Prova.** Substituindo-se a umidade média (17) no sinal (18), pode-se obter a derivada temporal de  $\sigma(t)$ :

$$\dot{\sigma}(t) = \dot{\bar{\theta}}_{ref}(t) - \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} \theta_t(z, t) dz, \quad (23)$$

Usando  $\theta_t(z, t)$  da EDP (10) na equação (23), então esta pode ser reescrita como

$$\dot{\sigma}(t) = \dot{\bar{\theta}}_{ref}(t) - \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} \left[ D(\theta(z, t))\theta_{zz}(z, t) + (D_z(\theta(z, t)) - K'(\theta(z, t))\theta_z(z, t)) \right] dz. \quad (24)$$

Aplicando-se a integração por partes para EDPs (Krstic and Smyshlyayev, 2008), resulta

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t) &= \dot{\bar{\theta}}_{ref}(t) \\ &- \frac{1}{L_1} \left[ D(\theta(z, t))\theta_z(z, t) \Big|_0^{L_1} - \int_0^{L_1} D_z(\theta(z, t))\theta_z(z, t) dz \right] \\ &- \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} D_z(\theta(z, t))\theta_z(z, t) dz \\ &+ \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} K_z(\theta(z, t)) dz, \end{aligned} \quad (25)$$

na qual usou-se a propriedade (Hillel, 1998, eq. (8.24d)):

$$K'(\theta(z, t))\theta_z(z, t) = K_z(\theta(z, t)) = \frac{\partial K(\theta(z, t))}{\partial z}. \quad (26)$$

Resolvendo-se as integrais na equação (25), pode-se obter

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t) &= \dot{\bar{\theta}}_{ref}(t) - \frac{1}{L_1} [D(\theta(L_1, t))\theta_z(L_1, t) - K(\theta(L_1, t))] \\ &+ \frac{1}{L_1} [D(\theta(0, t))\theta_z(0, t) - K(\theta(0, t))], \end{aligned} \quad (27)$$

que, utilizando-se as condições de contorno do tipo Neumann (16) e

$$K(\theta(L_1, t)) - D(\theta(L_1, t)) \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=L_1} = q(L_1, t), \quad (28)$$

pode ser reescrita como

$$\dot{\sigma}(t) = \dot{\bar{\theta}}_{ref}(t) + \frac{1}{L_1} [q(L_1, t) - q(0, t)]. \quad (29)$$

Então, expressa-se a condição de contorno (16) em função de sinal de controle em (15) e denomina-se a densidade de fluxo de água na profundidade  $L_1$  como a perturbação  $d_1(t) := -q(L_1, t)$  para obter

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t) &= \dot{\bar{\theta}}_{ref}(t) - \frac{1}{L_1} [u(t) + d_0(t) + d_1(t)] \\ &= \frac{1}{L_1} [d(t) - u(t)], \end{aligned} \quad (30)$$

na qual assume-se que o sinal de perturbação

$$d(t) := L_1 \dot{\bar{\theta}}_{ref}(t) - d_0(t) - d_1(t) \quad (31)$$

satisfaca a desigualdade (22).

Para garantir que o estado do sistema permaneça no modo deslizante, as seguintes condições de existência devem ser cumpridas (Utkin, 1978, eq. (1.9)):

$$\lim_{\sigma(t) \rightarrow 0^+} \dot{\sigma}(t) < 0, \quad \lim_{\sigma(t) \rightarrow 0^-} \dot{\sigma}(t) > 0. \quad (32)$$

Aplicando-se as equações (20) e (21) em (30), conclui-se que se  $\sigma > 0$ , então

$$u = u^+ = \bar{d}(t) + \delta \implies \dot{\sigma} \leq -\frac{\delta}{L_1} < 0, \quad (33)$$

se  $\sigma < 0$ , então

$$u = u^- = \underline{d}(t) - \delta \implies \dot{\sigma} \geq \frac{\delta}{L_1} > 0, \quad (34)$$

o que garante que as condições de existência do modo deslizante (32) sejam verificadas. Pode-se concluir também que a superfície de deslizamento  $\sigma = 0$  será atingida em algum tempo finito  $t_s \leq \frac{\delta}{L_1} |\sigma(0)| < +\infty$ .  $\square$

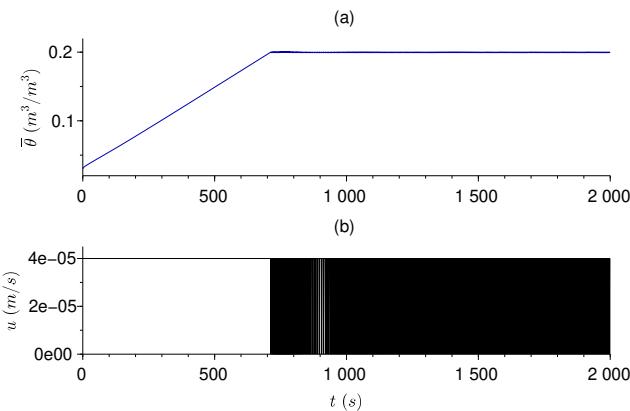


Figura 3. Controle por modo deslizante para regular a (a) média do conteúdo de água no solo e o (b) sinal de controle.

### 3.1 Simulação da Regulação da Umidade Média

Os resultados da simulação apresentados na Figura 3 ilustram a regulação da umidade média numa camada de solo com espessura  $L_1 = 0,1$  m. O regulador de umidade comuta a densidade do fluxo da água, ligado ( $u^+(t) = 4 \times 10^{-5} m/s$ ) ou desligado ( $u^-(t) = 0 m/s$ ), conforme a lei de controle (19).

Percebe-se na Figura 3(a) a excelente resposta transitória do controle por modo deslizante para a dinâmica não linear da irrigação do solo. A referência da umidade média  $\bar{\theta}_{ref} = 0,2 m^3/m^3$  é alcançada em tempo finito  $t_s \approx 700$ s, conforme previsto no Teorema 1, e sem haver ultrapassagem do valor final. Nenhum efeito da perturbação  $d_0(t) = +2 \times 10^{-7} m/s$  em (15), causada pela chuva, é observado na umidade média na Figura 3(a). A Figura 3(a) indica ainda a ausência de vibrações na umidade média (*chattering*), embora o sinal de controle comute em alta frequência durante a ocorrência do modo deslizante, como é perceptível na Figura 3(b).

## 4. CONTROLE DA UMIDADE EM UMA PROFUNDIDADE ESPECIFICADA

Substratos e solos muito úmidos seriam prejudiciais para o crescimento das raízes das plantas. As raízes precisam respirar e demandam oxigênio, o excesso de água literalmente as afogaria (Testa, 2019). Por conseguinte, é importante regular o conteúdo de água no solo em uma profundidade especificada  $L_2 \in \mathbb{R}^+$ . Para isto, define-se o sinal do erro:

$$e(t) := \theta_{ref}(t) - \theta(L_2, t), \quad (35)$$

no qual  $\theta_{ref}(t)$  é a umidade desejada e  $\theta(L_2, t)$  é a umidade medida por um sensor localizado como na Figura 1. Utiliza-se o esquema de controle em cascata descrito na Figura 4, no qual o controlador da umidade  $\theta(L_2)$  gera o sinal de referência  $\bar{\theta}_{ref}$  para o controlador SMC da umidade média. O controlador da malha interna é capaz de rejeitar perturbações ambientais na superfície do solo durante o modo deslizante.

Por outro lado, o controlador da malha externa deve ser robusto a grandes variações paramétricas dos coeficientes de condutividade e difusividade hidráulica do solo que são altamente não-lineares e dependem da umidade. Este

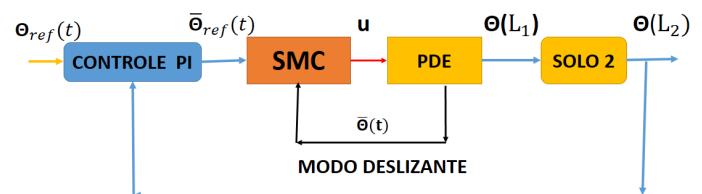


Figura 4. Diagrama do sistema de controle da umidade do solo na profundidade  $L_2$ .

fenômeno causa grande variação no atraso de propagação da umidade, como foi ilustrado na Seção 2.3. Para tanto, escolheu-se um controlador com ações proporcional e integral (PI) (Åström and Hägglund, 1995), pois pode ser ajustado para ser robusto a atrasos incertos e elimina erros residuais, desde que sua referência seja mantida constante. A lei PI com saída de controle  $\bar{\theta}_{ref}(t)$  é dada por

$$\bar{\theta}_{ref}(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt \right], \quad (36)$$

na qual  $K_p > 0$  é o ganho proporcional e  $T_i > 0$  é o tempo integral.

O controlador PI foi ajustado seguindo-se Basilio and Matos (2002), que utilizam parâmetros que podem ser medidos na resposta ao degrau do sistema a ser controlado, no caso a malha de controle da umidade média com sinal de entrada  $\bar{\theta}_{ref}(t)$  e sinal de saída  $\theta(L_2, t)$ . Esses parâmetros são  $A_0 > 0$  que é uma integral obtida do sinal de saída e  $A = \theta(L_2, +\infty) > 0$  que é o valor final do sinal de saída. Então, os parâmetros do controlador PI são dados por  $K_p = A/(4\bar{\theta}_{ref})$  e  $T_i = A_0/(2\bar{\theta}_{ref})$ .

### 4.1 Simulação do Controle de Umidade em Cascata

Os resultados da simulação do controle de umidade são apresentados na Figura 5 para  $L_2 = 0,50$  m. Foram usados os seguintes parâmetros no controlador PI:  $K_p = 0,20$  e  $T_i = 10^4$  s, que foram obtidos a partir da área  $A_0 = 4 \times 10^3$  s,  $A = 0,16 m^3/m^3$  da resposta ao degrau com amplitude  $\bar{\theta}_{ref} = 0,20 m^3/m^3$ . Esses parâmetros foram ajustados para obter uma resposta transitória não muito lenta e livre da ultrapassagem da umidade pela referência desejada  $\theta_{ref} = 0,20 m^3/m^3$ , como pode ser visto na Figura 5(a).

No sinal de controle apresentado na Figura 5(d) percebe-se que o chaveamento em alta frequência ocorre desde o início, o que indica a ocorrência do modo deslizante. Nota-se que a umidade média na Figura 5(c) segue a sua referência, Figura 5(b), que é gerada pelo controlador PI. Na Figura 5(a) percebe-se o atraso da infiltração da água no solo, que retarda a convergência da umidade para o valor de referência  $\theta_{ref} = 0,2 m^3/m^3$ .

A estabilidade do sistema de controle foi verificada também em outras simulações realizadas para diversos valores da umidade de referência, embora os transitórios sejam diferentes por causa da não-linearidade da dinâmica da infiltração.

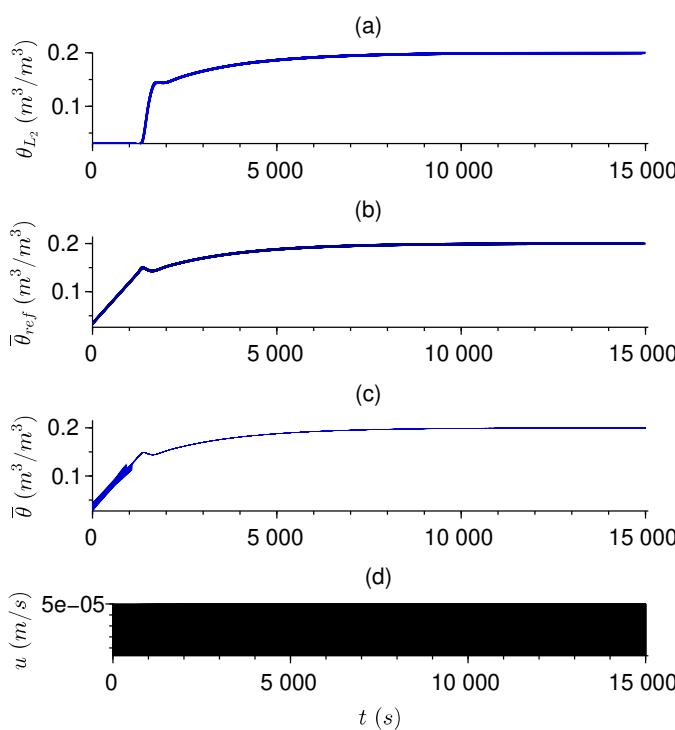


Figura 5. Controle da (a) umidade na profundidade especificada  $L_2 = 0,50\text{ m}$ , (b) sinal de saída do controlador PI, (c) umidade média próxima da superfície e o (d) sinal de controle.

## 5. CONCLUSÃO

Foi proposta a conexão de um controlador PI em cascata com o SMC, a fim de se obter o bom desempenho da irrigação automática no caso em que o sensor e o atuador são não colocados, ou seja, o sensor de umidade é enterrado na profundidade onde se deseja regular a umidade, longe da superfície do solo na qual a água é aspergida.

Os resultados de simulações indicam o bom desempenho dos controladores e a rejeição de distúrbios de entrada, tais como a chuva ou evaporação da água, graças ao modo deslizante. Entretanto, isto demanda atuadores com chaveamento rápido, que poderia ser realizado por válvulas solenoides e bombas de água com motores elétricos.

A EDP não-linear de Richards é o modelo dinâmico adotado para o movimento da água em meios porosos não saturados. As não-linearidades das funções de condutividade e difusividade hidráulicas desempenham papéis importantes na determinação do desempenho do controle. Cumpre ressaltar que o uso de EDPs não-lineares é outra contribuição em relação a (Molina and Cunha, 2019), que considerava apenas EDPs lineares, incapazes de representar fielmente a dinâmica da água no solo com variações de umidade extremas. Para que a EDP seja unidimensional, a água deve ser uniformemente aspergida sobre o solo.

As estratégias SMC propostas também poderiam ser aplicadas a outras EDPs parabólicas lineares ou não-lineares.

Preditores poderiam ser usados para melhorar o transitório do controle não colocado, entretanto, seria mais complexo do que o controle PI.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter sido meu guia nestes tempos de pandemia COVID-19, e a equipe de trabalho do PEL/UERJ.

## REFERÊNCIAS

- Assouline, S. (2013). Infiltration into soils: Conceptual approaches and solutions. *Water Resources Research*, 49(4), 1755–1772.
- Åström, K.J. and Hägglund, T. (1995). *PID controllers: theory, design, and tuning*, volume 2. Instrument society of America Research Triangle Park, NC.
- Basilio, J.C. and Matos, S.R. (2002). Design of PI and PID controllers with transient performance specification. *IEEE Transactions on Education*, 45(4), 364–370.
- Coron, J.M. (2007). *Control and nonlinearity*. 136. American Mathematical Soc.
- Edwards, C., Colet, E.F., Fridman, L., Colet, E.F., and Fridman, L.M. (2006). *Advances in variable structure and sliding mode control*, volume 334. Springer.
- Gardner, W. (1922). Israelsen, O. w., edlefsen, ne, and clyde, hs, "the capillary potential function and its relation to irrigation practice". *Phys. Rev.*, 20(2), 196.
- Hayek, M. (2016). An exact explicit solution for one-dimensional, transient, nonlinear richards' equation for modeling infiltration with special hydraulic functions. *Journal of Hydrology*, 535, 662–670.
- Hillel, D. (1998). *Environmental soil physics: Fundamentals, applications, and environmental considerations*. Academic Press, London.
- Krstic, M. and Smyshlyaev, A. (2008). *Boundary control of PDEs: A course on backstepping designs*. SIAM.
- Molina, N.I.C. and Cunha, J.P.V. (2019). Non-collocated sliding mode control of partial differential equations for soil irrigation. *Journal of Process Control*, 73, 1–8.
- Mualem, Y. (1978). Hydraulic conductivity of unsaturated porous media: Generalized macroscopic approach. *Water Resources Research*, 14(2), 325–334.
- Ribeiro, L. (2013). El agua en las civilizaciones inca e pré-incas mito, ciencia y tecnología. In 8.º Congresso Ibérico de Gestão e Planeamento da Água, 530–539.
- Richards, L.A. (1931). Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics*, 1(5), 318–333.
- Tarquino, P.F.R. (2018). *Resolución de la ecuación de Richards unidimensional por el método de volúmenes finitos*. B.S. thesis, Universidad Central del Ecuador.
- Testa, G.H. (2019). *Automatização de estufas para cultivo controlado utilizando redes mesh*. B.S. thesis, Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
- Utkin, V.I. (1978). *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*. MIR Publishers, Moscow.
- Van Genuchten, M.T. (1980). A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal*, 44(5), 892–898.
- Villar, J.L.H., García, J.O., and Hiyo, S.Y.M. (2020). Diseño y construcción de un sistema automatizado de control de bombas de agua en un cultivo hidropónico en el entorno arduino, unsch-ayacucho. *Revista ECIPerú*, 17(2), 67–73.
- Wadood, S.A. (2012). Sliding mode control of crowd dynamics. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 21(3), 1008–1015.